Discrete-Time Complementary Filters for Attitude and Position Estimation

LEONARDO MARCELLO
LUCA MORELLO

INTRODUZIONE

1.1 PREFAZIONE

1.2 NOMENCLATURA

PREFAZIONE

I biologi marini, gli oceanografi e altri ricercatori oceanici stanno sempre più utilizzando la tecnologia per studiare fenomeni marini su diverse scale di tempo e spazio.

In particolare, il monitoraggio della salute strutturale delle grandi infrastrutture semi-immersive come ponti e frangiflutti è diventato fondamentale. Queste strutture affrontano condizioni ambientali difficili e richiedono costante manutenzione. Tuttavia, le operazioni di sorveglianza sono costose e complesse.

Pertanto, si sta cercando di utilizzare veicoli autonomi come soluzione più efficiente ed economica.
Il catamarano autonomo DELFIMx, costruito presso l'IST-ISR, è progettato per raccogliere automaticamente dati marini per valutare il rischio nelle strutture semi-immersive.

Il catamarano richiede un sistema di navigazione affidabile, energeticamente efficiente e a basso costo, in grado di integrare le informazioni dai sensori inerziali e di ausilio a bordo.

NOMENCALTURA

La notazione utilizzata è standard.

Distribuzione gaussiana avente

- media μ
- varianza σ^2

Sarà definita con: N(μ, σ^2)

La trasposta di un vettore o di una matrice è indicata da un apice T.

Gli indici inferiori $\{x, y, z\}$ indicano le componenti di un vettore, ad esempio $s = [s_x, s_y, s_z]^T$.

Gli indici superiori e inferiori identificano il sistema di coordinate:
${}^{E}_{B}R$ è una matrice di rotazione che trasforma il vettore ${}^{B}s$ nel vettore ${}^{E}s$ tramite l'operazione lineare ${}^{E}s = {}^{E}_{B}R\,{}^{B}s$

Siano {B} la terna di riferimento body e {E} la terna fissa Earth (in convenzione NED)

posizione, velocità e accelerazione sono indicate rispettivamente da p, v e a
velocità angolare del veicolo espressa in terna body è rappresentata da ω

Le quantità nominali, misurate e stimate sono indicate rispettivamente con $\bar{s}$ s_r e $\hat{s}$.

Le dimensioni dei vettori e delle matrici sono chiare dal contesto, di solito i vettori sono elementi di $\mathbb{R}^3$.

- matrice identità è I
- matrice zero è 0.

ATTITUDE FILTER

2.1 DEFINIZIONI
2.2 TEOREMA 1
2.3 TEOREMA 2

DEFINIZIONI

Sia $\bar{\lambda} = [\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\phi}]^T$ il vettore che definisce gli angoli di assetto rispettivamente di Yaw, Pitch, Roll della terna {B} in riferimento alla terna fissa {E}

La cinematica a tempo continuo è definita dunque attraverso la formula:

$$\dot{\bar{\lambda}} = Q(\bar{\lambda})\bar{\omega} \qquad Q(\bar{\lambda}_k) = \begin{vmatrix} 0 & \sin\bar{\phi}\, sec\bar{\theta} & \cos\bar{\phi}\, sec\bar{\theta} \\ 0 & cos\bar{\phi} & -sin\bar{\phi} \\ 1 & \sin\bar{\phi}\, tan\bar{\theta} & \cos\bar{\phi}\, tan\bar{\theta} \end{vmatrix}$$

Interessa operare tuttavia a tempo discreto, si consideri quindi il metodo di Eulero per discretizzare il sistema

$$\bar{\lambda}_{k+1} = \bar{\lambda}_k + TQ(\bar{\lambda}_k)\bar{\omega}_k$$

Dove T è il tempo di campionamento e l'indice k abbrevia l'istante di tempo $t = kT$

La velocità angolare è misurata da un giroscopio affetto da rumore casuale e bias.

$$\omega_{r\,k} = \bar{\omega}_k + \bar{b}_{\omega\,k} + w_{\omega_r\,k} \qquad \bar{b}_{\omega\,k+1} = \bar{b}_{\omega\,k} + w_{b\,k}$$

$w_{\omega_r} \sim \mathcal{N}(0, \Xi_\omega) \rightarrow$ Rumore Gaussiano a media nulla

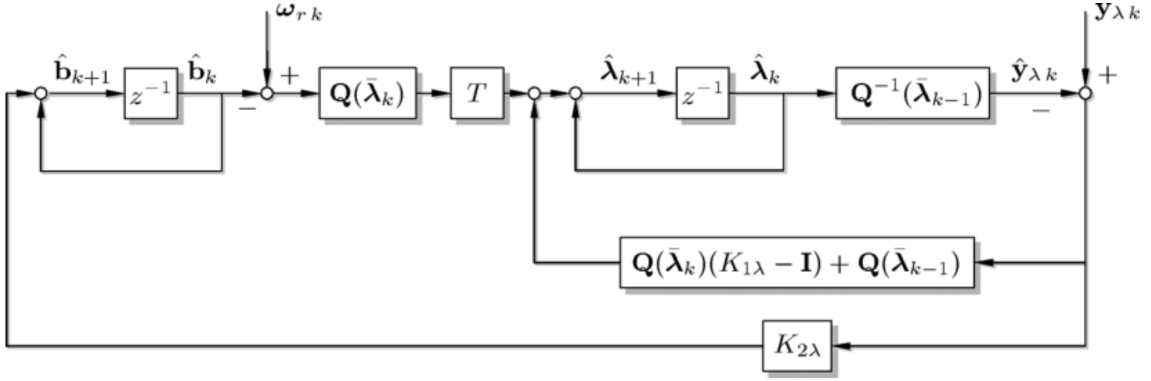
$\bar{b}_\omega \rightarrow$ Bias del sensore guidato dal rumore gaussiano a media nulla $w_b \sim \mathcal{N}(0, \Xi_b)$

Il filtro di assetto proposto stima l'orientazione del veicolo compensando il bias del giroscopio

Possiamo riscrivere la cinematica in forma matriciale definendo quindi lo state space model

$$\begin{bmatrix}\bar{\lambda}_{k+1}\\ \bar{b}_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -TQ(\bar{\lambda}_k)\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\lambda}_k\\ \bar{b}_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} TQ(\bar{\lambda}_k)\\ 0\end{bmatrix}\omega_{rk} + \begin{bmatrix} -TQ(\bar{\lambda}_k) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{\omega_r\ k}\\ w_{b\ k}\end{bmatrix}$$

Per il quale possiamo considerare l'introduzione di un sistema di feedback nonlineare, rappresentato come nella figura sottostante.



$$\begin{bmatrix}\hat{\lambda}_{k+1}\\ \hat{b}_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -TQ(\bar{\lambda}_k)\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\lambda}_k\\ \hat{b}_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} TQ(\bar{\lambda}_k)\\ 0\end{bmatrix}\omega_{rk} + \begin{bmatrix} Q(\bar{\lambda}_k)(K_{1\lambda} - I) + Q(\bar{\lambda}_{k-1})\\ K_{2\lambda}\end{bmatrix}(y_{\lambda k} - \hat{y}_{\lambda k})$$

$$y_{\lambda k} = Q(\bar{\lambda}_k)^{-1}\bar{\lambda}_k + v_{\lambda k} \qquad \hat{y}_{\lambda k} = Q(\bar{\lambda}_k)^{-1}\hat{\lambda}_k$$

Analizziamo l'espressione appena proposta:

$y_{\lambda k}$ è il vettore degli angoli di Eulero osservati trasformati nello spazio di stato e corrotti dal rumore bianco

$$v_{\lambda k} \sim \mathcal{N}(0, \theta_\lambda)$$

$K_{1\lambda}, K_{2\lambda} \in M(3,3)$ sono le matrici di guadagno di feedback.

y_λ si ottiene da due vettori misurati in frame body come:

- campi gravitazionali
- campi magnetici della Terra,

Oppure da dispositivi come telecamere o star tracker, ad esempio,

- Beccheggio e rollio possono essere determinati dal campo gravitazionale della Terra, disponibile da due inclinometri a bordo (pendoli),
- Imbardata può essere calcolato dalle misurazioni del campo magnetico terrestre fornite da una triade di magnetometri.

La scelta dell'osservazione dell'assetto dipende dai sensori disponibili e dalle risorse computazionali

CALCOLO DEGLI ANGOLI

$$\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$$

L'osservazione dell'assetto $y_{\lambda k}$ in angoli di eulero usando le rappresentazioni di due vettori descritti in terna body e fissa, rispettivamente saranno:

- Campo magnetico
- Campo gravitazionale

Campo magnetico

Magnetometro → Misura in terna body

$$\rightarrow m_r = \mathcal{R}_X^T(\bar{\phi})\mathcal{R}_Y^T(\bar{\theta})\,\mathcal{R}_Z^T(\bar{\psi})\ {}^E\overline{m} + n_m$$

Dove:

${}^E\overline{m}$ Rappresenta il vettore del campi magnetico in terna fissa

n_m Rumore di misura magnetometro

$\mathcal{R}_X^T(\bar{\phi})\mathcal{R}_Y^T(\bar{\theta})\,\mathcal{R}_Z^T(\bar{\psi})$le matrici elementari di rotazione Roll, Pitch e Yaw

Si definisce invece la proiezione delle letture del magnetometro nel piano $x - y$ come:

$$ {}^P m = \mathcal{R}_X^T(\bar{\phi})\mathcal{R}_Y^T(\bar{\theta}) m_r$$

L'angolo di yaw si ottiene da una manipolazione algebrica dell'espressione di m_r ottenendo alla fine delle operazioni

$$\bar{\psi} = atan2({}^E\overline{m}_y\,{}^P\overline{m}_x - {}^E\overline{m}_x\,{}^P\overline{m}_y\ ,\ {}^E\overline{m}_x\,{}^P\overline{m}_x + {}^E\overline{m}_y\,{}^P\overline{m}_y)$$

Accelerometro

Grazie al pendular sensor è possibile ottenere gli angoli di pitch e di roll attraverso la relazione:

$$a_p \approx -{}^{B}\bar{g} = -\mathcal{R}_X^T(\bar{\phi})\mathcal{R}_Y^T(\bar{\theta})\,{}^{E}\bar{g} = \begin{bmatrix} \bar{g}\sin(\bar{\theta}) \\ -\bar{g}\cos(\bar{\theta})\sin(\bar{\phi}) \\ -\bar{g}\cos(\bar{\theta})\cos(\bar{\phi}) \end{bmatrix}$$

Come sempre la panoramica dell'espressione appena descritta

a_p → Misura dell'accelerometro ipotizzando trascurabili le accelerazioni esterne
${}^{E}\bar{g}$ → Vettore gravità espresso in terna fissa ${}^{E}\bar{g} = [\,0 \quad 0 \quad \bar{g}\,]^T$

Gli angoli di pitch e roll sono dati dalla manipolazione algebrica della relazione a_p

$$\bar{\phi} = atan2(-a_y, -a_z)$$

$$\bar{\theta} = \begin{cases} atan\left(-\dfrac{a_x\sin(\bar{\phi})}{a_y}\right), & \sin(\bar{\phi}) \neq 0 \\ atan\left(-\dfrac{a_x\cos(\bar{\phi})}{a_z}\right), & cos(\bar{\phi}) \neq 0 \end{cases}$$

Si nota subito che sono indipendenti dal modulo di ${}^{E}\bar{g}$ ovvero non è richiesto un modello della accelerazione gravitazionale locale

Il calcolo di pitch e di roll dalle misure dell'accelerometro come appena rappresentato presentano delle distorsioni in presenza di accelerazioni lineari ed angolari.
Il modello dell'accelerometro e definito come :

$$a_r = \frac{d\,{}^B\bar{v}}{dt} + \bar{\omega} \times {}^B\bar{v} - {}^B\bar{g}$$

$\frac{d\,{}^B\bar{v}}{dt}$ → Accelerazione lineare

$\bar{\omega} \times {}^B\bar{v}$ → Accelerazione centripeta

Le tipiche manovre dei veicoli autonomi coinvolgono principalmente accelerazioni lineari a breve termine (alta frequenza) la conseguente distorsione nell'assetto come il pitch e il roll può essere attenuata dal filtro complementare passa-basso.

