Discussione della tesi: Aspetti fisici e matematici della teoria della relatività ristretta

Prova finale corso di laurea in fisica

Luca Morelli

21 luglio 2023

Punti chiave:

- Perché le trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali sono **applicazioni affini**?
- Qual è l'**interpretazione geometrica** delle **trasformazioni di Lorentz**?
- Quali caratteristiche deve avere una **meccanica relativistica**?
- Come dedurre la formulazione **4-tensoriale** delle **equazioni di Maxwell**?

Trasformazioni di sistemi di riferimento: Principi sperimentali

Per determinare le caratteristiche di queste trasformazioni si sono utilizzati alcuni **fatti sperimentali**:

1. Lo spazio è **3D, isotropo e omogeneo**
2. Il tempo è **isotropo e omogeneo**
3. Esistono i **sistemi di riferimento inerziali** i quali sono reciprocamente in **moto rettilineo uniforme**
4. Tutte le **leggi della fisica sono identiche** in ogni sistema di riferimento inerziale

Trasformazioni di sistemi di riferimento: Teorema

I **moti rettilinei uniformi** devono essere **tali in ogni sistema di riferimento inerziale** $\Longleftrightarrow$ Una trasformazione tra sistemi di riferimento inerziali deve **trasformare le rette in rette**

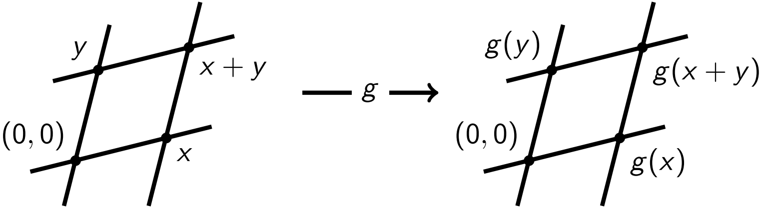
Teorema

Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ biettiva che trasforma tutte le rette in rette. Allora f è una trasformazione affine.

Trasformazioni di sistemi di riferimento: Dimostrazione

Dimostrazione del caso n=2

1. **Sia** $g = f \circ A$ **(**A **trasformazione affine)** tale che $g(0,0) = (0,0)$, $g(0,1) = (0,1)$ e $g(1,0) = (1,0)$.
2. g trasforma le rette in rette.
3. Essendo g anche biettiva **deve trasformare parallelogrammi in parallelogrammi**.

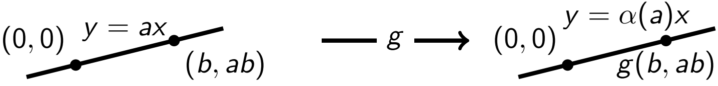


4. Vale $\boxed{g(x+y) = g(x) + g(y)}$.

Trasformazioni di sistemi di riferimento: Dimostrazione

5. g trasforma gli assi cartesiani e la bisettrice del primo quadrate in se stessi
$\Rightarrow g(x, y) = (\alpha(x), \beta(y)), \quad \alpha(x) = \beta(y).$

6. g **trasforma** rette con **coefficiente angolare** a in altre con coefficiente angolare $\alpha(a)$.



7. Vale $\boxed{\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)}$.

8. Le proprietà fin qui dimostrate implicano che $g = id$ per cui $f = A^{-1}$ ed anch'essa è **affine**.

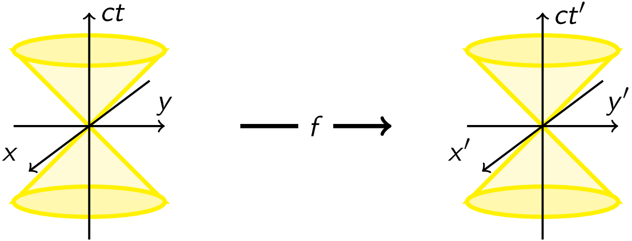
Deduzione delle trasformazioni di Lorentz: Postulati di Einstein

Per risolvere l'incompatibilità tra meccanica newtoniana e l'elettromagnetismo **Einstein propose due postulati**:

1. **Principio di relatività**: tutte le leggi della fisica sono identiche in ogni sistema di riferimento inerziale
2. **Principio di costanza della velocità della luce**: la luce nello spazio vuoto si propaga sempre con velocità finita in modulo pari a c.

Deduzione delle trasformazioni di Lorentz: Trasformazioni del cono di luce

La trasformazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineare e invertibile **deve trasformare coni di luce in coni di luce**.



