Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

TITOLO TESI

Relatore:

Prof. Paolo Albano

Presentata da:

Luca Morelli

Anno Accademico 2022/2023

Abstract:

Riassunto breve del documento da creare dove si sintetizzano tutti i punti trattati in maniera tale da rendere più immediata la selezione del documento da parte di un sventurato lettore.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Nella seconda metà del diciannovesimo secolo la fisica, nata con la meccanica di Newton, era riuscita a trovare un'esaustiva spiegazione dei fenomeni elettromagnetici tramite le equazioni di Maxwell. Queste due teorie descrivevano brillantemente i loro rispettivi ambiti ma risultarono incompatibili. Proprio per questo motivo i fisici dell'epoca dovettero rivalutare i principi alla base delle leggi della natura. L'incompatibilità trovò una soluzione nel 1905 con la Relatività Ristretta di Einstein. Si ripercorreranno ora i passaggi che portarono a questa teoria.

1.1 La meccanica e le trasformazioni di Galileo

La meccanica classica, in tutte le sue possibili formulazioni, ha come fondamento una serie di osservazioni sperimentali che vengono utilizzate come principi da cui dedurre le leggi del moto.

Il primo fatto sperimentale che viene assunto è che lo spazio sia tridimensionale, isotropo, omogeneo e che rispetti la geometria euclidea mentre il tempo sia ad una sola dimensione e che sia assoluto come sono assolute le distanze spaziali.
Sulla base di queste assunzioni si può quindi scegliere un punto dello spazio-tempo come origine di un sistema di coordinate o di riferimento, ossia uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ che ha come vettore nullo il punto scelto. Osserviamo che il punto in questione è arbitrario, come lo è la direzione degli assi corrispondenti ai vettori della base, poichè spazio e tempo sono isotropi ed omogenei.

Il secondo fatto sperimentale prende il nome di Principio di Relatività Galileiano e consiste nell'assunzione che esistano una serie di sistemi di riferimento detti inerziali, caratterizzati dalla proprietà di essere reciprocamente in moto rettilineo uniforme, in cui le leggi della natura in ogni istante assumono la stessa forma.

Infine si assume che le posizioni e le velocità dei punti di un sistema ad un tempo iniziale determinino in maniera univoca l'evoluzione del sistema secondo la legge:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \tag{1.1.1}$$

dove m è detta massa inerziale e $\vec{F}$ è una funzione caratteristica del sistema detta forza.

Si vuole quindi identificare quali applicazioni $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ consentono di cambiare sistema di riferimento inerziale, ossia quali trasformazioni non variano le leggi della natura. Queste applicazioni si chiamano Trasformazioni di Galileo e dalle evidenze sperimentali si conclude che queste sono costituite dalle composizioni di tre famiglie di applicazioni:

- una generica traslazione spazio temporale dell'origine, dedotta dalla proprietà di omogeneità dello spazio e del tempo:

$$\varphi_{\vec{r},s}(\vec{x}, t) = (\vec{x} + \vec{r}, t + s) \tag{1.1.2}$$

- una generica rotazione degli assi spaziali, dovuta alla proprietà di isotropia dello spazio:

$$\varphi_G(\vec{x}, t) = (G\vec{x}, t) \qquad G \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) : G^{-1} = G^t \tag{1.1.3}$$

- una traslazione di moto rettilineo uniforme, ammissibile grazie alle proprietà dei sistemi di riferimento inerziali:

$$\varphi_{\vec{v}}(\vec{x}, t) = (\vec{x} + \vec{v}t, t) \tag{1.1.4}$$

Quest'ultima tipologia di trasformazione è quella che viene comunemente studiata per caratterizzare le trasformazioni di sistemi inerziali. Consideriamo quindi un sistema K, con coordinate $(\vec{x}, t)$ e un sistema k, con coordinate $(\vec{\xi}, \tau)$, in moto a velocità $\vec{v}$ rispetto a K, scriveremo allora la (1.1.4) come:

