ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

TITOLO TESI

Relatore:

Prof. Paolo Albano

Presentata da:

Luca Morelli

Anno Accademico 2022/2023

Abstract:

Riassunto breve del documento da creare dove si sintetizzano tutti i punti trattati in maniera tale da rendere più immediata la selezione del documento da parte di un sventurato lettore.

Indice

Introduzione

Capitolo 1

Fatti di Fisica Classica

Nella seconda metà del diciannovesimo secolo la fisica era costituita fondamentalmente dalla meccanica, dalla termodinamica e dall'elettromagnetismo.
La meccanica, fondata da Newton e Galileo, descriveva il moto dei corpi e di fatto fungeva da modello per tutta la fisica.
L'elettromagnetismo invece, in seguito a numerosi esperimenti, aveva trovato una completa spiegazione nelle Equazioni di Maxwell.
Poichè la nascita della Teoria della Relatività Speciale è strettamente connessa a queste due branche della fisica è necessario illustrare brevemente i loro fondamenti.

1.1 La meccanica e le trasformazioni di Galileo

La meccanica classica, in tutte le sue possibili formulazioni, ha come fondamento una serie di osservazioni sperimentali che vengono utilizzate come principi da cui dedurre le leggi del moto.

Il primo fatto sperimentale che viene assunto è che lo spazio sia tridimensionale, isotropo, omogeneo e che rispetti la geometria euclidea mentre il tempo sia ad una sola dimensione. Inoltre si assume che le distanze spaziali e il tempo siano assoluti, ossia che ogni osservatore concordi sulla misura di queste.
Sulla base di queste assunzioni si può quindi scegliere un punto dello spazio-tempo come origine di un sistema di riferimento, ossia uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ che ha come vettore nullo il punto scelto. Da questo vengono scelte tre direzioni spaziali arbitrarie lungo cui sono orientati tre assi cartesiani, identificabili con la base di $\mathbb{R}^3$, e dal corrispondente punto temporale si inizia a misurare il tempo. Si osservi che tali scelte sono arbitrarie, come lo è la direzione degli assi corrispondenti ai vettori della base, questo poiché spazio e tempo sono isotropi ed omogenei.

Il secondo fatto sperimentale prende il nome di Principio di Relatività Galileiano e consiste nell'assunzione che esistano una serie di sistemi di riferimento detti inerziali, caratterizzati dalla proprietà di essere reciprocamente in moto rettilineo uniforme, in cui le leggi della natura in ogni istante assumono la stessa forma.

Infine si assume che, in un riferimento inerziale, le posizioni e le velocità dei punti di un sistema ad un tempo iniziale ne determinino in maniera univoca l'evoluzione secondo la legge:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \tag{1.1.1}$$

dove m è detta massa inerziale e $\vec{F}$ è una funzione caratteristica del sistema detta forza.

Si vuole quindi identificare quali applicazioni $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ consentono di cambiare sistema di riferimento inerziale, ossia quali trasformazioni non variano le leggi della natura. Queste applicazioni si chiamano Trasformazioni di Galileo e dalle evidenze sperimentali si conclude che queste sono costituite dalle composizioni di tre famiglie di applicazioni:

- una generica traslazione spazio temporale dell'origine, dedotta dalla proprietà di omogeneità dello spazio e del tempo:

$$\varphi_{\vec{r},s}(\vec{x}, t) = (\vec{x} + \vec{r}, t + s) \tag{1.1.2}$$

- una generica rotazione degli assi spaziali, dovuta alla proprietà di isotropia dello spazio:

$$\varphi_G(\vec{x}, t) = (G\vec{x}, t) \qquad G \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) : G^{-1} = G^t \tag{1.1.3}$$

- una traslazione di moto rettilineo uniforme, ammissibile grazie alle proprietà dei sistemi di riferimento inerziali:

$$\varphi_{\vec{v}}(\vec{x}, t) = (\vec{x} + \vec{v}t, t) \tag{1.1.4}$$

Quest'ultima tipologia di trasformazione è quella che viene comunemente studiata per caratterizzare le trasformazioni di sistemi inerziali. Si consideri quindi un sistema K, con coordinate $(\vec{x}, t)$ e un sistema K', con coordinate $(\vec{x'}, t')$, in moto a velocità $\vec{V}$ rispetto a K, si scriverà allora la (1.1.4) come:

$$\vec{x'} = \vec{x} - \vec{V}t \qquad t' = t \tag{1.1.5}$$

Si noti che questa trasformazione, essendo lineare, non muta la forma del vettore $\ddot{\vec{x}}$, infatti:

$$\frac{d^2}{dt'^2}(\vec{x'}) = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{x} - \vec{V}t) = \ddot{\vec{x}} + \frac{d}{dt}(\vec{V}) = \ddot{\vec{x}}$$

questo fatto, assieme al Principio di Relatività Galileiano applicato alla Legge di Newton (1.1.1), impongono che le forze esercitate su di un punto e misurate in due sistemi inerziali differenti debbano essere le medesime.

