

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Aspetti fisici e matematici della teoria della relatività ristretta

Relatore:
Prof. Paolo Albano

Presentata da:
Luca Morelli

Anno Accademico 2022/2023

Notazioni utilizzate

$\frac{d}{dt}$ è la derivata totale rispetto al tempo, indicata anche con un punto.

$\frac{\partial}{\partial x}$ è la derivata parziale rispetto a x .

Notazioni di grandezze tridimensionali

Il simbolo \vec{a} denota un vettore di \mathbb{R}^3 le cui cartesiane sono indicate con a_x, a_y, a_z .
 \vec{x} e \vec{v} i sono vettori posizione e velocità.

q_i e \dot{q}_i sono le coordinate e le velocità generalizzate.

\vec{p} e E sono la quantità di moto (o impulso) e l'energia.

Il campo elettrico e magnetico sono indicati con \vec{E} e \vec{B} .

Si è deciso di fare uso delle unità del Sistema Internazionale così i campi elettrico e magnetico dipendono dalle costanti dielettriche e magnetiche del vuoto ϵ_0 e μ_0 .

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ indica il prodotto scalare euclideo.

$\vec{a} \wedge \vec{b}$ indica il prodotto vettoriale.

$\vec{\nabla}$ è l'operatore $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

Notazioni di grandezze quadridimensionali

Con A^μ si indica un 4-vettore (quadrivettore) controvariante di \mathbb{R}^4 mentre con A_μ si intende un 4-vettore covariante.

Le componenti di A^μ sono date dal variare di μ (in generale di lettere greche) tra 0 e 3, si usa anche la notazione $A^\mu = (A^0, \vec{A})$.

Con lettere latine sono indicate le componenti spaziali di un 4-vettore, così che A^i indichi solamente A^1, A^2, A^3 .

Due indici ripetuti sottintendono una sommatoria $A^\mu B^\mu = \sum_{\mu=0} A^\mu B^\mu$.

$g_{\mu\nu}$ è la matrice metrica con segnatura $(+, -, -, -)$.

$|A^\mu|$ è la norma Minkowski data da: $A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$.

Abstract:

Riassunto breve del documento da creare dove si sintetizzano tutti i punti trattati in maniera tale da rendere più immediata la selezione del documento da parte di un sventurato lettore.

Indice

Notazioni utilizzate	ii
Abstract	iii
Introduzione	1
1 Fondamenti di relatività ristretta	3
1.1 La matematica dei sistemi di riferimento inerziali	3
1.1.1 I sistemi di riferimento inerziali	3
1.1.2 Trasformazioni di sistemi di riferimento inerziali	4
1.2 Fatti di Fisica Classica	7
1.2.1 La meccanica e le trasformazioni di Galilei	7
1.2.2 L'elettromagnetismo e le equazioni di Maxwell	9
1.3 L'articolo del 1905	10
1.3.1 La non invarianza delle equazioni di Maxwell	10
1.3.2 I postulati di Einstein	12
1.4 Le trasformazioni di Lorentz	15
1.4.1 Derivazione	15
1.4.2 Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi	18
1.4.3 Trasformazione delle velocità	20
1.5 Quadrivettori e spazio-tempo	21
1.6 Trasformazioni del campo elettromagnetico	23
2 Meccanica relativistica	25
2.1 Il principio di minima azione	25
2.2 La lagrangiana relativistica	27
2.2.1 La particella libera	27
2.2.2 Energia e momenti	28
2.3 Sistemi di più particelle	30
3 L'elettromagnetismo nella teoria della relatività	33
3.1 La lagrangiana di interazione	33
3.2 Il moto di particelle cariche in campi costanti	34
3.2.1 Campo elettrico costante	35
3.2.2 Campo magnetico costante	36
3.3 Il tensore elettromagnetico	37
3.3.1 Il 4-potenziale	37
3.3.2 Equazioni del moto 4-vettoriali	38
3.3.3 Invarianti del campo elettromagnetico	39
3.4 Trasformazioni di gauge	40
3.4.1 Gauge di Lorentz	42

3.4.2	Gauge di Coulomb	42
3.4.3	Gauge temporale	43
3.4.4	Gauge di radiazione	43
3.5	Elettromagnetismo in forma 4-vettoriale	44
3.5.1	4-corrente	44
3.5.2	Equazioni di Maxwell 4-vettoriali	45
A	Lemmi e teoremi per le trasformazioni di Lorentz	47
A.1	Risultati generali	47
A.2	Una dimostrazione della linearità delle trasformazioni di Lorentz	48

Introduzione

Capitolo 1

Fondamenti di relatività ristretta

1.1 La matematica dei sistemi di riferimento inerziali

I sistemi di riferimento costituiscono le fondamenta dello studio dei moti dei corpi sulle quali costruire leggi fisiche, è quindi opportuno descrivere matematicamente tali oggetti e le loro proprietà per poi addentrarsi nella teoria della relatività.

1.1.1 I sistemi di riferimento inerziali

Come ogni ambito della fisica la descrizione matematica dei sistemi di riferimento si basa su una serie di osservazioni sperimentali che vengono riformulate come assiomi.

Il primo fatto sperimentale che viene assunto è che lo spazio sia tridimensionale, isotropo e omogeneo (ossia che non esistano rispettivamente direzioni e punti privilegiati). Inoltre si assume che lo spazio sia modellizzabile con la geometria euclidea mentre il tempo sia ad una sola dimensione ed anch'esso isotropo ed omogeneo.

Sulla base di queste assunzioni si può scegliere un punto dello spazio-tempo come origine di uno spazio vettoriale $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. In altre parole si scelgono l'origine e tre direzioni spaziali arbitrarie (linearmente indipendenti) lungo le quali sono orientati tre assi cartesiani, identificabili con una base di \mathbb{R}^3 . Inoltre dall'istante corrispondente al punto spazio-temporale precedentemente scelto si inizia a misurare il tempo. Si osservi che tali scelte sono arbitrarie poiché spazio e tempo sono isotropi ed omogenei.

Per poter formulare delle leggi che descrivano la realtà fisica risulta necessario assumere l'esistenza di una serie di sistemi di riferimento, detti inerziali, in cui tali leggi siano valide indipendentemente dal sistema in cui sono descritte. Questi sistemi sono sperimentalmente caratterizzati dalla proprietà di essere reciprocamente in moto rettilineo uniforme, ossia il moto dell'origine di un sistema, rispetto ad un qualsiasi altro sistema di riferimento inerziale, deve essere nella forma:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}t \quad \vec{x}_0, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1.1)$$

dove \vec{x} rappresenta un punto nello spazio, t un istante di tempo e \vec{v} la velocità (costante) reciproca dei due sistemi di riferimento.

Una volta identificati questi particolari sistemi si può enunciare il principio di relatività: *in ogni sistema di riferimento inerziale tutte le leggi della fisica sono identiche.*

Invarianti VS Covarianti

1.1.2 Trasformazioni di sistemi di riferimento inerziali

Si vuole ora studiare quali siano le più generiche trasformazioni che consentono di ottenere la descrizione di un fenomeno in un sistema di riferimento inerziale K' conoscendo la descrizione di tale fenomeno in un primo riferimento inerziale K . In questo modo la generica trasformazione da K a K' sarà un'applicazione $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ invertibile; quest'ultima proprietà è necessaria poiché, come deve essere possibile passare da K a K' , deve essere possibile fare anche il contrario.

Per poter caratterizzare le proprietà di tale applicazione è ora necessario tradurre matematicamente la richiesta imposta dal principio di relatività. Si osservi che, per tale principio e per la definizione di sistema inerziale, è necessario che in seguito ad una trasformazione tutti i sistemi inerziali restino tali. In altre parole f deve trasformare tutte le rette in rette (nello spazio-tempo), questa condizione consente di utilizzare un teorema di geometria che consente di identificare la famiglia di queste trasformazioni (si seguirà la dimostrazione data in [3]).

Teorema 1. *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 1$) una funzione biettiva che trasforma tutte le rette in rette. Allora f è una trasformazione affine.*

Per procedere alla dimostrazione di questo teorema è utile iniziare dimostrandone un caso particolare, ossia il caso $n = 2$. Per questo caso particolare è però necessario dimostrare in primo luogo un risultato preliminare:

Proposizione 1. *Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un automorfismo di campo¹, allora $\varphi = \text{id}$.*

Dimostrazione. Si osservi che $\varphi(1) = 1$ (infatti se $x \neq 0$ allora $\varphi(x) = \varphi(1 \cdot x) = \varphi(1)\varphi(x)$). Inoltre $\varphi(0) = 0$ (infatti $\forall x \in \mathbb{R}$ vale $\varphi(0 \cdot x) = \varphi(0)\varphi(x) = \varphi(0)$, questa equazione implica $\varphi(0)(\varphi(x) - 1) = 0$ che risulta soddisfatta per ogni x solo se $\varphi(0)$ è identicamente nullo). Queste proprietà garantiscono che $\varphi(-1) = -1$ (infatti $\varphi(1 - 1) = \varphi(1) + \varphi(-1) = \varphi(0) = 0$).

Si prenda ora $n \in \mathbb{N}$, n è esprimibile come somma ripetuta n volte dell'unità, quindi:

$$\varphi(n) = \varphi(1 + 1 + \dots + 1) = n\varphi(1) = n.$$

Dalle proprietà precedentemente descritte è immediato che $\varphi(n) = n$ valga per ogni numero intero (poiché $\varphi(-n) = -1\varphi(n) = -n$).

Si consideri adesso $q \in \mathbb{Q}$, allora $\varphi(q) = q$. Infatti, se $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $xy = 1$, per quanto già detto, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = 1$ e quindi $\varphi(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\varphi(x)}$. Poiché ogni numero razionale è esprimibile come rapporto di numeri interi si ha che pure questi sono conservati da φ .

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, allora $\exists z \in \mathbb{R}$ tale che $z \neq 0$ e $y - x = z^2$. Utilizzando le proprietà supposte per ipotesi si ha quindi che:

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(y - x) = \varphi(z^2) = \varphi(z)^2 > 0.$$

Questo implica che φ conservi l'ordinamento di \mathbb{R} .

Sia ora $x \in \mathbb{R}$, poiché $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ e \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} allora se $x \neq \varphi(x)$ deve esistere un $q \in \mathbb{Q}$ compreso tra $\varphi(x)$ e x . Si supponga $\varphi(x) > x$, (in maniera del tutto analoga si può procedere supponendo $\varphi(x) < x$). Allora $\varphi(x) > q > x$. Poiché φ conserva l'ordinamento si ha l'assurdo: $\varphi(q) > \varphi(x)$ e al contempo $\varphi(x) > q = \varphi(q)$. Da questo ragionamento si deduce che $\varphi = \text{id}$. \square

¹ φ è un automorfismo di campo se presi $x, y \in \mathbb{R}$ valgono $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ e $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

Teorema 2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una funzione biettiva che trasforma le rette in rette. Allora f è una trasformazione affine.

Dimostrazione. Sia $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una trasformazione affine invertibile tale che $(A \circ f)(0, 0) = (0, 0)$, $(A \circ f)(1, 0) = (1, 0)$ e $(A \circ f)(0, 1) = (0, 1)$. Si osservi che anche $A \circ f$ trasforma rette in rette. Sia $g = A \circ f$.

Si mostrerà inizialmente che $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ vale la proprietà $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Si considerino i punti x, y e $(0, 0)$ non giacenti sulla stessa retta nel piano \mathbb{R}^2 . Si prendano due rette passanti rispettivamente per l'origine e x e l'origine e y e le rispettive rette parallele passanti per y nel primo caso e x nel secondo, come mostrato in Figura 1.1, queste ultime due rette si intersecheranno nel punto $x + y$, formando quindi un parallelogrammo. Per ipotesi queste quattro rette verranno mappate in altre quattro rette da g e, poiché

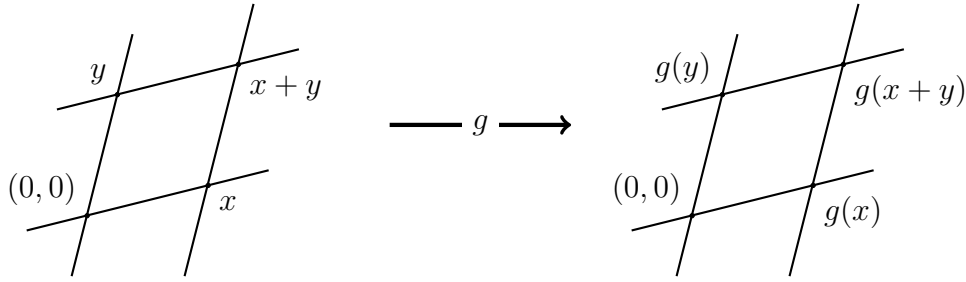


Figura 1.1: Rappresentazione grafica di come agisce la funzione g nel piano

questa funzione è biettiva, le immagini di rette parallele saranno a loro volta parallele (altrimenti nel punto di incidenza si perderebbe l'iniettività di g), mentre i punti di incidenza potranno essere mappati solamente in altri punti di incidenza (poiché questi appartenendo ognuno a due rette dovranno, per biettività, appartenere ad entrambe le immagini delle due rette nel codominio). Questo sta a significare che le quattro rette così ottenute formeranno un nuovo parallelogrammo di vertici $g(x)$, $g(y)$, $g(x + y)$ e $(0, 0)$, poiché per costruzione $g(0, 0) = (0, 0)$. La regola del parallelogramma garantisce quindi che $g(x) + g(y) = g(x + y)$.

Se invece i punti x, y e $(0, 0)$ giacciono sulla stessa retta è sufficiente prendere un punto $z \in \mathbb{R}^2$ che non giaccia sulla medesima retta dei punti precedenti. Si può quindi utilizzare quanto dimostrato nel caso precedente per ottenere:

$$g(x + y + z) = g(x + y) + g(z) = g(x) + g(y + z) = g(x) + g(y) + g(z)$$

da cui segue che $g(x + y) = g(x) + g(y)$ anche in questo caso.

Poiché per ipotesi g conserva rette in rette e per costruzione mappa l'origine nell'origine e i punti $(0, 1)$ e $(1, 0)$ in se stessi allora g deve trasformare gli assi x e y in se stessi. Si possono quindi considerare due applicazioni $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $g(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Si osservi che, per quanto dimostrato fino ad ora, $f(1, 1) = f(1, 0) + f(0, 1) = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$. Analogamente a come si è detto per gli assi x e y , anche la bisettrice del primo quadrante è quindi mappata in se stessa per cui, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\alpha(x) = \beta(x)$. Si proseguirà quindi studiando solo una di queste due funzioni (poiché quanto si dirà per una è valido anche per l'altra).

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e si consideri una retta passante per l'origine.

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } y = ax\}.$$

Il punto $(1, a) \in L$ e poiché $g(1, a) = (1, \alpha(a))$ si ottiene che L è mappata in una nuova retta passante per l'origine con coefficiente angolare $\alpha(a)$.

$$g(L) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } y = \alpha(a)x\}.$$

Pure $(b, ab) \in L$ e quindi $(\alpha(b), \alpha(ab)) \in g(L)$, ricordando però che $g(L)$ è una retta passante per l'origine con coefficiente angolare $\alpha(a)$, si deduce che dovrà sussistere la seguente relazione: $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$.

Si è quindi dimostrato che per α e β valgono le seguenti relazioni per ogni $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \alpha(x+y) &= \alpha(x) + \alpha(y) & \alpha(xy) &= \alpha(x)\alpha(y) \\ \beta(x+y) &= \beta(x) + \beta(y) & \beta(xy) &= \beta(x)\beta(y). \end{aligned}$$

Queste relazioni implicano che α e β siano due automorfismi di campo di \mathbb{R} e, per la Proposizione 1, risultano entrambi l'identità, di conseguenza pure $g = A \circ f = \text{id}$. Infine applicando a g la trasformazione inversa di A (così da avere $A^{-1} \circ A \circ f = A^{-1} = f$) si è dimostrato che f deve essere affine. \square

Si procederà ora generalizzando questo teorema con la dimostrazione del Teorema 1.

Dimostrazione Teorema 1 ($n > 2$). Si consideri la traslazione $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $(T \circ f)(0) = 0$ e si definisca $g = T \circ f$.

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ e π un piano tale che $x, y \in \pi$. Si prendano due rette $r_1, r_2 \in \pi$ e incidenti in 0, e un punto $P \in \pi$. Se si considerano altre due rette r_3 e r_4 passanti per P e tali che r_3 sia parallela a r_1 e r_4 lo sia per r_2 , così che r_3 intersecherà r_2 in un punto P_2 e analogamente r_4 intersecherà r_1 in un punto P_1 , è possibile costruire un parallelogrammo con vertice P e lati giacenti sulle rette considerate. Poiché g è biettiva

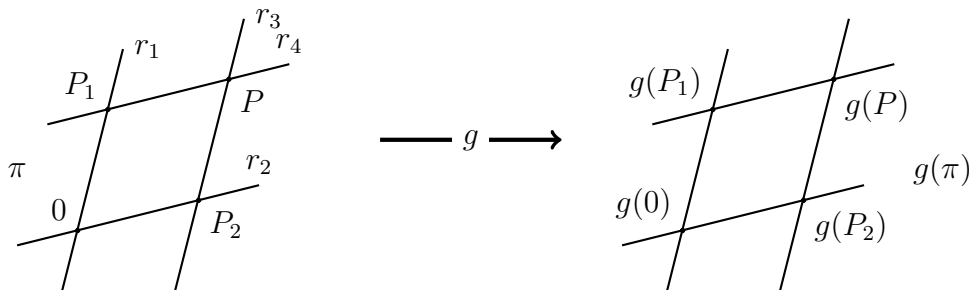


Figura 1.2: Rappresentazione grafica di come agisce la funzione g nel piano

e trasforma rette in rette allora, come si è già visto per dimostrare il Teorema 2, questo parallelogrammo deve essere trasformato in un nuovo parallelogrammo con i lati giacenti sulle immagini delle precedenti rette e con i vertici dati dalle immagini dei vertici del precedente parallelogrammo. Detto π' il piano contenente le immagini di r_1 e r_2 allora, per costruzione del parallelogrammo, si avrà che $g(P) \in \pi'$ e poiché $P \in \pi$ è arbitrario si deduce che ogni punto di π è mappato in π' ossia g trasforma piani in altri piani.

Si consideri ora un'applicazione lineare invertibile L tale che $(L \circ g)(\pi) = \pi$, in questo modo $L \circ g|_{\pi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è biettiva e trasforma rette in rette, per il Teorema 2 allora questa è un'applicazione affine, nella fattispecie poiché $g(0) = 0$ per costruzione e L è lineare allora $(L \circ g)(0) = 0$, per cui $L \circ g$ è lineare. Risulta a questo punto sufficiente far uso dell'inversa di L per ottenere:

$$\begin{aligned} g(\alpha x + \beta y) &= L^{-1}((L \circ g)(\alpha x + \beta y)) \\ &= L^{-1}(\alpha(L \circ g)(x) + \beta(L \circ g)(y)) = \alpha g(x) + \beta g(y) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Poiché la scelta di x e y fatta prima di determinare il piano π è arbitraria, segue che g è lineare e, considerando $f = T^{-1} \circ g$, si conclude che f deve essere affine. \square

Così facendo si conclude che ogni trasformazione tra sistemi di riferimento inerziali deve essere necessariamente una trasformazione affine di qualche sorta. Ulteriori osservazioni sperimentali consentiranno di identificare famiglie più ristrette di queste trasformazioni.

