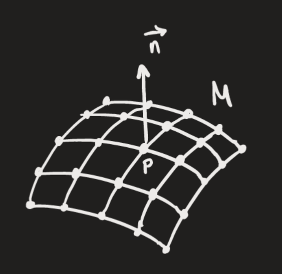


$P = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n)\}$

Para cada $p \in P$:

$N = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_k, y_k, z_k)\} \leftarrow$ Vecindario de p

- $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$
- $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$
- $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$

PCA

$$\Sigma_N = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Matriz de covarianza del vecindario } N$$

$$S_{xy} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \leftarrow \text{Covarianza muestral}$$

$$\Sigma_N v = \lambda v$$

$$|\Sigma_N - \lambda I| = 0 \Rightarrow \text{Encontrar autovalores } \lambda_1, \lambda_2 \text{ y } \lambda_3$$

$$(\Sigma_N - \lambda I) v = 0 \Rightarrow \text{Encontrar autovectores } v_1, v_2 \text{ y } v_3$$

$v_1, v_2, v_3 \longleftarrow$ Ordenados de mayor a menor en función de sus autovalores λ_1, λ_2 y λ_3

$\vec{n} = v_3 \leftarrow$ Vector normal en el punto p

$\left.\begin{array}{l} \vec{e_1} = v_1 \\ \vec{e_2} = v_2 \end{array}\right\}$ Vectores tangentes, linealmente independientes en el punto p.

Base del espacio tangente $T_pM = \{e_1, e_2\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big|_p\right\}$

T_pM es el espacio vectorial que contiene a todos los vectores (contravectores) tangentes a la superficie en el punto p.

T_p^*M es el espacio cotangente (espacio dual de T_pM), que contiene todos los covectores (aplicaciones lineales) que transforman a los vectores de T_pM.

TM es el fibrado tangente que contiene a todos los espacios tangentes de la variedad. $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$ (unión disjunta)

$$g_{\mu\nu}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big|_p \right\rangle = \begin{pmatrix} g_{\mu\mu} & g_{\mu\nu} \\ g_{\nu\mu} & g_{\nu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix} \longleftarrow \text{Tensor métrico en el punto } p$$

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \underbrace{g^{\lambda\sigma}}_{\text{Suma respecto de } \lambda} \left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right) \longleftarrow \text{Símbolos de Christoffel}$$

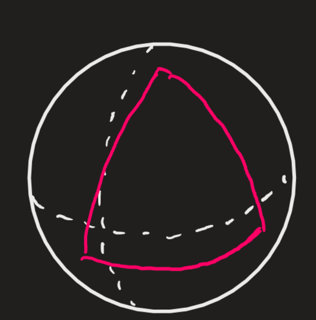
$g^{\sigma\lambda}$ es la inversa de $g_{\mu\nu}$

Si $X = \{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$:

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu} = \lim_{\Delta x^\alpha \to 0} \frac{g_{\mu\nu}(p + \Delta x^\alpha x^\alpha) - g_{\mu\nu}(p)}{\Delta x^\alpha} \longleftarrow \text{Derivada parcial de } g_{\mu\nu} \text{ respecto de } x^\alpha$$

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \longleftarrow \text{Tensor de curvatura de Riemann}$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\alpha} R^\alpha_{\sigma\mu\nu} \longleftarrow \text{Forma covariante del tensor de curvatura.}$$



$\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ es una geodésica (curva que representa el camino más corto)

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu}(\gamma(t)) \frac{d\gamma^\mu}{dt}(t) \frac{d\gamma^\nu}{dt}(t)} \, dt$$

$L(\gamma)$ es la longitud de la curva γ.

Por tanto, podemos generalizar las derivadas de la siguiente manera:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \lim_{h \to 0} \frac{g_{\mu\nu}(p + he_\lambda) - g_{\mu\nu}(p)}{h} \approx \sum_j \Delta g_{\mu\nu} v^\alpha (e_\lambda)_\alpha$$

$$\partial_\lambda \Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \lim_{h \to 0} \frac{\Gamma^\sigma_{\mu\nu}(p + he_\lambda) - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}(p)}{h} \approx \sum_j \Delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} v^\alpha (e_\lambda)_\alpha$$

Entonces para calcular los símbolos de Christoffel podemos:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \underbrace{g^{\sigma\lambda}}_{\text{Suma sobre } \lambda} \left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right), \quad g^{\sigma\lambda} \text{ es la inversa de } g_{\mu\nu}$$

```
Para μ = 1 hasta μ = 2:
    Para ν = 1 hasta ν = 2:
        Para σ = 1 hasta σ = 2:

            suma = 0
            Para λ = 1 hasta λ = 2:
                suma += g^{σλ} (∂μ g_{νλ} + ∂ν g_{μλ} − ∂λ g_{μν})
            Γ^σ_{μν} = 1/2 suma
```

Donde $g^{\sigma\lambda} \equiv$ g_inv[σ, λ]

$\partial_\mu g_{\nu\lambda} \equiv$ g_derivatives[μ, ν, λ]