D'altra parte, le accelerazioni centripete devono essere compensate.

$$\hat{a}_p = a_r - \hat{\omega} \times {}^B\bar{v}$$

$\hat{\omega} = \omega_r - \hat{b}_\omega$ → velocità angolare è ottenuta dalla misura del giroscopio con compensazione del bias.

${}^B\bar{v}$ → La stima della velocità fornita dal filtro complementare di posizione.

Di seguito sono riportate per semplicità, le forme viste nelle slide precedent degli angoli di assetto di Roll, pitch e yaw

$$\bar{\phi} = atan2(-a_y, -a_z)$$

$$\bar{\theta} = \begin{cases} atan\left(-\dfrac{a_x \sin(\bar{\phi})}{a_y}\right), & \sin(\bar{\phi}) \neq 0 \\ atan\left(-\dfrac{a_x \cos(\bar{\phi})}{a_z}\right), & cos(\bar{\phi}) \neq 0 \end{cases}$$

$$\bar{\psi} = atan2(\,{}^{E}\overline{m}_y \,{}^{P}\overline{m}_x - {}^{E}\overline{m}_x \,{}^{P}\overline{m}_y \;,\; {}^{E}\overline{m}_x \,{}^{P}\overline{m}_x + {}^{E}\overline{m}_y \,{}^{P}\overline{m}_y)$$

$$\hat{a}_p = a_r - \widehat{\omega} \times {}^{B}\bar{v}$$

Le quali andranno a definire una misurazione virtuale del sensore dell'assetto, riferita a "Magneto-Pendular Sensor" (MPS).

Il rumore di osservazione del MPS (Magneto-Pendular Sensor), indicato con v_λ, è una funzione non lineare:

- Dei rumori del magnetometro e dell'accelerometro.
- L'assetto del veicolo.
- La compensanzione (lineare e angolare) dell'accelerazione.

Ed è principalmente ad alta frequenza a causa dell'influenza delle accelerazioni lineari.

SCELTA DEI GUADAGNI

$K_{1\lambda}, K_{2\lambda}$

Si consideri invece il seguente sistema ausiliario lineare tempo-invariante:

$$\begin{bmatrix} x_{\lambda\ k+1} \\ x_{b\ k+1} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} I & -TI \\ 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{\lambda\ k} \\ x_{b\ k} \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} -TI & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{\omega_r\ k} \\ w_{b\ k} \end{bmatrix}$$

$$y_{x\ k} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\lambda k} \\ x_{b\ k} \end{bmatrix} + v_{\lambda k}$$

I guadagni di retroazione $K_{1\lambda}$e $K_{2\lambda}$ vengono identificati con i guadagni di Kalman in regime stazionario per il sistema soprastante.

Le matrici di covarianza $\Xi\omega, \Xi b$ e $\Theta\lambda$, rispettivamente relative agli errori w_{ω_r} , w_b e v_λ, agiscono come "*manopole di tuning*" per modellare la risposta in frequenza desiderata del filtro di orientamento.

Sistema Ausiliario

$$\begin{bmatrix} x_{\lambda\ k+1} \\ x_{b\ k+1} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} I & -TI \\ 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{\lambda\ k} \\ x_{b\ k} \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} -TI & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{\omega_r\ k} \\ w_{b\ k} \end{bmatrix}$$

$$y_{x\ k} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\lambda k} \\ x_{b\ k} \end{bmatrix} + v_{\lambda k}$$

Cinematica

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_{k+1} \\ \bar{b}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -TQ(\bar{\lambda}_k) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_k \\ \bar{b}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} TQ(\bar{\lambda}_k) \\ 0 \end{bmatrix} \omega_{rk} + \begin{bmatrix} -TQ(\bar{\lambda}_k) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{\omega_r\ k} \\ w_{b\ k} \end{bmatrix}$$

Il sistema ausiliario **tempo invariante** adottato per la determinazione dei guadagni di feedback e della risposta in frequenza associata è simile alla cinematica dell'assetto per $Q(\bar{\lambda}) = Q(0)$.

Sebbene ciò suggerisca a prima vista che le proprietà del filtro proposto potrebbero essere limitate al caso specifico di $\bar{\lambda}_k = 0$

il filtro è in realtà asintoticamente stabile per qualsiasi traiettoria dell'assetto parametrizzata, per dimostrare questo useremo due teoremi che saranno descritti nelle prossime slide

TEOREMA 1

ASSUNZIONI

- Si consideri la cinematica discreta dell'assetto.
- Siano $K_{1\lambda}$ e $K_{2\lambda}$ i guadagni di Kalman a regime per il sistema in retroazione.
- Si assumi che il rollio descritto dalla piattaforma sia limitato.

$$|\bar{\theta}| \leq \theta_{Max} < {}^{\pi}/_{2}$$

TESI

Allora l'**attitude filter** proposto è uniformemente asintoticamente stabile (UAS)

Attitude Filter

$$\begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{k+1} \\ \hat{b}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -TQ(\bar{\lambda}_k) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_k \\ \hat{b}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} TQ(\bar{\lambda}_k) \\ 0 \end{bmatrix} \omega_{rk} + \begin{bmatrix} Q(\bar{\lambda}_k)(K_{1\lambda} - I) + Q(\bar{\lambda}_{k-1}) \\ K_{2\lambda} \end{bmatrix} (y_{\lambda k} - \hat{y}_{\lambda k})$$

$$y_{\lambda k} = Q(\bar{\lambda}_k)^{-1}\bar{\lambda}_k + v_{\lambda k} \qquad \hat{y}_{\lambda k} = Q(\bar{\lambda}_k)^{-1}\hat{\lambda}_k$$

TEOREMA 1

DIMOSTRAZIONE

Definiamo gli errori di stima rispettivamente:

Errore di assetto $\tilde{\lambda}_k = \bar{\lambda}_k - \hat{\lambda}_k$

Errore di bias $\tilde{b}_{\omega\,k} = \bar{b}_{\omega\,k} - \hat{b}_{\omega\,k}$

La dinamica associata all'errore di stima è descritta dal seguente sistema

Dinamica Errore Stima

$$\begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_{k+1} \\ \tilde{b}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q(\bar{\lambda}_k)(I - K_{1\lambda})Q^{-1}(\bar{\lambda}_{k-1}) & -TQ(\bar{\lambda}_k) \\ -K_{2\lambda}Q^{-1}(\bar{\lambda}_{k-1}) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_k \\ \tilde{b}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -TQ(\bar{\lambda}_k) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{\omega_r\,k} \\ w_{b\,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q(\bar{\lambda}_k)(I - K_{1\lambda}) - Q(\bar{\lambda}_{k-1}) \\ -K_{2\lambda} \end{bmatrix} v_{\lambda k}$$

Per definizione, il filtro è detto UAS se l'origine del sistema soprastante è UAS in assenza degli stati e del rumore di misura

Il sistema ausiliario visto in precedenza può essere riscritto in forma compatta:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gw_k \qquad F = \begin{vmatrix} I & -TI \\ 0 & I \end{vmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} -TI & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \qquad H = [I \quad 0]$$

$$y_k = Hx_k + v_k$$

$[F, G]$ sarà completamente stabilizzabile

$[F, H^T]$ risulta essere dettetabile

TEOREMA 1

DIMOSTRAZIONE

Il sistema a ciclo chiuso sarà quindi descritto come:

$$\tilde{x}_{k+1} = (F - KH)\tilde{x}_k + Gw_k - Kv_k$$

La cui origine è UAS

Si definisce la seguente trasformazione di Lyapunov che correla la dinamica dell'errore vista nelle slide precedenti con il sistema a ciclo chiuso appena definito

$$\begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_{k+1} \\ \tilde{b}_{k+1} \end{bmatrix} = T_k \begin{bmatrix} \tilde{x}_{\lambda+1} \\ \tilde{x}_{b+1} \end{bmatrix} \qquad T_k = \begin{bmatrix} Q(\bar{\lambda}_{k-1}) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Grazie alla proprietà di trasformazione di Lyapunov è quindi possibile concludere che anche il sistema della dinamica dell'errore sarà UAS

TEOREMA 1

CONSIDERAZIONI

Le proprietà di stabilità derivanti da questo teorema sono valide per configurazioni non singolari, dove il pitch soddisfa $\bar{\theta} < {}^{\pi}/_{2}$, una condizione debole per la maggior parte delle applicazioni terrestri e oceaniche.

I risultati di stabilità possono essere estesi per guadagni di Kalman variabili nel tempo, tuttavia il filtro complementare proposto è progettato nel dominio delle frequenze mediante la formulazione tempo-invariante descritta dal sistema ausiliario, al fine di ottenere una funzione di trasferimento desiderata che combina:

- i contenuti a bassa frequenza delle osservazioni dell'assetto
- le informazioni ad alta frequenza dai dati della velocità angolare.

Vengono adottati i guadagni del filtro di Kalman in stato stazionario per ottenere un filtro asintoticamente stabile che può essere facilmente implementato e testato su hardware a basso costo.

È interessante notare che, i guadagni adottati nel **filtro di attitude** proposto corrispondono ai guadagni in stato stazionario del filtro di Kalman per il sistema.

TEOREMA 2

ASSUNZIONI

- Assumendo gli angoli di roll e pitch costanti

TESI

Allora i guadagni in retroazione per l'**attitude filter** corrispondono ai guadagni a regime del filtro di Kalman del sistema sottostante:

Cinematica

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_{k+1} \\ \bar{b}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -TQ(\bar{\lambda}_k) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_k \\ \bar{b}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} TQ(\bar{\lambda}_k) \\ 0 \end{bmatrix} \omega_{rk} + \begin{bmatrix} -TQ(\bar{\lambda}_k) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{\omega_r\,k} \\ w_{b\ k} \end{bmatrix}$$

I guadagni di Kalman in feedback $K_{opt\ k}$ convergono asintoticamente come segue:

$$\lim_{k\to\infty} \left\| K_{opt\ k} - \begin{bmatrix} Q(\bar{\lambda}_k)(K_{1\lambda} - I) + Q(\bar{\lambda}_{k-1}) \\ K_{2\lambda} \end{bmatrix} \right\| = 0$$

TEOREMA 2

CONSIDERAZIONI

I risultati di prestazione presentati nel Teorema 2 sono validi per applicazioni in cui gli angoli di pitch e roll **sono costanti** o possono essere considerati approssimativamente costanti.