Si dimostra quindi che f **conserva la norma Minkowski dei vettori**. $\Rightarrow |f(r)|^2 = |r|^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

Deduzione delle trasformazioni di Lorentz: Trasformazioni di Lorentz

Usando **l'unità immaginaria** riconduciamo la norma Minkowski a quella euclidea:

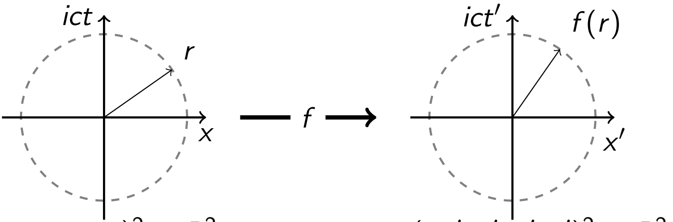
$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = (ict, x, y, z)^2 = R^2$$

deve quindi essere una rotazione.

Nel piano xt:

$r = (ict, x, y, z)$

$$\begin{pmatrix} ict' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \end{pmatrix}$$



$(ict, x, y, z)^2 = R^2$ $\qquad$ $(ict', x', y', z')^2 = R^2$

Deduzione delle trasformazioni di Lorentz: Trasformazioni di Lorentz

Se si pongono i due sistemi di riferimento in **moto reciproco a velocità** V lungo l'asse x:

$$V = \frac{x}{t} = -ic\tan\theta \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\; \sin\theta = \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Definendo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$:

$$\begin{pmatrix} \gamma & -i\frac{V}{c}\gamma \\ i\frac{V}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow[ie_0 \to e_0]{\text{Cambio base}} \boxed{\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{V}{c}\gamma \\ -\frac{V}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix}}$$

Meccanica relativistica: La particella libera

L'azione di una particella libera deve avere due caratteristiche:

- Essere **invariante** per trasformazioni di **Lorentz**
- Nel **limite classico** (per $v \ll c$) $\mathcal{L} \to \frac{m}{2}v^2$

La lunghezza della traiettoria nello spazio-tempo può essere usata come azione.

$$\boxed{\mathcal{S}[x^\mu(t)] = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}\, dt}$$

$$E = mc^2\gamma \qquad \vec{p} = m\vec{v}\gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}}$$

$$p^\mu = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

Elettromagnetismo: 4-tensore elettromagnetico

La **forza di Lorentz** contribuisce all'azione:

$$\mathcal{S}[x^\mu(t)] = -\int \Big(mc|\dot{x}^\mu(t)| + qA^\mu \dot{x}_\mu(t) \Big) dt$$

Il **principio di minima azione** consente di ricavare un'**equazione del moto** nello spazio-tempo:

$$\boxed{m\frac{du^\mu}{d\tau} = q\left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}\right)u_\nu} \qquad u^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau}, \ (\tau \text{ tempo proprio})$$

Si definisce così il **4-tensore elettromagnetico**:

$$F^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Elettromagnetismo: Invarianti di campo

Si può studiare un **vettore complesso che descrive il campo** elettromagnetico al posto di $F^{\mu\nu}$:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\vec{E}}{c} + i\vec{B}}$$

$$\vec{F}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -i\frac{V}{c}\gamma \\ 0 & i\frac{V}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Un **boost di Lorentz** equivale ad una **rotazione** per questo vettore.

In una rotazione un vettore **conserva il suo modulo quadro**:

$$|\vec{F}|^2 = \frac{|\vec{E}|^2}{c^2} - |\vec{B}|^2 + 2\frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{c}i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Re\{|\vec{F}|^2\} \propto F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ \Im\{|\vec{F}|^2\} \propto e^{\mu\nu\delta\lambda}F_{\mu\nu}F_{\delta\lambda} \end{cases}$$

Elettromagnetismo: Teoria dei campi

Utilizzando uno dei due invarianti si può **completare l'azione del sistema** contemplando cariche che generano campi EM.

$$\mathcal{S} = -\int_{t_1}^{t_2} \left[mc\sqrt{x^\mu x_\mu} + \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \right) d^3x \right] dt$$

Utilizzando le equazioni di **Eulero-Lagrange per un campo**:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \partial_\mu A_\mu} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu = 0$$

Si ottengono le **equazioni di Maxwell**:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu} \qquad J^\mu = (\rho c, \vec{J}).$$