Si tenemos un campo escalar ϕ definido en la variedad M:

$\phi : M \to \mathbb{R}$, y $X = \{x^1, x^2, x^3\}$, entonces:

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \right) \Longrightarrow \nabla \phi_i \approx \sum_j \frac{\phi_j - \phi_i}{\|p_j - p_i\|} (p_j - p_i)$$

Y por tanto, el surface gradient no es más que la proyección ortográfica del gradiente en el plano tangente de un punto p:

$$\nabla_M \phi = \nabla \phi - \hat{n}(\nabla \phi \cdot \hat{n})$$

Y podríamos definir el Laplace-Beltrami de ϕ:

$$\Delta \phi = \mathrm{div}_M (\nabla_M \phi) \Longrightarrow \nabla \phi_i \approx \frac{1}{t} \sum_j \exp\left(-\frac{\|p_j - p_i\|^2}{4t}\right)(\phi_j - \phi_i)$$

se aproxima con el Heat kernel Laplacian (Belkin – Niyogi)

Como la derivada parcial no es más que una derivada direccional, podemos aproximar las derivadas ∂_μ y ∂_ν de la siguiente manera:

$$\partial_\mu \phi_i = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi_i = D_{e_1} \phi_i = \nabla \phi_i \cdot e_1$$

$$\partial_\nu \phi_i = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \phi_i = D_{e_2} \phi_i = \nabla \phi_i \cdot e_2$$

De forma similar podemos calcular las derivadas del tensor métrico y de los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \sum_j \frac{g_{\mu\nu}(p_j) - g_{\mu\nu}(p_i)}{\|p_j - p_i\|} (p_j - p_i) =$$

$$= \sum_j \underbrace{\Delta g_{\mu\nu} \cdot v^\alpha}_{\text{Producto tensorial}} \qquad \begin{cases} \Delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(p_j) - g_{\mu\nu}(p_i) \\ v^\alpha = \dfrac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|} \end{cases}$$

Γ se calcula igual que el gradiente $\nabla \phi_i$

$$\Delta g \otimes v = \begin{pmatrix} \Delta g_{\mu\mu} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} & \Delta g_{\mu\nu} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \\ \Delta g_{\nu\mu} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} & \Delta g_{\nu\nu} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu g_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\mu\nu} = D_{e_1} g_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(e_1)_\alpha$$

De forma que: $$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(e_1)_\alpha = \begin{pmatrix} \Delta g_{\mu\mu} (e_{1x}\ e_{1y}\ e_{1z}) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} & \Delta g_{\mu\nu} (e_{1x}\ e_{1y}\ e_{1z}) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \\ \Delta g_{\nu\mu} (e_{1x}\ e_{1y}\ e_{1z}) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} & \Delta g_{\nu\nu} (e_{1x}\ e_{1y}\ e_{1z}) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Por tanto, es equivalente a:

$$\partial_\mu g_{\mu\nu} = \sum_j \Delta g_{\mu\nu} \underbrace{v^\alpha (e_1)_\alpha}_{\text{Producto escalar}} \qquad \begin{cases} \Delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(p_j) - g_{\mu\nu}(p_i) \\ v^\alpha = \dfrac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|} \\ (e_1)^\alpha = (e_{1x}\ e_{1y}\ e_{1z}) \end{cases}$$

$$\partial_\nu g_{\mu\nu} = \sum_j \Delta g_{\mu\nu} v^\alpha (e_2)_\alpha$$

Con los símbolos de Christoffel podría igual:

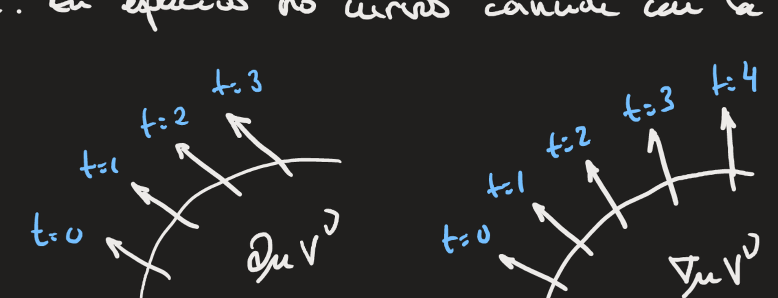
$$\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \sum_j \Delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} v^\alpha (e_1)_\alpha$$

$$\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \sum_j \Delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} v^\alpha (e_2)_\alpha$$

Si V^ν es un campo vectorial definido en el manifold M, tal que $V : M \to \mathbb{R}^n$:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} V^\lambda$$

$\nabla_\mu V^\nu$ es la derivada covariante; básicamente es la derivada teniendo en cuenta la geometría. En espacios no curvos coincide con la derivada parcial ya que $\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} = 0$.



Si desplazamos un vector por la superficie curva (variación del espacio respecto al tiempo), si tomamos la derivada parcial, la geometría (curvatura) no afecta a la variación, mientras que con la derivada covariante sí.