Analogamente a quanto appena fatto si possono ricavare le trasformazioni per la velocità di un punto:

$$\frac{d}{dt'}(\vec{x'}) = \frac{d}{dt}(\vec{x} - \vec{V}t) = \dot{\vec{x}} + \vec{V} \tag{1.1.6}$$

Si osserva che generale le Trasformazioni di Galileo compongono le velocità per somma algebrica.

Per determinare l'invarianza di un legge fisica rispetto alle trasformazioni (1.1.5) può essere necessario studiare come si trasformino gli operatori di differenziazione. Se si vuole derivare una $f(\vec{x}, t)$, dalla regola di Leibniz, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x_i}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{\partial t}{\partial x_i'}\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial x_i'}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

osservando dalla (1.1.5) che $\frac{\partial t}{\partial t'} = 1$, che $\frac{\partial t}{\partial x_i'} = 0$, che $\frac{\partial x_i}{\partial t} = V_i$ e che $\frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} = \delta_{ij}$, dove δ_{ij} è una delta di Kronecker, si ottengono le trasformazioni degli operatori di differenziazione desiderate:

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.1.7}$$

Dalla (1.1.7) si deduce che tutti gli operatori che comprendono solamente derivate rispetto alle derivate spaziali sono lasciati inalterati dalle Trasformazioni di Galileo, così che per esempio $\vec{\nabla}' = \vec{\nabla}$.

1.2 L'elettromagnetismo e le equazioni di Maxwell

Per interpretare i fenomeni elettromagnetici, anche in questo caso, è necessario introdurre una serie di osservazioni sperimentali: in primo luogo esiste una proprietà della materia detta carica elettrica, che non dipende dal sistema di riferimento in cui è misurata, che consente ai corpi di interagire con due campi vettoriali: il campo Elettrico $\vec{E}$ e il campo Magnetico $\vec{B}$.
Un corpo puntiforme di carica q interagendo con questi subisce un forza data da:

$$\vec{F} = q(\vec{E}(\vec{x}, t) + \dot{\vec{x}} \wedge \vec{B}(\vec{x}, t)) \tag{1.2.1}$$

In secondo luogo gli esperimenti mostrarono che questi due campi rispettano una serie di equazioni dette Equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad\qquad & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad & \vec{\nabla}\wedge\vec{B} &= \mu_0\vec{J} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

dove ρ è la densità di carica volumetrica, $\vec{J}$ è la densità di corrente superficiale e ϵ_0, μ_0 sono due costanti del vuoto.

Dalle Equazioni di Maxwell (1.2.2) segue che le cariche sono sorgenti del campo Elettrico mentre le correnti lo sono per il campo Magnetico.

Inoltre si può ottenere, calcolando il rotore di ambo i membri delle ultime due

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \wedge \vec{B} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

e supponendo assenza di cariche per cui $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$, due equazioni che descrivono onde di campo Elettrico e Magnetico nel vuoto:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{1.2.3}$$

Queste onde si propagano con una velocità $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.99795\ 10^8\ \frac{m}{s}$, che corrisponde con precisione ai valori sperimentalmente misurati della velocità della luce. Sulla base della teoria ondulatoria classica è però necessario identificare un mezzo nel quale queste onde possano propagarsi e rispetto al quale la loro velocità di propagazione deve essere intesa. Per questo motivo alla fine dell'ottocento venne ipotizzata l'esistenza di tale mezzo detto Etere Luminifero.

Capitolo 2

L'articolo del 1905

La Meccanica Newtoniana e l'Elettromagnetismo di Maxwell si rivelarono a gli occhi dei fisici dell'ottocento incompatibili fra loro, poichè le Equazioni di Maxwell non risultarono invarianti per le trasformazioni di Galileo. Proprio per questo motivo i fisici dell'epoca dovettero rivalutare i principi alla base delle leggi della natura fino a quando l'incompatibilità trovò una soluzione nel 1905 con la Relatività Ristretta di Einstein. Si ripercorreranno ora i passi che Einstein stesso indicò nel suo articolo del 1905 [1].

