Un integrale complesso

Luca Morelli

20 Dicembre 2022

1 Introduzione

Si vuole calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+e^x)(1+e^{-x})} dx \tag{1.1}$$

2 Il calcolo

Osserviamo che l'integrando in (1.1) è pari per cui è possibile modificare il dominio di integrazione nel intervallo $[0, \infty)$. Inoltre possiamo effettuare la seguente sotituzione: $x = \log z$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+e^x)(1+e^{-x})} dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+e^x)(1+e^{-x})} dx = 2\int_{1}^{\infty} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^2} dz$$

Considerando ora un cammino di integrazione nel piano complesso composto da una circonferenza Γ congiunta con due segmenti posizionati uno appena al disotto e uno appena sopra l'asse reale che corrono nell'intervallo $[1, \infty)$, e facendo tendere il raggio di Γ ad infinito è possibile sfruttare il Teorema di Residui:

$$\begin{aligned} \int_{1}^{\infty} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^2} dz &= 2\pi i \sum_{poli} Res \frac{\log^2(z)}{(1+z)^2} + \int_{1}^{\infty} \frac{(\log(z)+2\pi i)^2}{(1+z)^2} dz \qquad (2.1) \\ &= 2\pi i \sum_{poli} Res \frac{\log^2(z)}{(1+z)^2} + \int_{1}^{\infty} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^2} dz + 4\pi i \int_{1}^{\infty} \frac{\log(z)}{(1+z)^2} dz - 4\pi^2 \int_{1}^{\infty} \frac{1}{(1+z)^2} dz \end{aligned}$$

Questa relazione però non consente di calcolare l'integrale desiderato infatti se proseguiamo a sviluppare il quadrato presente nel secondo integrale osserviamo che l'integrale desiderato si elide. Calcoliamo quindi il seguente integrale:

$$\begin{aligned} \int_{1}^{\infty} \frac{\log^3(z)}{(1+z)^2} dz &= 2\pi i \sum_{poli} Res \frac{\log^3(z)}{(1+z)^2} + \int_{1}^{\infty} \frac{(\log(z)+2\pi i)^3}{(1+z)^2} dz \qquad (2.2) \\ &= 2\pi i \sum_{poli} Res \frac{\log^3(z)}{(1+z)^2} + \int_{1}^{\infty} \frac{\log(z)^3}{(1+z)^2} dz + 6\pi i \int_{1}^{\infty} \frac{\log(z)^2}{(1+z)^2} dz + \\ &\quad - 12\pi^2 \int_{1}^{\infty} \frac{\log(z)}{(1+z)^2} dz - 8\pi^3 i \int_{1}^{\infty} \frac{1}{(1+z)^2} dz \end{aligned}$$

Per prima cosa valutiamo l'ultimo integrale che abbiamo trovato nelle (2.1) (2.2), procediamo con un semplice cambio di variabili:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx = \int_{2}^{\infty} \frac{1}{u^2} du = -\frac{2}{u}\bigg|_{2}^{\infty} = 1 \tag{2.3}$$

Dobbiamo quindi calcolare i residui integrali delle relazioni (2.1) (2.2), entrambe le funzioni di cui si devono calcolare i residui presentano un polo in $z = -1$. Osserviamo però che dalla definizione di residuo e dall'espressione della derivata n-esima di una funzione olomorfa si ha:

$$2\pi i \ Res \frac{f(z)}{(1+z)^2}\bigg|_{z_0} = \oint_\gamma \frac{f(z)}{(1+z)^2} dz = 2\pi i \ \frac{df}{dz}(z)\bigg|_{z=-1} \tag{2.4}$$

dove γ è una curva chiusa regolare che racchiude sia il punto z_0 che il punto $z = -1$.
Se $f(z) = \frac{\log^2(z)}{(1+z)^2}$ allora, considerando la presenza di due poli, si ha:

$$\sum_{poli} Res \frac{\log^2(z)}{(1+z)^2} = \frac{d}{dz} \log^2(z)\bigg|_{z=-1} = 2\frac{\log(z)}{z}\bigg|_{z=-1} = -2\pi i \tag{2.5}$$

Con analoghe considerazioni si ha per $f(z) = \frac{\log^3(z)}{(1+z)^2}$:

$$\sum_{poli} Res \frac{\log^3(z)}{(1+z)^2} = \frac{d}{dz} \log^3(z)\bigg|_{z=-1} = 3\frac{\log^2(z)}{z}\bigg|_{z=-1} = 3\pi^2 \tag{2.6}$$

Sostituendo nella (2.1) i risultati appena ottenuti (2.3) (2.5) ed elidendo i termini ripetuti abbiamo:

$$\int_1^\infty \frac{\log(z)}{(1+z)^2} dz = \pi i - \pi i = 0 \tag{2.7}$$

Possiamo quindi sostituire nella (2.2) i risultati della (2.3), (2.2) e (2.7) ottenendo:

$$\int_1^\infty \frac{\log(z)^2}{(1+z)^2} dz = \frac{4}{3}\pi^2 - \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} \tag{2.8}$$