Va sottolineato che ciò è di interesse per le piattaforme terrestri e oceaniche prese in considerazione in questo lavoro, soggette a traiettorie di monitoraggio ripetitive.

Nel caso di angoli di pitch e roll variabili nel tempo e di manovre aggressive, le prestazioni dei filtri complementari e di Kalman possono essere confrontate offline calcolando le covarianze degli errori di stima dei filtri.

Inoltre, i filtri per l'assetto e la posizione sono determinati in modo indipendente, il che consente di:

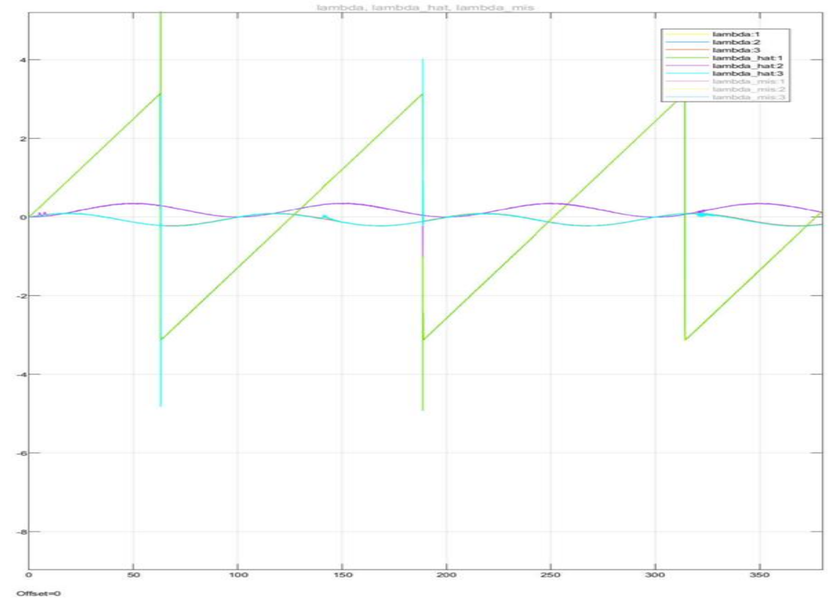
- Eseguire il tuning separatamente.
- Usare il filtro di assetto autonomamente nelle applicazioni in cui è richiesta solo la sua stima

Inoltre sempre grazie al design indipendente dei filtri, la correlazione incrociata tra accelerazione e assetto viene ignorata, tuttavia il suo contributo nella stima dell'assetto è di solito trascurabile nelle applicazioni oceaniche prese in considerazione.

PROBLEMATICHE

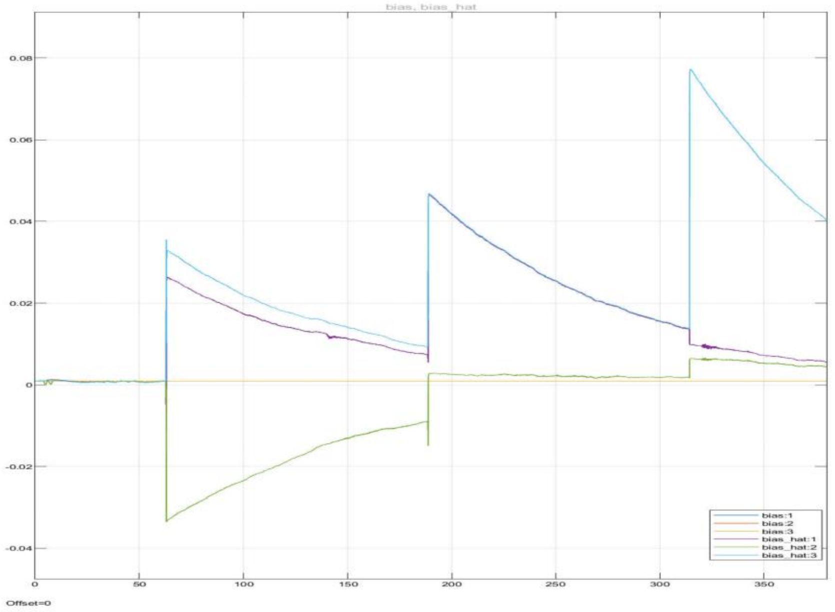
Gli angoli di roll, pitch e yaw sono soggetti per loro natura ad elementi di discontinuità. Se non viene tenuto conto di questo problema i risultati del filtro possono risultare notevolmente corrotti.

angoli stimati



Il grafico a destra mostra la stima del bias per una traiettoria circolare, ogni volta che il catamarano compie un giro completo su se stesso il bias viene erroneamente corretto

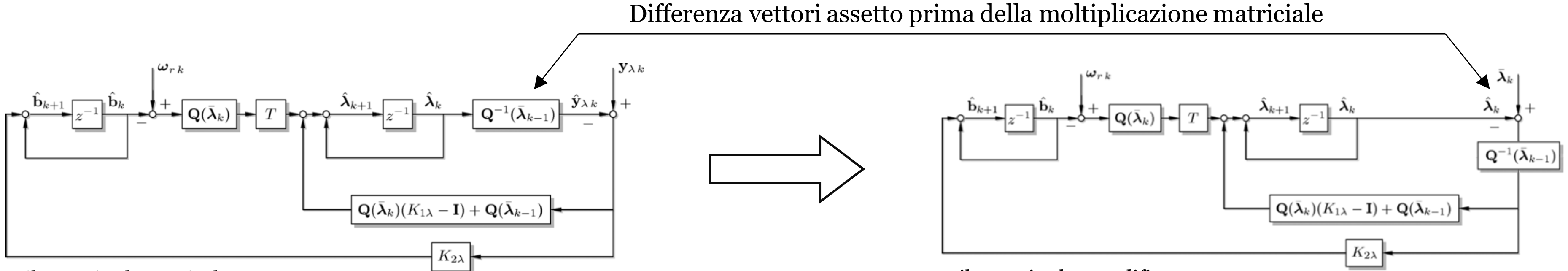
bias stimati



PROBLEMATICHE

SOLUZIONE ADOTTATA

Per risolvere questa problematica è stato necessario rimodellare la struttura del filtro come rappresentato in figura.



Filtro attitude - Articolo

Filtro attitude - Modificato

$$y_{\lambda k} = Q(\bar{\lambda}_k)^{-1}\bar{\lambda}_k + v_{\lambda k}$$

$$\hat{y}_{\lambda k} = Q(\bar{\lambda}_k)^{-1}\hat{\lambda}_k$$

$$e = y_{\lambda k} - \hat{y}_{\lambda k}$$

Manipolando algebricamente l'espressione

Troveremo il filtro modificato proposto

$$e = y_{\lambda k} - \hat{y}_{\lambda k}$$

$$e = Q(\bar{\lambda}_k)^{-1}\bar{\lambda}_k + v_{\lambda k} - Q(\bar{\lambda}_k)^{-1}\hat{\lambda}_k$$

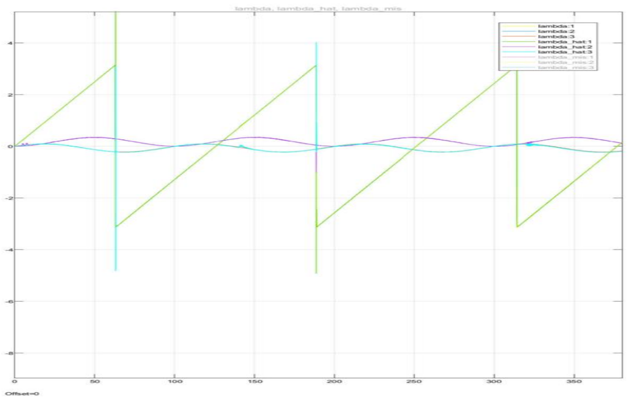
$$e = Q(\bar{\lambda}_k)^{-1}(\bar{\lambda}_k - \hat{\lambda}_k) + v_{\lambda k}$$

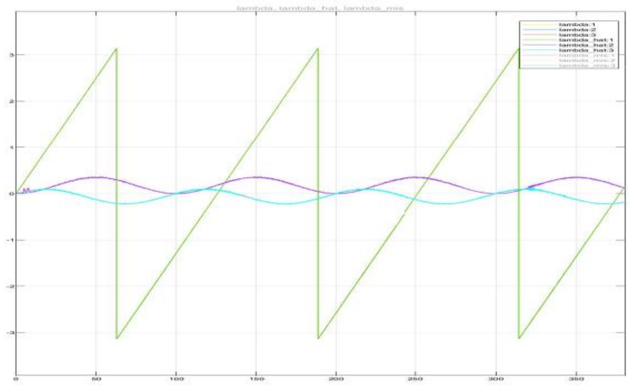
Nel filtro di attitude modificato è quindi possibile risolvere il problema della discontinuità con il comando **Wrap to pi** ovvero si mappando il vettore differenza $\bar{\lambda}_k - \hat{\lambda}_k$ all'interno dell'intervallo $[-\pi,\ \pi]$

PROBLEMATICHE

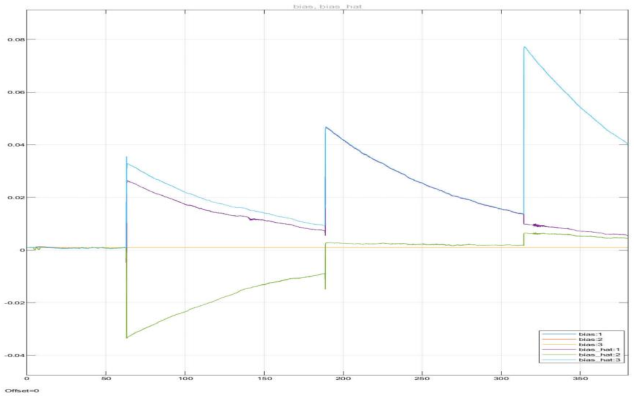
SOLUZIONE ADOTTATA

angoli stimati

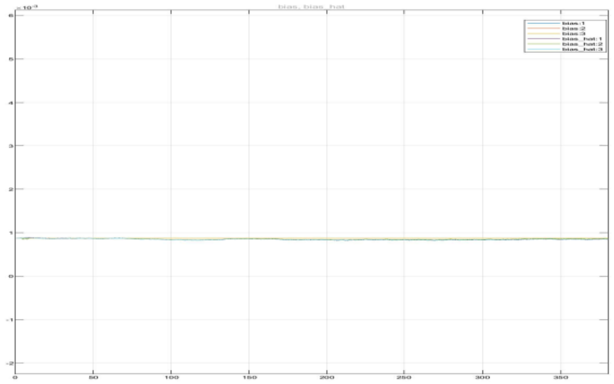




bias stimati



bias stimati



POSITION FILTER

2.1 DEFINIZIONE
2.2 TEOREMA 1
2.3 TEOREMA 2

POSITION FILTER

La cinematica di posizione a tempo continuo

$$\dot{\bar{p}} = \bar{v} \ , \quad \dot{\bar{v}} = \bar{\mathcal{R}}\,{}^{B}\bar{a}$$