2.1 La non invarianza delle Equazioni di Maxwell

Si considerino due sistemi di riferimento K e K', inerziali e reciprocamente in moto a velocità $\vec{V}$, in ogni sistema si misureranno rispettivamente $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{E'}$, $\vec{B'}$.
Il Principio di Relatività Galileiana impone che questi due campi, nei loro sistemi di riferimento, rispettino le Equazioni di Maxwell (1.2.2). Inoltre, siccome la forza (1.2.1) deve essere la medesima in tutti i sistemi di riferimento inerziali, considerando una carica q in moto con velocità $\vec{v}$ in K e $\vec{V}+\vec{v}$ in K', deve valere:

$$\begin{aligned} \vec{F'} = \vec{F} \quad &\Rightarrow \quad \vec{E'} + \vec{v} \wedge \vec{B'} = \vec{E} + (\vec{V} + \vec{v}) \wedge \vec{B} \\ &\Rightarrow \quad \vec{E'} + \vec{v} \wedge (\vec{B'} - \vec{B}) = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B'} \end{aligned}$$

Così facendo si possono ottenere le trasformazioni dei capi Elettrici e Magnetici tra sistemi inerziali. Queste però possono dipendere esclusivamente dalle proprietà dei due sistemi di riferimento considerati e nella fattispecie dalla loro velocità reciproca, per questo motivo il termine contenente $\vec{v}$, ossia la velocità della carica nel sistema K, deve annullarsi, per cui le trasformazioni risultano:

$$\begin{cases} \vec{E'}(\vec{x'}, t) = \vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{V} \wedge \vec{B}(\vec{x}, t) \\ \vec{B'}(\vec{x'}, t) = \vec{B}(\vec{x}, t) \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Bisogna ora studiare come si trasformino le grandezze generatici dei campi: ρ e $\vec{J}$. Se si considera una volume ΔV, in cui è presente una carica Δq, allora la densità di carica è definita come:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

Siccome le lunghezze sono assunte essere assolute devono esserlo pure i volumi ed, essendo la carica non dipendente dal sistema di riferimento, si conclude che pure la densità di carica non lo è. Per quanto riguarda la densità di corrente superficiale, definita come $\vec{J} = \rho\vec{v}$, è sufficiente applicare le trasformazioni delle velocità tra due sistemi in moto reciproco a velocità $\vec{V}$ per ottenere:

$$\vec{J'} = \vec{J} - \rho\vec{V} \tag{2.1.2}$$

I risultati appena ottenuti consentono di determinare l'invarianza delle Equazioni di Maxwell per le Trasformazioni di Galileo.

Studiando la prima Equazione di Maxwell in K' e considerandola valida in K, se si trasformano E' in E e analogamente per gli operatori di differenziazione secondo la (1.1.7), si ottiene una quantità che è nulla se questa equazione è valida in K':

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' \cdot \vec{E'} - \frac{\rho}{\epsilon_0} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &= \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}\right) - \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \end{aligned}$$

Il primo termine tra parentesi è identicamente nullo poiché valgono le Equazioni di Maxwell in K mentre l'ultimo termine non è sempre nullo, nella fattispecie in presenza di campi elettrici variabili nel tempo, questo implica che quindi la prima Equazione di Maxwell non è invariante per le Trasformazioni di Galileo.

Se si studia la seconda con lo stesso procedimento si scopre che questa invece è invariante:

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{B'} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Analogamente per la terza equazione:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' \wedge \vec{E'} + \frac{\partial \vec{B'}}{\partial t'} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{E'} + \frac{\partial \vec{B'}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{B'} \\ &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \\ &= \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) + \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{B} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = 0 \end{aligned}$$

infatti il termine tra parentesi è identicamente nullo poiché in K vale la terza Equazione di Maxwell e gli addendi restanti si annullano se sviluppati tramite le regole di differenziazione ricordando che $\vec{V}$ è costante:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{B} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = -(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = 0$$

L'ultima Equazione di Maxwell è invece non invariante infatti sempre con il medesimo procedimento si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&\vec{\nabla}' \wedge \vec{B}' - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} - \mu_0 \vec{J}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}' - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}' - \mu_0\vec{J}' \\
&= \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0 \vec{V} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})(\vec{E} + \vec{V}\wedge\vec{B}) - \mu_0\vec{J} + \mu_0\vec{V}\rho \\
&= \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0\vec{J}\right) - \mu_0\epsilon_0 \vec{V} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})(\vec{E} + \vec{V}\wedge\vec{B}) + \mu_0\vec{V}\rho \\
&= -\mu_0\epsilon_0\vec{V} \wedge (-\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) - \mu_0\epsilon_0(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})(\vec{E} + \vec{V}\wedge\vec{B}) + \mu_0\vec{V}\rho \\
&= -\mu_0\epsilon_0(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})(\vec{V}\wedge\vec{B}) + \mu_0\vec{V}\rho
\end{aligned}
$$

che non è nullo in generale con le assunzioni fin qui fatte.