1.2 Fatti di Fisica Classica

Quanto scoperto dai fisici fino alla fine dell'ottocento fu sviluppato sulle idee di Galilei e Newton nella loro formulazione classica della meccanica. Infatti, utilizzando i risultati di questa branca della fisica, scienziati come Coulomb, Ampère e Faraday furono in grado di descrivere fenomeni noti da svariati secoli dando vita alla teoria dell'elettromagnetismo. Poiché la nascita della teoria della relatività speciale è strettamente connessa a queste due branche si procederà illustrando brevemente i loro fondamenti.

1.2.1 La meccanica e le trasformazioni di Galilei

Per delineare gli schemi della meccanica classica, oltre a quanto assunto nella Sezione 1.1, ossia che lo spazio sia tridimensionale, isotropo, omogeneo e che sia modellizzabile con la geometria euclidea mentre il tempo sia ad una sola dimensione, si prende come assioma che le distanze spaziali e temporali siano assolute, ossia che ogni osservatore concordi sulla misura di queste.

Inoltre si assume che, in un riferimento inerziale, le posizioni e le velocità dei punti di un sistema ad un tempo iniziale ne determinino in maniera univoca l'evoluzione $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ secondo la legge di Newton:

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}), \quad (1.2.1)$$

dove m è detta massa inerziale e \vec{F} è una funzione caratteristica del sistema detta forza.

Si vuole quindi identificare quali applicazioni $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ consentono di cambiare sistema di riferimento inerziale, ossia sotto quali trasformazioni le leggi della natura non variano. Queste applicazioni si chiamano trasformazioni di Galilei e, come si è dimostrato nella Sezione 1.1, per soddisfare il principio di relatività devono essere applicazioni affini. Una generica trasformazione di Galilei è quindi data dalla composizione di tre famiglie di applicazioni:

- una generica traslazione spazio temporale dell'origine, dedotta dalla proprietà di omogeneità dello spazio e del tempo:

$$\varphi_{\vec{r},s}(t, \vec{x}) = (t + s, \vec{x} + \vec{r}) \quad (1.2.2)$$

- una generica rotazione degli assi spaziali, dovuta alla proprietà di isotropia dello spazio:

$$\varphi_G(t, \vec{x}) = (t, G\vec{x}) \quad G \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : G^{-1} = G^t \quad (1.2.3)$$

- una traslazione di moto rettilineo uniforme (ammissibile grazie alle proprietà di muoversi di tale moto dei sistemi di riferimento inerziali):

$$\varphi_{\vec{v}}(t, \vec{x}) = (t, \vec{x} + \vec{v}t). \quad (1.2.4)$$

Si osservi che la rotazione (1.2.3) può avvenire solamente rispetto alle direzioni spaziali, infatti se fosse una rotazione di tutto lo spazio-tempo le lunghezze e gli intervalli di tempo non sarebbero più assoluti.

La trasformazione (1.2.4) è quella che viene comunemente studiata per caratterizzare le trasformazioni di sistemi inerziali. Si consideri quindi un sistema K , con coordinate (t, \vec{x}) e un sistema K' , con coordinate (t', \vec{x}') , in moto a velocità \vec{V} rispetto a K , si scriverà allora la (1.2.4) come:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t, \quad t' = t. \quad (1.2.5)$$

Il principio di relatività impone l'invarianza di ogni legge fisica rispetto alla trasformazione (1.2.5), è quindi opportuno studiare come si trasformino gli operatori di differenziazione con questa. Dalla regola della catena, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial t'} \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial t}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

dove $\frac{\partial}{\partial t}$ è la derivata parziale rispetto al tempo nel sistema K , $\frac{\partial}{\partial t'}$ è la derivata parziale rispetto al tempo nel sistema K' , $\frac{\partial}{\partial x_i}$ è la derivata parziale rispetto alla coordinata i -esima del sistema K e $\frac{\partial}{\partial x'_i}$ è la derivata parziale rispetto alla coordinata i -esima del sistema K' .

Osservando dalla (1.2.5) che $\frac{\partial t}{\partial t'} = 1$, che $\frac{\partial t}{\partial x'_i} = 0$, che $\frac{\partial x_i}{\partial t} = V_i$ e che $\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \delta_{ij}$, dove δ_{ij} è la delta di Kronecker, si ottengono le trasformazioni degli operatori di differenziazione:

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}, \quad \frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1.2.6)$$

dove $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$.

Dalla (1.2.6) si deduce che tutti gli operatori che comprendono solamente derivate rispetto alle coordinate spaziali sono lasciati inalterati dalle trasformazioni di Galilei. In particolare si ha che $\vec{\nabla}' = (\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}) = \vec{\nabla}$.

Note queste trasformazioni è possibile osservare che il vettore accelerazione $\ddot{\vec{x}}$ risulta Galilei invariante¹, infatti considerando una traiettoria $\vec{x}(t)$:

$$\frac{d^2}{dt'^2}(\vec{x}'(t)) = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{x}(t) - \vec{V}t) = \ddot{\vec{x}}(t) + \frac{d}{dt}(\vec{V}) = \ddot{\vec{x}}(t).$$

Questo fatto, assieme al principio di relatività galileiano applicato alla legge di Newton (1.2.1), impone che le forze esercitate su di un punto e misurate in due sistemi inerziali

¹Con Galilei invariante si intende invariante sotto trasformazioni di Galilei

differenti debbano essere le medesime.

Analogamente a quanto appena fatto si possono ricavare le trasformazioni per la velocità di un punto in moto con traiettoria $\vec{x}(t)$:

$$\frac{d}{dt'}(\vec{x}'(t)) = \frac{d}{dt}(\vec{x}(t) - \vec{V}t) = \dot{\vec{x}}(t) + \vec{V}. \quad (1.2.7)$$

Dalla (1.2.7) si ottiene che classicamente le velocità si compongono per somma algebrica.

1.2.2 L'elettromagnetismo e le equazioni di Maxwell

Per interpretare i fenomeni elettromagnetici, anche in questo caso, è necessario introdurre una serie di osservazioni sperimentali. In primo luogo esiste una proprietà della materia, detta carica elettrica, che non dipende dal sistema di riferimento in cui è misurata e che consente ai corpi di interagire con due campi vettoriali: il campo elettrico \vec{E} e il campo magnetico \vec{B} . Un corpo puntiforme di carica q subisce quindi una forza \vec{F} data da:

$$\vec{F} = q(\vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{x}, t)), \quad (1.2.8)$$

dove \vec{v} è il vettore velocità di tale corpo.

In secondo luogo gli esperimenti mostrarono che questi due campi sono soluzione di un sistema di equazioni differenziali dette equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

dove ρ è la densità di carica volumetrica, \vec{J} è la densità di corrente di carica superficiale e ϵ_0, μ_0 sono due costanti del vuoto.

Dalle equazioni di Maxwell (1.2.9) segue che le cariche sono sorgenti del campo elettrico mentre le correnti lo sono per il campo magnetico. Per esempio è possibile mostrare che una carica puntiforme è una sorgente di campo elettrico e, tramite la forza di Lorentz (1.2.8), è possibile derivare la legge sperimentale di Coulomb.

Per far questo si consideri una carica puntiforme Q posta nell'origine di un sistema di riferimento e si prenda una sfera \mathcal{S} di raggio R contenente tale carica. Integrando la prima equazione di Maxwell e facendo uso del teorema di Gauss si ottiene:

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3x = \int_{\mathcal{S}} \frac{\rho}{\epsilon_0} d^3x = \frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

dove si è indicato con \hat{n} il versore normale esterno alla superficie \mathcal{S} nel punto in cui si valuta l'integrando.

Si osservi che, essendo lo spazio isotropo e la carica puntiforme, qualsiasi rotazione degli assi coordinati mantiene immutato il sistema. Quindi il campo elettrico generato dalla carica deve essere radiale e costante su superfici sferiche centrate nell'origine. Infatti un'ipotetica seconda carica, fissa a distanza R dall'origine del sistema di riferimento, deve percepire sempre la medesima forza, indipendentemente dalla rotazione effettuata. Tale forza risulta connessa al campo elettrico per mezzo della (1.2.8). Dalle Equazioni di

Maxwell, supponendo assenza di correnti, si ha che il rotore di \vec{E} risulta nullo. Quindi l'integrale di superficie si riduce a:

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = 4\pi R^2 |\vec{E}| = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Ricordando che \vec{E} ha simmetria radiale si ha la legge di Coulomb:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = q\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2} \hat{r}, \quad (1.2.10)$$

dove si è indicato con \hat{r} il versore radiale.

Si noti che la legge di Coulomb, nella sua interpretazione classica, prevede una propagazione dell'interazione istantanea. Infatti dalla (1.2.10) si ha che uno spostamento della carica Q modificherebbe istantaneamente il campo di forza in ogni suo punto.

Si osservi infine che applicando il rotore ad ambo i membri delle ultime due equazioni di Maxwell

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{E},$$

e supponendo assenza di cariche (per cui $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$) si ottengono due equazioni delle onde che descrivono il campo elettrico e magnetico nel vuoto:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (1.2.11)$$

dove si è indicato l'operatore laplaciano con la notazione $\vec{\nabla}^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2})$.

Queste onde si propagano con una velocità $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 299792458 \frac{m}{s}$, che corrisponde con precisione ai valori sperimentalmente misurati della velocità della luce.

Maxwell stesso suppose allora che la luce fosse da intendere come un fenomeno elettromagnetico e, successivi esperimenti come quelli di Hertz, confermarono tale ipotesi. Sulla base della teoria ondulatoria classica è però necessario identificare un mezzo nel quale queste onde possano propagarsi e rispetto al quale la loro velocità di propagazione debba essere intesa. Per questo motivo alla fine dell'ottocento venne ipotizzata l'esistenza di tale mezzo detto etere luminifero.

1.3 L'articolo del 1905

La Meccanica newtoniana e l'elettromagnetismo di Maxwell si rivelarono agli occhi dei fisici dell'ottocento incompatibili fra loro, poiché le equazioni di Maxwell non risultarono invarianti per le trasformazioni di Galilei. Proprio per questo motivo i fisici dell'epoca dovettero rivalutare i principi alla base delle leggi della natura fino a quando l'incompatibilità trovò una soluzione nel 1905 con la relatività ristretta di Einstein. Si ripercorreranno ora i passi che Einstein stesso indicò nel suo articolo [1] del 1905.

1.3.1 La non invarianza delle equazioni di Maxwell

Si considerino due sistemi di riferimento K e K' , inerziali e reciprocamente in moto in maniera tale che in K' l'origine del sistema K risulti in moto a velocità costante \vec{V} . Allora

in ogni sistema si misureranno rispettivamente \vec{E} , \vec{B} e \vec{E}' , \vec{B}' .

Il principio di relatività galileiana impone che questi due campi, nei loro sistemi di riferimento, soddisfino le equazioni di Maxwell (1.2.9). Inoltre, siccome la forza di Lorentz (1.2.8) deve essere la medesima in tutti i sistemi di riferimento inerziali, considerando una carica q in moto con velocità \vec{v} in K e $\vec{V} + \vec{v}$ in K' , essendo q invariante deve valere:

$$\begin{aligned}\vec{F}' = \vec{F} &\Rightarrow \vec{E}' + \vec{v} \wedge \vec{B}' = \vec{E} + (\vec{V} + \vec{v}) \wedge \vec{B} \\ &\Rightarrow \vec{E}' + \vec{v} \wedge (\vec{B}' - \vec{B}) = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}.\end{aligned}$$

Così facendo si possono ottenere delle relazioni tra \vec{E} , \vec{B} e \vec{E}' , \vec{B}' che costituiscono quindi le trasformazioni dei campi elettrici e magnetici tra sistemi inerziali. Queste però possono dipendere esclusivamente dalle proprietà dei due sistemi di riferimento considerati e nella fattispecie dalla loro velocità reciproca. Per questo motivo, il termine contenente \vec{v} , ossia la velocità della carica nel sistema K , deve annullarsi. Quindi le trasformazioni risultano:

$$\begin{cases} \vec{E}'(t, \vec{x}') = \vec{E}(t, \vec{x}) + \vec{V} \wedge \vec{B}(t, \vec{x}) \\ \vec{B}'(t, \vec{x}') = \vec{B}(t, \vec{x}) \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Bisogna ora studiare come si trasformino le grandezze generatrici dei campi: ρ e \vec{J} . Considerando un volume ΔV , in cui è presente una carica Δq . Allora, la densità di carica è definita come

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}.$$

Visto che le lunghezze sono assunte essere assolute allora devono esserlo pure i volumi e, essendo la carica non dipendente dal sistema di riferimento, si conclude che pure la densità di carica non dipende dal sistema di riferimento. Per quanto riguarda la densità di corrente superficiale, definita come $\vec{J} = \rho \vec{v}$, è sufficiente applicare le trasformazioni delle velocità tra due sistemi in moto reciproco a velocità \vec{V} per ottenere:

$$\vec{J}' = \vec{J} - \rho \vec{V}. \quad (1.3.2)$$

I risultati appena ottenuti consentono di studiare l'invarianza o meno delle equazioni di Maxwell per le trasformazioni di Galilei.

Si consideri la prima equazione di Maxwell in K' e la si supponga valida in K . Trasformando E' in E e per gli operatori di differenziazione secondo la (1.2.6), si ottiene una quantità che deve annullarsi affinché sia valida questa equazione anche in K' , come richiesto dal principio di relatività.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' - \frac{\rho}{\epsilon_0} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &= \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) - \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}).\end{aligned}$$

Il primo termine tra parentesi è identicamente nullo (poiché valgono le equazioni di Maxwell in K) mentre l'ultimo termine non è sempre nullo, nella fattispecie in presenza di campi elettrici variabili nel tempo. Questo implica che quindi la prima equazione di Maxwell non sia invariante per le trasformazioni di Galilei.

Se si studia la seconda con lo stesso procedimento si scopre che questa invece è invariante:

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Analogamente per la terza equazione:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' \wedge \vec{E}' + \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{E}' + \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}' \\ &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \\ &= \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{B} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = 0. \end{aligned}$$

Infatti il termine tra parentesi è identicamente nullo poiché in K vale la terza equazione di Maxwell e, ricordando che \vec{V} è costante, si annullano gli addendi restanti se sviluppati tramite le regole di differenziazione:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{B} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = -(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = 0.$$

L'ultima equazione di Maxwell è invece non-invariante. Infatti, sempre con il medesimo procedimento, si ottiene:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' \wedge \vec{B}' - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} - \mu_0 \vec{J}' &= \vec{\nabla} \wedge \vec{B}' - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}' - \mu_0 \vec{J}' \\ &= \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \vec{V} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) - \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{V} \rho \\ &= \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \vec{J} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \vec{V} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) + \mu_0 \vec{V} \rho \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \vec{V} \wedge (-\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \mu_0 \epsilon_0 (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) + \mu_0 \vec{V} \rho \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{V} \wedge \vec{B}) + \mu_0 \vec{V} \rho \end{aligned}$$

che, con le assunzioni fin qui fatte, non è nullo in generale.

Si è quindi giunti alla conclusione che la teoria di Maxwell e la meccanica di Newton non sono conciliabili.

1.3.2 I postulati di Einstein

Per giungere ad una formulazione coerente della dinamica dei corpi elettricamente carichi Einstein, nel suo articolo [1] del 1905, propose di modificare gli assunti alla base della meccanica classica per ottenere un modello coerente con l'elettromagnetismo di Maxwell. Infatti, all'epoca erano noti alcuni risultati sperimentali in contrasto con la concezione classica della meccanica. Il più importante fra questi fu l'esperimento di Michelson e Morley che avrebbe dovuto consentire di misurare la velocità della Terra rispetto all'etere luminifero, detta vento d'etere. L'esperimento ebbe un esito inaspettato: infatti non fu possibile misurare alcun vento d'etere. I fisici furono quindi posti davanti a tre possibili spiegazioni: o l'Etere si muove assieme alla Terra, o l'apparato sperimentale si contrae lungo la direzione del moto terrestre oppure non esiste alcun Etere e la luce si propaga alla medesima velocità in ogni direzione e per ogni osservatore.

Einstein pose quindi a fondamento della sua teoria due postulati:

- Il principio di relatività: basato sull'assunzione che esistano una serie di sistemi di riferimento detti inerziali, reciprocamente in moto rettilineo uniforme, in cui le leggi della fisica sono identicamente valide.
- Il principio di costanza della velocità della luce: il quale asserisce che la luce nello spazio vuoto si propaghi sempre con modulo della velocità determinato ed identico per ogni osservatore inerziale, che si indicherà con c .

Il primo si è lo stesso principio della meccanica classica mentre il secondo è una diretta conseguenza dell'esperimento di Michelson e Morley il cui risultato viene spiegato senza la necessità dell'introduzione dell'etere e di un sistema di riferimento privilegiato. Inoltre si continua ad intendere spazio e tempo come due enti omogenei e isotropi.

La primissima conseguenza dell'assunzione di questi due postulati è la non validità delle trasformazioni di Galilei. Infatti secondo queste un moto di velocità \vec{v} in un sistema K , se osservato in un sistema K' , nel quale K si muove a velocità \vec{V} , risulterà in un moto a velocità $\vec{v} + \vec{V}$. Il secondo postulato però richiede che se tale moto è di un fascio di luce questo debba risultare sia in K che in K' in un moto con modulo della velocità pari a c , in totale disaccordo con le trasformazioni di Galilei.

Inoltre nel suo articolo Einstein stesso propose, dopo aver enunciato i postulati, un esperimento mentale che consente di mostrare come questi siano in diretto conflitto con le assunzioni classiche dell'assolutezza del tempo e delle lunghezze. Si considerino due orologi reciprocamente a riposo posizionati in due punti detti A e B . Einstein osservò che ogni orologio è in grado di misurare intervalli temporali solamente per eventi che avvengono nello stesso punto in cui ognuno è posizionato, questo poiché diventa necessario tener conto della velocità finita della luce che quindi non propagandosi istantaneamente genera dei ritardi nella percezione degli eventi lontani.

Il secondo postulato consente però di sincronizzare gli orologi così che sia possibile confrontare i tempi misurati in A e in B . In primo luogo si ipotizzi di far partire all'istante $t_A = 0$, misurato dal primo orologio, un fascio di luce che viaggia da A e giunge in B quando l'orologio posizionato in tale punto segna un tempo t_B . In B il fascio è riflesso e fa ritorno in A quando il relativo orologio segna un tempo t_A . Poiché per il principio di costanza della velocità della luce il fascio luminoso deve propagarsi in ogni direzione con la stessa velocità e la distanza tra i due orologi è fissata e costante allora il tempo impiegato dalla luce per andare da A a B e vice versa deve essere il medesimo. Si conclude quindi che i due orologi sono sincronizzati solamente se vale:

$$2t_B = t_A. \quad (1.3.3)$$

Chiaramente se l'orologio nel punto A si è rivelato sincrono con quello nel punto B , tramite la procedura appena descritta, è chiaro che è altrettanto vero che quello posto in B è sincrono con quello posto in A e che se si considera un orologio posto in un terzo punto C che risulta sincrono con quello posto in B allora questo terzo orologio è sincrono con quello nel punto A .