$\bar{p}$ e $\bar{v}$ sono rispettivamente posizione e velocità in coordinate fisse Earth frame {E}
$\bar{\mathcal{R}}$ rappresenta la matrice di rotazione dal sistema body {B} al sistema fisso {E}
${}^{B}\bar{a}$ invece è l'accelerazione espressa in body frame {B}

L'equivalente a tempo discreto viene ottenuto tramite sample-and-hold degli ingressi.

$$\bar{p}_{k+1} = \bar{p}_k + T\bar{v}_k + {T^2}/{2}\,\bar{\mathcal{R}}_k\bar{a}_k$$
$$\bar{v}_{k+1} = \bar{v}_k + T\bar{\bar{\mathcal{R}}}_k\,{}^{B}\bar{a}_k$$

l'accelerometro misura la forza specifica pari alla differenza della accelerazione inerziale e quella gravitazionale, entrambe espresse in coordinate body: $a_{rk} = {}^{B}\bar{a}_k - {}^{B}\bar{g}_k + w_{a_r}$

$w_{a_r} \sim \mathrm{N}(0, \Xi_a)$ → Rumore Gaussiano a media nulla della misura dell'accelerometro

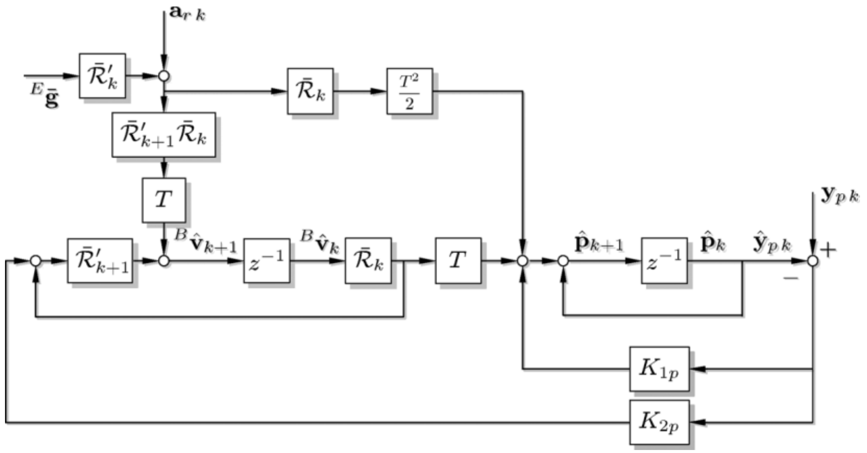
$w_p \sim \mathrm{N}(0, \Xi_p)$ → Rumore Gaussiano a media nulla per considerare i disturbi sulla posizione

Come fatto per L'attitude filter raccogliamo la cinematica in forma matriciale

Cinematica

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_{k+1} \\ {}^B\bar{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & T\bar{\mathcal{R}}_k \\ 0 & \bar{\mathcal{R}}_{k+1}^T\bar{\mathcal{R}}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{p}_k \\ {}^B\bar{v}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{T^2}\!/_2\,\bar{\mathcal{R}}_k \\ T\bar{\mathcal{R}}_{k+1}^T\bar{\mathcal{R}}_k \end{bmatrix}(\,a_{rk} + \bar{\mathcal{R}}_k^T\,{}^E\bar{g}\,) + \begin{bmatrix} I & -{}^{T^2}\!/_2\,\bar{\mathcal{R}}_k \\ 0 & -T\bar{\mathcal{R}}_{k+1}^T\bar{\mathcal{R}}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{pk} \\ w_{a_r\,k} \end{bmatrix}$$

Possiamo dunque costruire l'osservatore, per stimare la posizione e velocità la struttura è rappresentata da:



Position Filter

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_{k+1} \\ {}^B\hat{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -T\bar{\mathcal{R}}_k \\ 0 & \bar{\mathcal{R}}_{k+1}^T\bar{\mathcal{R}}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{p}_k \\ {}^B\hat{v}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{T^2}\!/_2\,\bar{\mathcal{R}}_k \\ T\bar{\mathcal{R}}_{k+1}^T\bar{\mathcal{R}}_k \end{bmatrix}(a_{rk} + \bar{\mathcal{R}}_k^T\,{}^E\bar{g} + \begin{bmatrix} K_{1p} \\ \bar{\mathcal{R}}_{k+1}^T K_{2p} \end{bmatrix}(y_{pk} - \hat{y}_{pk})$$

$$y_{pk} = \bar{p}_k + v_{pk} \qquad \hat{y}_{pk} = \hat{p}_k$$

Analizziamo l'espressione appena proposta:

y_{pk} è la posizione calcolata usando le letture del GPS, si considererà un rumore bianco di osservazione

$$v_p \sim \mathcal{N}(0, \theta_p)$$

Mentre la velocità è espressa nel frame body per ridurre la banda richiesta per la stima sotto variazioni di assetto o attuazioni del veicolo.

Per fare un esempio:

Ipotizziamo una traiettoria circolare uniforme con il vettore velocità espresso in:

1. Terna Fissa → Le componenti del vettore risulteranno essere sinusoidali
2. Terna Body → Le componenti saranno costanti per tuta la durata del moto

SCELTA DEI GUADAGNI

$$K_{1p}, K_{2p}$$

Per quanto riguarda invece i guadagni in retroazione K_{1p} e K_{2p} sono identificati applicando il filtro di Kalman al sistema:

Sistema Ausiliario

$$\begin{bmatrix} x_{p\ k+1} \\ x_{v\ k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & TI \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p\ k} \\ x_{v\ k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & -T^2/2 \\ 0 & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{p\ k} \\ w_{v\ k} \end{bmatrix}$$

$$y_{x\ k} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p\ k} \\ x_{v\ k} \end{bmatrix} + v_{p\ k}$$

$w_v \sim \mathrm{N}(0, \Xi_a)$ → Rumore Gaussiano a media nulla con stessa covarianza dell'accelerometro

Nel design del position filter, i termini di covarianza Ξ_p, Ξ_a, θ_p, rispettivamente relativi a w_p, w_v e v_p, sono usati come parametri di tuning per modulare la risposta in frequenza del filtro stesso.

I bias dell'accelerometro invece sono compensati offline.

TEOREMA 3

ASSUNZIONI

- Si consideri la cinematica della posizione a tempo discreto.
- Sia K_{1p} e K_{2p} i guadagni a regime del filtro di Kalman del sistema ausiliario

Sistema Ausiliario

$$\begin{bmatrix} x_{p\ k+1} \\ x_{v\ k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & TI \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p\ k} \\ x_{v\ k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & -{T^2}/{2} \\ 0 & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{p\ k} \\ w_{v\ k} \end{bmatrix}$$

$$y_{x\ k} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p\ k} \\ x_{v\ k} \end{bmatrix} + v_{p\ k}$$

TESI

Allora il **position filter** proposto è uniformemente asintoticamente stabile (UAS)

TEOREMA 3

DIMOSTRAZIONE

Definiamo gli errori di stima rispettivamente:

Errore di posizione $\tilde{p}_k = \bar{p}_k - \hat{p}_k$

Errore di velocità ${}^B\tilde{v}_k = {}^B\bar{v}_k - {}^B\hat{v}_k$

La dinamica associata all'errore di stima è descritta dal seguente sistema

Dinamica Errore Stima

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_{k+1} \\ {}^B\tilde{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - K_{1p} & -T\bar{\mathcal{R}}_k \\ -K_{2p} & \bar{\mathcal{R}}^T{}_{k+1}\bar{\mathcal{R}}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p}_k \\ {}^B\tilde{v}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & -{}^{T^2}/_2\,\bar{\mathcal{R}}_k \\ 0 & -T\bar{\mathcal{R}}^T{}_{k+1}\bar{\mathcal{R}}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{p\ k} \\ w_{a_r\ k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{1p} \\ \bar{\mathcal{R}}^T{}_{k+1}K_{2p} \end{bmatrix} v_{pk}$$

Il sistema ausiliario visto in precedenza può essere riscritto in forma compatta:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gw_k$$
$$y_k = Hx_k + v_k$$

$$F = \begin{vmatrix} I & TI \\ 0 & I \end{vmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} I & -{}^{T^2}/_2 \\ 0 & -T \end{bmatrix} \quad H = [I \quad 0]$$

$[F, G]$ sarà completamente stabilizzabile

$[F, H^T]$ risulta essere dettetabile

TEOREMA 3

DIMOSTRAZIONE

Il sistema a ciclo chiuso sarà quindi descritto come:

$$\tilde{x}_{k+1} = (F - KH)\tilde{x}_k + Gw_k - Kv_k$$

La cui origine è UAS

Si definisce la seguente trasformazione di Lyapunov che correla la dinamica dell'errore vista nelle slide precedenti con il sistema a ciclo chiuso appena definito

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_k \\ \tilde{v}_k \end{bmatrix} = T_k \begin{bmatrix} \tilde{x}_{p\,k} \\ \tilde{x}_{v\,k} \end{bmatrix} \qquad T_k = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{R}}_k \end{bmatrix}$$

Grazie alla proprietà di trasformazione di Lyapunov è quindi possibile concludere che anche il sistema della dinamica dell'errore sarà UAS

CONSIDERAZIONI

Si mostra che il filtro di posizione proposto viene identificato con il filtro di Kalman in stato stazionario per la cinematica della posizione a tempo discreto, sotto l'assunzione che i rumori bianchi gaussiani del triade dell'accelerometro siano stocasticamente indipendenti e caratterizzati dalla stessa varianza.

L'indipendenza stocastica viene verificata in configurazioni realistiche in cui le misurazioni dell'accelerazione sono fornite da tre sensori dello stesso modello, montati in modo ortogonale.