Si è quindi giunti alla conclusione che la teoria di Maxwell non è conciliabile con la meccanica di Newton e viceversa.

2.2 I postulati di Einstein

Per giungere ad una formulazione coerente della dinamica dei corpi carichi Einstein, nel suo articolo del 1905 [1], propose di modificare gli assunti alla base della meccanica classica per prediligiere il modello suggerito dall'elettromagnetismo di Maxwell. Infatti all'epoca erano noti alcuni risultati sperimentali che giocavano a sfavore della concezione classica della meccanica, primo fra tutti l'esperimento di Michelson e Morley che avrebbe dovuto consentire di misurare la velocità della Terra rispetto all'Etere Luminifero, detta vento d'etere. L'esperimento ebbe un'esito inaspettato, infatti non fu possibile misurare alcun vento d'etere portando i fisici a tre possibili spiegazioni: o l'Etere si muove assieme alla Terra, o l'apparato sperimentale si contrae lungo la direzione del moto terrestre oppure non esiste alcun Etere e la luce si propaga alla medesima velocità in ogni direzione e per ogni osservatore.

Einstein pose a fondamento della sua teoria due postulati:

- Il Principio di Relatività: basato sull'assunzione che esistano una serie di sistemi di riferimento detti Inerziali, reciprocamente in moto rettilineo uniforme, in cui le leggi della fisica sono identicamente valide.

- Il Principio di costanza della velocità della luce: il quale asserisce che la luce nello spazio vuoto si propaghi sempre con velocità determinata ed identica per ogni osservatore inerziale.

Il primo chiaramente si rifà al Principio di Relatività Galileiana mentre il secondo è una diretta conseguenza dell'esperimento di Michelson e Morley il cui risultato viene quindi spiegato senza la necessità dell'introduzione dell'Etere e di un sistema di riferimento privilegiato ad esso associato.
Inoltre si continua ad intendere spazio e tempo come due enti omogenei e isotropi.

Nel suo articolo Einstein propose, dopo aver enunciato i postulati, un'esperimento mentale che consente di mostrare come questi siano in diretto conflitto con le assunzioni classiche dell'assolutezza del tempo e delle lunghezze. Si considerino due orologi reciprocamente a riposo posizionati in due punti detti A e B. Einstein osservò che ogni orologio è in grado di misurare intervalli temporali solamente per eventi che avvengono nello stesso punto in cui ognuno è posizionato, poiché è ora necessario tener conto della velocità finita di propagazione dell'informazione, in questo caso la luce.
Einstein osservò che il secondo postulato consente di sincronizzare gli orologi così che sia possibile confrontare i tempi misurati in A e in B. In primo luogo si ipotizzi di far partire all'istante $t_A = 0$, misurato dal primo orologio, un fascio di luce che viaggia da A e giunge in B quando l'orologio posizionato in tale punto segna un tempo t_B. In B il fascio è riflesso e fa ritorno in A quando il relativo orologio segna un tempo t_A. Poiché per il Principio di costanza della velocità della luce il fascio luminoso deve propagarsi in ogni direzione con la stessa velcicità e la distanza tra i due orologi è fissata e costante allora il tempo impiegato dalla luce per andare da A a B e vice versa deve essere il medesimo. Si conclude quindi che i due orologi sono sincronizzati solamente se vale:

$$2t_B = t_A \tag{2.2.1}$$

Chiaramente se l'orologio nel punto A si è rivelato sincrono con quello nel punto B, tramite la procedura appena descritta, è chiaro che è altrettanto vero che quello posto in B è sincrono con quello posto in A e che se si considera un orologio posto in un terzo punto C che risulta sincrono con quello posto in B allora questo terzo orologio è sincrono con quello nel punto A.
Così facendo è possibile assegnare un immaginario orologio ad ogni punto dello spazio in maniera tale che siano tutti sincroni tra loro e sia possibile determinare quando due eventi lontani fra loro siano simultanei.

