Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)

Práctica 4: Diferenciación - Aplicaciones - Parte 1

Derivada de una curva - Recta tangente

1. Para cada una de las curvas dadas a continuación

   (a) $\mathbf{r}(t) = (t-2, t^2+1)$, $-2 \leq t \leq 2$, $t = 1$,

   (b) $\mathbf{r}(t) = (\sin(t), 2\cos(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $t = \dfrac{\pi}{4}$.

   resolver los siguientes items:

   i. Graficar.

   ii. Calcular la derivada $\mathbf{r}'(t)$.

   iii. Para el valor de t dado, graficar el vector posición $\mathbf{r}(t)$ y el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$.

2. Para cada una de las siguientes curvas, hallar la ecuación paramétrica de la recta tangente en el punto dado. Graficar la curva y la recta tangente hallada.

   (a) $x = 1 + 2\sqrt{t}$, $y = -t$, $0 \leq t \leq 9$, $(3, -1)$,

   (b) $x = e^t$, $y = te^t$, $-2 \leq t \leq 3$, $(1, 0)$.

3. Para cada una de las siguientes curvas, encontrar el vector tangente unitario en el punto determinado por el valor de t indicado.

   (a) $\mathbf{r}(t) = (te^{-t}, \tan(t), t^2+t)$, $t = 0$,

   (b) $\mathbf{r}(t) = (t^3+3t, t^2+1, 3t+4)$, $t = 1$.

Derivadas parciales

4. Para cada una de las siguientes funciones, hallar las derivadas parciales f_x y f_y. Graficar f y, para el punto p indicado, ubicar $(p, f(p))$ y graficar $\nabla f(p)$.

   (a) $f(x,y) = x^2y^3$, $p = (2,1)$, (b) $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2y^2}$, $p = (1,1)$.

5. Calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones.

   (a) $f(x,y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$, (b) $f(x,y) = \sin(x)$,

   (c) $f(x,y) = x^2\sin^2(y)$, (d) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$,

   (e) $f(x,y,z) = ye^x + z$.

6. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = |x| + |y|$.
   (a) Graficarla en GeoGebra y, a partir de la observación del gráfico, conjeturar sobre la existencia o no de $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.
   (b) Justificar análiticamente las conjeturas hechas en el ítem anterior.

7. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones.
   (a) $f(x,y) = x^3y^5 + 2x^4y$, (b) $f(x,y) = \sin^2(x+y)$,
   (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, (d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$.

8. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

   (a) Graficarla en GeoGebra.
   (b) Hallar $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$.
   (c) Hallar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.
   (d) Demostrar que $f_{xy}(0,0) = -1$ y $f_{yx}(0,0) = 1$. ¿Contradice esto al Teorema de Clairaut-Schwarz? ¿Por qué? (Sugerencia: graficar en GeoGebra f_{xy} y f_{yx}).

Plano tangente

9. Para cada una de las siguientes superficies, estudiar la existencia del plano tangente en el punto dado. En caso de que exista, dar la ecuación.
   (a) $z = 3y^2 - 2x^2 + x$, $(2,-1,-3)$,
   (b) $z = \sqrt{xy}$, $(1,1,1)$,
   (c) $z = xe^{xy}$, $(2,0,2)$.

10. Graficar en GeoGebra la superficie $z = x^2+xy+3y^2$ y su plano tangente en $(1,1,5)$.

11. Estudiar la diferenciabilidad de las siguientes funciones en el punto dado.
    (a) $f(x,y) = 1 + x\ln(xy-5)$ en $(2,3)$,
    (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$ en $(0,0)$

12. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(2,5) = 6$, $f_x(2,5) = 1$ y $f_y(2,5) = -1$. Estimar el valor de $f(2.2, 4.9)$.

13. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen. En caso de que exista, dar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el origen.

(a) $f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}$,

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Regla de la cadena

14. Utilizar la regla de la cadena para calcular la derivada de la composición $f \circ \mathbf{r}$ en cada uno de los siguientes casos.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, $\mathbf{r}(t) = (\sin t, e^t)$,

(b) $f(x,y) = \cos(x + 4y)$, $\mathbf{r}(t) = (5t^4, 1/t)$,

(c) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $\mathbf{r}(t) = (\ln t, \cos t)$.

15. Si $z = f(x,y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$ y se sabe que

$$\begin{aligned} g(3) &= 2, \quad h(3) = 7, \\ g'(3) &= 5, \quad h'(3) = -4, \\ f_x(2,7) &= 6, \quad f_y(2,7) = -8. \end{aligned}$$

Determinar dz/dt cuando $t = 3$.