TEOREMA 4

ASSUNZIONI

- Siano definiti i rumori e disturbi come Gaussiano nella cinematica di posizione

TESI

Allora i guadagni in retroazione per il **position filter** corrispondono ai guadagni a regime del filtro di Kalman del sistema sottostante:

Cinematica

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_{k+1} \\ {}^{B}\bar{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & T\bar{\mathcal{R}}_k \\ 0 & \bar{\mathcal{R}}_{k+1}^T \bar{\mathcal{R}}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_k \\ {}^{B}\bar{v}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{T^2}\!/_2\, \bar{\mathcal{R}}_k \\ T\bar{\mathcal{R}}_{k+1}^T \bar{\mathcal{R}}_k \end{bmatrix} (\, a_{rk} + \bar{\mathcal{R}}_k^T\, {}^{E}\bar{g}\,) + \begin{bmatrix} I & -{}^{T^2}\!/_2\, \bar{\mathcal{R}}_k \\ 0 & -T\bar{\mathcal{R}}_{k+1}^T \bar{\mathcal{R}}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{pk} \\ w_{a_r\,k} \end{bmatrix}$$

I guadagni di Kalman in feedback $K_{opt\;k}$ convergono asintoticamente come segue:

$$\lim_{k\to\infty} \left\| K_{optK} - \begin{bmatrix} K_{1p} \\ \bar{\mathcal{R}}_{k+1}^T K_{2p} \end{bmatrix} \right\| = 0$$

GUADAGNI FILTRO
ATTITUDE

Parametri proposti nell'articolo

$\theta_\lambda = I_{3x3}$	$v_\lambda \sim N(0, \theta_p)$	Rumore gaussiano di osservazione delle misure del GPS
$\Xi_\omega = 3\ I_{3x3}$	$w_p \sim N(0, \Xi_p)$	Rumore gaussiano di misura giroscopio
$\Xi_b = 10^{-10}\ I_{3x3}$	$w_{ar} \sim N(0, \Xi_a)$	Rumore Gaussiano bias sensori

GUADAGNI FILTRO
ATTITUDE

Sono stati impiegati due procedimenti diversi per il calcolo dei coefficienti a regime ($K_{1\lambda}$ e $K_{2\lambda}$) impiegati nell'Attitude filter

1. Soluzione dell'ARE (Algebraic Riccati equation) attraverso il comando **idare** di Matlab

   [X,K,L] = idare(A,B,Q,R,S,E) calcola :
   - the unique stabilizing solution X,
   - state-feedback gain K,
   - closed-loop eigenvalues L

   of the following discrete-time algebraic Riccati equation

$$A^T XA - E^T XE - (A^T XB + S)(B^T XB + R) - 1(A^T XB + S)^T + Q = 0$$

2. Costruire un filtro di Kalman ed attraverso Simulink estrarre i valori a convergenza

GUADAGNI FILTRO
ATTITUDE

Coefficienti ottenuti come soluzione della ARE

$$K_{1\lambda} = \begin{bmatrix} 0.2911 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2911 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2911 \end{bmatrix}$$

$$K_{2\lambda} = 10^{-4} \begin{bmatrix} -0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9413 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9413 \end{bmatrix}$$

Coefficienti ottenuti dal processo di simulazione

$$K_{1\lambda} = \begin{bmatrix} 0.2255 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2255 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2255 \end{bmatrix}$$

$$K_{2\lambda} = 10^{-4} \begin{bmatrix} -0.6264 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6264 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6264 \end{bmatrix}$$

Coefficienti proposti dall'articolo

$$K_{1\lambda\ articolo} = \begin{bmatrix} 0.297 & 0 & 0 \\ 0 & 0.297 & 0 \\ 0 & 0 & 0.297 \end{bmatrix}$$

$$K_{2\lambda articolo} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.941 & 0 & 0 \\ 0 & 0.941 & 0 \\ 0 & 0 & 0.941 \end{bmatrix}$$

Delta coefficienti ARE

$$\Delta_{k1\lambda} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 5.9 & 0 & 0 \\ 0 & 5.9 & 0 \\ 0 & 0 & 5.9 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{k2\lambda} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1.8823 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8823 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8823 \end{bmatrix}$$

Delta coefficienti simulazione

$$\Delta_{k1\lambda} = \begin{bmatrix} 0.0715 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0715 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0715 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{k2\lambda} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1.5674 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5674 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5674 \end{bmatrix}$$

GUADAGNI FILTRO

POSITION

Parametri proposti nell'articolo

$\theta_p = I_{3x3}$	$v_p \sim N(0, \theta_p)$	Rumore gaussiano di osservazione delle misure del GPS
$\Xi_p = 5 \times 10^{-2} I_{3x3}$	$w_p \sim N(0, \Xi_p)$	Rumore gaussiano di misura dell'accelerometro
$\Xi_a = 10\, I_{3x3}$	$w_{ar} \sim N(0, \Xi_a)$ $w_v \sim N(0, \Xi_a)$	Rumore Gaussiano per considerare piccoli disturbi nella posizione

GUADAGNI FILTRO

POSITION

MULTIRATE

GPS - RATE 4 Hz
FILTER - RATE 56 Hz

Siano il GPS e i sensori inerziali caratterizzati dal periodo di campionamento T_{GPS} e T_{INS} rispettivamente.
Si definisce il rapporto $n_T = \frac{T_{GPS}}{T_{INS}}$, con $n_T \in \mathbb{N}$

$$x_{k+1} = F x_k + G w_k$$
$$y_k = H_k x_k + v_k$$

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{\lambda k}^T & x_{bk}^T \end{bmatrix}^T \qquad w_k = \begin{bmatrix} w_{\omega k}^T & w_{bk}^T \end{bmatrix}^T$$

$$F = \begin{vmatrix} I & -TI \\ 0 & I \end{vmatrix} \qquad G = \begin{vmatrix} -TI & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix}$$

La matrice di osservazione è data d

$$H_k = \begin{cases} [I \quad 0] \; se \; \dfrac{k}{n_T} \in \mathbb{N}_0 \\ [0 \quad 0] \; altrimenti \end{cases}$$

GUADAGNI FILTRO
POSITION

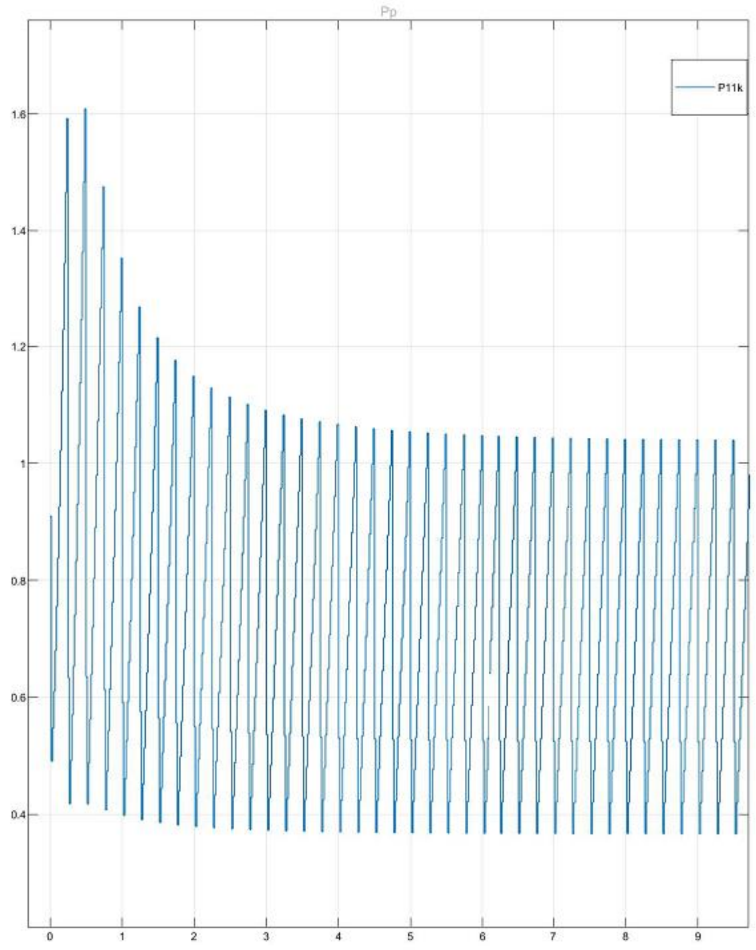
Gestire rate differenti comporta una gestione più complessa per la convergenza.
Infatti dal momento che la correzione non avviene ad ogni step del filtro il sistema diventerà tempo variante portando ad avere un guadagno con delle oscillazioni periodiche.

Sia P_k la matrice di covarianza al passo k dello stato stimato per il sistema ausiliario ottenuta come

$$P_{k+1|k} = FP_{k|k}F^T + G\Xi_w G^T$$

$$P_k = P_{k|k} = (I - L_k H_k)P_{k|k-1}(I - L_k H_k)^T + L_k \Xi_v {L_k}^T$$

Nella figura accanto si riporta l'andamento dell'elemento [1 1] della matrice di covarianza associata alla stima P_k



GUADAGNI FILTRO
POSITION

TRATTAZIONE CON SISTEMA ESTESO TEMPO INVARIANTE

Il sistema può essere riscritto per funzionare alla frequenza del GPS aumentando il vettore degli ingressi in modo tale da considerare ad ogni step le n_T misure fornite dal sensore INS

$$\underline{w_k} = \left[w_{kn_t}^T \quad w_{kn_t+1}^T \quad \cdots \quad w_{(k+1)n_t-1}^T\right]^T, \qquad w_k \in \mathbb{R}^{6n_T}$$
$$\underline{v_k} = \left[v_{kn_t}^T \quad v_{kn_t+1}^T \quad \cdots \quad v_{(k+1)n_t-1}^T\right]^T, \qquad v_k \in \mathbb{R}^{6n_T}$$
$$\underline{y_k} = \left[y_{kn_t}^T \quad y_{kn_t+1}^T \quad \cdots \quad y_{(k+1)n_t-1}^T\right]^T, \qquad y_k \in \mathbb{R}^{6n_T}$$

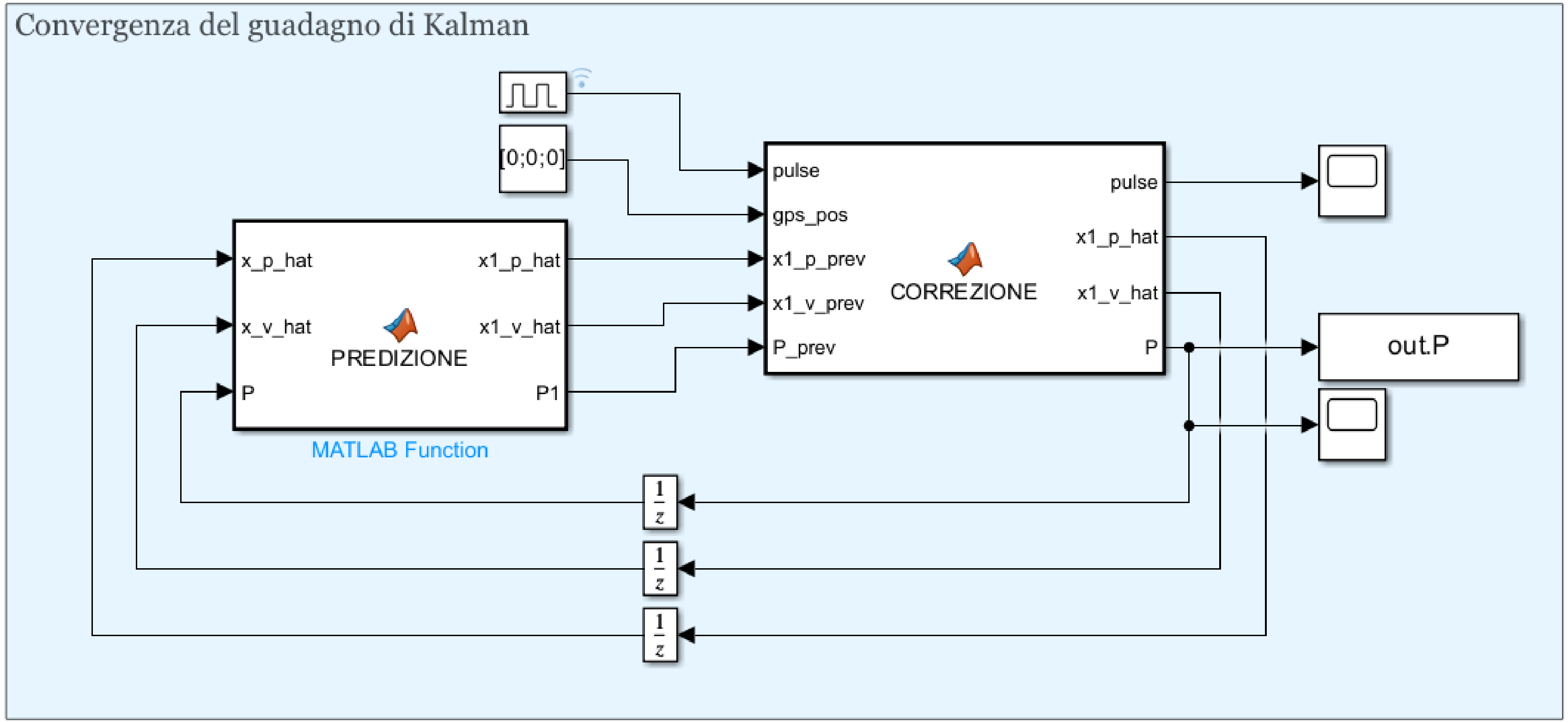
$$\underline{F} = F^{n_T} \quad , \underline{F} \in M(6,6)$$
$$\underline{G} = [F^{n_T-1}G \quad F^{n_T-2}G \quad \ldots \quad G] \quad , \underline{G} \in M(6, 6n_T)$$
$$\underline{H} = \left[H_0^T \quad F^T H_1^T \quad \ldots \quad F^{n_T-1} H_{n_T-1}^T\right] \quad , \underline{H} \in M(3n_t, 6)$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_1\mathbf{G} & \mathbf{0} & & & \vdots \\ \mathbf{H}_2\mathbf{F}\mathbf{G} & \mathbf{H}_2\mathbf{G} & \mathbf{0} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{n_T-1}\mathbf{F}^{n_T-1}\mathbf{G} & \cdots & \cdots & \mathbf{H}_{n_T-1}\mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{D}} \in \mathrm{M}(3n_T, 6n_T)$$