Si consideri ora un regolo di lunghezza l in un sistema di riferimento ad esso solidale detto K. Si considerino anche due orologi sincroni posti nelle due estremità del regolo dette A e B. In un sistema K' si osserva il regolo in moto a velocità v lungo la direzione in cui la parte lunga del regolo poggia. Sia detto A' il punto del sistema K' in cui si osserva l'emissione del fascio di luce dalla prima estremità del regolo, B' il punto, sempre in K', in cui si osserva la riflessione del fascio nel secondo estremo del regolo ed infine C' il punto in K' in cui si osserva il fascio fare ritorno alla prima estremità. In ognuno dei tre punti è presente un orologio sincronizzato con gli altri del sistema K' in maniera da osservare l'emissione del fascio ad un tempo $t'_{A'} = 0$. Se $t'_{B'}$ è l'istante in cui si osserva la riflessione in B', $t'_{C'}$ è l'istante in cui il fascio fa ritorno al primo estremo del regolo e l' è la lunghezza del regolo misurata nel sistema K' allora è possibile determinare in funzione di questi tempi le distanze tra i punti A', B' e C':

$$\Delta x'_{A'B'} = x'_{B'} - x'_{A'} = v(t'_{B'} - t'_{A'}) + l' = vt'_{B'} + l'$$
$$\Delta x'_{B'C'} = x'_{B'} - x'_{C'} = l' - v(t'_{C'} - t'_{B'})$$

Queste due distanze sono quelle percorse dal fascio luminoso rispettivamente in tempi $t'_{B'}$ e $t'_{C'} - t'_{B'}$, per cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta x'_{A'B'} = ct'_{B'} = vt'_{B'} + l' \quad &\Rightarrow \quad t'_{B'} = \frac{l'}{c-v} \\ \Delta x'_{B'C'} = c(t'_{C'} - t'_{B'}) = l' - v(t'_{C'} - t'_{B'}) \quad &\Rightarrow \quad t'_{C'} - t'_{B'} = \frac{l'}{c+v} \end{aligned}$$

Questa semplice osservazione consente di concludere che i postulati enunciati da Einstein non ammettono la possibilità di assumere tempi assoluti: infatti l'osservatore in K' osserva che il fascio di luce impiega più tempo per giungere al secondo estremo di quanto ne trascorre tra la riflessione e il suo ritorno al primo estremo, mentre invece l'osservatore in K, solidale con il regolo, osserva tempi identici per questi due tragitti. Una volta sviluppata matematicamente questa nuova teoria della relatività si osserverà che in maniera analoga pure le lunghezze non possono più essere considerate assolute.

Appendice A

Sulla linearità delle trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz sono una famiglia di trasformazioni affini, ossia composte da una generica traslazione in quattro dimensioni e un'applicazione lineare. Questa loro proprietà è deducibile dai postulati di Einstein e solitamente, nella maggior parte delle trattazioni della teoria della Relatività, è data come proprietà ovvia. Nelle seguenti pagine è presentata la dimostrazione di tale proprietà seguendo la dimostrazione riportata da Fock nel suo manuale [2].

A.1 Prerequisiti matematici

In primo luogo è necessario dimostrare due Lemmi che si rivelano utili anche per altri aspetti della teoria della Relatività.

Lemma 1. *Siano $v, u \in \mathbb{R}^n$, $<,>$ sia il prodotto scalare euclideo e siano definite $f_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tale che $f_u(v) = < u, v >$, e $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma quadratica tale che $q(v) = < v, Av >$, con $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica. Se, fissato $\bar{v}$ tale che $f_u(\bar{v}) = 0$ implica che $q(\bar{v}) = 0$, allora $\exists \psi \in \mathbb{R}^n$ tale che $q(v) = f_u(v) < \psi, v > \forall v \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Si osservi che è possibile decomporre v in una componente ortogonale ad u ed una parallela:

$$v = v^{\parallel} + v^{\perp} = \frac{u \ < u, v >}{\|u\|^2} + v - \frac{u \ < u, v >}{\|u\|^2} + \tag{A.1.1}$$

si esprima quindi $q(v)$ secondo questa decomposizione:

$$\begin{aligned} q(v) &= < v^{\parallel} + v^{\perp}, A(v^{\parallel} + v^{\perp}) > \\ &= < v^{\parallel}, Av^{\parallel} > +2 < v^{\perp}, Av^{\parallel} > + < v^{\perp}, Av^{\perp} > \end{aligned}$$

il termine $< v^{\perp}, Av^{\perp} >$ è per definizione $q(v^{\perp})$ e poichè per costruzione di $v^{\perp}$ si ha $f_u(v^{\perp}) = 0$, per le ipotesi $q(v^{\perp})$ deve annullarsi per cui:

$$q(v) =< v^{\parallel}, Av^{\parallel} > +2 < v^{\perp}, Av^{\parallel} >$$

sostituiendo le espressioni complete di $v^{\perp}$ e $v^{\parallel}$, dalla (A.1.1), si ha:

$$
\begin{aligned}
q(v) &=< u, Au > \left(\frac{< u, v >}{\|u\|^2}\right)^2 + 2 < v^{\perp}, Au > \frac{< u, v >}{\|u\|^2} \\
&= < u, Au > \left(\frac{< u, v >}{\|u\|^2}\right)^2 + 2 < v, Au > \frac{< u, v >}{\|u\|^2} - 2 < u, Au > \left(\frac{< u, v >}{\|u\|^2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Infine se si raccoglie un termine $< u, v >$ e si sommano i termini uguali si ottiene un'espressione per $q(v)$ composta da un termine lineare rispetto a v moltiplicato per il prodotto scalare $< u, v >$:

$$
q(v) =< u, v > \left[2\frac{< v, Au >}{\|u\|^2} - \frac{< u, Au >< u, v >}{\|u\|^4}\right] \qquad \forall v \in \mathbb{R}^4 \tag{A.1.2}
$$

□

Lemma 2. *Sia $v \in \mathbb{R}^4$, per comodità si scriverà $v = (v_0, v_1, v_2, v_3) = (v_0, \vec{v})$, tale che $\vec{v} \neq 0$. Sia quindi $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una forma quadratica tale che, se fissato $\bar{v}$ con $\bar{v}_0^2 - |\vec{\bar{v}}|^2 = 0$ implica $q(\bar{v}) = 0$, allora $\exists \lambda$ tale che $q(v) = \lambda(v_0^2 - |\vec{v}|^2)$ $\forall v \in \mathbb{R}^4$.*

Dimostrazione. Si osservi che $q(v)$ può essere scomposto, seguendo le regole del prodotto righe per colonne $q(v) = v^t A v$ (dove $A \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ simmetrica), nella seguente somma:

$$
q(v) = a_{00}v_0^2 + 2v_0(a_{01}v_1 + a_{02}v_2 + a_{03}v_3) + \hat{q}(\vec{v})
$$

dove $\hat{q}$ è ancora una forma quadratica in $\mathbb{R}^3$ che agisce su $\vec{v}$.
Si consideri ora un vettore $\bar{v} \in \mathbb{R}^4$ e tale che considerando v allora $\bar{v} = (-|\vec{v}|, \vec{v})$; per costruzione $(\bar{v}_0)^2 - |\vec{v}|^2 = |\vec{v}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0$, per cui per le ipotesi assunte si ha $q(\bar{v}) = 0$.
Essendo $q(\bar{v}) = 0$ si può scrivere:

$$
\begin{aligned}
q(v) &= q(v) - q(\bar{v}) \qquad \text{(A.1.3)} \\
&= a_{00}(v_0^2 - |\vec{v}|^2) + 2(v_0 - |\vec{v}|)(a_{01}v_1 + a_{02}v_2 + a_{03}v_3) + \hat{q}(\vec{v}) - \hat{q}(\vec{\bar{v}}) \\
&= a_{00}(v_0^2 - |\vec{v}|^2) + 2(v_0 - |\vec{v}|)(a_{01}v_1 + a_{02}v_2 + a_{03}v_3)
\end{aligned}
$$

inoltre calcolando la (A.1.3) per $\bar{v}$ si ha:

$$
q(\bar{v}) = -2|\vec{v}|(a_{01}v_1 + a_{02}v_2 + a_{03}v_3) = 0
$$

Per ipotesi $|\vec{v}| \neq 0$ per cui $a_{01} = a_{02} = a_{03} = 0$ che dimostra il lemma poichè implica:

$$
q(v) = a_{00}(v_0^2 - |\vec{v}|^2) \quad \forall v \in \mathbb{R}^4 \tag{A.1.4}
$$

□

A.2 La dimostrazione

Siano $x, x' \in \mathbb{R}^4$ due vettori dello spazio-tempo misurati in due sistemi di riferimento inerziali K e K', si vogliono determinare le proprietà dell'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che trasforma i vettori misurati in K negli stessi vettori misurati in K' e viceversa considerando validi il principio di Relatività e il principio di costanza della velocità della luce.

Per prima cosa si supporà che f sia sufficentemente regolare, almeno C^2, ed è necessario che sia invertibile poichè deve poter trasformare sia da K a K', sia viceversa: questa condizione è equivalente a richiedere che $\det J_f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^4$.