$$\vec{\xi} = \vec{x} - \vec{v}t \qquad \tau = t \tag{1.1.5}$$

Per determinare l'invarianza di un legge fisica rispetto a queste trasformazioni è necessario studiare come si trasformino gli operatori di differenziazione con la (1.1.5). Se si vuole derivare una $f(\vec{x}, t)$, dalla regola di Leibniz, abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial x_i}$$
$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{\partial t}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

osservando dalla (1.1.5) che $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 1$, che $\frac{\partial t}{\partial \xi_i} = 0$, che $\frac{\partial x_i}{\partial t} = v_i$ e che $\frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} = \delta_{ij}$, dove δ_{ij} è una delta di Kronecker, si ottengono le trasformazioni degli operatori di differenziazione desiderate:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.1.6}$$

Si noti inoltre che questa trasformazione, essendo lineare, non muta la forma del vettore $\ddot{\vec{x}}$, infatti:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{\xi}) = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{x} - \vec{v}t) = \ddot{\vec{x}} + \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \ddot{\vec{x}}$$

questo fatto, assieme al Principio di Relatività Galileiano applicato alla Legge di Newton (1.1.1), impongono che le forze esercitate su di un punto e misurate in due sistemi inerziali differenti debbano essere le medesime.

1.2 L'elettromagnetismo e le equazioni di Maxwell

Per interpretare i fenomeni elettromagnetici, anche in questo caso, è necessario introdurre una serie di osservazioni sperimentali: in primo luogo esiste una proprietà della materia detta carica elettrica, che non dipende dal sistema di riferimento in cui è misurata, che consente ai corpi di interagire con due campi vettoriali: il campo Elettrico $\vec{E}$ e il campo Magnetico $\vec{B}$.
Un corpo puntiforme di carica q interagendo con questi subisce un forza data da:

$$\vec{F} = q(\vec{E}(\vec{x},t) + \dot{\vec{x}} \wedge \vec{B}(\vec{x},t)) \tag{1.2.1}$$

In secondo luogo gli esperimenti mostrarono che questi due campi rispettano una serie di equazioni dette Equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

dove ρ è la densità di carica volumetrica, $\vec{J}$ è la densità di corrente superficiale e ϵ_0, μ_0 sono due costanti del vuoto.

Si può ottenere dalle Equazioni di Maxwell (1.2.2), calcolando il rotore di ambo i membri delle ultime due

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \wedge \vec{B} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

e supponendo assenza di cariche per cui $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$, due equazioni che descrivono onde di campo Elettrico e Magnetico nel vuoto:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{1.2.3}$$

Queste onde si propagano con una velocità $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.99795\ 10^8\ \frac{m}{s}$, indipendentemente dal sistema di riferimento, che corrisponde con precisione ai valori sperimentalmente misurati della velocità della luce.

1.3 La non invarianza delle Equazioni di Maxwell

Si considerino due sistemi di riferimento K e K', inerziali e reciprocamente in moto a velocità $\vec{V}$, in ogni sistema si misureranno rispettivamente $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{E'}$, $\vec{B'}$. Il principio di relatività galileiana impone che questi due campi, nei loro sistemi di riferimento, rispettino le Equazioni di Maxwell (1.2.2), inoltre, siccome la forza (1.2.1) deve essere la medesima in tutti i sistemi di riferimento inerziali, considerando una carica q in moto con velocità $\vec{v}$ in K e $\vec{V} + \vec{v}$ in K' deve valere:

$$\begin{aligned} \vec{F'} = \vec{F} \quad &\Rightarrow \quad \vec{E'} + \vec{v} \wedge \vec{B'} = \vec{E} + (\vec{V} + \vec{v}) \wedge \vec{B} \\ &\Rightarrow \quad \vec{E'} + \vec{v} \wedge (\vec{B'} - \vec{B}) = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B'} \end{aligned}$$