Così facendo è possibile assegnare un immaginario orologio ad ogni punto dello spazio in maniera tale che siano tutti sincroni tra loro e sia possibile determinare quando due eventi lontani fra loro avvengono nello stesso istante in un determinato sistema di riferimento

inerziale.

Fatta propria questa osservazione è possibile procedere analizzando l'esperimento mentale.

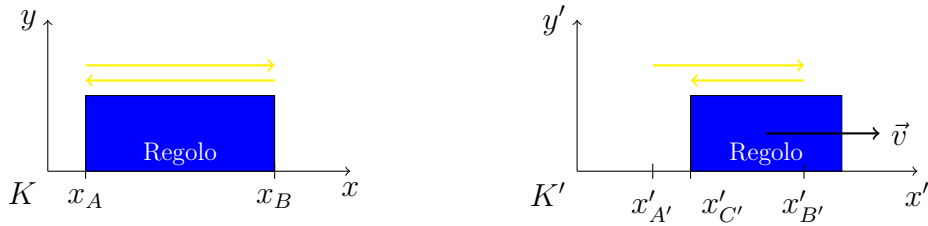


Figura 1.3: Rappresentazione dell'esperimento mentale di Einstein.

Si consideri un regolo di lunghezza l in un sistema di riferimento ad esso solidale detto K . Si considerino anche due orologi sincroni posti nelle due estremità del regolo dette A e B , se si ripete quanto appena fatto per la sincronizzazione degli orologi si deve osservare che il tempo impiegato dalla luce per muoversi da un estremo ad un altro è il medesimo in entrambe le direzioni.

In un sistema K' si osserva il regolo in moto a velocità v lungo la direzione in cui la parte lunga del regolo poggia. Sia detto A' il punto del sistema K' in cui si osserva l'emissione del fascio di luce dalla prima estremità del regolo, B' il punto, sempre in K' , in cui si osserva la riflessione del fascio nel secondo estremo del regolo ed infine C' il punto in K' in cui si osserva il fascio fare ritorno alla prima estremità. In ognuno dei tre punti è presente un orologio sincronizzato con gli altri del sistema K' in maniera da osservare l'emissione del fascio ad un tempo $t'_{A'} = 0$. Se $t'_{B'}$ è l'istante in cui si osserva la riflessione in B' , $t'_{C'}$ è l'istante in cui il fascio fa ritorno al primo estremo del regolo e l' è la lunghezza del regolo misurata nel sistema K' allora è possibile determinare in funzione di questi tempi le distanze tra i punti A' , B' e C' , infatti queste dipenderanno in parte dalla distanza percorsa del regolo e in parte dalla sua lunghezza:

$$\begin{aligned}\Delta x'_{A'B'} &= x'_{B'} - x'_{A'} = v(t'_{B'} - t'_{A'}) + l' = vt'_{B'} + l', \\ \Delta x'_{B'C'} &= x'_{B'} - x'_{C'} = l' - v(t'_{C'} - t'_{B'}).\end{aligned}$$

Queste due distanze sono quelle percorse dal fascio luminoso rispettivamente in tempi $t'_{B'}$ e $t'_{C'} - t'_{B'}$, per cui si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta x'_{A'B'} &= ct'_{B'} = vt'_{B'} + l' \quad \Rightarrow \quad t'_{B'} = \frac{l'}{c - v}, \\ \Delta x'_{B'C'} &= c(t'_{C'} - t'_{B'}) = l' - v(t'_{C'} - t'_{B'}) \quad \Rightarrow \quad t'_{C'} - t'_{B'} = \frac{l'}{c + v}.\end{aligned}$$

Questa semplice osservazione consente di concludere che i postulati enunciati da Einstein non ammettono la possibilità di assumere tempi assoluti: infatti l'osservatore in K' osserva che il fascio di luce impiega più tempo per giungere al secondo estremo di quanto ne trascorra tra la riflessione e il suo ritorno al primo estremo, mentre invece l'osservatore in K , solidale con il regolo, osserva tempi identici per questi due tragitti. Una volta sviluppata matematicamente questa nuova teoria della relatività si osserverà che in maniera analoga pure le lunghezze non possono più essere considerate assolute.

1.4 Le trasformazioni di Lorentz

Come si è già visto, i postulati di Einstein non risultano compatibili con le trasformazioni di Galilei, per questo motivo il primo passo compiuto da Einstein stesso fu quello di identificare matematicamente quali siano le nuove trasformazioni dei sistemi di riferimento inerziali che derivano direttamente dai nuovi postulati.

In questa Sezione si procederà a ricavare le trasformazioni di Lorentz seguendo i ragionamenti di Fock^[2] e di Landau^[4], per poi discuterne le implicazioni.

1.4.1 Derivazione

Si vogliono trovare le trasformazioni che, rispettando i due postulati di Einstein, trasformano i vettori dello spazio-tempo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ misurati in un sistema di riferimento inerziale K in quelli misurati in un secondo sistema di riferimento inerziale K' . Il principio di relatività impone che tutte le leggi della fisica siano valide sia in K che in K' e in modo particolare il principio di costanza della velocità della luce. Si può richiedere questa condizione nel seguente modo: sia emesso rispetto a K un segnale luminoso all'istante t_0 e nel punto \vec{r}_0 , allora in un istante t_1 si osserverà il segnale in \vec{r}_1 tale che rispettando il secondo postulato, la propagazione avvenga a velocità con modulo costante e pari a c , così che:

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = c^2(t_1 - t_0)^2 \quad (1.4.1)$$

e se in K' si osserva lo stesso fascio di luce emesso all'istante t'_0 nel punto \vec{r}'_0 analogamente in un istante t'_1 il segnale giungerà in \vec{r}'_1 e per il principio di costanza della velocità della luce anche in questo sistema di riferimento varrà la seguente espressione.

$$|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_0|^2 = (x'_1 - x'_0)^2 + (y'_1 - y'_0)^2 + (z'_1 - z'_0)^2 = c^2(t'_1 - t'_0)^2 \quad (1.4.2)$$

Il luogo dei punti in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ che soddisfa queste relazioni è detto cono di luce ed è la rappresentazione spaziotemporale del moto luminare. I postulati di Einstein impongono che la trasformazione che si sta cercando trasformi sempre punti del cono di luce in K in altri punti del cono di luce in K' .

Come si è visto nella Sezione 1.3.2 gli istanti temporali in cui si verifica un preciso evento non sono più assoluti e diversi osservatori di diversi sistemi di riferimento potrebbero non concordare sulla loro misura. Per questo motivo è importate iniziare a ragionare utilizzando vettori appartenenti a \mathbb{R}^4 , detti quadrivettori¹, così da considerare trasformazioni anche della coordinata temporale. Le relazioni (1.4.1) e (1.4.2) suggeriscono di utilizzare come quadrivettore $r = (ct, x, y, z)$ poiché così facendo è possibile definire la norma quadra di un quadrivettore tramite il prodotto righe per colonne con una matrice g detta matrice metrica

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |r|^2 = (ct, x, y, z) g \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

¹Poiché con l'uso dei quadrivettori la coordinata temporale è considerata al pari di quelle spaziali si dirà da ora in poi che questi appartengono a \mathbb{R}^4 e non a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, seppur queste due notazioni rappresentino lo stesso spazio vettoriale.

e in tal modo si descriverà un quadrivettore rappresentante una traiettoria nello spazio-tempo di un fascio di luce indicando che la sua norma deve essere nulla.

Un secondo modo equivalente consiste nel considerare il quadrivettore $r = (ict, x, y, z)$, dove $i^2 = -1$, il che consente di poter utilizzare il regolare prodotto scalare euclideo per definire la norma di un quadrivettore ottenendo la stessa espressione della precedente convenzione. Per passare da una convenzione all'altra è sufficiente far uso di un cambio di base P che mappi i vettori della base canonica in una nuova base $\{e'_0 = ie_0, e'_1 = e_1, e'_2 = e_2, e'_3 = e_3\}$.

$$P = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4.3)$$

La trasformazione che si vuole trovare è quindi una trasformazione $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, invertibile e che trasforma quadrivettori con norma nulla in altri quadrivettori con norma nulla. L'invertibilità è necessaria affinché sia possibile trasformare sia da un sistema di riferimento K ad uno K' sia viceversa. Questa trasformazione deve essere una trasformazione affine affinché il principio di relatività si soddisfi, come si è dimostrato nella Sezione 1.1; un'ulteriore dimostrazione, valida solamente per la relatività speciale, è fornita nell'appendice A.

La proprietà di mantenere la norma nulla, che è equivalente alla richiesta di soddisfare i postulati di Einstein, implica che $|f(r)|^2 = \lambda|r|^2$, con λ costante, questo fatto algebrico è dimostrato nel lemma 2 dell'appendice A.

Si considerino 3 sistemi di riferimento K, K_1 e K_2 , tali per cui in K l'origine di K_1 risulti in moto a velocità \vec{v}_1 e l'origine di K_2 risulti in moto a velocità \vec{v}_2 . Sia r un quadrivettore in K e r_1 e r_2 il medesimo quadrivettore rispettivamente in K_1 e K_2 , è possibile considerare tre trasformazioni f_1, f_2, f_{12} , tali che $f_1(r_1) = f_2(r_2) = r$ e $f_{12}(r_1) = r_2$, per cui si avrà:

$$|r_1|^2 = \lambda_1|r|^2 \quad |r_2|^2 = \lambda_2|r|^2 \quad |r_1|^2 = \lambda_{12}|r_2|^2 \quad \Rightarrow |r_1|^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}|r_2|^2 = \lambda_{12}|r_2|^2.$$

Ogni costante λ può dipendere esclusivamente dalla trasformazione considerata, ossia dalle velocità reciproche dei sistemi di riferimento tra cui questa agisce, infatti non è possibile ammettere una dipendenza da un qualche quadrivettore r siccome questa violerebbe la proprietà di omogeneità dello spazio-tempo. Analogamente non è possibile supporre che λ dipenda dalla direzione o dal verso delle velocità reciproche altrimenti sarebbe possibile definire una direzione preferenziale violando l'isotropia dello spazio-tempo. Si conclude che deve quindi valere la seguente relazione:

$$\frac{\lambda(|\vec{v}_1|)}{\lambda(|\vec{v}_2|)} = \lambda(|\vec{v}_{12}|). \quad (1.4.4)$$

Infine si osservi che la norma della velocità reciproca $|\vec{v}_{12}|$ dipenderà dalle direzioni in cui sono orientate le velocità \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , infatti se le due sono identiche la velocità reciproca dovrà essere nulla mentre se sono in norma uguale ma in direzioni differenti sarà possibile ottenere solamente velocità non nulle. Nella relazione (1.4.4), appena ottenuta, $\lambda(|\vec{v}_{12}|)$ è quindi dipendente dalle direzioni di \vec{v}_1 e \vec{v}_2 mentre il rapporto $\frac{\lambda(|\vec{v}_1|)}{\lambda(|\vec{v}_2|)}$ permane di valore fissato al variare dell'angolo tra \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . Si conclude quindi che λ deve assumere un

valore costante indipendentemente dalla trasformazione considerata, inoltre dalla (1.4.4) è immediato concludere che tale costante è proprio pari a 1.

La trasformazione f deve quindi anche conservare le norme dei vettori r dello spazio tempo. Se si fa uso della convenzione per cui $r = (ict, x, y, z)$ si ottiene che il luogo dei punti con norma fissata R è dato da una 4-sfera

$$r^2 = (ict)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (1.4.5)$$

e questo insieme di punti permane una 4-sfera solo per rotazioni e traslazioni, per cui l'applicazione lineare della trasformazione affine che si sta cercando deve essere una rotazione. Questa generica rotazione può essere decomposta in rotazioni nei piani xy , xz , yz , xt , yt e zt : le rotazioni nei primi tre piani corrispondono alle classiche rotazioni spaziali mentre sono le ultime tre quelle più peculiari.

Si consideri ora una rotazione nel piano xt , le altre due rotazioni sono analizzabili in maniera del tutto analoga, questa può essere facilmente espressa nella forma:

$$\begin{pmatrix} ict' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t' = t \cos \theta + i \frac{x}{c} \sin \theta \\ x' = ict \sin \theta + x \cos \theta \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

dove t', x', y', z' sono le coordinate misurate in K' e t, x, y, z sono quelle misurate in K . Siccome si sta studiando la trasformazione tra due sistemi inerziali e quindi in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto l'altro solamente nel piano xt è naturale porre l'origine di K' in moto a velocità costante V lungo l'asse x , coincidente con x' siccome non si sono effettuate rotazioni spaziali. Se si considera la trasformazione del punto che ha come immagine l'origine di K' si ottiene:

$$\begin{cases} t' = t \cos \theta + i \frac{x}{c} \sin \theta \\ 0 = ict \sin \theta + x \cos \theta \\ 0 = y \\ 0 = z \end{cases} \Rightarrow V = \frac{x}{t} = -ic \tan \theta \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ \sin \theta = \frac{i \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases}.$$

Definendo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ la trasformazione diventa:

$$\begin{pmatrix} ict' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -i \frac{V}{c} \gamma & 0 & 0 \\ i \frac{V}{c} \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = (t - \frac{V}{c^2} x) \gamma \\ x' = (x - Vt) \gamma \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}.$$

Siccome la convenzione $r = (ict, x, y, z)$ non è quella comunemente utilizzata ma è stata adoperata solamente per evidenziare il carattere geometrico della trasformazione, è necessario ricondursi alla convenzione consueta dove $r = (ct, x, y, z)$ e come si è già detto è necessario effettuare un cambio di base tramite le matrici della (1.4.3):

$$P^{-1} \begin{pmatrix} \gamma & -i \frac{V}{c} \gamma & 0 & 0 \\ i \frac{V}{c} \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{V}{c} \gamma & 0 & 0 \\ -\frac{V}{c} \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa è convenzionalmente riconosciuta come la trasformazione di Lorentz¹ Λ da K a K' con K' in moto a velocità v lungo l'asse x rispetto a K :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{V}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{V}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} t' = (t - \frac{V}{c^2}x)\gamma \\ x' = (x - Vt)\gamma \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (1.4.6)$$

Come si è già detto la trasformazione inversa di Λ , che consente di trasformare i vettori di K' in quelli di K , è ricavabile invertendo la matrice appena ottenuta.

Analoghe considerazioni possono essere fare per sistemi in moto in direzioni differenti a qui corrisponderanno trasformazioni descritte da rotazioni di piani differenti. Inoltre è possibile comporre tutte le trasformazioni di Lorentz tramite il prodotto righe per colonne con altre trasformazioni di Lorentz o rotazioni spaziali così da ottenere arbitrarie trasformazioni dei sistemi di riferimento inerziali.

Si osservi che in tutte queste trasformazioni appare un fattore che si è chiamato γ , caratteristico della trasformazione che si sta considerando. Questo fattore è dipendente esclusivamente dal modulo della velocità reciproca dei due sistemi di riferimento e assume un comportamento caratteristico e fondamentale per la teoria della relatività: in generale $\gamma \geq 1$ ed è pari a 1 solo per $V = 0$ mentre tende ad ∞ per V che tendono a $\pm c$.

Per $|V| > c$ il fattore $\gamma \in \mathbb{C}$, in questo modo ipotetici sistemi di riferimento in moto a velocità superluminare darebbero origine a trasformazioni che includono coordinate complesse e quindi di senso non fisico, questo suggerisce, come si osserverà più avanti, che c costituisca la velocità limite del moto.

Per piccoli valori di V rispetto a c , ossia nel limite in cui c è infinitamente grande, detto limite classico poiché coincide con la descrizione classica secondo cui la luce si propaga istantaneamente:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{V^4}{c^4} + o\left(\frac{V^4}{c^4}\right). \quad (1.4.7)$$

Così facendo, considerando $c \rightarrow \infty$ e la (1.4.7) al prim'ordine, le trasformazioni di Lorentz divengono quelle di Galilei, per questo motivo la meccanica classica risulta solamente una prima approssimazione della corretta descrizione delle realtà.

1.4.2 Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi

Come si è già visto il concetto di tempo assoluto non è conciliabile con i postulati di Einstein, questo fatto è ora deducibile dalle Trasformazioni di Lorentz (1.4.6).

Si consideri in un sistema di riferimento inerziale K il moto rettilineo ed uniforme a velocità V di un corpo che emette un segnale luminoso ogni Δt . Considerando un secondo sistema di riferimento inerziale K' solidale a tale corpo e tale da osservarlo nell'origine

¹Una trasformazione di Lorentz di questo tipo è più propriamente detta Boost di Lorentz.

degli assi spaziali, allora le trasformazioni di Lorentz risulteranno:

$$\begin{cases} t = (t' + \frac{V}{c^2}x')\gamma \\ x = (x' + Vt')\gamma \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} t' = (t - \frac{V}{c^2}x)\gamma \\ x' = (x - Vt)\gamma \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Si possono quindi correlare i tempi di emissione misurati in K con quelli in K' considerando la trasformazione di Lorentz rispetto al corpo posto nell'origine del sistema K' ($r'=(ct',0,0,0)$):

$$\begin{cases} t = t'\gamma \\ x = Vt'\gamma \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta\tau = t'_1 - t'_0 = \frac{(t_1 - t_0)}{\gamma} = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (1.4.8)$$

L'intervallo di tempo $\Delta\tau$, misurato nel sistema K' solidale al corpo, è detto tempo proprio di tale corpo e considerando che γ assume valori maggiori di 1 per ogni $V \neq 0$ risulta l'intervallo di tempo tra due eventi più breve tra tutti gli intervalli Δt misurati in ogni sistema di riferimento inerziale.

Si consideri adesso il corpo come un parallelepipedo esteso di dimensioni l_1 l_2 l_3 rispettivamente lungo gli assi x , y , z del sistema K e λ_1 λ_2 λ_3 rispettivamente lungo gli assi x' , y' , z' del sistema K' . Operativamente le dimensioni dell'oggetto sono misurate ponendo dei regoli diretti lungo gli assi di ogni sistema di riferimento e non in moto in essi, quindi ad un determinato istante si misurano contemporaneamente le posizioni delle estremità del corpo utilizzando i regoli. Si osservi che è necessario effettuare misure contemporanee della posizione di ogni coppia di estremità per assicurarsi di non misurare anche una componente dovuta allo spostamento del corpo avvenuto tra le misure non contemporanee. Si effettui la misura come è appena stata descritta nell'istante $t = 0$, si ottiene, facendo uso delle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} 0 = (t' + \frac{V}{c^2}\lambda_1)\gamma \\ l_1 = (\lambda_1 + Vt')\gamma \\ l_2 = \lambda_2 \\ l_3 = \lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = -\frac{V}{c^2}\lambda_1 \\ l_1 = (1 - \frac{V^2}{c^2})\lambda_1\gamma \\ l_2 = \lambda_2 \\ l_3 = \lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = l_1\gamma = \frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ \lambda_2 = l_2 \\ \lambda_3 = l_3 \end{cases}. \quad (1.4.9)$$

Si osserva quindi che anche le lunghezze non possono più essere considerate assolute, nella fattispecie la lunghezza di un corpo misurata nella direzione del suo moto risulta contratta rispetto alla medesima lunghezza misurata nel sistema K' solidale al corpo, detta lunghezza propria. Inoltre, analogamente a come si è osservato con il tempo proprio, si ha che $\gamma > 1$ per ogni $V \neq 0$ da cui si deduce che la lunghezza propria è la lunghezza maggiore tra tutte quelle misurabili in differenti sistemi di riferimento inerziali.

