La formula di Eulero

Una semplice dimostrazione

Luca Morelli

10 Ottobre 2022

Abstract:

Dalla matematica alla fisica una delle formule più importanti e affascinanti è indubbiamente la **formula di Eulero** che consente di rappresentare i numeri complessi in forma polare. Dalla trigonometria, all'ottica, alla meccanica quantistica fino all'analisi complessa, tutte queste fanno largo uso della formula di Eulero.

1 Intoduzione

1.1 La formula

Sia $\theta \in \mathbb{R}$ e $i \ : \ i^2 = -1$ allora vale che:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta \tag{1.1}$$

1.2 Le applicazioni

Indubbiamente il motivo più importante per l'uso di questa formula è la possibilità di rappresentare i numeri complessi in forma polare, infatti dato il numero complesso $z = x + iy$ possiamo definire il suo **modulo** $|z| = x^2 + y^2$ e con un po' di algebra si mostra che:

$$z = (\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2})|z|$$

dove i due termini $\frac{x}{x^2+y^2}$ e $\frac{y}{x^2+y^2}$ sono proprio il seno e il coseno in un triangolo rettangolo dove x e y sono i cateti. Diventa quindi naturale utilizzare la (1.1) ottenendo la rappresentazione polare di un numero complesso.

$$z = |z|e^{i\theta} \quad con \quad \theta = atan(y/x) \quad |z| = x^2 + y^2 \tag{1.2}$$

Dalla **forma polare** (1.2) è inoltre possibile procedere in senso opposto e rappresentare in forma complessa delle funzioni trigonometriche e sfruttare le regole delle potenze per semplificare molti conti.
Questo avviene per esempio con la **formula di de Moivre** che consente di calcolare molto facilmente per esempio $sin(nx)$ come combinazione di potenze di seni e coseni:

$$(cosx + isinx)^n = e^{in\theta} = cos(nx) + isin(nx)$$

Analogamente possiamo ottenere la formula di addizione del coseno:

$$\begin{aligned} cos(x+y) &= \mathfrak{Re}(cos(x+y)+isin(x+y)) = \mathfrak{Re}(e^{i(x+y)}) \\ &= \mathfrak{Re}(e^{ix}e^{iy}) = \mathfrak{Re}\{(cosx+isinx)(cosy+isiny)\} \\ &= \mathfrak{Re}(cosx\ cosy - sinx\ siny + icosx\ siny + isinx\ cosy) \\ &= cosx\ cosy - sinx\ siny \end{aligned}$$

Dove $\mathfrak{Re}(z) = x$ con $z = x + iy$, ossia è la **parte reale** di z.

2 La dimostrazione

Consideriamo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita in questo modo:

$$f(\theta) = \frac{cos\theta + isin\theta}{e^{i\theta}} \tag{2.1}$$

Risulta immediato che f è costante in quanto:

$$f'(\theta) = \frac{(icos\theta - sin\theta)e^{i\theta} - i(cos\theta + isin\theta)e^{i\theta}}{e^{2i\theta}} = 0$$

Calcoliamo quindi $f(0)$ che essendo costante è uguale a $f(\theta)$:

$$f(\theta) = f(0) = \frac{cos0 + isin0}{e^{i0}} = 1$$

da cui segue immediatamente la (1.1).