Così facendo si possono ottenere le trasformazioni dei capi Elettrici e Magnetici tra sistemi inerziali che però devono dipendere esclusivamente dai due sistemi di riferimento considerati e nella fattispecie dalla loro velocità reciproca, poichè non ha alcun senso che dipendano dalla velocità di un corpo specifico in uno dei due sistemi, per questo motivo il termine contnente $\vec{v}$ deve annullarsi e così le trasformazioni risultano:

$$\begin{cases} \vec{E'}(\vec{x'}, t) = \vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{V} \wedge \vec{B}(\vec{x}, t) \\ \vec{B'}(\vec{x'}, t) = \vec{B}(\vec{x}, t) \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Bisonga ora studiare come si trasformano le grandezze generatici dei campi: ρ e $\vec{J}$. Se si considera una volume ΔV, in cui è presente una carica Δq, allora la densità di carica è definita come:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

Siccome le lunghezze sono assunte essere assolute devono esserlo pure i volumi ed, essendo la carica non dipendente dal sistema di riferimento, si conclude che pure la densità di carica non lo è. Per quanto riguarda la densità di corrente superficiale, definita come $\vec{J} = \rho\vec{v}$, è sufficiente applicare le trasformazioni delle velocità tra due sistemi in moto reciproco a velocità $\vec{V}$ per ottenere:

$$\vec{J'} = \vec{J} - \rho\vec{V} \tag{1.3.2}$$

I risultati appena ottenuti consentono di determinare l'invarianza delle Equazioni di Maxwell per le Trasformazioni di Galileo. Considerando la prima equazione in K', trasformando E' in E e analogmante per gli operatori di differenziazione secondo la (1.1.6):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' \cdot \vec{E'} - \frac{\rho}{\epsilon_0} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) &- \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \end{aligned}$$

Perchè sia valida questa Equazione di Maxwell in K' deve annullarsi questa quantità: il termine tra parentesi è identicamente nullo poichè valgono le Equazioni di Maxwell in K mentre l'ultimo termine non è sempre nullo, nella fattispecie in presenza di campi eletrici variabili nel tempo, questo implica che quindi la prima Equazione di Maxwell non è invariante per le Trasfromazioni di Galileo. Se si studia la seconda con lo stesso procedimento si scopre che questa invece è invariante:

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Analogamente per la terza equazione:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' \wedge \vec{E}' + \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{E}' + \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}' \\ &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \\ = \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) &+ \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{B} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = 0 \end{aligned}$$

infatti il termine tra parentesi è identicamente nullo poichè in K vale la terza Equazione di Maxwell e gli addendi restanti si annullano se sviluppati tramite le regole di differenziazione ricordando che $\vec{V}$ è costante:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{B} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = -(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = 0$$

L'ultima Equazione di Maxwell è invece non invariante infatti sempre con il medesimo procedimento si ottiene:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' \wedge \vec{B}' - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} - \mu_0\vec{J}' &= \vec{\nabla} \wedge \vec{B}' - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}' - \mu_0\vec{J}' \\ = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0\vec{V} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &- \mu_0\epsilon_0(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) - \mu_0\vec{J} + \mu_0\vec{V}\rho \\ = \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0\vec{J}\right) - \mu_0\epsilon_0\vec{V} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &- \mu_0\epsilon_0(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) + \mu_0\vec{V}\rho \\ = -\mu_0\epsilon_0\vec{V} \wedge (-\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &- \mu_0\epsilon_0(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) + \mu_0\vec{V}\rho \\ &= -\mu_0\epsilon_0(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(\vec{V} \wedge \vec{B}) + \mu_0\vec{V}\rho \end{aligned}$$

che non è nullo in generale con le assunzioni fin qui fatte.

Si è quindi giunti alla conclusione che la teoria di Maxwell non è conciliabile con la meccanica di Newton e viceversa.

Appendice A

Sulla linearità delle trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz sono una famiglia di trasformazioni affini, ossia composte da una generica traslazione in quattro dimensioni e un'applicazione lineare. Questa loro proprietà è deducibile dai postulati di Einstein e solitamente, nella maggior parte delle trattazioni della teoria della Relatività, è data come proprietà ovvia. Nelle seguenti pagine è presentata la dimostrazione di tale proprietà.