Per concludere è possibile constatare che il fenomeno della contrazione delle lunghezze influenza anche il volume di un corpo, nel caso del parallelepipedo sopra considerato il volume \mathcal{V}_0 misurato in K' diminuirà dello stesso fattore della lunghezza λ_1 se misurato in K :

$$V = l_1 l_2 l_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\gamma} = \frac{\mathcal{V}_0}{\gamma}. \quad (1.4.10)$$

Quest'ultima osservazione mette in luce un'ulteriore differenza tra la teoria che si sta descrivendo e la teoria classica, infatti poiché il volume di un corpo può mutare in base al suo moto nella teoria della relatività non è possibile fare uso del così detto corpo rigido.

1.4.3 Trasformazione delle velocità

Si è già osservato che le trasformazioni di Galilei non risultano compatibili con i postulati di Einstein in quanto ammettono che un osservatore potrebbe misurare la velocità della luce con un valore differente da c . Dalle trasformazioni di Lorentz è possibile ricavare quali sono le effettive trasformazioni delle velocità nella teoria della relatività.

Per prima cosa è necessario studiare come si trasformi un generico moto $(ct, \vec{r}(t))$ quando si cambia sistema di riferimento da K a K' , tale per cui nel primo il secondo si muove a velocità V lungo l'asse x , si avrà allora la trasformazione:

$$\begin{cases} t = (t' + \frac{V}{c^2}r'_x(t'))\gamma \\ r_x = (r'_x(t') + Vt')\gamma \\ r_y = r'_y(t') \\ r_z = r'_z(t') \end{cases} \iff \begin{cases} t' = (t - \frac{V}{c^2}r_x(t))\gamma \\ r'_x = (r_x(t) - Vt)\gamma \\ r'_y = r_y(t) \\ r'_z = r_z(t) \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Se si calcolano le componenti della velocità in K' facendo uso della regola della derivata di funzione composta e delle trasformazioni di $(ct, \vec{r}(t))$ si ottiene:

$$\begin{aligned} v'_{x'} &= \frac{dr'_{x'}}{dt'} = \gamma \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} (r_x(t) - Vt) = \gamma^2 \left(1 + \frac{Vv'_{x'}}{c^2} \right) (v_x - V) \\ v'_{y'} &= \frac{dr'_{y'}}{dt'} = \gamma \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} (r_y(t)) = \gamma^2 \left(1 + \frac{Vv'_{x'}}{c^2} \right) v_y \\ v'_{z'} &= \frac{dr'_{z'}}{dt'} = \gamma \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} (r_z(t)) = \gamma^2 \left(1 + \frac{Vv'_{x'}}{c^2} \right) v_z \\ \frac{dt}{dt'} &= \gamma \left(1 + \frac{Vv'_{x'}}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Risolvendo algebricamente per le componenti $v'_{x'}$, $v'_{y'}$ e $v'_{z'}$ si ottengono le trasformazioni:

$$\begin{cases} v'_{x'} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \\ v'_{y'} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{Vv_x}{c^2})} \\ v'_{z'} = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{Vv_x}{c^2})} \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (1.4.11)$$

Si noti che queste trasformazioni per le velocità rispettano il principio di costanza della velocità della luce: se si considera il moto di un raggio di luce lungo l'asse x di K si ha¹

$$v' = \frac{c - V}{1 - \frac{Vc}{c^2}} = \frac{c - V}{c - V} c = c.$$

¹Questo caso in realtà è generale poiché è sufficiente comporre la trasformazione di Lorentz con una rotazione degli assi spaziali perché ci si riconduca a questo caso.

Infine si consideri un corpo in moto $\vec{r}(t)$ in K e si derivi il quadrivettore posizione rispetto al tempo proprio del corpo τ :

$$u = \frac{d}{d\tau}(ct, \vec{r}(t)) = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \vec{v} \frac{dt}{d\tau} \right) = (c, \vec{v}) \gamma_0 \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} \quad (1.4.12)$$

dove $\frac{dt}{d\tau}$ è stato calcolato dalla (1.4.8).

Siccome le trasformazioni di Lorentz sono applicazioni lineari e non dipendono da τ è possibile trasformare il quadrivettore posizione prima di derivarlo così che sia possibile trasformare u da K a K' tramite la matrice Λ (1.4.6), in tal caso si ottiene:

$$(c, v'_x, v'_y, v'_z) \gamma'_0 = \Lambda \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \gamma_0 = \left(\left(c - \frac{V v_x}{c} \right) \gamma, (v_x - V) \gamma, v_y, v_z \right) \gamma_0$$

dove γ dipende dalla velocità reciproca dei sistemi di riferimento mentre γ_0 e γ'_0 dipendono dalla velocità del corpo in K e K' . Dalla prima componente trasformata si ottiene che:

$$\frac{\gamma'_0}{\gamma_0} = \left(1 - \frac{V v_x}{c^2} \right) \gamma \quad (1.4.13)$$

che se sostituita nelle altre componenti spaziali consente di ottenere le trasformazioni delle velocità (1.4.11), queste infatti non sono altro che le trasformazioni di Lorentz del quadrivettore u , chiamato quadri-velocità. Si osservi che il modulo quadro di u è costante:

$$|u|^2 = \frac{c^2 - |\vec{v}|^2}{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} = c^2.$$

1.5 Quadrivettori e spazio-tempo

Nella Sezione 1.4.1 è stato introdotto il concetto di 4-vettore (quadrivettore) tramite il 4-vettore posizione, successivamente si è osservato che è possibile costruire altri 4-vettori, come la 4-velocità, che si trasformano anch'essi con le trasformazioni di Lorentz. Volendo essere più precisi si chiameranno 4-vettori tutti i vettori di \mathbb{R}^4 che si trasformano come il 4-vettore posizione.

La struttura non più euclidea dello spazio-tempo richiede una maggior attenzione nella trattazione dei 4-vettori: è quindi necessario distinguere 4-vettori controvarianti, indicati con $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$, e covarianti, indicati con $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$. I primi si trasformano con le trasformazioni di Lorentz Λ^μ_ν (1.4.6), mentre i secondi con la trasformazione inversa e trasposta, così che utilizzando la convenzione di Einstein¹ tali trasformazioni si scrivono:

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu \quad A'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu A_\nu. \quad (1.5.1)$$

¹La convenzione di Einstein è una notazione abbreviata dell'operazione di sommatoria: ogni coppia di indici ripetuti corrisponde ad una sommatoria sottintesa su tale indice. Un esempio può essere: $\sum_k A_{i,k} B^{j,k} = A_{i,k} B^{j,k}$

Utilizzando 4-vettori covarianti e controvarianti è possibile ottenere una quantità scalare invariante per le trasformazioni di Lorentz:

$$A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu_\alpha A^\alpha (\Lambda^{-1})^\beta_\mu B_\beta = A^\alpha \delta^\beta_\alpha B_\beta = A^\alpha B_\alpha$$

dove δ^β_α è la delta di Kronecker data dal prodotto righe per colonne della matrice della trasformazione di Lorentz con la sua inversa. La quantità appena ottenuta è il prodotto scalare dei 4-vettori A e B , questo è esprimibile, come si è visto nella Sezione 1.4.1, attraverso l'uso della matrice metrica $g_{\mu\nu}$, questa osservazione consente di trovare una relazione tra componenti controvarianti e covarianti. Fissato un 4-vettore A_μ allora $\forall B^\nu$:

$$B^\mu A_\mu = B^\mu g_{\mu\nu} A^\nu \Rightarrow A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \Leftrightarrow A^0 = A_0, A^i = -A_i \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.5.2)$$

L'operazione algebrica di sommare i prodotti delle componenti di due 4-vettori, come si è fatto nei precedenti calcoli, è nota, secondo la convenzione di Einstien, come contrazione di due indici; come si è visto la contrazione di un indice controvariante con uno covariante da uno scalare Lorentz Invariante.

Si consideri ora il 4-vettore posizione x_μ , come si è già visto il luogo dei punti nei quali $x^\mu x_\mu = 0$ rappresenta moti che avvengono alla velocità della luce ed è detto cono di luce. In analogia con il 4-vettore posizione ed il cono di luce (Fig. 1.4) è possibile classificare un qualsiasi 4-vettore in base al suo modulo quadro:

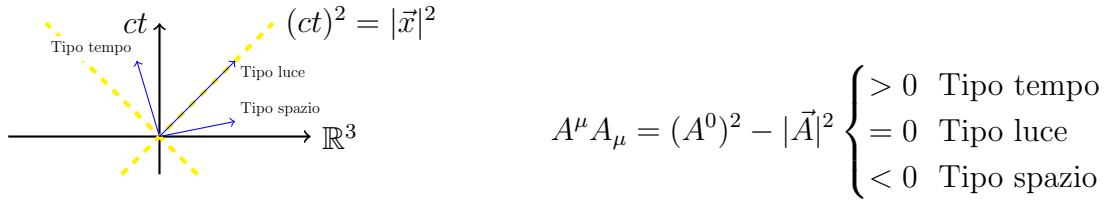


Figura 1.4: Cono di luce nel piano

Poiché come è già stato anticipato c rappresenta un limite per le velocità allora si può enunciare il seguente principio: *dall'origine di un sistema di riferimento l'informazione non può raggiungere 4-vettori posizione di tipo spazio, ossia al di fuori del cono di luce.*

Il concetto di 4-vettore può essere esteso ad oggetti a più indici che si trasformano con le trasformazioni di Lorentz detti 4-tensori, come la matrice metrica o la delta di Kronecker. Anche le componenti di questi oggetti possono essere covarianti o controvarianti, in base a come queste si trasformino, si fa quindi uso della medesima notazioni con indici bassi e alti tenendo conto che però un 4-tensore può avere anche indici misti. Anche nel caso di 4-tensori si può effettuare l'operazione di contrazione di indici, anche tra indici dello stesso tensore: nel caso di contrazione di coppie di indici di cui uno controvariante e uno covariante si ha che la quantità ottenuta è ancora un 4-tensore o uno scalare Lorentz Invariante.

Infine si osservi che prendendo un campo scalare $\Phi(t, x, y, z)$ e calcolandone il 4-gradiente $\partial_\mu \Phi = (\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3})$ questo risulta essere un 4-vettore in coordinate covarianti, infatti secondo la regola della derivata di funzione composta:

$$\partial'_\mu \Phi = \partial_\nu \Phi \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \partial_\nu \Phi (\Lambda^{-1})^\nu_\mu.$$

Analogamente è possibile calcolare la 4-divergenza di un 4-vettore, questa però risulta uno scalare Lorentz invariante infatti:

$$\partial'_\mu A'^\mu = \frac{\partial A^\delta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \Lambda^\mu_\delta = \frac{\partial A^\delta}{\partial x^\nu} (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \Lambda^\mu_\delta = \partial_\nu A^\nu = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}.$$

Considerazioni di questo tipo possono essere fatte per altri operatori di differenziazione che possono anche agire su 4-tensori risultanti quindi in altri 4-tensori o in scalari, questo poiché sia gli operatori di differenziazione, tramite la regola della derivata di funzione composta, sia i 4-tensori, per definizione, si trasformano con Λ^1 . La notazione ad indici alti e bassi diventa quindi utile per evidenziare come si possano costruire quantità tensoriali o scalari invarianti sfruttando quanto appena detto: infatti per esempio la notazione $\partial_\mu A^\mu$ ricorda il prodotto scalare, che come si è visto da luogo ad un invariante di Lorentz come avviene anche per la 4-divergenza.

1.6 Trasformazioni del campo elettromagnetico

Nella Sezione 1.3.1 si è visto come le equazioni di Maxwell (Sezione 1.2.2) non risultino Galilei invarianti, si procederà ora a derivare le trasformazioni relativistiche del campo elettrico e magnetico in maniera analoga a come fece Einstein nel suo articolo del 1905^[1].

Per prima cosa è opportuno ricavare le trasformazioni degli operatori di differenziazione considerando le trasformazioni di Lorentz (1.4.6) tra due sistemi K e K' in moto reciproco a velocità V . Usando la regola della derivata di funzione composta si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial t'} - \gamma V \frac{\partial}{\partial x'}. \quad (1.6.1)$$

Siccome la relatività presuppone che la teoria di Maxwell sia corretta, è naturale partire proprio da questa, infatti si considereranno due delle quattro equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.6.2)$$

Se si studia la prima trasformando gli operatori di derivazione, componente per componente, secondo le (1.6.1), si può dedurre come debba trasformarsi il campo elettromagnetico.

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad \frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'} - V \frac{\partial B_x}{\partial x'}\right) \gamma \quad (1.6.3)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial E_z}{\partial x'} + \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t'} = -\left(\frac{\partial B_y}{\partial t'} - V \frac{\partial B_y}{\partial x'}\right) \gamma \quad (1.6.4)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\left(\frac{\partial B_z}{\partial t'} - V \frac{\partial B_z}{\partial x'}\right) \gamma. \quad (1.6.5)$$

¹Questa osservazione è valida solamente in relatività speciale dove la trasformazione delle coordinate è lineare, in relatività generale infatti non è più vero che la derivata di un 4-tensore è ancora un 4-tensore o che la 4-divergenza è uno scalare.

Infatti siccome le equazioni di Maxwell devono valere sia in K che in K' è possibile identificare quali termini devono corrispondere alle coordinate di \vec{E}' e \vec{B}' nelle equazioni trasformate affinché queste si riducano a nuove equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma \left(E_z + V B_y \right) \right] &= - \frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma \left(B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right) \right], \\ \frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma \left(E_y - V B_z \right) \right] - \frac{\partial E_x}{\partial y'} &= - \frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma \left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) \right].\end{aligned}$$

Così facendo si ottengono le trasformazioni di tutte le componenti tranne che per B_x :

$$\begin{aligned}E'_{x'} &= E_x, & E'_{y'} &= (E_y - V B_z) \gamma, & E'_{z'} &= (E_z + V B_y) \gamma, \\ B'_{y'} &= (B_y + \frac{V}{c^2} E_z) \gamma, & B'_{z'} &= (B_z - \frac{V}{c^2} E_y) \gamma.\end{aligned}$$

Per conoscere come si trasforma B_x si sostituiscano le espressioni di E_y e E_z , ricavabili dalle trasformazioni appena ottenute, nella (1.6.3) così che utilizzando la (1.6.2) e il procedimento precedentemente adoperato si ottenga:

$$\frac{\partial E'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial E'_{y'}}{\partial z'} = V(\vec{\nabla}' \cdot \vec{B}') - \frac{\partial B_x}{\partial t'} = - \frac{\partial B_x}{\partial t'} \quad \Rightarrow \quad B'_{x'} = B_x.$$

Queste trasformazioni, essendo ricavate dall'uso combinato della relatività e dell'elettromagnetismo di Maxwell, sono quindi coerenti con entrambe.

Capitolo 2

Meccanica relativistica

2.1 Il principio di minima azione

La meccanica classica, brevemente introdotta nel capitolo 1.2.1, descrive il moto di sistemi di corpi tramite l'equazione di Newton. Si può dimostrare che questa però è del tutto equivalente ad un principio più generale noto come *principio di minima azione*.

Questo principio assume che per ogni sistema meccanico sia possibile costruire una funzione $\mathcal{L}(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t)$ detta *lagrangiana* (dove $q_1 \dots q_n$ sono le coordinate generalizzate e $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n$ sono le velocità generalizzate date dagli n gradi di libertà del sistema, che è uso comune indicare solamente con q e \dot{q}) che lo descrive.

In questo modo il principio di minima azione afferma che: se si suppone che ad un istante t_1 iniziale e ad un istante finale t_2 il sistema si trovi a coordinate fissate l'evoluzione del sistema avverrà secondo un moto $(q(t), \dot{q}(t))$ tale che il funzionale

$$\mathcal{S}[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (2.1.1)$$

detto *azione*, assuma un valore stazionario. Nella fattispecie si può dimostrare che per intervalli sufficientemente piccoli assume il valore minimo.

Si vuole ora, dato questo principio, ottenere le equazioni del moto: si consideri una funzione $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ e una seconda funzione arbitraria $\delta q(t) = (\delta q_1(t), \dots, \delta q_n(t))$, detta variazione di $q(t)$, tale che $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ e che assuma valori piccoli nel suo dominio $[t_1, t_2]$. In questo modo si può costruire una seconda funzione $q(t) + \delta q(t)$ che soddisfa ancora le ipotesi per cui devono essere fissate le coordinate agli istanti t_1 e t_2 . La variazione $\delta \mathcal{S}$, data dalla variazione δq , deve risultare nulla affinché $q(t)$ sia la funzione che rende stazionaria l'azione. Il principio di minima azione è quindi equivalente a richiedere:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt = 0, \quad (2.1.2)$$

nella quale si è espressa esplicitamente la variazione dell'azione rispetto alla variazione δq e alla sua derivata prima $\delta \dot{q}$ tramite uno sviluppo in serie al prim'ordine con le derivate parziali della lagrangiana $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$.

Integrando per parti gli addendi contenenti $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$ e ricordando che $\delta q(t)$ si annulla

in t_1 e in t_2 , si ottiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i dt = 0.$$

Poiché questo integrale deve annullarsi per ogni δq che rispetti le ipotesi fin qui fatte è necessario che si annulli identicamente l'integrando. Nella fattispecie ogni addendo singolarmente (siccome ognuno di questi è moltiplicato per una componente di $\delta q(t)$ che è una funzione arbitraria).

Si ottengono quindi le *equazioni di Eulero Lagrange* che consentono di determinare $q(t)$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i \in 1, 2, \dots, n. \quad (2.1.3)$$

Date le coordinate generalizzate $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ si definisco i momenti generalizzati associati a tali coordinate:

$$p_{q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.1.4)$$

Se la lagrangiana non dipende esplicitamente da una coordinata $q_i(t)$ allora si dice che questa è una coordinata ciclica. Dalle equazioni di Eulero Lagrange segue che sulla curva del moto il momento associato a tale coordinata resta costante nel tempo.