Si considerino ora $\xi, \gamma \in \mathbb{R}^4$, ripettivamente detti punto iniziale e velocità della parametrizzazione, che consentono di parametrizzare un moto rettilineo uniforme nel seguentue modo:

$$x = \xi + s\gamma \qquad s \in \mathbb{R}$$

infatti è possibile esplicitare la dipendenza di x_0 da s per ottenere la forma di un moto rettilineo uniforme, per questo motivo è necessario che $\gamma_0 \neq 0$.

$$s = \frac{x_0 - \xi_0}{\gamma_0} \qquad \Rightarrow \qquad x_i = \xi_i + \frac{x_0 - \xi_0}{\gamma_0}\gamma_i \qquad i = 1, 2, 3$$

Secondo il principio di relatività se si calcola $f(x) = x'$ è necessario che $x' = \xi' + s'\gamma'$ così che un moto rettilineo uniforme resti tale in ogni sistema di riferimento inerziale. Derivando $f(\xi + s\gamma)$ rispetto al parametro s' si ottiene:

$$\frac{dx'}{ds'} = \gamma' = J_f(\xi + s\gamma)\frac{ds}{ds'}\gamma$$

si consideri ora la i-esima componente di γ', dove $i = 0, 1, 2, 3$, e la si divida per γ_0:

$$\frac{\gamma'_i}{\gamma'_0} = \frac{\sum_{k=0}^{3} \partial_k f_i(\xi + s\gamma)\gamma_k}{\sum_{k=0}^{3} \partial_k f_0(\xi + s\gamma)\gamma_k}$$

dove $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$. Da ora in poi si utilizzerà la convenzione degli indici ripetuti di Einstein per cui $\sum_k x_k y_k = x_k y_k$.
Il rapporto $\frac{\gamma'_i}{\gamma'_0}$ è costante da cui segue immediatamente che $\frac{d}{ds}\frac{\gamma'_i}{\gamma'_0} = 0$ e quindi:

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial_k f_i(\xi + s\gamma)\gamma_k}{\partial_j f_0(\xi + s\gamma)\gamma_j}$$
$$= \frac{\left(\partial^2_{hn} f_i(\xi + s\gamma)\gamma_h\gamma_n\right)\left(\partial_k f_0(\xi + s\gamma)\gamma_k\right) - \left(\partial_k f_i(\xi + s\gamma)\gamma_k\right)\left(\partial^2_{hn} f_0(\xi + s\gamma)\gamma_h\gamma_n\right)}{\left(\partial_j f_0(\xi + s\gamma)\gamma_j\right)^2} = 0$$

che può annullarsi solo se si annulla il numeratore della frazione. Da questa osservazione e dal fatto che preso un $x \in \mathbb{R}^4$ esistono $\gamma \in \mathbb{R}^4$, $s \in \mathbb{R}$ tali che $x = \xi + s\gamma$ si ottiene:

$$\left(\partial^2_{hn} f_i(x)\gamma_h\gamma_n\right)\left(\partial_k f_0(x)\gamma_k\right) = \left(\partial_k f_i(x)\gamma_k\right)\left(\partial^2_{hn} f_0(x)\gamma_h\gamma_n\right) \qquad \forall x, \gamma \in \mathbb{R}^4 \quad i = 0, 1, 2, 3 \tag{A.2.1}$$

Siccome si è supposto inizialmente $\det J_f(x) \neq 0$ deve necessariamente esistere almeno un j tale che $\forall\gamma \in \mathbb{R}^4 \quad \partial_k f_j(x)\gamma_k \neq 0$, inoltre se si suppone di prendere $\bar{\gamma}$ tale che $\partial_k f_0(x)\bar{\gamma}_k = 0$ allora per la (A.2.1) necessariamente anche $\partial^2_{hn} f_0(x)\bar{\gamma}_h\bar{\gamma}_n = 0$.

Si applichi quindi il Lemma (1) il quale, in virtù del fatto che $\partial_k f_0(x)\bar{\gamma}_k = 0 \Rightarrow \partial^2_{hn} f_0(x)\bar{\gamma}_h\bar{\gamma}_n = 0$, consente di scrivere:

$$\partial^2_{hn} f_0(x)\gamma_h\gamma_n = <\psi(x),\gamma> \;(\partial_k f_0(x)\gamma_k) \qquad \forall x,\gamma \in \mathbb{R}^4 \quad i = 0,1,2,3$$

che inserito nella (A.2.1) risulta in:

$$\left(\partial^2_{hn} f_i(x)\gamma_h\gamma_n\right)(\partial_k f_0(x)\gamma_k) = (\partial_k f_i(x)\gamma_k) \;<\psi(x),\gamma>\; (\partial_k f_0(x)\bar{\gamma}_k)$$

infine siccome $\gamma'_0 \neq 0$ affinchè sia x' sia un moto rettilneo unfiorme, a maggior ragione la su espressione data dalla jacobiana di f soddisfa $(\partial_k f_0(x)\gamma_k\frac{ds}{ds'}) \neq 0$ ed è quindi possibile elidere da ambo i lati tale membro:

$$\partial^2_{hn} f_i(x)\gamma_h\gamma_n = (\partial_k f_i(x)\gamma_k) \;<\psi(x),\gamma> \qquad \forall x,\gamma \in \mathbb{R}^4 \quad i = 0,1,2,3 \tag{A.2.2}$$