A.1 Prerequisiti matematici

In primo luogo è necessario dimostrare due Lemmi che si rivelano utili anche per altri aspetti della teoria della Relatività.

Lemma 1. *Siano $v, u \in \mathbb{R}^n$, $<,>$ sia il prodotto scalare euclideo e siano definite $f_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tale che $f_u(v) = < u, v >$, e $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma quadratica tale che $q(v) = < v, Av >$, con $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica. Se, fissato $\bar{v}$ tale che $f_u(\bar{v}) = 0$ implica che $q(\bar{v}) = 0$, allora $\exists \psi \in \mathbb{R}^n$ tale che $q(v) = f_u(v) < \psi, v > \forall v \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Si osservi che è possibile decomporre v in una componente ortogonale ad u ed una parallela:

$$v = v^{\parallel} + v^{\perp} = \frac{u \ < u, v >}{\|u\|^2} + v - \frac{u \ < u, v >}{\|u\|^2} + \tag{A.1.1}$$

si esprima quindi $q(v)$ secondo questa decomposizione:

$$\begin{gathered} q(v) = < v^{\parallel} + v^{\perp}, A(v^{\parallel} + v^{\perp}) > \\ = < v^{\parallel}, Av^{\parallel} > +2 < v^{\perp}, Av^{\parallel} > + < v^{\perp}, Av^{\perp} > \end{gathered}$$

il termine $< v^{\perp}, Av^{\perp} >$ è per definizione $q(v^{\perp})$ e poichè per costruzione di $v^{\perp}$ si ha $f_u(v^{\perp}) = 0$, per le ipotesi $q(v^{\perp})$ deve annullarsi per cui:

$$q(v) =< v^{\parallel}, Av^{\parallel} > +2 < v^{\perp}, Av^{\parallel} >$$

sostituiendo le espressioni complete di $v^{\perp}$ e $v^{\parallel}$, dalla (A.1.1), si ha:

$$\begin{aligned} q(v) &=< u, Au > \left(\frac{< u, v >}{\|u\|^2}\right)^2 + 2 < v^{\perp}, Au > \frac{< u, v >}{\|u\|^2} \\ &= < u, Au > \left(\frac{< u, v >}{\|u\|^2}\right)^2 + 2 < v, Au > \frac{< u, v >}{\|u\|^2} - 2 < u, Au > \left(\frac{< u, v >}{\|u\|^2}\right)^2 \end{aligned}$$

Infine se si raccoglie un termine $< u, v >$ e si sommano i termini uguali si ottiene un'espressione per $q(v)$ composta da un termine lineare rispetto a v moltiplicato per il prodotto scalare $< u, v >$:

$$q(v) =< u, v > \left[2\frac{< v, Au >}{\|u\|^2} - \frac{< u, Au >< u, v >}{\|u\|^4}\right] \qquad \forall v \in \mathbb{R}^4 \tag{A.1.2}$$

□

Lemma 2. *Sia $v \in \mathbb{R}^4$, per comodità si scriverà $v = (v_0, v_1, v_2, v_3) = (v_0, \vec{v})$, tale che $\vec{v} \neq 0$. Sia quindi $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una forma quadratica tale che se fissato $\bar{v}$ con $\bar{v}_0^2 - |\vec{\bar{v}}|^2 = 0$ implica $q(\bar{v}) = 0$ allora $\exists\lambda$ tale che $q(v) = \lambda(v_0^2 - |\vec{v}|^2)$ $\forall v \in \mathbb{R}^4$.*

