Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

TITOLO TESI

Relatore:
Prof. Paolo Albano

Presentata da:
Luca Morelli

Anno Accademico 2022/2023

Abstract:

Riassunto breve del documento da creare dove si sintetizzano tutti i punti trattati in maniera tale da rendere più immediata la selezione del documento da parte di un sventurato lettore.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Nella seconda metà del diciannovesimo secolo la fisica, nata con la meccanica di Newton, era riuscita a trovare un'esaustiva spiegazione dei fenomeni elettromagnetici tramite le equazioni di Maxwell. Queste due teorie descrivevano brillantemente i loro rispettivi ambiti ma risultarono incompatibili. Proprio per questo motivo i fisici dell'epoca dovettero rivalutare i principi alla base delle leggi della natura. L'incompatibilità trovò una soluzione nel 1905 con la Relatività Ristretta di Einstein. Ripercorreremo ora i passaggi che portarono a questa teoria.

1.1 La meccanica e le trasformazioni di Galileo

La meccanica classica, in tutte le sue possibili formulazioni, ha come fondamento una serie di osservazioni sperimentali che vengono utilizzate come principi da cui dedurre le leggi del moto.

Il primo fatto sperimentale che viene assunto è che lo spazio sia tridimensionale, rispetti la geometria euclidea mentre il tempo sia ad una sola dimensione e che siano entrambi assoluti isotropi ed omogenei. Sulla base di queste assunzioni si può quindi scegliere un punto dello spazio-tempo come origine di un sistema di coordinate o di riferimento, ossia uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ che ha come vettore nullo il punto scelto. Osserviamo che il punto in questione è arbitrario, come lo è la direzione degli assi, poichè spazio e tempo sono isotropi ed omogenei.

Il secondo fatto sperimentale prende il nome di Principio di Relatività Galileiano e consiste nell'assunzione che esistano una serie di sistemi di riferimento detti inerziali, caratterizzati dalla proprietà di essere reciprocamente in moto rettilineo uniforme, in cui le leggi della natura in ogni istante assumono la stessa forma.

Infine si assume che le posizioni e le velocità dei punti di un sistema ad un tempo iniziale determinino in maniera univoca l'evoluzione del sistema secondo la legge:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \tag{1.1.1}$$

dove m è detta massa inerziale e $\vec{F}$ è una funzione caratteristica del sistema detta forza.

Vogliamo quindi identificare quali applicazioni $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ ci consentono di cambiare sistema di riferimento inerziale, ossia quali trasformazioni non variano le leggi della natura. Queste applicazioni si chiamano Trasformazioni di Galileo ed è immediato dalle ipotesi sperimentali concludere che queste sono costituite dalle composizioni di tre famiglie di applicazioni:

- una generica traslazione spazio temporale dell'origine, ammissibile grazie alla proprietà di omogeneità dello spazio e del tempo:
$$\varphi_{\vec{r},s}(\vec{x},t) = (\vec{x} + \vec{r}, t + s) \tag{1.1.2}$$
- una generica rotazione degli assi, ammissibile grazie alla proprietà di isotropia dello spazio e del tempo:
$$\varphi_G(\vec{x},t) = (G\vec{x},t) \qquad G \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : G^{-1} = G^t \tag{1.1.3}$$
- una traslazione di moto rettilineo uniforme, ammissibile grazie alle proprietà dei sistemi di riferimento inerziali:
$$\varphi_{\vec{v}}(\vec{x},t) = (\vec{x} + \vec{v}t, t) \tag{1.1.4}$$

Quest'ultima tipologia di trasformazione è la più importante dal punto di vista fisico ed è quella che viene comunemente studiata per caratterizzare le trasformazioni di sistemi inerziali. Consideriamo quindi un sistema K, con coordinate $(\vec{x},t)$ e un sistema k, con coordinate $(\vec{\xi},\tau)$, in moto a velocità $\vec{v}$ rispetto a K, scriveremo allora la (1.1.4) come:
$$\vec{\xi} = \vec{x} - \vec{v}t \qquad \tau = t \tag{1.1.5}$$

Per determinare l'invarianza di un legge fisica rispetto a queste trasformazioni è necessario studiare come si trasformino gli operatori di differenziazione con la (1.1.5). Se vogliamo derivare una $f(\vec{x},t)$, dalla regola di Leibniz, abbiamo:
$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial x_i}$$
$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{\partial t}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

osservando dalla (1.1.5) che $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 1$, che $\frac{\partial t}{\partial \xi_i} = 0$, che $\frac{\partial x_i}{\partial t} = v_i$ e che $\frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} = \delta_{ij}$, dove δ_{ij} è una delta di Kronecker, otteniamo le trasformazioni degli operatori di differenziazione che stavamo cercando:
$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.1.6}$$

1.2 L'elettromagnetismo e le equazioni di Maxwell

Per interpretare i fenomeni elettromagnetici, anche in questo caso, è necessario introdurre una serie di osservazioni sperimentali: in primo luogo esiste una proprietà della materia detta carica elettrica che consente ai corpi di interagire con due campi vettoriali: il campo Elettrico $\vec{E}$ e il campo Magnetico $\vec{B}$.
Un corpo puntiforme di carica q interagendo con questi subisce un forza data da:

$$\vec{F} = q(\vec{E}(\vec{x},t) + \dot{\vec{x}} \wedge \vec{B}(\vec{x},t)) \tag{1.2.1}$$

In secondo luogo gli esperimenti mostrarono che questi due campi rispettano una serie di equazioni dette Equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

dove ρ è la densità di carica volumetrica, $\vec{J}$ è la densità di corrente superficiale e ϵ_0, μ_0 sono due costanti del vuoto.

Il risultato più importante di questa teoria sono indubbiamente le onde elettromagnetiche: è infatti facile ottenere dalle Equazioni di Maxwell (1.2.2), calcolando il rotore di ambo i membri delle ultime due

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

e supponendo assenza di cariche per cui $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$, due equazioni che descrivono onde di campo Elettrico e Magnetico nel vuoto:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{1.2.3}$$

Queste onde si propagano con una velocità $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.99795 \ 10^8 \ \frac{m}{s}$, indipendentemente dal sistema di riferimento e che corrisponde con precisione ai valori sperimentalmente misurati della velocità della luce.

Bibliografia