Oltre ai momenti è utile definire l'energia meccanica del sistema:

$$E = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}. \quad (2.1.5)$$

Se \mathcal{L} non dipende esplicitamente dal tempo E risulta una quantità conservata durante il moto. Infatti derivando rispetto al tempo la lagrangiana sulla curva del moto si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} \Big|_{q(t)} &= \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i p_i \ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ &= \sum_i \dot{p}_i \dot{q}_i + \sum_i p_i \ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \sum_i \frac{d}{dt} (p_i \dot{q}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} \Big|_{q(t)} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \end{aligned}$$

L'azione può essere intesa anche come funzione delle coordinate e del tempo. In questo caso a differenza del funzionale (2.1.1) si mantengono libere le coordinate e gli istanti finali, che divengono le variabili di dipendenza dell'azione, e si calcola l'integrale lungo la curva del moto. Così facendo l'azione è la funzione

$$S(\tilde{q}, t_2) = \int_{t_1}^{\tilde{q}, t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt. \quad (2.1.6)$$

Questa è nota come *funzione d'azione* ed è indicata con la lettera S (per distinguerla dal funzionale d'azione \mathcal{S}).

Si consideri ora una variazione delle coordinate finale $\tilde{q}_i \rightarrow \tilde{q}_i + \delta \tilde{q}_i$. Poiché ogni coppia di coordinate iniziali e finali determina (tramite il principio di minima azione) la traiettoria del moto, a $\delta \tilde{q}$ corrisponde una variazione $\delta q(t)$ di tale curva che mantiene invariate solamente le coordinate nell'istante iniziale. La variazione della funzione d'azione si calcola quindi come per il funzionale azione e si ottiene:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Ricordando che questo integrale è calcolato su curve del moto si ha che l'integrando deve annullarsi (poiché devono essere soddisfatte le equazioni di Eulero Lagrange). Mentre, come si appena osservato, $\delta q_i(t_1) = 0$ ma $\delta q_i(t_2) = \delta \tilde{q} \neq 0$, per cui si deduce che:

$$\delta S = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_2} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_{q_i}.$$

Se ora si considera la derivata totale rispetto al tempo di $S(q, t)$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha che questa è proprio la lagrangiana \mathcal{L} e quindi:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{L} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{L} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = -E.$$

Si osservi che quanto appena descritto necessita solamente del principio di minima azione e di nessun'altra assunzione sperimentale. Per questo motivo questa trattazione della meccanica è utilizzabile anche nell'ambito della relatività dove sarà la lagrangiana a dover tenere conto di quanto descritto nel capitolo 1.

2.2 La lagrangiana relativistica

Si procederà in questa Sezione ricavando la lagrangiana relativistica e quanto segue dalla forma di questa. Siccome una generica lagrangiana è data dalla somma di una parte di corpo libero \mathcal{L}_{lib} con una seconda di interazione \mathcal{L}_{int} è opportuno in primis dedurre la forma di \mathcal{L}_{lib} studiando una particella libera.

2.2.1 La particella libera

Si consideri il moto di una particella nello spazio tempo, il principio di minima azione determina tale moto indipendentemente dalla scelta del sistema di riferimento in cui esso è descritto. Come si è già visto nella Sezione 1.4.1 le trasformazioni di Lorentz conservano le lunghezze nello spazio-tempo, per questo motivo tale lunghezza per una curva del moto è un candidato ad essere l'azione relativistica. Una curva di questo tipo può essere parametrizzata dal tempo misurato nel sistema in cui si osserva il moto. Così facendo la curva sarà data dal 4-vettore posizione $x^\mu(t) = (ct, \vec{x}(t))$. La lunghezza della curva, e la supposta azione, è quindi:

$$\mathcal{S}[x^\mu(t)] = \alpha \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}^\mu(t)| dt = \alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} dt = \alpha c \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau, \quad (2.2.1)$$

dove si è indicato $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ che corrisponde al vettore tridimensionale velocità e con τ il tempo proprio della particella (Sezione 1.4.2), ossia il tempo misurato in un sistema di riferimento inerziale istantaneamente solidale al moto, nel quale la velocità è nulla.

A questo punto si deve verificare se questa azione, nel limite classico (ossia quando il rapporto $\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}$ tende a 0), è riconducibile all'azione classica. Ricordando che la lagrangiana classica della particella libera è data da $\frac{m|\vec{v}|^2}{2}$:

$$\mathcal{L} = \alpha c \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} \longrightarrow \alpha c - \frac{\alpha |\vec{v}|^2}{2c^2} \quad \text{per } \frac{|\vec{v}|^2}{c^2} \rightarrow 0.$$

A meno di costanti moltiplicative e additive (che non mutano la forma delle soluzioni delle equazioni di Eulero Lagrange), il limite classico ottenuto è quindi riconducibile alla lagrangiana classica se $\alpha = -mc$.

Questa evidenza quindi corrobora¹ l'ipotesi iniziale così che sia lecito affermare che la lagrangiana relativistica della particella libera sia:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}. \quad (2.2.2)$$

2.2.2 Energia e momenti

Identificata la lagrangiana relativistica per la particella libera è ora possibile sfruttare tutti gli strumenti illustrati nella Sezione 2.1 per studiare grandezze quali l'energia e i momenti di un sistema.

La prima quantità che si può studiare è il momento associato alle coordinate cartesiane, Questo è il vettore $(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_y}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z})$, noto come impulso \vec{p} , e dalla (2.2.2) risulta:

$$\vec{p} = m\vec{v}\gamma = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}}. \quad (2.2.3)$$

Anche relativisticamente, come in meccanica classica, l'impulso di una particella libera risulta conservato, (infatti tutte le coordinate della particella libera sono cicliche). Questo implica che il moto di una particella libera è rettilineo ed uniforme.

Si osservi che, nel limite classico in cui $|\vec{v}| \ll c$, l'impulso diviene la classica espressione $\vec{p} = m\vec{v}$, mentre per velocità tendenti in modulo a c l'impulso tende ad infinito.

Analogamente è possibile calcolare l'energia della particella libera ($E = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L}$) che risulta una quantità conservata (poiché non vi è dipendenza esplicita dal tempo nella lagrangiana). Calcolandola dalla (2.2.2) si ottiene:

$$E = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}}. \quad (2.2.4)$$

In questo caso è opportuno osservare che per particelle libere a riposo l'energia non è nulla, a differenza di come accade in meccanica classica. Bensì, assume il valore $E_0 = mc^2$, noto come energia a riposo della particella. Sottraendo all'energia totale del corpo il termine di energia a riposo si ottiene la quantità di energia esclusivamente dovuta al moto, ossia l'energia cinetica:

$$T = mc^2\gamma - mc^2 = mc^2(\gamma - 1). \quad (2.2.5)$$

Anche in questo caso studiando il limite classico si ritrova l'energia cinetica classica mentre nel limite di velocità prossime a c si ottiene che l'energia del corpo tende ad infinito. Quest'ultima osservazione consente di affermare che c è la velocità limite di ogni moto (infatti un qualsiasi corpo dotato di massa necessita di un'energia infinita per poter essere accelerato fino a tale velocità).

¹In realtà solamente un confronto tra i risultati teorici che si dedurranno e quelli sperimentali può giustificare l'ipotesi iniziale.

Talvolta è utile, per ottenere equazioni differenziali di più facile risoluzione di quelle date dalle equazioni di Eulero Lagrange, esprimere il vettore velocità facendo uso dell'impulso e dell'energia. Dalle (2.2.3) (2.2.4) si ha che:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} = \frac{c^2 \vec{p}}{mc^2 \gamma} = \frac{c^2 \vec{p}}{E}. \quad (2.2.6)$$

Questa espressione è indipendente dal fattore γ e se si determinano \vec{p} e E in funzione del tempo è integrabile per ottenere le equazioni del moto.

Si consideri ora il 4-gradiente della funzione d'azione, siccome $S(q, t)$ è uno scalare Lorentz invariante, questo è un 4-vettore covariante (Sezione 1.5). Come si è mostrato nella Sezione 2.1, l'azione è legata ad energia e momenti dalle sue derivate parziali ($\vec{\nabla} S = \vec{p}$ e $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$). Facendo uso di queste relazioni si ottiene la definizione del 4-impulso:

$$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z} \right) = \left(-\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \Rightarrow p^\mu = -\frac{\partial S}{\partial x_\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right). \quad (2.2.7)$$

Si osservi che in relatività l'energia diviene una quantità intrinsecamente legata agli impulsi, tanto da essere la componente temporale del 4-impulso.

Studiando la variazione dell'azione (2.2.1), per variazioni spazio-tempo, è possibile determinare alcune informazioni utili sul 4-impulso e sul moto delle particelle libere. La curva del moto $\vec{q}(t)$, se espressa in coordinate cartesiane, è rappresentata nello spazio-tempo dal 4-vettore $x^\mu(t) = (ct, \vec{x}(t))$. Di questa si possono considerare variazioni $\delta x^\mu(t)$ che soddisfino le ipotesi del principio di minima azione ($\delta x^\mu(t_1) = \delta x^\mu(t_2) = 0$), allora:

$$\mathcal{S}[x^\mu(t)] = -mc \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}^\mu(t)| dt = -mc \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx_\mu}{dt}} dt.$$

La variazione prima di questo integrale, sviluppando l'integrando in serie di Taylor al prim'ordine rispetto a $\frac{dx^\mu}{dt}$ e integrando per parti, risulta:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= -mc \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2\sqrt{\dot{x}^\nu(t)\dot{x}_\nu(t)}} 2 \frac{dx^\mu}{dt} \frac{d}{dt} \delta x_\mu(t) dt \\ &= -\frac{mc}{\sqrt{\dot{x}^\nu(t)\dot{x}_\nu(t)}} \frac{dx^\mu}{dt} \delta x_\mu(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + mc \int_{t_1}^{t_2} \delta x_\mu(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^\nu(t)\dot{x}_\nu(t)}} \frac{dx^\mu}{dt} \right) dt. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Si osservi che si fissa $\delta x^\mu(t_1) = \delta x^\mu(t_2) = 0$, come si è fatto per determinare le equazioni di Eulero Lagrange nella Sezione 2.1, il primo addendo si annulla. Poiché per il principio di minima azione $\delta \mathcal{S}$ deve essere nullo, l'integrando del secondo addendo della (2.2.8) deve annullarsi $\forall \delta x_\mu$. Osservando che $\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^\nu(t)\dot{x}_\nu(t)}} = \frac{\gamma}{c}$ e $\frac{d}{dt} = \gamma \frac{d}{d\tau}$, dove τ indica il tempo proprio, si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma}{c} \frac{dx^\mu}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{1}{c} \frac{du^\mu}{dt} = 0. \quad (2.2.9)$$

Ovvero, che la 4-velocità è costante e quindi che la traiettoria nello spazio-tempo è una retta per particelle libere (poiché la 4-velocità è tangente a tale curva).

Si consideri invece il caso in cui l'integrale d'azione sia calcolato sulla traiettoria del moto ma il secondo estremo d'integrazione non sia fissato. In questo caso il primo addendo della (2.2.8) non si annulla in t_2 mentre ad annullarsi (per la (2.2.9)) è l'integrale a secondo addendo. Ricordando $\frac{1}{|\dot{x}^\mu(t)|} = \frac{\gamma}{c}$ e $\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$, si ha che il 4-impulso è quindi il prodotto tra la 4-velocità e la massa della particella libera:

$$\delta S = -m\gamma \frac{dx^\mu}{dt} \delta x_\mu = -m \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta x_\mu = -mu^\mu \delta x_\mu \Rightarrow p^\mu = mu^\mu. \quad (2.2.10)$$

Poiché energia ed impulso costituiscono un 4-vettore è opportuno, analogamente a quanto accade per la 4-velocità, determinare come queste due quantità si trasformino. Considerando la trasformazione di Lorentz $p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu$ si ha:

$$p'_x = \left(p_x - \frac{V}{c^2} E \right) \gamma, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = (E - V p_x) \gamma. \quad (2.2.11)$$

Il formalismo quadrivettoriale garantisce che il modulo del 4-impulso sia Lorentz invariante. Per determinare tale quantità è quindi utile studiarla prima in un sistema di riferimento inerziale solidale al moto della particella (in questo sistema l'impulso e l'energia cinetica sono nulli). Detto p'^μ il 4-impulso in tale sistema, si ha

$$p'^\mu p'_\mu = \frac{E_0^2}{c^2} = m^2 c^2.$$

Siccome tale modulo è lo stesso in ogni sistema di riferimento inerziale si ottiene la relazione tra l'energia e l'impulso di una particella:

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2 c^2. \quad (2.2.12)$$

Da quest'ultima relazione, se non si determinano i valori delle derivate parziali dell'azione, è possibile ottenere l'equazione di Hamilton Jacobi relativistica:

$$p^\mu p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = m^2 c^2. \quad (2.2.13)$$

2.3 Sistemi di più particelle

Si vuole adesso studiare un insieme di N particelle non interagenti che formano un sistema isolato. Questo è quindi composto da N particelle libere (siccome non vi sono interazioni) e perciò si ha che le energie e i momenti delle singole particelle si conservano.

Per studiare questo tipo di sistemi è opportuno fare uso di coordinate e momenti ad hoc. Si consideri una sola particella delle N descritta del 4-vettore x^μ , se a tutto il sistema si fa compiere una rotazione infinitesima nello spazio-tempo questo 4-vettore muterà di una quantità infinitesima. La variazione di questo 4-vettore può essere espressa in termini di una trasformazione lineare con coefficienti infinitesimi:

$$\delta x^\mu = x_\nu \delta \Omega^{\mu\nu}.$$

Una rotazione quadridimensionale non varia la lunghezza del 4-vettore posizione così che, trascurando termini infinitesimi di ordine superiore al primo, si ha:

$$x^\mu x_\mu = (x^\mu + \delta x^\mu)(x_\mu + \delta x_\mu) = x^\mu x_\mu + 2x^\mu \delta x_\mu + \delta x_\mu \delta x_\mu \Rightarrow x^\mu x^\nu \delta \Omega_{\mu\nu} = 0.$$

Poiché x^μ non è stato scelto in maniera specifica, quanto appena detto vale per ogni vettore in \mathbb{R}^4 . Si osservi che siccome $x^\mu x^\nu$ (arbitrario) forma un tensore simmetrico e la sua contrazione su $\delta\Omega_{\mu\nu}$ è nulla, allora quest'ultimo deve essere un tensore antisimmetrico¹:

$$\delta\Omega_{\mu\nu} = -\delta\Omega_{\nu\mu}. \quad (2.3.1)$$

Si è mostrato nella Sezione 2.1 che una variazione delle coordinate spaziotemporali rispetto alle quali è calcolata la funzione d'azione genera una variazione di questa. Considerando le precedenti osservazioni per ogni particella del sistema in questo caso si ottiene:

$$\delta S = - \sum_{\text{Particelle}} p^\mu \delta x_\mu = -\delta\Omega_{\mu\nu} \sum_{\text{Particelle}} p^\mu x^\nu.^2$$

Se si scompone il tensore $p^\mu x^\nu$ nella somma di una parte simmetrica e una antisimmetrica, siccome questo è contratto su un tensore antisimmetrico, si ottiene che la sola parte antisimmetrica dà un contributo non nullo:

$$\delta S = -\frac{\delta\Omega_{\mu\nu}}{2} \sum_{\text{Particelle}} (p^\mu x^\nu - x^\nu p^\mu).$$

Poiché lo spazio-tempo è isotropo qualsiasi rotazione di tutto il sistema, che è isolato, non ne genera una mutazione. Per questo motivo se si considerano $\Omega_{\mu\nu}$ come alcune coordinate generalizzate queste non possono apparire in \mathcal{L} , il che le rende coordinate cicliche. Ne segue che il loro momento associato $\frac{\partial S}{\partial \Omega_{\mu\nu}}$ deve conservarsi e definendo 4-tensore *momento angolare* la quantità

$$M^{\mu\nu} = \sum_{\text{Particelle}} (p^\nu x^\mu - x^\nu p^\mu) \quad (2.3.2)$$

questa deve essere conservata durante l'evoluzione del sistema. Si osservi che questo tensore è composto in alcune componenti dalla definizione classica di momento angolare \vec{M} , nella fattispecie:

$$M_x = M^{23}, \quad M_y = -M^{13}, \quad M_z = M^{12}.$$

Le componenti M^{01} , M^{02} , M^{03} formano un secondo vettore pari a $\sum(ct\vec{p} - \frac{E\vec{x}}{c})$. Siccome deve conservarsi il 4-tensore momento angolare anche questi due vettori dovranno conservarsi. Nella fattispecie (siccome anche l'energia di ogni particella deve conservarsi) il secondo vettore diviso per l'energia totale del sistema deve essere ancora un vettore costante:

$$\frac{\sum E\vec{x}}{\sum E} - t \frac{c^2 \sum \vec{p}}{\sum E} = \text{costante}. \quad (2.3.3)$$

Si definiscono rispettivamente i vettori

$$\vec{x}_{CM} = \frac{\sum E\vec{x}}{\sum E} \quad \vec{v}_{CM} = \frac{c^2 \sum \vec{p}}{\sum E} \quad (2.3.4)$$

centro di massa relativistico e velocità del centro di massa relativistica. Dalla (2.3.3) si ha che il vettore \vec{x}_{CM} consente di descrivere il moto traslazionale dell'intero sistema come di un solo punto che si muove a velocità costante \vec{v}_{CM} .

¹Presi due tensori A e B , rispettivamente simmetrico e antisimmetrico, possono essere scritti come: $A^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A^{\mu\nu} + A^{\nu\mu})$ e $B^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(B^{\mu\nu} - B^{\nu\mu})$. Allora $A^{\mu\nu} B^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(A^{\mu\nu} B^{\mu\nu} - A^{\mu\nu} B^{\nu\mu} + A^{\nu\mu} B^{\mu\nu} - A^{\nu\mu} B^{\nu\mu}) = 0$.

²In questa formula e da qui in avanti sono omessi gli indici che indicano la particella di appartenenza, ogni sommatoria sottintende che questa avviene su ogni particella del sistema.

Qual'ora le velocità dei punti del sistema fossero piccole rispetto a c l'energia a riposo di ogni particella risulterebbe molto maggiore di quella cinetica. Così la formula delle coordinate del centro di massa relativistico tenderebbe a quella classica $\frac{\sum m\vec{x}}{\sum m}$.

Si consideri la trasformazione di Lorentz da un sistema arbitrario ad un sistema in moto a velocità \vec{v}_{CM} . Siccome $p_{tot}^\mu = \sum p^\mu$ ¹ e considerando che le trasformazioni di Lorentz sono lineari, si ha che questo si trasforma nella somma dei 4-impulsi del nuovo sistema di riferimento:

$$p_{Tot}^\mu \Lambda_\mu^\nu = \sum_{particelle} p^\mu \Lambda_\mu^\nu = \sum_{particelle} p'^\nu = p_{Tot}^{\nu'}.$$

Se si è orientato l'asse x con la direzione del moto del centro di massa, dalle trasformazioni del 4-impulso (2.2.11) si ha:

$$\vec{p}'_{Tot} = \left(\vec{p}_{Tot} - \frac{c^2 \vec{p}_{Tot}}{c^2 E_{Tot}} E_{Tot} \right) \gamma = 0, \quad E'_{Tot} = \left(E_{Tot} - \frac{c^2 (\vec{p}_{Tot})^2}{E_{Tot}} \right) \gamma = \sqrt{E_{Tot}^2 - c^2 (\vec{p}_{Tot})^2}.$$

Nel sistema in moto a \vec{v}_{CM} l'impulso totale è quindi nullo e l'energia del sistema è un invariante di Lorentz, infatti la sua espressione appena ricavata è un multiplo del modulo del 4-vettore impulso.