GUADAGNI FILTRO

POSITION

TRATTAZIONE IN AMBIENTE SIMULATO



GUADAGNI FILTRO
POSITION

TRATTAZIONE IN AMBIENTE SIMULATO

Portando la covarianza della stima nel workspace è possibile determinare i coefficienti K_{1p} e K_{2p} attraverso i passi riportati qui sotto

```
K_inf = F*out.P(:,:,end)*H'/(Theta_p+H*out.P(:,:,end)*H');
K1_p = K_inf(1:3,:);
K2_p = K_inf(4:6,:);
```

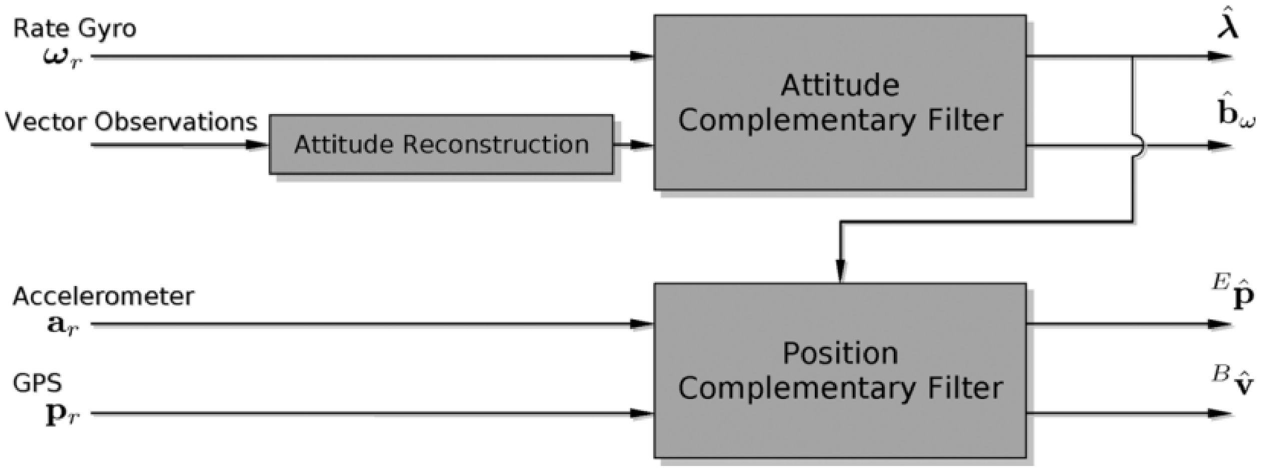
Coefficienti ottenuti dal processo di simulazione	Coefficienti proposti dall'articolo	Delta coefficienti
$K_{1p} = \begin{bmatrix} 0.3449 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3449 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3449 \end{bmatrix}$	$K_{1p\ articolo} = \begin{bmatrix} 0.59 & 0 & 0 \\ 0 & 0.59 & 0 \\ 0 & 0 & 0.59 \end{bmatrix}$	$\Delta_{k1p} = \begin{bmatrix} 0.245 & 0 & 0 \\ 0 & 0.245 & 0 \\ 0 & 0 & 0.245 \end{bmatrix}$
$K_{2p} = \begin{bmatrix} 0.0819 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0819 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0819 \end{bmatrix}$	$K_{2p\ articolo} = \begin{bmatrix} 0.14 & 0 & 0 \\ 0 & 0.14 & 0 \\ 0 & 0 & 0.14 \end{bmatrix}$	$\Delta_{k2p} = \begin{bmatrix} 0.058 & 0 & 0 \\ 0 & 0.058 & 0 \\ 0 & 0 & 0.058 \end{bmatrix}$

ANALISI FREQUENZIALE DEI FILTRI COMPLEMENTARI

Per l'analisi in frequenza è stato considerato come da articolo:

$$Q(\bar{\lambda}_k) = Q(0)$$

$$\bar{\mathcal{R}}_k = I_{3\times 3}$$



FDT Sensori inerziale - Stima

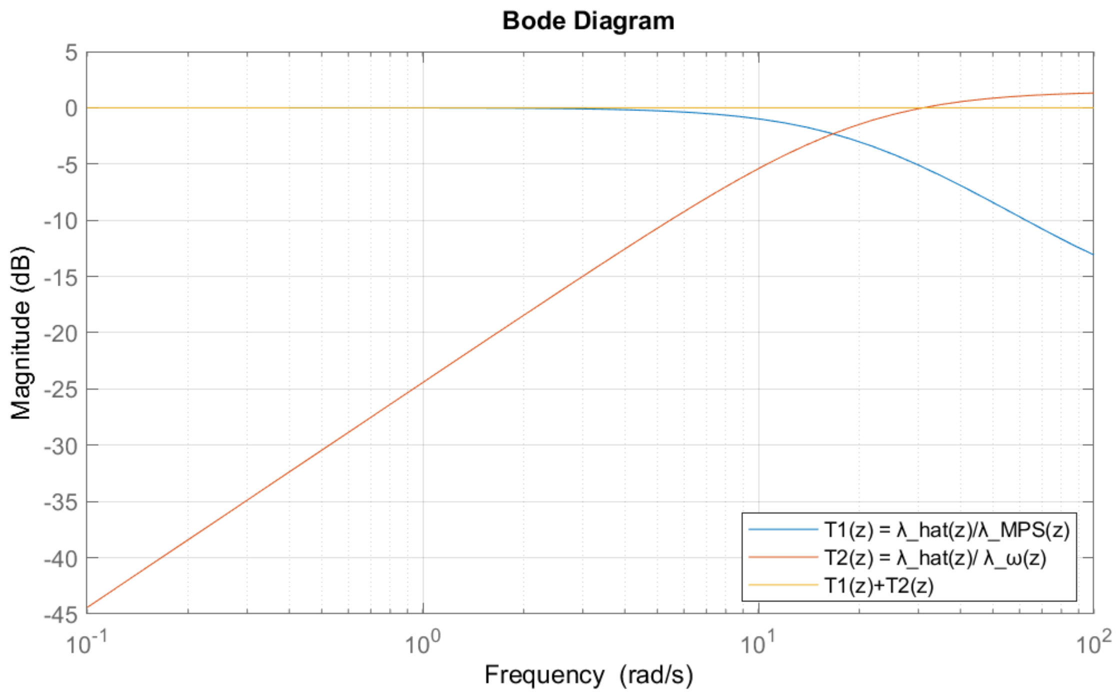
$$\lambda_{\omega\, k+1} = \lambda_{\omega\, k} + TQ(0)\omega_{r\, k}$$

$$p_{a\, k+1} = p_{a\, k} + Tv_{a\, k} + \frac{T^2}{2} a_{r\, k}$$

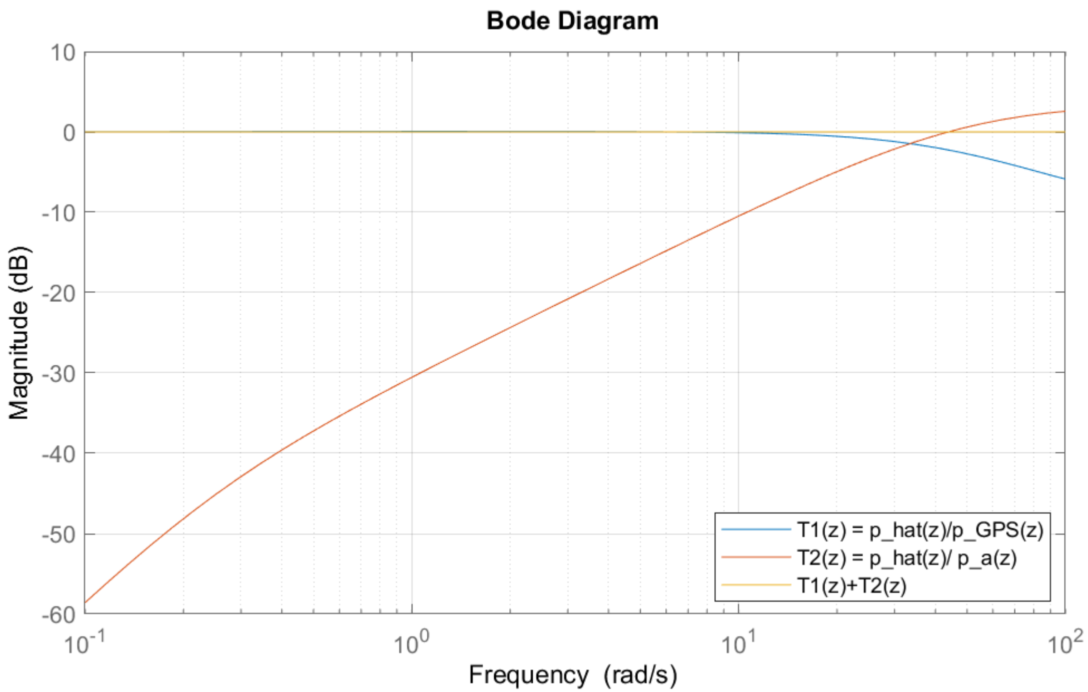
$$v_{a\, k+1} = v_{a\, k} + Ta_{r\, k}$$