Dimostrazione. Si osservi che $q(v)$ può essere scomposto, seguendo le regole del prodotto righe per colonne $q(v) = v^t Av$ (dove $A \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ simmetrica), nella seguente somma:

$$q(v) = a_{00}v_0^2 + 2v_0(a_{01}v_1 + a_{02}v_2 + a_{03}v_3) + \hat{q}(\vec{v})$$

dove $\hat{q}$ è ancora una forma quadratica in $\mathbb{R}^3$ che agisce su $\vec{v}$.
Si consideri ora un vettore $\bar{v} \in \mathbb{R}^4$ e tale che considerando v allora $\bar{v} = (-|\vec{v}|, \vec{v})$; per costruzione $(\bar{v}_0)^2 - |\vec{v}|^2 = |\vec{v}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0$, per cui per le ipotesi assunte si ha $q(\bar{v}) = 0$.
Essendo $q(\bar{v}) = 0$ si può scrivere:

$$\begin{aligned} q(v) &= q(v) - q(\bar{v}) \\ &= a_{00}(v_0^2 - |\vec{v}|^2) + 2(v_0 - |\vec{v}|)(a_{01}v_1 + a_{02}v_2 + a_{03}v_3) + \hat{q}(\vec{v}) - \hat{q}(\vec{\bar{v}}) \\ &= a_{00}(v_0^2 - |\vec{v}|^2) + 2(v_0 - |\vec{v}|)(a_{01}v_1 + a_{02}v_2 + a_{03}v_3) \end{aligned} \tag{A.1.3}$$

inoltre calcolando la (A.1.3) per $\bar{v}$ si ha:

$$q(\bar{v}) = -2|\vec{v}|(a_{01}v_1 + a_{02}v_2 + a_{03}v_3) = 0$$

Per ipotesi $|\vec{v}| \neq 0$ per cui $a_{01} = a_{02} = a_{03} = 0$ che dimostra il lemma poichè implica:

$$q(v) = a_{00}(v_0^2 - |\vec{v}|^2) \quad \forall v \in \mathbb{R}^4 \tag{A.1.4}$$

□

A.2 La dimostrazione

Siano $x, x' \in \mathbb{R}^4$ due vettori dello spazio-tempo misurati rispettivamente in due sistemi di riferimento inerziali K e K', si vogliono determinare le proprietà dell'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che trasforma i vettori misurati in K in vettori misurati in K' e viceversa considerando validi il principio di Relatività e il principio di costanza della velocità della luce.

Per prima cosa si supporà che f sia sufficentemente regolare, almeno C^2, ed è necessario che sia invertibile poichè deve poter trasformare sia da K a K', sia viceversa: questa condizione è equivalente a richiedere che $\det J_f(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^4$.

Si considerino ora $\xi, \gamma \in \mathbb{R}^4$, ripettivamente detti punto iniziale e velocità della parametrizzazione, che consentono di parametrizzare un moto rettilineo uniforme nel seguentue modo:

$$x = \xi + s\gamma \qquad s \in \mathbb{R}$$

infatti è possibile esplicitare la dipendenza di x_0 da s per ottenere la forma di un moto rettilineo uniforme, per questo motivo è necessario che $\gamma_0 \neq 0$.

$$s = \frac{x_0 - \xi_0}{\gamma_0} \qquad \Rightarrow \qquad x_i = \xi_i + \frac{x_0 - \xi_0}{\gamma_0}\gamma_i \qquad i = 1, 2, 3$$

Secondo il principio di relatività se si calcola $f(x) = x'$ è necessario che $x' = \xi' + s'\gamma'$ così che un moto rettilineo uniforme resti tale in ogni sistema di riferimento inerziale. Derivando $f(\xi + s\gamma)$ rispetto al parametro s' si ottiene:

$$\frac{dx'}{ds'} = \gamma' = J_f(\xi + s\gamma)\frac{ds}{ds'}\gamma$$

si consideri ora la i-esima componente di γ', dove $i = 0, 1, 2, 3$, e la si divida per γ_0:

$$\frac{\gamma_i'}{\gamma_0'} = \frac{\sum_{k=0}^{3} \partial_k f_i(\xi + s\gamma)\gamma_k}{\sum_{k=0}^{3} \partial_k f_0(\xi + s\gamma)\gamma_k}$$