Si osservi che $\partial^2_{hn} f_i(x)$ è una matrice simmetrica per il teorema di Schwarz per cui dall'espressione appena ottenuta si può scrivere:

$$\partial^2_{hk} f_i(x) = \frac{1}{2}\left(\partial_k f_i(x)\psi_h(x) + \partial_h f_i(x)\psi_k(x)\right) \tag{A.2.3}$$

Si consideri ora x e x' parametrizzazioni del moto di un raggio di luce, per il principio di costanza della velocità della luce se in K x è paramtrizzato sul cono di luce, lo stesso deve avvenire in K', il che è esprimibile matematicamente con le due condizioni:

$$\gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = 0$$
$$(\gamma'_0)^2 - [(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 + (\gamma'_3)^2] = 0$$

e poichè si può esprimere ogni componente di γ' tramite la jacobiana di f e γ, come già si è fatto calcolando $\frac{\gamma'_i}{\gamma'_0}$:

$$(\partial_k f_0(x)\gamma_k)^2 - \left[\sum_{i=1}^{3}(\partial_k f_i(x)\gamma_k)^2\right] = 0$$

Il principio di costanza della velocità della luce consente di utilizzare il lemma (2) poiché l'annullarsi di una forma quadratica implica l'annullarsi dell'altra, da cui si ha che:

$$(\partial_k f_0(x)\gamma_k)^2 - \left[\sum_{i=1}^{3}(\partial_k f_i(x)\gamma_k)^2\right] = \lambda(x)\left[\gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)\right]$$

Sia ora g_{ij} una matrice tale per cui $g_{00} = 1$, $g_{ii} = -1$ per $i = 1,2,3$ e $g_{ij} = 0$ se $i \neq j$, così facendo:

$$\lambda(x)\left[\gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)\right] = \lambda(x)g_{kh}\gamma_k\gamma_h = g_{ij}(\partial_k f_i(x)\gamma_k)(\partial_h f_j(x)\gamma_h)$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda(x)g_{hk} = g_{ij}(\partial_k f_i(x))(\partial_h f_j(x)) \tag{A.2.4}$$

Si derivi ora rispetto a x_s ad ambo i membri così da ottenere:

$$g_{hk}\partial_s\lambda = 2g_{ij}\partial^2_{ks}f_i(x)\partial_h f_j(x)$$

sostituendo la derivata seconda parziale tramite la (A.2.3) questa espressione è semplificabile e si ottiene:

$$g_{hk}\partial_s\lambda = g_{ij}\left[\partial_k f_i(x)\psi_s + \partial_s f_i(x)\psi_k\right]\partial_h f_j(x) \tag{A.2.5}$$

infine applicando nuovamente la (A.2.4) si possono sostituire tutti i prodotti di derivate parziali:

$$g_{hk}\partial_s\lambda = g_{kh}\lambda\psi_s + g_{sh}\lambda\psi_k$$

Si considerino queste due differenti casitiche:

- Siano $k = h \neq s$ allora:

$$g_{hk}\partial_s\lambda = g_{kh}\lambda\psi_s \Rightarrow \partial_s\lambda = \psi_s\lambda$$

- Siano $k = h = s$ allora:

$$g_{hk}\partial_s\lambda = 2g_{kh}\lambda\psi_s \Rightarrow \partial_s\lambda = 2\psi_s\lambda$$

Queste due relazioni appena ottenute implicano però che $\lambda\psi_i = 0$ per $i = 0, 1, 2, 3$, λ però non può annullarsi altrimenti la trasformazione f mapperebbe ogni moto in un moto a velocità luminare, il che viola il Principio di Relatività.
Segue quindi che $\psi_i = 0$ per $i = 0, 1, 2, 3$, per cui dalla (A.2.3) risulta:

$$\partial^2_{kh}f_i(x) = 0 \qquad \forall i, k, h = 0, 1, 2, 3 \forall x \quad \in \mathbb{R}^4 \tag{A.2.6}$$

per cui $f(x)$ può essere esclusivamente una trasfromazione affine.

Bibliografia

[1] A. Einstein. Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento. *Annalen der Physik*, 17:891–921, 1905. Traduzione di S. Antoci.

[2] V. Fock. *The Theory of Space, Time and Gravitation.* Pergamon, 1964.