

## Práctica 2: Curvas y superficies en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ - Funciones

---

Se sugiere complementar la resolución de los ejercicios de esta práctica con GeoGebra.

1. Graficar las siguientes curvas de  $\mathbb{R}^2$  dadas de forma paramétrica y decidir si son el gráfico de una función de la forma  $y = f(x)$ .

(a)  $x = 3 - 4t$ ,  $y = 2 - 3t$ ,

(b)  $x = 1 - t^2$ ,  $y = t - 2$ ,  $-2 \leq t \leq 2$ ,

(c)  $x = t^2 + t$ ,  $y = t^2 - t$ ,  $-2 \leq t \leq 2$ ,

(d)  $x = t^2$ ,  $y = t^3 - 4t$ ,  $-3 \leq t \leq 3$ .

2. En cada uno de los siguientes casos, describir de forma paramétrica la circunferencia de radio  $r$  y centro  $p$ .

(a)  $r = 2$ ,  $p = (0, 0)$ ,

(b)  $r = 1$ ,  $p = (1, 3)$ ,

(c)  $r = 3$ ,  $p = (0, 2)$ .

3. Graficar la región del plano que consiste en todos los puntos cuyas coordenadas polares verifican las siguientes condiciones.

(a)  $r \geq 1$ ,

(b)  $0 \leq r < 2$ ,  $\pi \leq \theta \leq 3\pi/2$ ,

(c)  $\pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6$ .

4. Graficar las curvas dadas por las siguientes ecuaciones en coordenadas polares.

(a)  $r = -2 \sin(\theta)$ , (b)  $r = 1 - \cos(\theta)$ .

5. (a) Graficar las siguientes curvas de  $\mathbb{R}^2$ .

i.  $x^2 + y^2 = 4$ ,

ii.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ,

iii.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ,

iv.  $x = y^2$ .

- (b) Para  $a, b \in \mathbb{R}$ , dar una descripción geométrica de las siguientes ecuaciones utilizando deslizadores en GeoGebra.

i.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,

ii.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,

iii.  $x = ay^2$ .

6. Graficar las siguientes superficies de  $\mathbb{R}^3$ .

(a)  $y = 2x + 1$ ,

(b)  $y = x^2$ ,

(c)  $x^2 + y^2 = 1$ ,

(d)  $4x^2 + y^2 = 4$ .

7. (a) Dibujar las curvas de nivel de  $z = -1, z = 0, z = 1, x = 0$  de las siguientes superficies. Luego utilizando trazas, graficar las superficies en  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{array}{lll} \text{i. } x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, & \text{ii. } z = x^2 + y^2, & \text{iii. } x = y^2 + 4z^2, \\ \text{iv. } z^2 = x^2 + y^2, & \text{v. } x^2 = y^2 + 4z^2, & \text{vi. } z = x^2 - y^2, \\ \text{vii. } x^2 + y^2 - z^2 = 1, & \text{viii. } -x^2 - y^2 + z^2 = 1, & \text{ix. } 4x^2 + 9y^2 + z = 0. \end{array}$$

- (b) Para  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , dar una descripción geométrica de las siguientes ecuaciones utilizando deslizadores en GeoGebra.

$$\begin{array}{lll} \text{i. } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, & \text{ii. } z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, & \text{iii. } z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \\ \text{iv. } z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, & \text{v. } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, & \text{vi. } -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{array}$$

8. Graficar la región de  $\mathbb{R}^3$  acotada por las superficies  $x^2 + y^2 = 1$  y  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  para  $1 \leq z \leq 2$ .

9. Hallar el dominio de cada una de las siguientes funciones.

$$\text{(a) } \mathbf{r}(t) = \left( \sqrt{4 - t^2}, 5t + 1, \ln(t + 1) \right), \quad \text{(b) } \mathbf{r}(t) = \left( 4t, \frac{3t}{t - 2}, e^t \right).$$

10. Graficar la curva imagen de las siguientes funciones.

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } \mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 1), & \text{(b) } \mathbf{r}(t) = (t, t^2, t - t^2), \\ \text{(c) } \mathbf{r}(t) = (t^2 + t, t^2 - t, (t^2 - t)^2). \end{array}$$

11. Hallar una función  $\mathbf{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya imagen describa los siguientes conjuntos.

- (a) el rectángulo de vértices  $(0, 2)$ ,  $(0, -2)$ ,  $(1, 2)$  y  $(1, -2)$ ,  
 (b) el triángulo de vértices  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(0, 1)$ .

12. (a) Graficar la curva intersección de las siguientes superficies.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } x^2 + y^2 = 4 \text{ y } z = xy, & \text{ii. } x^2 + y^2 = 1 \text{ y } y + z = 2, \\ \text{iii. } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y } z = 1 + y. \end{array}$$

- (b) Hallar una función  $\mathbf{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya imagen describa las curvas graficadas en el ítem anterior.

13. Sea  $\mathcal{C}$  la curva que se obtiene al intersecar las superficies:

$$(x - y)^2 + z^2 = 2 \quad \text{y} \quad z = x + y.$$

Dar una parametrización de  $\mathcal{C}$ .

14. Graficar el dominio de las siguientes funciones.

(a)  $f(x, y) = \sqrt{2x - y}$ ,

(b)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ ,

(c)  $f(x, y, z) = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$ .

15. Para cada una de las siguientes funciones, calcular dominio, graficar las curvas de nivel y usarlas para graficar la función.

(a)  $f(x, y) = 3y$ ,

(b)  $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ,

(c)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,

(d)  $f(x, y) = -x^2 - y^2$ , (e)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , (f)  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ .