

Il modello PRNR

Un modello matematico per la Rivoluzione Francese

Cristina Caprioglio, Luca Morelli

20 Dicembre 2022

Abstract:

Scrivere un Abstract.

Introduzione

Per questo progetto abbiamo cercato di modellizzare lo scoppio di una rivoluzione. Per farlo ci siamo serviti del modello multicompartimentale, che ci ha permesso di descrivere le possibili transizioni di stato delle persone del nostro sistema. In particolare, abbiamo diviso la popolazione iniziale tra poveri e ricchi: i primi potevano transire nello stato "Rivoluzionari" e i secondi in quello "Reazionari". Sia i rivoluzionari che i reazionari potevano tornare a far parte rispettivamente dei poveri e dei ricchi. Le transizioni sono descritte da diversi parametri spiegati nel dettaglio nel seguente paragrafo, ma entrambe dipendono dal numero di individui presenti nei vari compartimenti. Chiaramente il numero di persone per ogni settore varia con il tempo: nella parte di simulazione questa variazione è stata considerata discreta, mentre nella fase di integrazione continua. È bene tener presente che ogni individuo appartenente ad un settore, a parità di condizioni con altri suoi simili, ha la stessa probabilità di cambiare stato.

1 Il sistema e il modello

Come precedentemente detto, vogliamo studiare la dinamica di una popolazione composta da vari membri, in numero elevato, che differiscono l'uno dall'altro per il loro reddito. Queste differenze, sotto determinate condizioni, possono spingere gli individui appartenenti alla categoria più povera ad insorgere. Questa insurrezione può a sua volta portare alcuni tra i più abbienti a reprimerla con l'uso della forza.

Per modellizzare una popolazione eterogenea abbiamo deciso di suddividerla in due categorie, **Poveri** e **Nobili**, per le quali si considera un reddito medio caratteristico di ciascuna categoria. Ogni membro di questa popolazione può decidere, in base a vari fattori, di far uso della violenza per far valere le esigenze della propria categoria. Abbiamo considerato che ogni individuo può trovarsi o in uno stato di normalità o in uno stato eccitato: un membro della categoria dei Poveri nello stato **Normale** (N_P) può transire allo stato di **Rivoluzionario** (R), mentre un membro della categoria dei Nobili nello stato **Normale** (N_N) può transire allo stato di **Reazionario** (\bar{R}). All'interno della stessa categoria può avvenire anche la transizione inversa, come mostrato in figura (1).

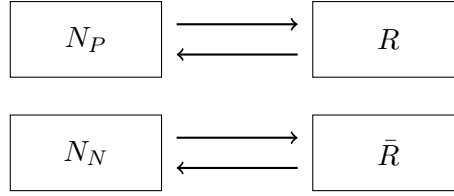


Figure 1: Schema a compartimenti delle categorie delle persone. Con le frecce sono evidenziate le transizioni di stato che un individuo può effettuare.

Per questa modellizzazione abbiamo deciso, come è consueto fare, di non considerare le possibili fluttuazioni del numero totale di individui dovuti alla morte e alla nascita di persone, inoltre abbiamo considerato che un individuo non possa transire dalla categoria di Povero a quella di Nobile. Questa scelta è giustificata dall'osservazione che, seppur possibili, tali transizioni in genere sono estremamente rare. Queste considerazioni ci hanno quindi permesso di identificare 3 vincoli da imporre al modello:

$$\frac{N_P(t) + R(t)}{N_P(0) + R(0) + N_N(0) + \bar{R}(0)} = F_P \quad \frac{N_N(t) + \bar{R}(t)}{N_P(0) + R(0) + N_N(0) + \bar{R}(0)} = F_N \quad F_P + F_N = 1 \quad (1.1)$$

dove F_P e F_N sono rispettivamente le frazioni di individui Poveri e Nobili sulla popolazione totale.

Dobbiamo ora identificare quali equazioni regolino la dinamica del sistema. Per fare ciò abbiamo ragionevolmente supposto che:

- un Povero possa transire allo stato di Rivoluzionario o di sua spontanea iniziativa (nata dalla sua condizione disagiata) oppure incontrando un rivoluzionario che lo convinca ad insorgere
- un Rivoluzionario, incontrando dei Reazionari, possa essere convinto a non perseguire più la sua causa ritornando allo stato Normale
- un Nobile, incontrando un rivoluzionario, possa in risposta decidere di diventare un Reazionario
- un Reazionario, vedendo diminuire il numero di Rivoluzionari (e quindi aumentare quello di Poveri allo stato normale), possa decidere di ritornare anch'esso allo stato normale

Se consideriamo un tempo Δt possiamo esprimere le variazioni del numero di ogni compartimento, tenendo conto delle precedenti considerazioni, con:

$$\begin{aligned} R(t + \Delta t) - R(t) &= \Gamma N_P(t) \frac{R(t)}{N_{tot}} \Delta t + \gamma N_P(t) \Delta t - \bar{\Gamma} R(t) \frac{\bar{R}(t)}{N_{tot}} \Delta t \\ \bar{R}(t + \Delta t) - \bar{R}(t) &= \alpha N_N(t) \frac{R(t)}{N_{tot}} \Delta t - \beta \bar{R}(t) \frac{N_P(t)}{N_{tot}} \Delta t \\ N_P(t + \Delta t) - N_P(t) &= -(R(t + \Delta t) - R(t)) \\ N_N(t + \Delta t) - N_N(t) &= -(\bar{R}(t + \Delta t) - \bar{R}(t)) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Γ é un parametro che indica la probabilità che un povero diventi rivoluzionario in seguito al contatto con i membri di quest'ultima categoria, mentre invece $\bar{\Gamma}$ indica la probabilità che un rivoluzionario, per via della presenza di reazionari, decida di abbandonare la propria causa e torni quindi allo stato "Normale". γ , diversamente dai primi due, riguarda la probabilità che un povero passi da "Normale" a rivoluzionario per volontà propria, senza influenze esterne. α e β sono i due parametri relativi alla variazione dei reazionari: il primo riguarda la probabilità che un nobile diventi reazionario per via dell'aumento dei rivoltosi, mentre il secondo che un reazionario torni "Normale" in seguito alla crescita del numero dei poveri in stato "Normale" (e conseguente diminuzione di rivoluzionari).

Prima di procedere nello studio del modello, al fine di semplificarlo, riscriviamo le variabili dividendole per N_{tot} , che indica la popolazione totale, ovvero la somma di tutti i poveri e di tutti i ricchi. In questo modo otteniamo il seguente set di espressioni:

$$\begin{aligned}
R'(t + \Delta t) - R'(t) &= \Gamma N'_P(t) R'(t) \Delta t + \gamma N'_P(t) \Delta t - \bar{\Gamma} R'(t) \bar{R}'(t) \Delta t \\
\bar{R}'(t + \Delta t) - \bar{R}'(t) &= \alpha N'_N(t) R'(t) \Delta t - \beta \bar{R}'(t) N'_P(t) \Delta t \\
N'_P(t + \Delta t) - N'_P(t) &= -(R'(t + \Delta t) - R'(t)) \\
N'_N(t + \Delta t) - N'_N(t) &= -(\bar{R}'(t + \Delta t) - \bar{R}'(t))
\end{aligned} \tag{1.3}$$

con

$$N'_P(t) = \frac{N_P(t)}{N_{tot}} \quad N'_N(t) = \frac{N_N(t)}{N_{tot}} \quad R'(t) = \frac{R(t)}{N_{tot}} \quad \bar{R}'(t) = \frac{\bar{R}(t)}{N_{tot}}$$

Per alleggerire la notazione, dato che da questo momento in poi useremo sempre le variabili riscalate, quest'ultime perderanno il simbolo ' davanti e verranno scritte normalmente.

All'interno della simulazione, visto che si calcolava la probabilità di ogni singolo individuo di compiere una transizione e non la variazione nel tempo dell'intero settore, tutti i parametri (con l'eccezione di γ) sono stati divisi per 8. Questo perchè, calcolando la probabilità che avvenga una transizione, se la prima è influenzata dalla presenza o meno di un membro appartenente ad una certa categoria, andrà moltiplicata per la probabilità di incontrarlo. Nel nostro caso, ogni persona poteva interagire solo con le 8 celle adiacenti, perciò abbiamo dovuto moltiplicare per $\frac{1}{8}$. **(NON SAREBBE MEGLIO METTERLO DOPO?)**

Per poter integrare il nostro modello abbiamo diviso ogni espressione per Δt e, considerando intervalli di tempo abbastanza piccoli, siamo potuti passare al continuo:

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{dt} &= \Gamma N_P(t) R(t) + \gamma N_P(t) - \bar{\Gamma} R(t) \bar{R}(t) \\
\frac{d\bar{R}}{dt} &= \alpha N_N(t) R(t) - \beta \bar{R}(t) N_P(t) \\
\frac{dN_P}{dt} &= -\frac{dR}{dt} \\
\frac{dN_N}{dt} &= -\frac{d\bar{R}}{dt}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Una volta ottenute queste equazioni differenziali abbiamo potuto integrarle numericamente.