¹La somma di 4-vettori è ancora un 4-vettore.

Capitolo 3

L'elettromagnetismo nella teoria della relatività

3.1 La lagrangiana di interazione

Si consideri una carica q piccola¹, a questa è associata una lagrangiana \mathcal{L} costituita da una parte di corpo libero e una parte d'interazione con i campi elettrici e magnetici esterni. Si vuole ricavare la forma di questa seconda parte.

Come si è detto nella Sezione 1.2.2, tale carica subisce la forza di Lorentz e siccome la relatività assume la formulazione dell'elettromagnetico di Maxwell come la formulazione corretta si può procedere ricavando la forma della lagrangiana d'interazione tra carica e campi da questa forza. Secondo la teoria di Maxwell è possibile descrivere i due campi tramite un *potenziale scalare* $\phi(t, \vec{x})$ e un *potenziale vettore* $\vec{A}(t, \vec{x})$ tali che:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \quad (3.1.1)$$

È opportuno osservare che queste due quantità sono in realtà definite a meno di termini opportuni che non mutano i rispettivi campi: il potenziale ϕ è definito a meno di una costante rispetto alle coordinate spaziali e il potenziale vettore \vec{A} è definito a meno di un gradiente di un campo scalare. Questa arbitrarietà prende il nome di *simmetria di gauge*. Utilizzando questi due potenziali la forza di Lorentz assume la forma:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q \left(\vec{E}(t, \vec{x}) + \vec{v} \wedge \vec{B}(t, \vec{x}) \right) = q \left(-\vec{\nabla}\phi(t, \vec{x}) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(t, \vec{x}) + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(t, \vec{x})) \right) \\ &= q \left(-\vec{\nabla}\phi(t, \vec{x}) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(t, \vec{x}) + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}(t, \vec{x})) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}(t, \vec{x}) \right) \\ &= q\vec{\nabla} \left[-\phi(t, \vec{x}) + \vec{v} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) \right] - q \frac{d}{dt} \vec{A}(t, \vec{x}) \\ &= - \left[\frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} - \vec{\nabla} \right] (-q\phi(t, \vec{x}) + q\vec{v} \cdot \vec{A}(t, \vec{x})), \quad \vec{\nabla}_{\vec{v}} = \left(\frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z} \right). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Si noti che nella (3.1.2) si è ottenuta una quantità scalare su cui agisce l'operatore di Eulero Lagrange in forma vettoriale (Sezione 2.1). Infatti in meccanica lagrangiana tale

¹Questa assunzione è necessaria in quanto si vuole considerare inizialmente che la carica non modifichi il campo elettromagnetico che ne influenza il moto.

operatore, agendo sulla lagrangiana d'interazione, fornisce proprio la forza che media l'interazione, cambiata di segno.

La lagrangiana d'interazione elettromagnetica è quindi

$$\mathcal{L}_{Int} = -q\varphi(t, \vec{x}) + q\vec{v} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}), \quad (3.1.3)$$

nota questa l'azione è data dall'integrale della somma di questa con la lagrangiana di corpo libero:

$$\mathcal{S}[\vec{x}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} - q\varphi(t, \vec{x}) + q\vec{v} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) \right) dt. \quad (3.1.4)$$

Come si è fatto per il caso della particella libera si può procedere calcolando il vettore impulso generalizzato e l'energia della particella carica interagente con campi elettrici e magnetici. Dalle definizioni (2.1.4) e (2.1.5), utilizzate con $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Libera} + \mathcal{L}_{Int}$, si ottiene:

$$\vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} + q\vec{A} = \vec{p} + q\vec{A}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} + q\phi, \quad (3.1.5)$$

dove si è indicato con \vec{P} l'impulso generalizzato e con \vec{p} l'impulso della particella libera, che viene in generale chiamato solamente impulso.

Studiando sistemi di particelle interagenti con campi si indica l'energia che possiederebbe la particella se fosse libera con $E_{Lib} = mc^2\gamma$, questa è l'energia cinetica del sistema a meno di una costante che è l'energia a riposo della particella. Così facendo l'energia totale è $E = E_{Lib} + q\phi$.

I potenziali utilizzati nella lagrangiana (3.1.3) non sono però quantità misurabili, per cui, per studiare questi sistemi, è opportuno ricavarli dalle loro definizioni (3.1.1) conoscendo la forma del campo elettrico e magnetico. Nel caso più semplice possibile, ossia di campi costanti nel tempo ed uniformi¹, i potenziali sono

$$\varphi = -\vec{E} \cdot \vec{x}, \quad \vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{x}}{2}, \quad (3.1.6)$$

infatti dalle definizioni si ha:

$$-\vec{\nabla}\varphi = (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{x} = \vec{E}, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{2}[(\vec{\nabla} \cdot \vec{x})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{x}] = \frac{1}{2}(3\vec{B} - \vec{B}) = \vec{B}.$$

3.2 Il moto di particelle cariche in campi costanti

Lo studio del moto di una particella soggette a potenziali di forma arbitraria risulta molto complicato, in particolar modo nel contesto della relatività (nella quale le equazioni di Eulero Lagrange danno origine ad equazioni differenziali più complesse delle loro analoghe classiche), per questo motivo si limiterà lo studio al caso di campi costanti.

¹Con uniformi si intende costanti nelle tre dimensioni spaziali.

3.2.1 Campo elettrico costante

Si consideri un campo solamente elettrico, ossia in cui $\vec{B} = 0$, costante nel tempo ed uniforme. Questo campo è orientato in una direzione spaziale determinata, il sistema quindi perde la sua proprietà di isotropia spaziale ma lo spazio permane isotropo. Per questo motivo è possibile orientare a piacere gli assi del sistema di riferimento così che: \vec{E} risulti parallelo all'asse x e l'asse y parallelo alla velocità iniziale della carica e quindi il moto avvenga nel piano xy . Dalla (3.1.6) si ha che il potenziale scalare può quindi essere espresso come $\varphi = |\vec{E}|x$, con $|\vec{E}|$ intensità del campo. Utilizzando questo potenziale le equazioni di Eulero Lagrange risultano in:

$$\dot{p}_x = q|\vec{E}|, \quad \dot{p}_y = 0, \quad \dot{p}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = q|\vec{E}|t, \quad p_y = p_0, \quad p_z = 0.$$

Facendo uso della relazione energia-impulso (2.2.12) si ottiene l'energia di corpo libero della particella ad un determinato istante:

$$E_{Lib} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + (cq|\vec{E}|t)^2} = mc^2\gamma.$$

Questa espressione dell'energia consente tramite la (2.2.6) di ottenere un'espressione istante per istante della velocità del corpo:

$$v_x = \frac{p_x c^2}{E_{Lib}} = \frac{c^2 q |\vec{E}| t}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + (cq|\vec{E}|t)^2}}, \quad v_y = \frac{p_y c^2}{E_{Lib}} = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + (cq|\vec{E}|t)^2}}.$$

Integrando rispetto al tempo queste tre espressioni si ottengono le equazioni del moto a meno di costanti additive:

$$x(t) = \int_0^t \frac{c^2 q |\vec{E}| t}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + (cq|\vec{E}|t)^2}} dt = \frac{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + (cq|\vec{E}|t)^2}}{q|\vec{E}|} + C_x, \quad (3.2.1)$$

$$y(t) = \int_0^t \frac{c^2 p_0}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + (cq|\vec{E}|t)^2}} dt = \frac{p_0 c}{q|\vec{E}|} \operatorname{arsinh}\left(\frac{cq|\vec{E}|t}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2}}\right) + C_y, \quad (3.2.2)$$

$$z(t) = C_z. \quad (3.2.3)$$

Posti $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, se si esprime nell'equazione del moto (3.2.2) il tempo rispetto ad y e lo si sostituisce nell'equazione del moto (3.2.1), si ottiene la traiettoria che compie la particella nel piano xy :

$$x(y) = \frac{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2}}{q|\vec{E}|} \left[\cosh\left(\frac{q|\vec{E}|y}{c\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2}}\right) - 1 \right]. \quad (3.2.4)$$

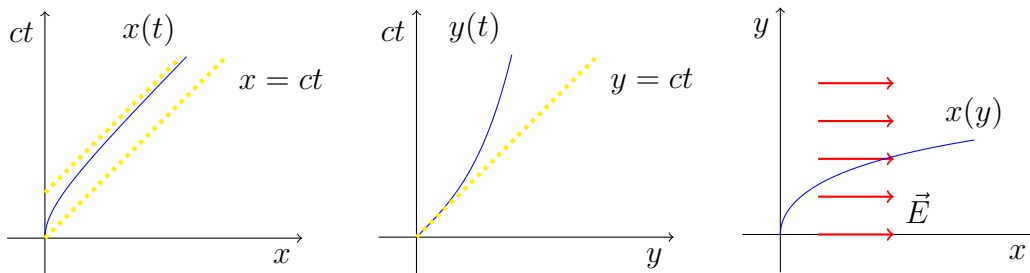


Figura 3.1: Rappresentazione grafica delle equazioni del moto ottenute.

In figura 3.1 è possibile apprezzare che per $t \rightarrow \infty$ si ha $v_x \rightarrow c$ e $v_y \rightarrow 0$: infatti anche se la forza di Lorentz è diretta solo nella direzione dell'asse x la particella decelera anche nella direzione dell'asse y affinché il moto sia sempre racchiuso nel cono di luce.

3.2.2 Campo magnetico costante

Se si considera solamente un campo magnetico uniforme, come si è fatto per il campo elettrico costante, è possibile orientare il sistema di riferimento in maniera tale da avere tale campo diretto lungo l'asse z . In questo modo il potenziale vettore dalla relazione (3.1.6) risulta $\vec{A} = \frac{|\vec{B}|}{2}(-y, x, 0)$, dove $|\vec{B}|$ è il modulo del campo magnetico.

Si osservi che, essendo la lagrangiana di questo sistema indipendente dal tempo, l'energia del sistema si conserva e dalla (3.1.5) questa (in assenza di campi elettrici) è $E = mc^2\gamma$. Usando le equazioni di Eulero Lagrange e la relazione (2.2.6) si ottiene:

$$\dot{p}_x = qv_y|\vec{B}| = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_x E}{c^2}\right), \quad \dot{p}_y = -qv_x|\vec{B}| = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_y E}{c^2}\right) \Rightarrow \dot{v}_x = v_y \frac{|\vec{B}|q}{m\gamma}, \quad \dot{v}_y = -v_x \frac{|\vec{B}|q}{m\gamma}.$$

Per risolvere questo sistema di equazioni differenziali si osservi che, se definisce la quantità $v_x + iv_y$, dove $i^2 = -1$, è possibile ricondursi ad un'equazione differenziale a variabili separabili:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i \frac{|\vec{B}|q}{m\gamma}(v_x + iv_y) \Rightarrow v_x + iv_y = v_0 e^{-i \frac{|\vec{B}|q}{m\gamma} t + i\alpha}$$

dove $\alpha = \arctan \frac{v_y(0)}{v_x(0)}$ e $v_0^2 = v_x^2(t) + v_y^2(t)$ sono due costanti da determinare.

Separando la parte immaginaria e la parte reale di quanto ottenuto e integrando nuovamente si ottengono le equazioni del moto:

$$v_x(t) = v_0 \cos\left(\frac{|\vec{B}|q}{m\gamma}t + \alpha\right) \Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{v_0 m\gamma}{|\vec{B}|q} \sin\left(\frac{|\vec{B}|q}{m\gamma}t + \alpha\right) \quad (3.2.5)$$

$$v_y(t) = -v_0 \sin\left(\frac{|\vec{B}|q}{m\gamma}t + \alpha\right) \Rightarrow y(t) = y_0 + \frac{v_0 m\gamma}{|\vec{B}|q} \cos\left(\frac{|\vec{B}|q}{m\gamma}t + \alpha\right) \quad (3.2.6)$$

$$v_z(t) = v_z \Rightarrow z(t) = z_0 + v_z t. \quad (3.2.7)$$

Proiettando il moto nel piano xy si ottiene una circonferenza centrata in (x_0, y_0) e di raggio $r = \frac{v_0 m\gamma}{|\vec{B}|q}$ che nel complesso da origine ad un'elica nello spazio.

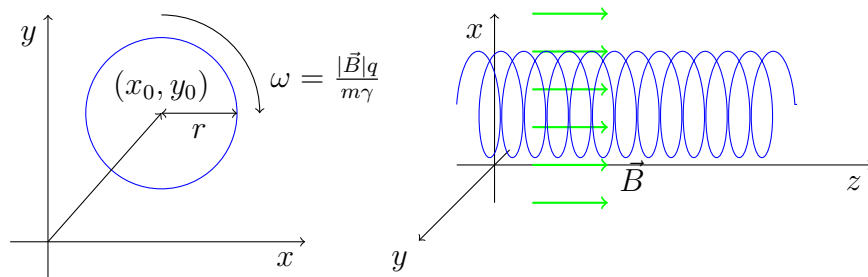


Figura 3.2: Rappresentazione grafica delle equazioni del moto ottenute.

Il risultato ottenuto è simile a quanto è predetto dalla meccanica classica, differisce da questa per il valore esatto della frequenza di rotazione e del raggio che dipendono da γ e si riconducono alle loro forme newtoniane nel limite classico per cui $\gamma \approx 1$.

3.3 Il tensore elettromagnetico

3.3.1 Il 4-potenziale

Nella Sezione 1.6 si è mostrato in che modo il campo elettrico e il campo magnetico si trasformino nel passaggio tra sistemi di riferimento inerziali. È quindi opportuno mostrare come il potenziale φ e il potenziale vettore \vec{A} si trasformino di conseguenza.

Se si considera una trasformazione di Lorentz tra due sistemi di riferimento (K e K') in moto reciproco, a velocità V lungo l'asse x , si hanno le seguenti trasformazioni degli operatori di differenziazione e del campo elettrico:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial t'} - \gamma V \frac{\partial}{\partial x'}, \quad (3.3.1)$$

$$E_x = E'_{x'}, \quad E_y = (E'_{y'} + V B'_{z'})\gamma, \quad E_z = (E'_{z'} - V B'_{y'})\gamma. \quad (3.3.2)$$

Nel sistema K' sono definiti dalla (3.1.1) i potenziali φ' e \vec{A}' , questi danno origine ai campi \vec{E}' e \vec{B}' . Utilizzando le trasformazioni (3.3.1) nella definizione del potenziale (3.1.1) si ottiene, per la prima componente del campo elettrico nel sistema K , che

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t'} - \gamma \frac{\partial A_x}{\partial t'} + \gamma V \frac{\partial A_x}{\partial x'} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x'} \left[\varphi - V A_x \right] \gamma - \frac{\partial}{\partial t'} \left[A_x - \frac{V}{c^2} \varphi \right] \gamma. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Si osservi che per la (3.3.2) E_x si trasforma tramite l'identità, per cui la relazione (3.3.3), appena ottenuta, è pari a $E'_{x'}$. Questa è in forma equivalente alla definizione dei potenziali (3.1.1), per cui si ha che:

$$\varphi' = \gamma \left(\varphi - V A_x \right), \quad A'_{x'} = \gamma \left(A_x - \frac{V}{c^2} \varphi \right). \quad (3.3.4)$$

Trasformando la componente E_y secondo la (3.3.2) e facendo uso delle definizioni dei potenziali (3.1.1) in K' si ottiene, tramite le trasformazioni degli operatori di differenziazione (3.3.1), un'espressione riconducibile alle definizioni dei potenziali in K :

$$\begin{aligned} E_y &= \gamma (E'_{y'} + V B'_{z'}) = \gamma \left[-\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} - \frac{\partial A'_{y'}}{\partial t'} + V \frac{\partial A'_{y'}}{\partial x'} - V \frac{\partial A'_{x'}}{\partial y'} \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial y'} \left[\varphi' + V A'_{x'} \right] \gamma - \frac{\partial A'_{y'}}{\partial t'} \gamma + V \frac{\partial A'_{y'}}{\partial x'} \gamma = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi' + V A'_{x'} \right] \gamma - \frac{\partial A'_{y'}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Da questo segue che:

$$\varphi = \gamma \left(\varphi' + V A'_{x'} \right), \quad A_y = A'_{y'}. \quad (3.3.5)$$

Analoghe considerazioni sulla componente E_z consentono di determinare che $A_z = A'_{z'}$. Così facendo si è mostrato che il potenziale scalare e il potenziale vettore si trasformano come un 4-vettore. Si può infatti costruire il 4-potenziale:

$$A^\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A} \right), \quad A_\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, -\vec{A} \right). \quad (3.3.6)$$

3.3.2 Equazioni del moto 4-vettoriali

Utilizzando il 4-potenziale (3.3.6) è possibile esprimere l'azione (3.1.4), di una particella interagente con campi elettromagnetici, tramite l'uso di 4-vettori. Infatti:

$$q\phi - \vec{v} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\gamma} A^\mu u_\mu = A^\mu \frac{dx_\mu}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S}[x^\mu(t)] = - \int_{t_1}^{t_2} \left(mc|\dot{x}^\mu(t)| + qA^\mu \dot{x}_\mu(t) \right) dt$$

in questo modo è evidente che questa azione sia ancora Lorentz invariante (siccome parametrizzando la curva d'integrazione rispetto al tempo proprio¹ ci si riconduce ad un prodotto scalare integrato rispetto ad una quantità invariante, che è quindi a sua volta Lorentz invariante).

Si vogliono ora studiare le variazioni dell'azione $\delta\mathcal{S}$ dovute a variazioni della traiettoria del corpo $\delta x^\mu(t)$. Queste danno luogo a variazioni $\delta\dot{x}^\mu(t) = \frac{d}{dt}\delta x^\mu(t)$ e $\delta A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\nu$, (poiché il 4-potenziale dipende dal punto nello spazio-tempo in cui è calcolato).

Per utilizzare il principio di minima azione si calcola la variazione prima che è data da:

$$\delta\mathcal{S}[x^\mu(t)] = - \int_{t_1}^{t_2} \left(mc \frac{\dot{x}^\mu(t)\delta\dot{x}_\mu(t)}{\sqrt{\dot{x}^\nu(t)\dot{x}_\nu(t)}} + qA^\mu\delta\dot{x}_\mu(t) + q\dot{x}_\mu(t)\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}\delta x_\nu \right) dt$$

ottenuta dall'espansione in serie di Taylor dell'integrando rispetto a x^μ e $\dot{x}^\mu(t)$.