dove $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$. Da ora in poi si utilizzerà la convenzione degli indici ripeturi di Einstein per cui $\sum_k x_k y_k = x_k y_k$.
Il rapporto $\frac{\gamma_i'}{\gamma_0'}$ è costante da cui segue immediatamente che $\frac{d}{ds'}\frac{\gamma_i'}{\gamma_0'} = 0$ e quindi:

$$\frac{d}{ds'}\frac{\partial_k f_i(\xi + s\gamma)\gamma_k}{\partial_j f_0(\xi + s\gamma)\gamma_j}$$
$$= \frac{\left(\partial_{hn}^2 f_i(\xi + s\gamma)\gamma_h\gamma_n\right)\left(\partial_k f_0(\xi + s\gamma)\gamma_k\right) - \left(\partial_k f_i(\xi + s\gamma)\gamma_k\right)\left(\partial_{hn}^2 f_0(\xi + s\gamma)\gamma_h\gamma_n\right)}{\left(\partial_j f_0(\xi + s\gamma)\gamma_j\right)^2} = 0$$

che può annullarsi solo se si annulla il numeratore della frazione. Da questa osservazione e dal fatto che preso un $x \in \mathbb{R}^4$ esistono $\gamma \in \mathbb{R}^4$, $s \in \mathbb{R}$ tali che $x = \xi + s\gamma$ si ottiene:

$$\left(\partial_{hn}^2 f_i(x)\gamma_h\gamma_n\right)\left(\partial_k f_0(x)\gamma_k\right) = \left(\partial_k f_i(x)\gamma_k\right)\left(\partial_{hn}^2 f_0(x)\gamma_h\gamma_n\right) \qquad \forall x, \gamma \in \mathbb{R}^4 \quad i = 0, 1, 2, 3 \tag{A.2.1}$$

Siccome si è supposto inizialmente $\det J_f(x) \neq 0$ deve necessariamente esistere almeno un j tale che $\forall \gamma \in \mathbb{R}^4 \quad \partial_k f_j(x)\gamma_k \neq 0$, inoltre se si suppone di prendere $\bar{\gamma}$ tale che $\partial_k f_0(x)\bar{\gamma}_k = 0$ allora per la (A.2.1) necessariamente anche $\partial^2_{hn} f_0(x)\bar{\gamma}_h\bar{\gamma}_n = 0$.

Si applichi quindi il Lemma (1) il quale, in virtù del fatto che $\partial_k f_0(x)\bar{\gamma}_k = 0 \Rightarrow \partial^2_{hn} f_0(x)\bar{\gamma}_h\bar{\gamma}_n = 0$, consente di scrivere:

$$\partial^2_{hn} f_0(x)\gamma_h\gamma_n = <\psi(x), \gamma> \ (\partial_k f_0(x)\gamma_k) \qquad \forall x, \gamma \in \mathbb{R}^4 \quad i = 0,1,2,3$$

che inserito nella (A.2.1) risulta in:

$$\left(\partial^2_{hn} f_i(x)\gamma_h\gamma_n\right)(\partial_k f_0(x)\gamma_k) = (\partial_k f_i(x)\gamma_k) \ <\psi(x), \gamma> \ (\partial_k f_0(x)\bar{\gamma}_k)$$

infine siccome $\gamma'_0 \neq 0$ affinchè sia x' sia un moto rettilneo unfiorme, a maggior ragione la su espressione data dall'immagine di f soddisfa $(\partial_k f_0(x)\gamma_k \frac{ds}{ds'}) \neq 0$ ed è quindi possibile elidere da ambo i lati tale membro:

$$\partial^2_{hn} f_i(x)\gamma_h\gamma_n = (\partial_k f_i(x)\gamma_k) \ <\psi(x), \gamma> \qquad \forall x, \gamma \in \mathbb{R}^4 \quad i = 0,1,2,3 \tag{A.2.2}$$

