Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)

Práctica 6: Polinomio de Taylor

1. (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para la función $f(x) = \ln(x+1)^2$.
   (b) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para la función $g(x) = e^{x+2}$.
   (c) Desarrollar la función $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ en potencias de $x - 2$;
   (d) Desarrollar la función $g(x) = \sqrt{x}$ en potencias de $x - 1$ hasta orden 3.

2. (a) Hallar p el polinomio de Maclaurin de orden 2 y la expresión del resto para la función $f(x) = \sqrt{1 + x}$.
   (b) Estimar el error que se comete al aproximar $f(0,2)$ por $p(0,2)$.

3. Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del resto.

   (a) $f(x, y) = (x + y)^2$ en $(0, 0)$,
   (b) $f(x, y) = e^{x+y}$ en $(0, 0)$,
   (c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ en $(0, 0)$,
   (d) $f(x, y) = x + xy + 2y$ en $(1, 1)$,
   (e) $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos(y)$ en $(1, 0)$,
   (f) $f(x, y) = e^x \sin(xy)$ en $(2, \frac{\pi}{4})$,
   (g) $f(x, y) = \ln(1 + xy)$ en $(2, 3)$,
   (h) $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$ en $(2, 3, 4)$.

4. Sea $f(x, y) = 1 + e^{x+y-7x^2-9y^2}$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 y 2 de f en $P = (0, 0)$. Usando geogebra graficar f y superponer el gráfico de cada uno de los polinomios. Hacer lo mismo para $f(x, y) = \sin(xy)$ y para $f(x, y) = e^{x-y}$.

5. Utilizando el polinomio de Taylor de $f(x, y) = x^y$, aproximar $(0.95)^{2.01}$

   (a) con error menor que $1/200$.
   (b) con error menor que $1/5000$.

6. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xe^y$.

   (a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f centrado en $(1, 0)$.
   (b) Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0.98, 0.02)$. Estimar el error cometido.

7. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$.

   (a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f centrado en $(1, 1)$.

   (b) Usar el item anterior para aproximar $e^{\frac{4}{10}}$ usando que $\frac{4}{10} = (1+\frac{1}{10})^2 - (1-\frac{1}{10})^2$. Comprobar que el error cometido es menor que 0.3.

8. Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y).$$

9. Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x + 1, 2y - e^x)$ y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, tales que el polinomio de Taylor de grado 2 de $g \circ f$ en $(0, 0)$ es

$$p(x, y) = 4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy.$$

   Calcular $\nabla g(1, -1)$.

10. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que su polinomio de McLaurin de orden 2 es $p(x, y) = 3x + 2y - x^2 + y^2 - 2xy$. Sea $f(x, y) = \ln(1 + g(x, y))$. Calcular el polinomio de McLaurin de orden 2 de f.

11. Sea f de clase C^2 tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en el $P = (1, \frac{\pi}{2})$ es $p(x, y) = -\pi+4(y-\frac{\pi}{2})+2(x-1)^2+(x-1)(y-\frac{\pi}{2})$. Sea $g(x, y) = f(x, y)y^2+x\sin(y)$. Hallar $\frac{\partial g}{\partial v}(P)$ con $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, y luego hallar $Hg(P)$.

12. Mostrar que $ye^{xy} = 1$ define una función implícita $y = f(x)$ en un entorno del punto $x_0 = 0, y_0 = 1$. Hallar el polinomio de McLaurin de orden 2 de f.

13. Sea $f(x, y) = e^{xy}\cos(x + y)$.

   (a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en $(0, 0)$.

   (b) Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) + x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}.$$

14. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^3 tal que su polinomio de Taylor de orden 3 en $(1, 1)$ es $p(x, y) = 1 - 3x + x^2 + xy + y^2 - y^3$. Analizar la existencia de los siguientes límites:

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y) - (1, 1)\|}, \qquad \text{(b)} \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y) - (1, 1)\|^2}.$$