Integrando per parti i primi due addendi dell'integrando si ottiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(mc \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}^\mu(t)}{\sqrt{\dot{x}^\nu(t)\dot{x}_\nu(t)}} + \frac{d}{dt} qA^\mu - q\dot{x}_\nu(t) \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} \right) \delta x_\mu(t) dt - \left(mc \frac{\dot{x}^\mu(t)}{\sqrt{\dot{x}^\nu(t)\dot{x}_\nu(t)}} + qA^\mu \right) \delta x_\mu(t) \Big|_{t_1}^{t_2},$$

dove il termine dopo l'integrale si annulla (siccome per le ipotesi del principio di minima azione $\delta x_\mu(t_1) = \delta x_\mu(t_2) = 0$). A questo punto affinché $x^\mu(t)$ renda estrema l'azione per $\delta x_\mu(t)$ arbitrario è necessario che tutto il termine tra parentesi tonde nell'integrando si annulli identicamente. Esplicitando, tramite la regola della derivata composta, la derivata totale rispetto al tempo di A^μ e ricordando che $\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^\nu(t)\dot{x}_\nu(t)}} = \frac{\gamma}{c}$ e si ottiene:

$$\frac{mc}{\sqrt{\dot{x}^\nu(t)\dot{x}_\nu(t)}} \frac{d}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} + q \frac{d}{dt} A^\mu - q \frac{dx_\nu}{dt} \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} = m\gamma \frac{d}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} + q \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \frac{dx_\nu}{dt} - q \frac{dx_\nu}{dt} \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} = 0.$$

Infine moltiplicando tutta l'ultima uguaglianza per γ e facendo uso della relazione $\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$ si ricava l'equazione di Newton² 4-dimensionale:

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = q \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \right) u_\nu = q F^{\mu\nu} u_\nu, \quad (3.3.7)$$

dove è stato introdotto il 4-tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}$. Se si calcolano esplicitamente tutte le derivate parziali di questo 4-tensore, dalla (3.1.1), si ha:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.8)$$

¹La scelta della parametrizzazione è arbitraria.

²L'equazione (3.3.7) è così chiamata poiché ricorda in forma l'equazione di Newton classica.

Si osservi che, per $\mu = 1, 2, 3$, la (3.3.7) esprime proprio la forza di Lorentz (1.2.8). Per $\mu = 0$ si ottiene

$$\frac{d}{d\tau}(mc\gamma) = \frac{q}{c} \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi \right] \cdot \vec{v} \gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(mc^2\gamma) = q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{v} - q \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{v} \quad (3.3.9)$$

che esprime la variazione di energia di corpo libero del sistema, ossia la potenza.

Se invece si valuta la variazione dell'azione variando il secondo estremo di integrazione e integrando su una curva del moto (come si è già fatto nella Sezione 2.2.2) si ottiene:

$$\delta S = - \left(mc \frac{\dot{x}^\mu(t)}{\sqrt{\dot{x}^\nu(t)\dot{x}_\nu(t)}} + qA^\mu \right) \delta x_\mu = -(mu^\mu + qA^\mu) \delta x_\mu \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial S}{\partial x_\mu} = mu^\mu + qA^\mu.$$

Il 4-gradiente dell'azione consente quindi di definire il 4-momento generalizzato della particella:

$$P^\mu = mu^\mu + qA^\mu = \left(\frac{mc^2\gamma + q\varphi}{c}, \vec{p} + q\vec{A} \right) \quad (3.3.10)$$

che come nel caso della particella libera ha come componenti l'energia del sistema e il suo momento generalizzato, già calcolati nella (3.1.5).

3.3.3 Invarianti del campo elettromagnetico

Come si è fatto per i 4-vettori, si vogliono identificare le quantità caratteristiche del 4-tensore elettromagnetico (3.3.8) che sono invarianti per trasformazioni di Lorentz. Il modo più semplice per ottenere tali quantità è di contrarre il 4-tensore elettromagnetico su altre quantità tensoriali opportune.

In primo luogo è possibile contrarre il 4-tensore elettromagnetico controvariante con quello covariante (come si è già visto nella Sezione 1.5 questa è una quantità Lorentz invariante):

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2 \left(|\vec{B}|^2 - \frac{|\vec{E}|^2}{c^2} \right) = \text{invariante}. \quad (3.3.11)$$

Questo implica direttamente che se in un sistema di riferimento vale $|\vec{B}|^2 c^2 \geq |\vec{E}|^2$ (oppure $|\vec{B}|^2 c^2 \leq |\vec{E}|^2$) allora questa relazione vale anche per ogni altra coppia di campi elettrici e magnetici in ogni altro sistema di riferimento inerziale.

Un secondo invariante può essere costruito contraendo il 4-tensore elettromagnetico controvariante e quello covariante con il simbolo di Levi-Civita. Quest'ultimo è un oggetto a più indici così definito in ogni sistema di riferimento:

$$e^{\mu\nu\delta\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{se } (\mu, \nu, \delta, \lambda) \text{ sono una permutazione pari di } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{se } (\mu, \nu, \delta, \lambda) \text{ sono una permutazione dispari di } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{se almeno due indici sono uguali} \end{cases} \quad (3.3.12)$$

Si ha quindi che è Lorentz invariante (siccome si sta contraendo quantità covarianti con quantità controvarianti):

$$e^{\mu\nu\delta\lambda} F_{\mu\nu} F_{\delta\lambda} = -8 \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c} = \text{invariante}. \quad (3.3.13)$$

Questa seconda quantità invariante consente di affermare che: se in un sistema di riferimento il campo elettrico è normale a quello magnetico allora in ogni altro sistema di riferimento si avranno campi perpendicolari.

È utile osservare che, facendo uso delle trasformazioni di Lorentz per i campi elettromagnetici (ricavate nella Sezione 1.6), è possibile scegliere arbitrariamente un secondo sistema di riferimento inerziale in cui i valori assunti dai due campi sono di più facile utilizzo. Gli unici vincoli su questa scelta sono proprio dati dalle due quantità invarianti determinate. In questo modo se $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ si può identificare un riferimento in cui i due campi sono paralleli mentre se $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ è possibile identificare un riferimento nel quale uno dei due campi è identicamente nullo.

Per quanto detto fino ad ora non è chiaro se di questi invarianti ve ne possano essere altri. Per rendere evidente che quelli trovati sono gli unici è possibile ragionare nel seguente modo: per prima cosa si osservi che gli invarianti che si sono individuati sono propri dei campi e quindi slegati dal formalismo che si utilizza. Per questo motivo è utile introdurre il seguente vettore a componenti complesse che ancora rappresenta il tensore elettromagnetico ma con un formalismo alternativo:

$$\vec{F} = \frac{\vec{E}}{c} + i\vec{B} \quad i^2 = -1.$$

Utilizzando le trasformazioni del campo elettrico e magnetico (ricavate nella Sezione 1.6) si possono ottenere le trasformazioni per questo vettore:

$$\begin{cases} F'_x = \frac{E_x}{c} + iB_x \\ F'_y = \gamma \frac{E_y}{c} - \frac{V}{c} \gamma B_z + i\gamma B_y + i\frac{V}{c^2} \gamma E_z \\ F'_z = \gamma \frac{E_z}{c} + \frac{V}{c} \gamma B_y + i\gamma B_z - i\frac{V}{c^2} \gamma E_y \end{cases} \Rightarrow \vec{F}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -i\frac{V}{c} \gamma \\ 0 & i\frac{V}{c} \gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}.$$

Questa trasformazione è una rotazione delle componenti y e z di \vec{F} (infatti il determinante della matrice che esprime la trasformazione è identicamente pari a 1). Un vettore conserva una sola quantità sotto rotazioni, ossia il suo modulo, che in questo caso questo è pari a:

$$|\vec{F}|^2 = \frac{|\vec{E}|^2}{c^2} - |\vec{B}|^2 + 2i \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c}.$$

Siccome questa quantità è complessa si ha che per essere invariante devono essere indipendentemente invarianti la sua parte reale e la sua parte immaginaria. Queste sono proprio, a meno di fattori moltiplicativi, gli invarianti precedentemente individuati.

3.4 Trasformazioni di gauge

Come si è già osservato nella Sezione 3.1, le definizioni (3.1.1) dei potenziali φ e \vec{A} non determinano in maniera univoca il campo elettrico e il campo magnetico. Nella fattispecie il potenziale vettore è definito a meno di un gradiente di un campo scalare $\xi(t, \vec{x})$. Per cui la trasformazione

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \xi \quad (3.4.1)$$

lascia invariato il campo magnetico, poiché il rotore di un gradiente è una quantità identicamente nulla:

$$\vec{B} \longrightarrow \vec{B}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{\nabla} \wedge [\vec{A} + \vec{\nabla} \xi] = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}.$$

La trasformazione (3.4.1) può però modificare la forma del campo elettrico, infatti ξ può dipendere dal tempo e tramite la definizione dei potenziali (3.1.1) si ha che:

$$\vec{E} \longrightarrow \vec{E}' = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\xi = \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\xi.$$

Per ovviare a questo problema si consideri una seconda trasformazione da utilizzare assieme alla (3.4.1):

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (3.4.2)$$

in questo modo (supponendo sufficiente regolarità di ξ per scambiare l'ordine delle derivate parziali) la trasformazione del campo elettrico risulta:

$$\vec{E} \longrightarrow \vec{E}' = -\vec{\nabla}\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\xi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\xi = \vec{E}.$$

Le due trasformazioni (3.4.1) e (3.4.2) lasciano quindi invariati campo elettrico e magnetico e prendono il nome di *trasformazioni di gauge*. Si osservi che queste trasformazioni sarebbero potute esser ricavate considerando quali trasformazioni del 4-potenziale non mutano la lagrangiana di interazione (3.1.3). È noto infatti che la lagrangiana è definita a meno di derivate totali rispetto al tempo e questo consente di trasformare:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + q \frac{d\xi}{dt},$$

dove $\xi(t, \vec{x})$ è una funzione scalare. Ne consegue che esplicitando la lagrangiana di interazione si ottiene:

$$\mathcal{L}' = -q\varphi + \vec{v} \cdot \vec{A} + q \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi \cdot \vec{v} \right) = -q \left(\varphi - \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + \vec{v} \cdot \left(\vec{A} + \vec{\nabla}\xi \right),$$

ossia le trasformazioni (3.4.1) e (3.4.2).

Infine si osservi che queste trasformazioni in forma 4-vettoriale diventano:

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \frac{\partial \xi}{\partial x_\mu} = A^\mu - \partial^\mu \xi. \quad (3.4.3)$$

Le trasformazioni di gauge possono essere molto utili per semplificare la risoluzione delle equazioni di Maxwell. Infatti, sostituendo i potenziali (3.1.1) nella prima e ultima equazione di Maxwell (1.2.9), si ottengono due equazioni differenziali che se risolte determinano i potenziali stessi:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.4.4)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}. \quad (3.4.5)$$

Si possono quindi annullare identicamente alcuni addendi facendo uso di apposite funzioni ξ . In funzione di quale di questi si vuole annullare si hanno diversi gauge.

3.4.1 Gauge di Lorentz

Il gauge di Lorentz è la richiesta che valga:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (3.4.6)$$

Questa condizione è la richiesta che si annulli identicamente tutto l'addendo tra parentesi tonde dell'equazione di Maxwell (3.4.5) che diventa un'equazione delle onde non omogenea. Analogamente, se si suppone una sufficiente regolarità dei potenziali (affinché sia possibile scambiare l'ordine derivate parziali temporali e spaziali¹) e si sostituisce il gauge di Lorentz nella equazione (3.4.4), anche questa diviene un'equazione delle onde non omogenea:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \varphi - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J}. \end{aligned}$$

Inoltre, se si suppone l'assenza di termini di sorgente di campo, si ottengono due equazioni equivalenti alle equazioni delle onde elettromagnetiche nel vuoto (1.2.11).

Si osservi che in questo caso si ha il vantaggio di avere un'invarianza relativistica di questa condizione: infatti, utilizzando il 4-potenziale e ricordando che $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, la condizione (3.4.6) diventa $\partial_\mu A^\mu = 0$ (che è un'equazione invariante sotto trasformazioni di Lorentz). Infine si osservi che questo gauge mantiene un certo grado di libertà nella scelta dei potenziali. Infatti se si compie un'ulteriore trasformazione di gauge $(\varphi, \vec{A}) \rightarrow (\varphi', \vec{A}')$ la condizione di gauge di Lorentz diviene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \vec{\nabla}^2 \xi + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

che è riconducibile nuovamente al gauge di Lorentz solo se ξ soddisfa anch'essa un'equazione delle onde (così che tutti i termini dove questa compare nell'ultima equazione ricavata si annullino). Sotto questa condizione è quindi possibili applicare altre trasformazioni che semplifichino ulteriormente il problema.

3.4.2 Gauge di Coulomb

Il gauge di Coulomb consiste nella condizione:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (3.4.7)$$

questa non è Lorentz invariante a differenza del gauge di Lorentz. Sostituendola nelle equazioni del potenziale (3.4.4) e (3.4.5) si ottengono le seguenti:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\mu_0 \vec{J}, \end{aligned}$$

¹Questa condizione nella trattazione dei prossimi gauge, per non doversi ripetere, sarà sottointesa.

dove la prima equazione è anche nota come equazione di Poisson.

In questo caso esiste un unico potenziale vettore che soddisfa il gauge di Coulomb. Infatti affinché una trasformazione di gauge $\vec{A} \rightarrow \vec{A}'$ soddisfi la (3.4.7) deve valere dappertutto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla}\xi) = \vec{\nabla}^2\xi = 0.$$

Questa condizione è soddisfatta se ξ è ovunque spazialmente costante, il che rende la trasformazione di gauge $\vec{A}' = \vec{A}$. Lo stesso non vale per φ e per la dipendenza temporale di ξ .

3.4.3 Gauge temporale

Il gauge temporale è dato dalla condizione:

$$\varphi = 0, \tag{3.4.8}$$

anch'essa non Lorentz invariante. Se sostituita nelle (3.4.4) e (3.4.5) risulta nelle equazioni:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= -\mu_0 \vec{J}. \end{aligned}$$

3.4.4 Gauge di radiazione

Infine il gauge di radiazione consiste nella richiesta simultanea del gauge di Coulomb (3.4.7) e del gauge temporale (3.4.8):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad \varphi = 0 \tag{3.4.9}$$

ma queste condizioni sono compatibili tra di loro se vale $\rho = 0$. Infatti imponendo prima la condizione del gauge di Coulomb si ha la relazione:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Come si è mostrato discutendo il gauge di Coulomb, questa prima condizione determina univocamente \vec{A} ma non φ . In virtù di questo fatto si può scegliere $\varphi = 0$ ma dalla relazione appena ricavata si ha che deve valere anche $\rho = 0$.

Le condizioni (3.4.9) applicate alle equazioni di Maxwell per i potenziali (3.4.4) e (3.4.5) risultano in una sola equazione:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

la soluzione di questa è un potenziale vettore che descrive un'onda elettromagnetica nel vuoto.

3.5 Elettromagnetismo in forma 4-vettoriale

Nella Sezione 3.3.2 è stato ricavato il 4-tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ ¹:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

questo tensore fa le veci dei campi elettromagnetici nel formalismo 4-vettoriale dello spazio-tempo della relatività. È quindi ora opportuno ricavare anche la forma delle equazioni di Maxwell (1.2.9) 4-vettoriale così da completare il quadro dell'elettromagnetismo nel formalismo della relatività.

3.5.1 4-corrente

Nella Sezione 1.2.2 si è già illustrato come sperimentalmente la carica elettrica sia una quantità invariante sotto cambio di sistema di riferimento. Questo, essendo un fatto sperimentale, continua a valere anche per nella relatività. Sempre nella Sezione 1.2.2 sono state introdotte due quantità sorgenti del campo elettromagnetico: la densità di carica volumetrica e la densità di corrente superficiale. Rispettivamente:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad \vec{J} = \rho \vec{v}(t, \vec{x}), \quad (3.5.1)$$

dove Δq è la carica contenuta nel volume ΔV e \vec{v} è il campo di velocità dato dal moto delle singole cariche che compongono la distribuzione descritta da ρ .

Si supponga di avere due sistemi di riferimento: K^0 nel quale tutte le cariche sono ferme e un secondo K nel quale queste si muovono a velocità \vec{v} . In questo modo dalla (3.5.1) si possono definire due densità di carica, ρ_0 in K^0 e ρ in K , tali che presa una regione di spazio \mathcal{V}_0 e la sua trasformata secondo un boost di Lorentz \mathcal{V} si abbia:

$$Q = \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0(t^{(0)}, \vec{x}^{(0)}) d^3x^{(0)} = \int_{\mathcal{V}} \rho(t, \vec{x}) d^3x.$$

Nella Sezione 1.4.2 si è mostrato che un parallelepipedo, in seguito ad un boost di Lorentz, subisce una contrazione del suo volume di un fattore γ . Questo stesso ragionamento può essere applicato all'elemento di volume infinitesimo in coordinate cartesiane che si trasforma: $d^3x^{(0)} = d^3x\gamma$. Così facendo si ottiene, dai due integrali sopra, considerando che il dominio di integrazione è arbitrario:

$$\int_{\mathcal{V}} \gamma \rho_0(\Lambda^{-1}(t, \vec{x})) d^3x - \int_{\mathcal{V}} \rho(t, \vec{x}) d^3x = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma \rho_0 = \rho. \quad (3.5.2)$$

Questa è la trasformazione della densità di carica da un sistema solidale alle cariche ad un altro sistema di riferimento inerziale. Si osservi che per questa trasformazione ρ_0 è uno scalare Lorentz invariante al pari del tempo proprio (infatti in ogni sistema di riferimento

¹In questa formula si è adottata la notazione alternativa, che verrà utilizzata anche successivamente, per le derivate parziali, già introdotta nella Sezione 1.5, secondo la quale: $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ e $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

inerziale è possibile, misurando ρ e la velocità del moto delle cariche, ottenere il valore di ρ_0 e che risulta il medesimo per tutti gli osservatori).

Dalla definizione di densità di corrente superficiale (3.5.1) si ha quindi che nel sistema di riferimento K vale $\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho_0 \gamma \vec{v}$.

Se ora si considera il 4-vettore velocità e lo si moltiplica per ρ_0 si ottiene un secondo 4-vettore (poiché quest'ultima è un invariante):

$$J^\mu = u^\mu \rho_0 = (\rho_0 c, \vec{v} \rho_0) \gamma = (\rho c, \vec{J}), \quad (3.5.3)$$

questo 4-vettore è chiamato *4-corrente*.

Si osservi che se si calcola la 4-divergenza della 4-corrente si ottiene:

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}, \quad (3.5.4)$$

che è l'equazione di continuità della carica. Inoltre questa quantità è uno scalare Lorentz invariante¹, per cui se si calcola la (3.5.4) nel sistema K^0 (dove risulta nulla poiché essendo le cariche in tale sistema immobili non si hanno correnti e tanto meno variazioni della densità di carica) si ha che l'equazione di continuità deve essere valida in ogni riferimento inerziale.

3.5.2 Equazioni di Maxwell 4-vettoriali

Si procederà ora a ricavare la forma 4-vettoriale delle equazioni di Maxwell. Per farlo si considerino le equazioni di Maxwell in cui sono state sostituiti il potenziale φ e il potenziale vettore \vec{A} (ottenute nella Sezione 3.4, Eq. (3.4.4) e Eq. (3.4.5)):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \varphi + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \vec{J}. \end{aligned}$$

Le restanti equazioni di Maxwell, sostituendovici i potenziali si riducono a semplici identità.