2 Simulazione

Per svolgere la simulazione abbiamo utilizzato il modello dell'automa cellulare: in una griglia costituita da celle (nel nostro caso rappresentanti le persone), al tempo zero ognuna di esse si trova in uno degli stati possibili e poi, dopo un certo intervallo di tempo, varieranno contemporaneamente oppure no il proprio stato secondo le equazioni (1.3) e ciò si ripeterà fino alla fine della durata prestabilita. Il cambio di stato di una cella è dipendente solo dal proprio stato attuale e da quelli delle celle adiacenti. Proprio per questo motivo si è reso necessario rinormalizzare i parametri, come spiegato nel paragrafo precedente. Inoltre, per semplicità, la nostra griglia ha come dimensione di lato la radice quadrata del numero totale di individui, pertanto tutte le nostre simulazioni sono state eseguite con una popolazione totale pari ad un quadrato perfetto. Abbiamo eseguito diversi test con i seguenti parametri: **(INSERISCI GRAFICI E RAGIONE DEL PERCHÈ PROPRIO QUEI PARAMETRI)**

3 Integrazione

Il metodo utilizzato per l'integrazione del nostro modello é quello di Runge-Kutta al quarto ordine, il quale permette di approssimare una funzione conoscendone la derivata prima rispetto al tempo e le condizioni iniziali. Per una spiegazione dettagliata si veda l'appendice. Il nostro scopo era riuscire ad ottenere l'andamento di N_P , N_N , R e \bar{R} nel tempo partendo dalle equazioni (1.4).

Considerando come unità per il tempo i giorni, abbiamo usato come dimensione dell'intervallo $h = 0.01$ e scritto un codice che ci permettesse di visualizzare a schermo un grafico con l'andamento di rivoluzionari

e reazionari. Abbiamo quindi settato una durata e i valori dei parametri simili a quelli della simulazione e abbiamo ottenuto i seguenti grafici:

che abbiamo poi paragonato a quelli ottenuti tramite l'automa. Come si può vedere dalle figure, i risultati sono in accordo tra di loro (non so cosa dire senza immagini o altro)

4 Modulazione dei parametri

Al fine di rendere il modello più realistico abbiamo deciso di modificare i parametri relativi alla variazione dei rivoluzionari rendendoli dipendenti dal PIL, a cui abbiamo dato una variazione temporale descritta dalla funzione:

$$content... \quad (4.1)$$

e da un parametro detto "suscettibilità", dato dalla funzione:

$$sus(N_P, N_R, R, \bar{R}, t) = 0.1 \cdot \left(1 - \exp \left\{ -\frac{(N_P(t) + R(t))}{(N_N(t) + \bar{R}(t))} \right\} \right) \quad (4.2)$$

In particolare, i parametri sono diventati:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_0 \cdot \tanh \left(\frac{sus \cdot PIL}{300} \right) \\ \gamma &= \gamma_0 \cdot \tanh (sus \cdot PIL) \\ \bar{\Gamma} &= \bar{\Gamma}_0 \cdot \tanh \left(\frac{1}{sus \cdot PIL} \right) \end{aligned}$$

Di seguito i grafici ottenuti settando i valori iniziali dei parametri come quelli usati nelle sezioni precedenti:

Come si può notare.....

Appendice

Per l'integrazione numerica abbiamo usato il metodo Runge-Kutta al quarto ordine, detto così perchè l'errore accumulato totale è dell'ordine di $\mathcal{O}(h^4)$, mentre l'errore locale di troncamento è dell'ordine di $\mathcal{O}(h^5)$. In generale, dato il seguente problema:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (A1)$$

dove x è la funzione che si intende approssimare, scegliendo un intervallo $h > 0$ e definendo:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad t_{n+1} = t_n + h \quad (A2)$$

per $0 < n < t_f/h$, dove t_f é il tempo finale. Usando:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n); \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{k_1}{2}\right); \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{k_2}{2}\right); \\ k_4 &= f(t_n + h, x_n + hk_3); \end{aligned} \quad (A3)$$

Per ogni n , il valore successivo x_{n+1} da quello attuale x_n e dalla media pesata di quattro incrementi, i quali sono il prodotto dell'intervallo h e la pendenza data da f . In particolare:

- k_1 é la pendenza all'inizio dell'intervallo, usando solo x
- k_2 é quella a metà intervallo, usando x e k_1
- k_3 è di nuovo a metà, ma usando x e k_2
- k_4 é quella alla fine, usando x e k_3

Nella media pesata, si è dato un peso maggiore a k_2 e k_3 .