16. Utilizar la regla de la cadena para calcular $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$ en cada uno de los siguientes casos.

(a) $z = x^2 y^3$, $x = s\cos(t)$, $y = s\sin(t)$,

(b) $z = \sin(x)\cos(y)$, $x = st^2$, $y = s^2 t$,

(c) $z = e^{x+2y}$, $x = s/t$, $y = t/s$.

17. Utilizando un diagrama de árbol, escribir la regla de la cadena para las derivadas parciales indicadas. Suponer que todas las funciones son diferenciables.

(a) $z = f(x,y)$, $x = x(r,s,t)$, $y = y(r,s,t)$, $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}$,

(b) $w = f(x,y,z)$, $x = x(r,s)$, $y = y(r,s)$, $z = z(r,s)$, $\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial s}$.

18. Utilizar la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales indicadas en el punto dado en cada uno de los siguientes casos.

    (a) $z = x^4 + x^2y$, $x = s + 2t - u$, $y = stu^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ en $(s, t, u) = (4, 2, 1)$,

    (b) $w = xy + yz + zx$, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $z = r\theta$, $\dfrac{\partial w}{\partial r}$, $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ en $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$.

19. Sea $T(x, y)$ la temperatura (en grado celsius) en un punto (x, y). Un insecto se arrastra de tal modo que su posición después de t segundos está dada por $x = \sqrt{1+t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde x e y se miden en centímetros. La función temperatura satisface $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$. ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura del insecto en su trayectoria después de 3 segundos?

20. Sea $z = f(x - y)$ con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Demostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

21. Sean $z = f(x, y)$ con f una función C^2, $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$. Determinar $\partial^2 z/\partial r \partial s$ en función de las derivadas parciales de f.

22. Calcular la matriz diferencial $DF(x, y)$ para cada una de las siguientes funciones $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

    (a) $F(x, y) = (x^3y^5, 2x^4y)$

    (b) $F(x, y) = (\sin^2(x + y), e^{2x+y})$

23. Este ejercicio guiado propone incorporar una interpretación geométrica de la matriz diferencial DF para funciones $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

    Considerar la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$F(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (x(r, \theta), y(r, \theta))$$

    (a) Dibujar la región rectangular $R = \{(r, \theta) : 2 \le r \le 3, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{8}\}$ en el plano (r, θ) y dibujar la región transformada $F(R)$ en el plano (x, y). Sugerencia: transformar los puntos de los lados de la región rectangular R (notar que $F(R)$ no es un paralelogramo).

    (b) Calcular la matriz diferencial de $DF(r, \theta)$ para todo punto $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

    (c) Considerar la transformación lineal dada por la matriz $A = DF(2, \frac{\pi}{4})$ y los vectores $v_1 = (1, 0)$ y $v_2 = (0, \frac{\pi}{8})$. Llamamos $\tilde{R}$ al rectángulo generado por v_1 y v_2 en el plano (r, θ). Calcular $w_1 = Av_1$, $w_2 = Av_2$ y dibujar el paralelogramo generado por w_1 y w_2 en el plano (x, y). Esto es $A(\tilde{R})$.

    (d) Dibujar la región $F(2, \frac{\pi}{4}) + A(\tilde{R})$. Observar que la matriz diferencial da una aproximación lineal de la transformación F cerca del punto $(2, \frac{\pi}{4})$. Dibujar con GeoGebra.

(d) Implementar en GeoGebra usando sliders una versión general de este ejercicio para un rectángulo inicial arbitrario de la forma $R = \{(r, \theta) : 0 \leq r_0 \leq r \leq r_1, 0 \leq \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1\}$ en el plano (r, θ).

24. Sean $F(x, y) = (x^2+y, y^2-x)$, $G(x, y) = (y, -x)$. Calcular $D(G \circ F)_{(1,-1)}$ y mostrar que es igual al producto de las matrices $DG_{(0,0)}\ DF_{(1,-1)}$.

25. Si $f(x) = x + e^x$, mostrar que f es estrictamente creciente y calcular $(f^{-1})'(1)$.

26. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ biyectiva, de clase C^1 con inversa C^1. Sabiendo que $F(0, 0) = (1, 3)$, y que

$$DF_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

calcular $(DF^{-1})_{(1,3)}$, la matriz diferencial de la función inversa en $(1, 3)$.