Indicando con lettere latine i soli indici 1, 2, 3 gli operatori di differenziazione che appaiono nelle equazioni precedenti diventano:

$$\vec{\nabla} = \partial_i, \quad \vec{\nabla}^2 = \partial_i \partial_i, \quad \frac{\partial}{\partial t} = c \partial_0.$$

In questo modo e utilizzando il potenziale vettore $A^\mu = (\frac{\varphi}{c}, \vec{A})$ le due equazioni di Maxwell (3.4.4) e (3.4.5) divengono:

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_i A^0 + \partial_i \partial_0 A^i &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} c, \\ \partial_i \partial_i A^k - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{c^2} \partial_0 \partial_0 A^k - \partial_k \left(\partial_i A^i + \frac{\epsilon_0 \mu_0}{c^2} \partial_0 A^0 \right) &= -\mu_0 J^k, \end{aligned}$$

¹In questo caso accade che trasformando la 4-corrente e gli operatori di differenziazione si ha: $\partial'_\mu J'^\mu = \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \Lambda^\mu_\lambda J^\lambda = \partial_\nu \delta^\nu_\lambda J^\lambda = \partial_\nu J^\nu$.

Ricordando che $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ e che passando da vettori covarianti a controvarianti la matrice metrica cambia solo il segno delle componenti spaziali del 4-vettore si ottiene:

$$\begin{aligned} -\partial_i\partial^i A^0 + \partial_i\partial^0 A^i &= \partial_i\partial^0 A^i - \partial_i\partial^i A^0 = -\mu_0\rho c, \\ -\partial_i\partial^i A^k - \partial_0\partial^0 A^k + \partial^k(\partial_i A^i + \partial_0 A^0) &= \partial^k\partial_\mu A^\mu - \partial_\mu\partial^\mu A^k = -\mu_0 J^k. \end{aligned}$$

A questo punto è necessario supporre che i potenziali abbiano sempre una regolarità tale da soddisfare le ipotesi del teorema di Schwarz, così che si possa scambiare l'ordine delle derivate parziali. Così facendo e sommando e sottraendo nella prima equazione opportuni termini si ottiene:

$$\begin{aligned} \partial_i\partial^0 A^i - \partial_i\partial^i A^0 + \partial_0\partial^0 A^0 - \partial_0\partial^0 A^0 &= \partial_\mu\partial^0 A^\mu - \partial_\mu\partial^\mu A^0 = -\mu_0\rho c, \\ \partial^k\partial_\mu A^\mu - \partial_\mu\partial^\mu A^k &= \partial_\mu\partial^k A^\mu - \partial_\mu\partial^\mu A^k = -\mu_0 J^k. \end{aligned}$$

Infine riconoscendo in queste equazioni che $\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu = -F^{\mu\nu}$ ¹ e $\rho c = J^0$ si ottiene

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\partial^0 A^\mu - \partial^\mu A^0) &= -\partial_\mu F^{\mu 0} = -\mu_0 J^0, \\ \partial_\mu(\partial^k A^\mu - \partial^\mu A^k) &= -\partial_\mu F^{\mu k} = -\mu_0 J^k. \end{aligned}$$

Queste se riunite in un'unica equazione rappresentano la forma 4-vettore delle equazioni di Maxwell:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu. \quad (3.5.5)$$

Così facendo si è palesata la covarianza di queste equazioni, che è stata richiesta in primo luogo per ricavare la relatività speciale.

¹ $F^{\mu\nu}$ dalla sua definizione è antisimmetrico per cui $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

Appendice A

Lemmi e teoremi per le trasformazioni di Lorentz

Nelle seguenti pagine sono riportati alcuni risultati utili per la derivazione delle trasformazioni di Lorentz tra cui una dimostrazione dell'affinità delle trasformazioni di Lorentz riportata da Fock nel suo manuale^[2].

A.1 Risultati generali

Lemma 1. *Siano $v, u \in \mathbb{R}^n$, \langle, \rangle sia il prodotto scalare euclideo e siano definite $f_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tale che $f_u(v) = \langle u, v \rangle$, e $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ forma quadratica tale che $q(v) = \langle v, Av \rangle$, con $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica. Se, fissato \bar{v} tale che $f_u(\bar{v}) = 0$ implica che $q(\bar{v}) = 0$, allora $\exists \psi \in \mathbb{R}^n$ tale che $q(v) = f_u(v) \langle \psi, v \rangle \forall v \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Si osservi che è possibile decomporre v in una componente ortogonale ad u ed una parallela:

$$v = v^{\parallel} + v^{\perp} = \frac{u \langle u, v \rangle}{\|u\|^2} + v - \frac{u \langle u, v \rangle}{\|u\|^2} + \quad (\text{A.1.1})$$

si esprima quindi $q(v)$ secondo questa decomposizione:

$$\begin{aligned} q(v) &= \langle v^{\parallel} + v^{\perp}, A(v^{\parallel} + v^{\perp}) \rangle \\ &= \langle v^{\parallel}, Av^{\parallel} \rangle + 2 \langle v^{\perp}, Av^{\parallel} \rangle + \langle v^{\perp}, Av^{\perp} \rangle \end{aligned}$$

il termine $\langle v^{\perp}, Av^{\perp} \rangle$ è per definizione $q(v^{\perp})$ e poichè per costruzione di v^{\perp} si ha $f_u(v^{\perp}) = 0$, per le ipotesi $q(v^{\perp})$ deve annullarsi per cui:

$$q(v) = \langle v^{\parallel}, Av^{\parallel} \rangle + 2 \langle v^{\perp}, Av^{\parallel} \rangle$$

sostituendo le espressioni complete di v^{\perp} e v^{\parallel} , dalla (A.1.1), si ha:

$$\begin{aligned} q(v) &= \langle u, Au \rangle \left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} \right)^2 + 2 \langle v^{\perp}, Au \rangle \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} \\ &= \langle u, Au \rangle \left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} \right)^2 + 2 \langle v, Au \rangle \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} - 2 \langle u, Au \rangle \left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Infine se si raccoglie un termine $\langle u, v \rangle$ e si sommano i termini uguali si ottiene un'espressione per $q(v)$ composta da un termine lineare rispetto a v moltiplicato per il prodotto scalare $\langle u, v \rangle$:

$$q(v) = \langle u, v \rangle \left[2 \frac{\langle v, Au \rangle}{\|u\|^2} - \frac{\langle u, Au \rangle \langle u, v \rangle}{\|u\|^4} \right] \quad \forall v \in \mathbb{R}^4 \quad (\text{A.1.2})$$

□

Lemma 2. Sia $v \in \mathbb{R}^4$, per comodità si scriverà $v = (v_0, v_1, v_2, v_3) = (v_0, \vec{v})$, tale che $\vec{v} \neq 0$. Sia quindi $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ una forma quadratica tale che, se fissato \bar{v} con $\bar{v}_0^2 - |\vec{v}|^2 = 0$ implica $q(\bar{v}) = 0$, allora $\exists \lambda$ tale che $q(v) = \lambda(v_0^2 - |\vec{v}|^2) \quad \forall v \in \mathbb{R}^4$.

Dimostrazione. Si osservi che $q(v)$ può essere scomposto, seguendo le regole del prodotto righe per colonne $q(v) = v^t A v$ (dove $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ simmetrica), nella seguente somma:

$$q(v) = a_{00}v_0^2 + 2v_0(a_{01}v_1 + a_{02}v_2 + a_{03}v_3) + \hat{q}(\vec{v})$$

dove \hat{q} è ancora una forma quadratica in \mathbb{R}^3 che agisce su \vec{v} .

Si consideri ora un vettore $\bar{v} \in \mathbb{R}^4$ e tale che considerando v allora $\bar{v} = (-|\vec{v}|, \vec{v})$; per costruzione $(\bar{v}_0)^2 - |\vec{v}|^2 = |\vec{v}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0$, per cui per le ipotesi assunte si ha $q(\bar{v}) = 0$.

Essendo $q(\bar{v}) = 0$ si può scrivere:

$$\begin{aligned} q(v) &= q(v) - q(\bar{v}) \\ &= a_{00}(v_0^2 - |\vec{v}|^2) + 2(v_0 - |\vec{v}|)(a_{01}v_1 + a_{02}v_2 + a_{03}v_3) + \hat{q}(\vec{v}) - \hat{q}(\vec{v}) \\ &= a_{00}(v_0^2 - |\vec{v}|^2) + 2(v_0 - |\vec{v}|)(a_{01}v_1 + a_{02}v_2 + a_{03}v_3) \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

inoltre calcolando la (A.1.3) per \bar{v} si ha:

$$q(\bar{v}) = -2|\vec{v}|(a_{01}v_1 + a_{02}v_2 + a_{03}v_3) = 0$$

Per ipotesi $|\vec{v}| \neq 0$ per cui $a_{01} = a_{02} = a_{03} = 0$ che dimostra il lemma poiché implica:

$$q(v) = a_{00}(v_0^2 - |\vec{v}|^2) \quad \forall v \in \mathbb{R}^4 \quad (\text{A.1.4})$$

□

A.2 Una dimostrazione della linearità delle trasformazioni di Lorentz

Siano $x, x' \in \mathbb{R}^4$ due vettori dello spazio-tempo misurati in due sistemi di riferimento inerziali K e K' , si vogliono determinare le proprietà dell'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che trasforma i vettori misurati in K negli stessi vettori misurati in K' e viceversa considerando validi il principio di Relatività e il principio di costanza della velocità della luce.

Per prima cosa si supporrà che f sia sufficientemente regolare, almeno C^2 , ed è necessario che sia invertibile poiché deve poter trasformare sia da K a K' , sia viceversa: questa condizione è equivalente a richiedere che $\det J_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4$.

Si considerino ora $\xi, \gamma \in \mathbb{R}^4$, rispettivamente detti punto iniziale e velocità della parametrizzazione, che consentono di parametrizzare un moto rettilineo uniforme nel seguente modo:

$$x = \xi + s\gamma \quad s \in \mathbb{R}$$

infatti è possibile esplicitare la dipendenza di x_0 da s per ottenere la forma di un moto rettilineo uniforme, per questo motivo è necessario che $\gamma_0 \neq 0$.

$$s = \frac{x_0 - \xi_0}{\gamma_0} \quad \Rightarrow \quad x_i = \xi_i + \frac{x_0 - \xi_0}{\gamma_0} \gamma_i \quad i = 1, 2, 3$$

Secondo il principio di relatività se si calcola $f(x) = x'$ è necessario che $x' = \xi' + s'\gamma'$ così che un moto rettilineo uniforme resti tale in ogni sistema di riferimento inerziale. Derivando $f(\xi + s\gamma)$ rispetto al parametro s' si ottiene:

$$\frac{dx'}{ds'} = \gamma' = J_f(\xi + s\gamma) \frac{ds}{ds'} \gamma$$

si consideri ora la i -esima componente di γ' , dove $i = 0, 1, 2, 3$, e la si divida per γ_0 :

$$\frac{\gamma'_i}{\gamma'_0} = \frac{\sum_{k=0}^3 \partial_k f_i(\xi + s\gamma) \gamma_k}{\sum_{k=0}^3 \partial_k f_0(\xi + s\gamma) \gamma_k}$$

dove $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$. Da ora in poi si utilizzerà la convenzione degli indici ripetuti di Einstein per cui $\sum_k x_k y_k = x_k y_k$.

Il rapporto $\frac{\gamma'_i}{\gamma'_0}$ è costante da cui segue immediatamente che $\frac{d}{ds} \frac{\gamma'_i}{\gamma'_0} = 0$ e quindi:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \frac{\partial_k f_i(\xi + s\gamma) \gamma_k}{\partial_j f_0(\xi + s\gamma) \gamma_j} \\ &= \frac{(\partial_{hn}^2 f_i(\xi + s\gamma) \gamma_h \gamma_n) (\partial_k f_0(\xi + s\gamma) \gamma_k) - (\partial_k f_i(\xi + s\gamma) \gamma_k) (\partial_{hn}^2 f_0(\xi + s\gamma) \gamma_h \gamma_n)}{(\partial_j f_0(\xi + s\gamma) \gamma_j)^2} = 0 \end{aligned}$$

che può annullarsi solo se si annulla il numeratore della frazione. Da questa osservazione e dal fatto che preso un $x \in \mathbb{R}^4$ esistono $\gamma \in \mathbb{R}^4, s \in \mathbb{R}$ tali che $x = \xi + s\gamma$ si ottiene:

$$(\partial_{hn}^2 f_i(x) \gamma_h \gamma_n) (\partial_k f_0(x) \gamma_k) = (\partial_k f_i(x) \gamma_k) (\partial_{hn}^2 f_0(x) \gamma_h \gamma_n) \quad \forall x, \gamma \in \mathbb{R}^4 \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{A.2.1})$$

Siccome si è supposto inizialmente $\det J_f(x) \neq 0$ deve necessariamente esistere almeno un j tale che $\forall \gamma \in \mathbb{R}^4 \quad \partial_k f_j(x) \gamma_k \neq 0$, inoltre se si suppone di prendere $\bar{\gamma}$ tale che $\partial_k f_0(x) \bar{\gamma}_k = 0$ allora per la (A.2.1) necessariamente anche $\partial_{hn}^2 f_0(x) \bar{\gamma}_h \bar{\gamma}_n = 0$.

Si applichi quindi il Lemma (1) il quale, in virtù del fatto che $\partial_k f_0(x) \bar{\gamma}_k = 0 \Rightarrow \partial_{hn}^2 f_0(x) \bar{\gamma}_h \bar{\gamma}_n = 0$, consente di scrivere:

$$\partial_{hn}^2 f_0(x) \gamma_h \gamma_n = \langle \psi(x), \gamma \rangle (\partial_k f_0(x) \gamma_k) \quad \forall x, \gamma \in \mathbb{R}^4 \quad i = 0, 1, 2, 3$$

che inserito nella (A.2.1) risulta in:

$$(\partial_{hn}^2 f_i(x) \gamma_h \gamma_n) (\partial_k f_0(x) \gamma_k) = (\partial_k f_i(x) \gamma_k) \langle \psi(x), \gamma \rangle (\partial_k f_0(x) \bar{\gamma}_k)$$

infine siccome $\gamma'_0 \neq 0$ affinché sia x' sia un moto rettilineo uniforme, a maggior ragione la su espressione data dalla jacobiana di f soddisfa $(\partial_k f_0(x) \gamma_k \frac{ds}{ds'}) \neq 0$ ed è quindi possibile elidere da ambo i lati tale membro:

$$\partial_{hn}^2 f_i(x) \gamma_h \gamma_n = (\partial_k f_i(x) \gamma_k) < \psi(x), \gamma > \quad \forall x, \gamma \in \mathbb{R}^4 \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{A.2.2})$$

Si osservi che $\partial_{hn}^2 f_i(x)$ è una matrice simmetrica per il teorema di Schwarz per cui dall'espressione appena ottenuta si può scrivere:

$$\partial_{hk}^2 f_i(x) = \frac{1}{2} (\partial_k f_i(x) \psi_h(x) + \partial_h f_i(x) \psi_k(x)) \quad (\text{A.2.3})$$

Si consideri ora x e x' parametrizzazioni del moto di un raggio di luce, per il principio di costanza della velocità della luce se in K x è parametrizzato sul cono di luce, lo stesso deve avvenire in K' , il che è esprimibile matematicamente con le due condizioni:

$$\begin{aligned} \gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) &= 0 \\ (\gamma'_0)^2 - [(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 + (\gamma'_3)^2] &= 0 \end{aligned}$$

e poiché si può esprimere ogni componente di γ' tramite la jacobiana di f e γ , come già si è fatto calcolando $\frac{\gamma'_i}{\gamma'_0}$:

$$(\partial_k f_0(x) \gamma_k)^2 - \left[\sum_{i=1}^3 (\partial_k f_i(x) \gamma_k)^2 \right] = 0$$

Il principio di costanza della velocità della luce consente di utilizzare il lemma (2) poiché l'annullarsi di una forma quadratica implica l'annullarsi dell'altra, da cui si ha che:

$$(\partial_k f_0(x) \gamma_k)^2 - \left[\sum_{i=1}^3 (\partial_k f_i(x) \gamma_k)^2 \right] = \lambda(x) [\gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)]$$

Sia ora g_{ij} una matrice tale per cui $g_{00} = 1$, $g_{ii} = -1$ per $i = 1, 2, 3$ e $g_{ij} = 0$ se $i \neq j$, così facendo:

$$\begin{aligned} \lambda(x) [\gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)] &= \lambda(x) g_{kh} \gamma_k \gamma_h = g_{ij} (\partial_k f_i(x) \gamma_k) (\partial_h f_j(x) \gamma_h) \\ \Rightarrow \lambda(x) g_{hk} &= g_{ij} (\partial_k f_i(x)) (\partial_h f_j(x)) \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

Si derivi ora rispetto a x_s ad ambo i membri così da ottenere:

$$g_{hk} \partial_s \lambda = 2 g_{ij} \partial_{ks}^2 f_i(x) \partial_h f_j(x)$$

sostituendo la derivata seconda parziale tramite la (A.2.3) questa espressione è semplificabile e si ottiene:

$$g_{hk} \partial_s \lambda = g_{ij} [\partial_k f_i(x) \psi_s + \partial_s f_i(x) \psi_k] \partial_h f_j(x) \quad (\text{A.2.5})$$

infine applicando nuovamente la (A.2.4) si possono sostituire tutti i prodotti di derivate parziali:

$$g_{hk} \partial_s \lambda = g_{kh} \lambda \psi_s + g_{sh} \lambda \psi_k$$

Si considerino queste due differenti casistiche:

- Siano $k = h \neq s$ allora:

$$g_{hk}\partial_s\lambda = g_{kh}\lambda\psi_s \Rightarrow \partial_s\lambda = \psi_s\lambda$$

- Siano $k = h = s$ allora:

$$g_{hk}\partial_s\lambda = 2g_{kh}\lambda\psi_s \Rightarrow \partial_s\lambda = 2\psi_s\lambda$$

Queste due relazioni appena ottenute implicano però che $\lambda\psi_i = 0$ per $i = 0, 1, 2, 3$, λ però non può annullarsi altrimenti la trasformazione f mapperebbe ogni moto in un moto a velocità luminare, il che viola il Principio di Relatività.

Segue quindi che $\psi_i = 0$ per $i = 0, 1, 2, 3$, per cui dalla (A.2.3) risulta:

$$\partial_{kh}^2 f_i(x) = 0 \quad \forall i, k, h = 0, 1, 2, 3 \forall x \in \mathbb{R}^4 \quad (\text{A.2.6})$$

per cui $f(x)$ può essere esclusivamente una trasformazione affine.

Bibliografia

- [1] A. Einstein. Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento. *Annalen der Physik*, 17:891–921, 1905. Traduzione di S. Antoci.
- [2] V. Fock. *The Theory of Space, Time and Gravitation*. Pergamon, 1964.
- [3] J. Jeffers. Lost theorems of geometry. *The American Mathematical Monthly*, 107(9):800–812, 2000.
- [4] Evgenij M. Lifšits Lev D. Landau. *Fisica teorica 2*. Editori Riuniti, 1976.