Si osservi che $\partial^2_{hn} f_i(x)$ è una matrice simmetrica per il teorema di Schwarz per cui dall'espressione appena ottenuta si può scrivere:

$$\partial^2_{hk} f_i(x) = \frac{1}{2}\left(\partial_k f_i(x)\psi_h(x) + \partial_h f_i(x)\psi_k(x)\right) \tag{A.2.3}$$

Si consideri ora x e x' parametrizzazioni del moto di un raggio di luce, per il principio di costanza della velocità della luce se in K x è paramtrizzato sul cono di luce, lo stesso deve avvenire in K', il che è esprimibile matematicamente con le due condizioni:

$$\gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = 0$$
$$(\gamma'_0)^2 - [(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 + (\gamma'_3)^2] = 0$$

e poichè si può esprimere ogni componente di γ' tramite la jacobiana di f e γ, come già si è fatto calcolando $\frac{\gamma'_i}{\gamma'_0}$:

$$(\partial_k f_0(x)\gamma_k)^2 - \left[\sum_{i=1}^{3} (\partial_k f_i(x)\gamma_k)^2\right] = 0$$

Il principio di costanza della velocità della luce consente di utilizzare il lemma (2) poiché l'annullarsi di una forma quadratica implica l'annullarsi dell'altra, da cui si ha che:

$$(\partial_k f_0(x)\gamma_k)^2 - \left[\sum_{i=1}^{3} (\partial_k f_i(x)\gamma_k)^2\right] = \lambda(x)\left[\gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)\right]$$

Sia ora e_i un vettore tale per cui $e_0 = 1$ altrimenti $e_i = -1$, così facendo:

$$\lambda(x)\left[\gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = 0\right] = \lambda(x)e_i\gamma_i^2 = e_i\left(\partial_k f_i(x)\gamma_k\right)^2$$
$$\Rightarrow \qquad \lambda(x)e_k\gamma_k\gamma_h\delta_{kh} = e_i(\partial_k f_i(x)\gamma_k)^2 = e_i(\partial_k f_i(x)\gamma_k)(\partial_h f_i(x)\gamma_h)$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda(x)e_k\delta_{hk} = e_i(\partial_k f_i(x))(\partial_h f_i(x)) \tag{A.2.4}$$

Si derivi ora rispetto a x_j ad ambo i membri così da ottenere:

$$e_k\delta_{hk}\partial_j\lambda = 2e_i\partial^2_{kj}f_i(x)\partial_h f_i(x)$$

sostituendo la derivata seconda parziale tramite la (A.2.3) questa espressione è semplificabile e si ottiene:

$$e_k\delta_{hk}\partial_j\lambda = e_i\left[\partial_j f_i(x)\psi_k + \partial_k f_i(x)\psi_j\right]\partial_h f_i(x) \tag{A.2.5}$$

infine applicando nuovamente la (A.2.4) si possono sostituire tutti i prodotti di derivate parziali:

$$e_k\delta_{hk}\partial_j\lambda = e_j\lambda\delta_{jk}\psi_k + e_k\lambda\delta_{kh}\psi_j$$

Si considerino queste due differenti casitiche:

- Siano $k = h \neq j$ allora:

$$e_k\delta_{hk}\partial_j\lambda = \lambda e_k\psi_j \ \Rightarrow \partial_j\lambda = \psi_j\lambda$$

- Siano $k = h = j$ allora:

$$2\lambda e_k\psi_k = e_k\partial_k\lambda \ \Rightarrow 2\partial_k\lambda = \psi_k\lambda$$

Queste due relazioni appena ottenute implicano però che $\psi_i = 0$ per $i = 0, 1, 2, 3$ e quindi dalla (A.2.3) si ha che:

$$\partial^2_{kh}f_i(x) = 0 \qquad \forall i, k, h = 0, 1, 2, 3 \forall x \quad \in \mathbb{R}^4 \tag{A.2.6}$$

per cui $f(x)$ può essere esclusivamente una trasfromazione affine.

Bibliografia