Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)

Práctica 5: Diferenciación - Aplicaciones - Parte 2

Derivadas direccionales

1. Calcular la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección del vector $\mathbf{v}$.

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $(1,2)$, $\mathbf{v} = (3,5)$,

   (b) $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0,0,0)$, $\mathbf{v} = (5,1,-2)$.

2. Calcular la deriva direccional de f en el punto dado en la dirección que indica el ángulo θ.

   (a) $f(x,y) = x^3y^4 + x^4y^3$, $(1,1)$, $\theta = \pi/6$,

   (b) $f(x,y) = ye^{-x}$, $(0,4)$, $\theta = 2\pi/3$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 4y\sqrt{x}$. Determinar la máxima razón de cambio de f en el punto $(4,1)$ y la dirección en la cual se presenta.

4. Encontrar las direcciones en las cuales la derivada direccional de $f(x,y) = ye^{-xy}$ en el punto $(0,2)$ vale 1.

5. Sea $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

   (a) Usando la definición de derivada direccional, mostrar que

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

   y que $\pm\mathbf{e}_1, \pm\mathbf{e}_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

   (b) Mostrar que f es continua en $(0,0)$. ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

6. Consideremos la siguiente función

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Probar que f admite derivadas direccionales en el origen para todo vector unitario $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Sin embargo, f tampoco es continua en el origen.

7. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Probar que en el origen f es continua, admite todas las derivadas direccionales, pero f no es diferenciable.

8. Supongamos que escalas una montaña cuya forma está dada por la ecuación $z = 1000 - 0,005x^2 - 0,01y^2$ donde x, y y z se dan en metros y estás en el punto $(60, 40, 966)$. El eje de las x positivas va hacia el este y el eje de las y positivas va hacia el norte.

   (a) Si caminas hacia el sur, ¿empezarás a ascender o descender? ¿Cuál es la razón de cambio en esa dirección?

   (b) ¿En qué dirección está la máxima pendiente? ¿Cuál es la razón de cambio en esa dirección?

Teorema de la función implícita

9. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - y^3$. Mostrar que sobre la curva de nivel $f(x,y) = 0$ podemos despejar y en función de x (i.e. $y = \phi(x)$) ¿Es ϕ de clase C^1 en un entorno del cero? ¿Puede aplicarse el teorema de la función implícita en el punto $(0,0)$?

10. Para cada una de los conjuntos de nivel S y los puntos $\mathbf{a}$ dados a continuación

    (a) $\mathcal{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = 1\}$ con $f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2$ y $\mathbf{a} = (2,0)$,

    (b) $\mathcal{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x,y) = 3\}$ con $g(x,y) = x^5 + y^2 + xy$ y $\mathbf{a} = (1,1)$,

    (c) $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon h(x,y,z) = 0\}$ con $h(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8$ y $\mathbf{a} = (0,0,2)$,

    resolver los siguientes ítems:

    i. Mostrar que $\mathbf{a} \in \mathcal{S}$.

    ii. Calcular las derivadas parciales de la función en el punto $\mathbf{a}$.

    iii. Determinar si en un entorno del punto $\mathbf{a}$, el conjunto de nivel resulta ser el gráfico de una función ϕ.

    iv. Calcular la derivada o las derivadas parciales, según corresponda, de cada una de las funciones ϕ que quedan definidas en el ítem anterior.

11. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como

    $$f(x,y,z) = x^3 - 2y^2 + z^2.$$

    (a) Demostrar que $f(x,y,z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y,z)$ en un entorno del punto $(1,1,1)$.

    (b) Encontrar $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1)$ y $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1)$.

Planos y rectas tangentes a superficies de $\mathbb{R}^3$ dadas de manera implícita

12. Para cada una de las siguientes superficies de $\mathbb{R}^3$ determinar las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la superficie en el punto indicado.

    (a) $2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10$, $(3, 3, 5)$,

    (b) $y = x^2 - z^2$, $(4, 7, 3)$,

    (c) $xy + yz + zx = 5$, $(1, 2, 1)$.

13. Demostrar que el elipsoide $3x^2+2y^2+z^2 = 9$ y la esfera $x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z+24 = 0$ son tangentes en el punto $(1, 1, 2)$ (es decir, que tienen el mismo plano tangente en ese punto).

14. Demostrar que toda recta normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ pasa por el centro de la esfera.