ANALISI FREQUENZIALE DEI FILTRI COMPLEMENTARI

FILTRO ATTITUDE



FILTRO POSITION

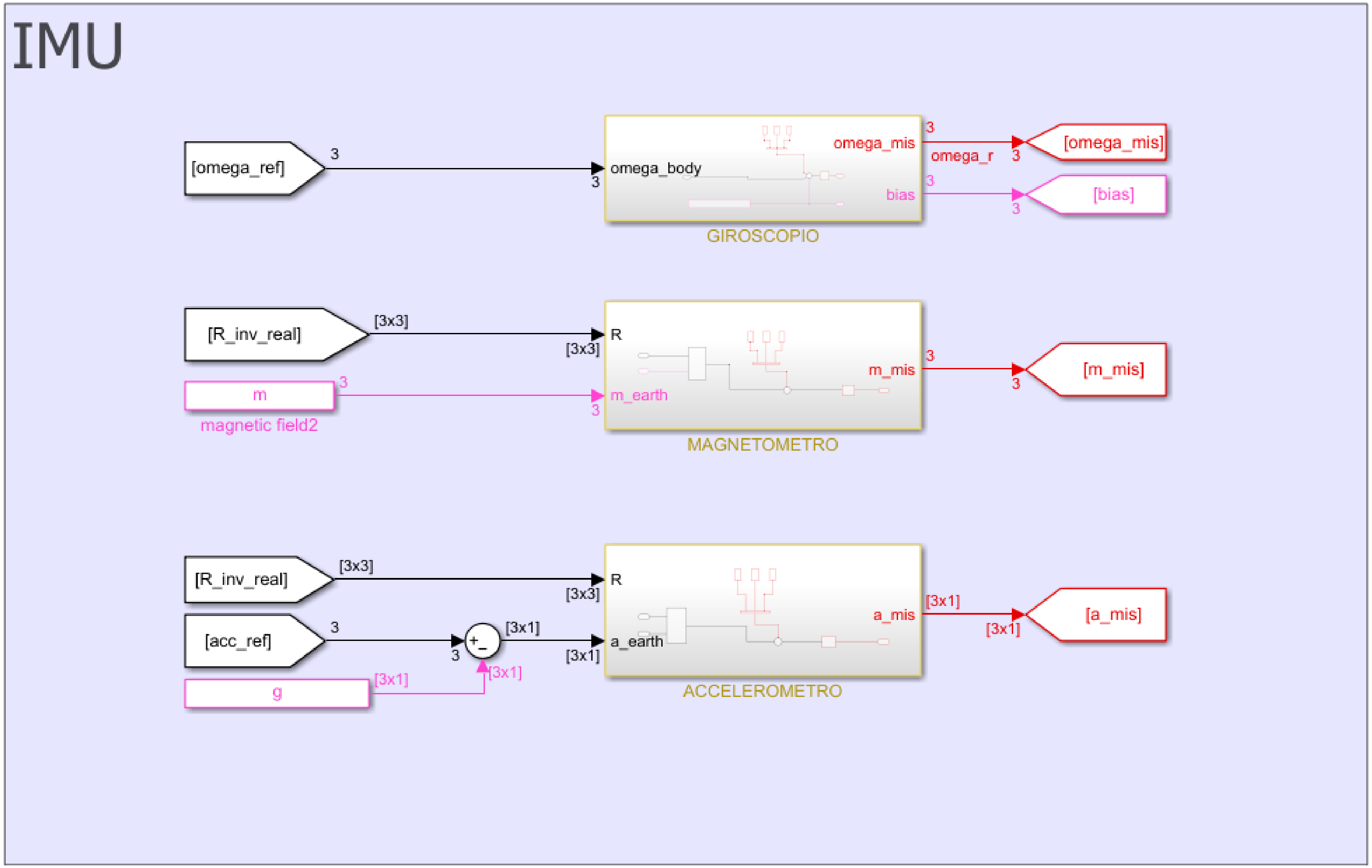


L’analisi in frequenza del sistema mostra il comportamento del filtro complementare. La f.d.t a ciclo chiuso tra assetto misurato con l’algoritmo MPS e l’assetto stimato è passa basso mentre quello tra assetto misurato con integrazione delle misure del giroscopio e l’assetto stimato è passa alto. Inoltre le due f.d.t sommano ad 1. Discorso analogo per le posizioni misurate con il GPS e misurate per integrazione delle accelerazioni

$\hat{\lambda}$: assetto stimato
λ_ω : assetto misurato per integrazione velocità angolari
λ_{MPS} : assetto misurato tramite algoritmo MPS

$\hat{p}$: posizione stimata
p_a : posizione misurato per integrazione accelerazioni
p_{GPS} : posizione misurato tramite GPS

IMPLEMENTAZIONE



La IMU è modellata utilizzando i seguenti rumori bianchi additivi

$$w_\omega \sim \mathcal{N}(b_\omega, \Xi_\omega)$$

dove:

$$b_\omega = [8.72e-4, 1.7e-3, 2.6e-3]^T \text{ rad/s}$$

$$\Xi_\omega = 0.0031\, I_3 \text{ rad/s}$$

$$w_m \sim \mathcal{N}(0, \Xi_m)$$

dove:

$$\Xi_m = I_3 \text{ mG}$$

$$w_a \sim \mathcal{N}(0, \Xi_a)$$

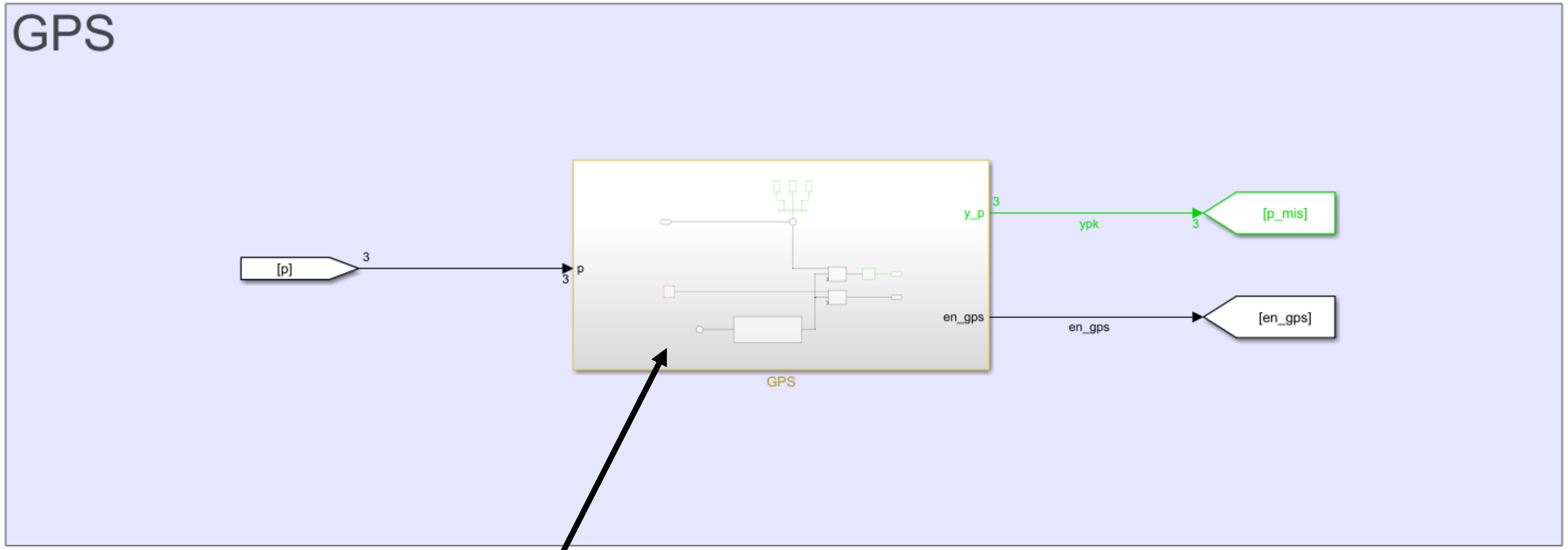
dove:

$$\Xi_a = 2.6e-3\, I_3 \text{ m/s}^2$$

I modelli dei rumori sono ripresi dall'articolo fatta eccezione dei bias del giroscopio. Essi sono stati presi diversi lungo i diversi assi x, y e z per evidenziare l'efficacia del filtro proposto nello stimarne i valori corretti

LEGENDA

Costante | T_GPS | T_INS | Continuo

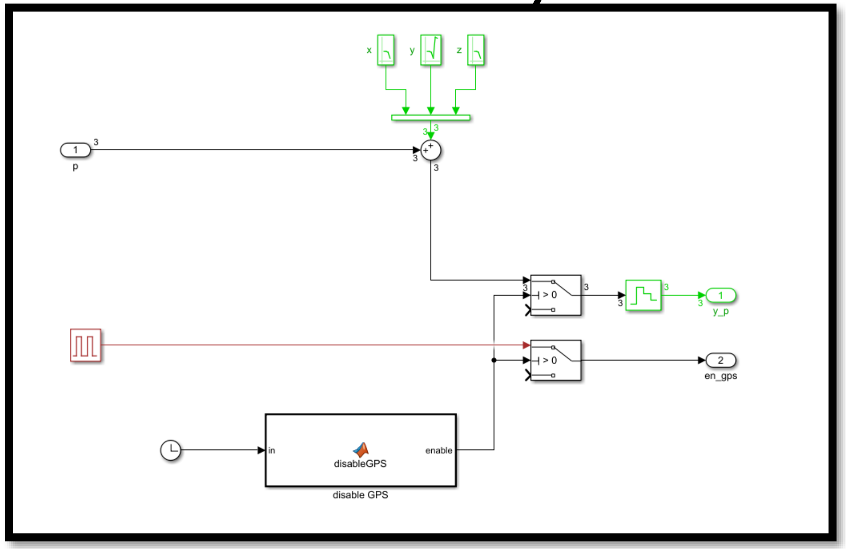


Il GPS è stato modellato con del rumore bianco additivo

$$w_p \sim \mathrm{N}(0, \Xi_p)$$

dove:

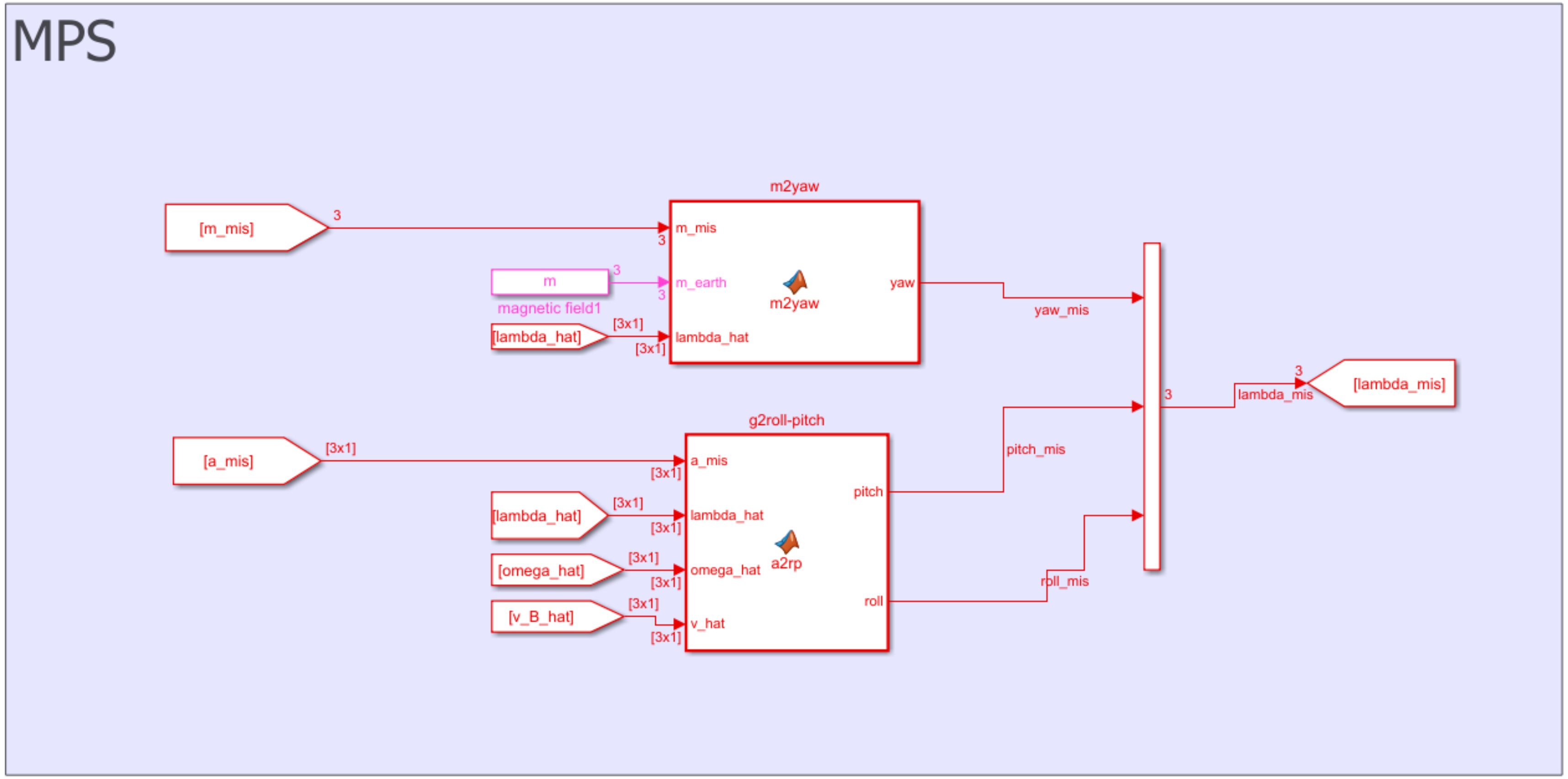
$$\Xi_\omega = 3\ I_3 \ \text{m}$$



Un blocco di MATLAB function è stato inserito per agevolare l'accensione e lo spengimento delle misure GPS. Il blocco SIMULINK riporta infatti in output sial il valore di posizione misurato che il valore *en_gps*, utilizzato per abilitare o meno nel filtro di posizione la retroazione con la misura disponibile

LEGENDA

Costante T_GPS T_INS Continuo



Il seguente blocco implementa le formule dell'algoritmo MPS per la conversione delle misure di accelerometro e magnetometro in misure degli angoli di asseto. L'algoritmo è ben dettagliato nella sezione 2, per brevità si riportano qui sotto le equazioni implementate.

$$\bar{\phi} = atan2(-a_y, -a_z)$$

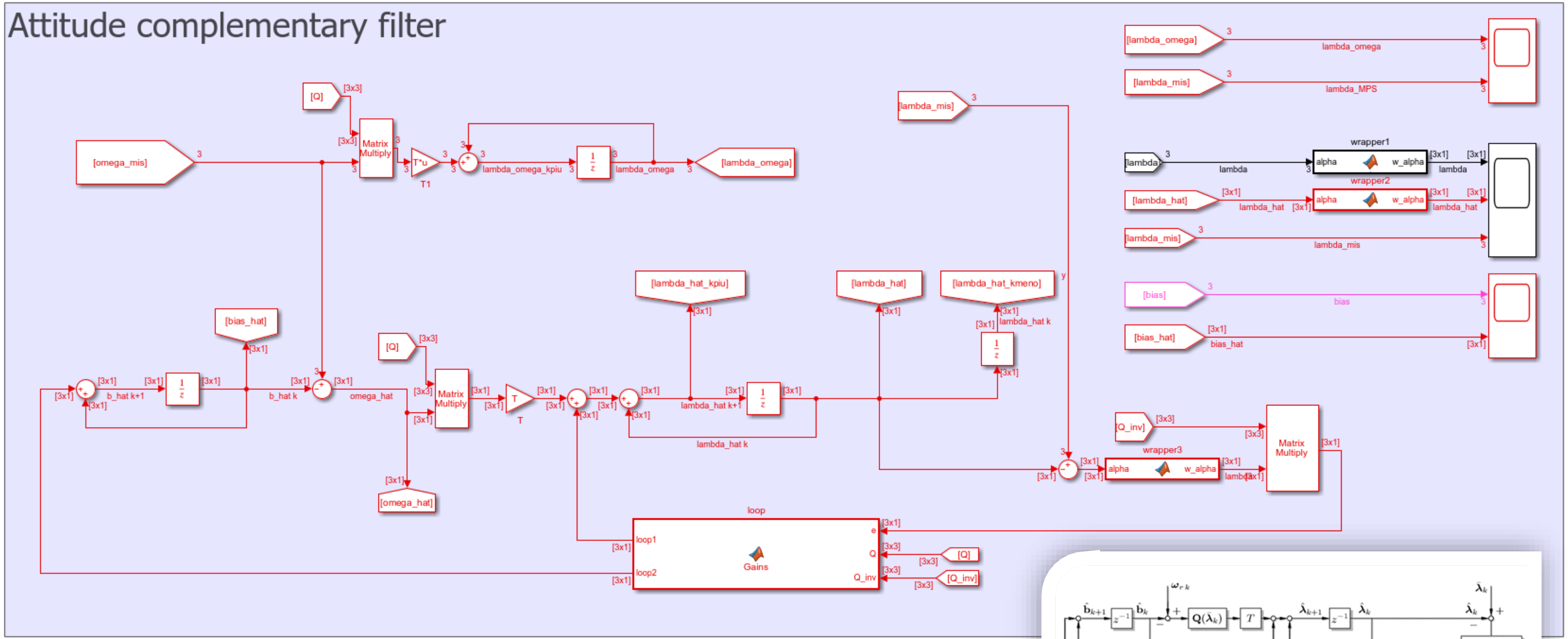
$$\bar{\theta} = \begin{cases} atan\left(-\dfrac{a_x \sin(\bar{\phi})}{a_y}\right), & \sin(\bar{\phi}) \neq 0 \\ atan\left(-\dfrac{a_x \cos(\bar{\phi})}{a_z}\right), & cos(\bar{\phi}) \neq 0 \end{cases}$$

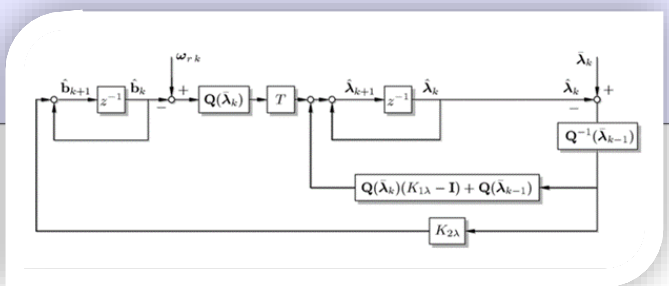
$$\bar{\psi} = atan2({}^{E}\bar{m}_y\, {}^{P}\bar{m}_x - {}^{E}\bar{m}_x\, {}^{P}\bar{m}_y\ ,\ {}^{E}\bar{m}_x\, {}^{P}\bar{m}_x + {}^{E}\bar{m}_y\, {}^{P}\bar{m}_y)$$

$$\hat{a}_p = a_r - \hat{\omega} \times {}^{B}\bar{v}$$

L E G E N D A

Costante T_GPS T_INS Continuo

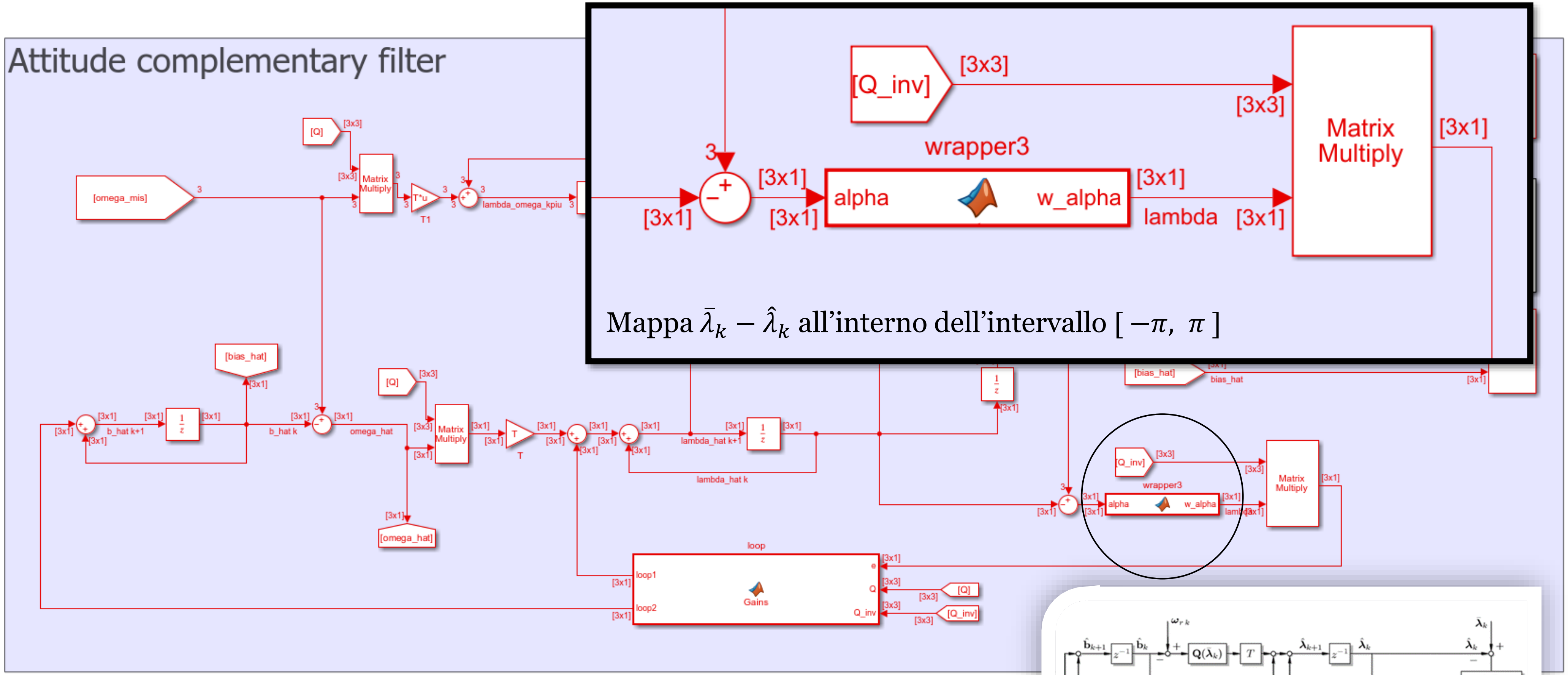




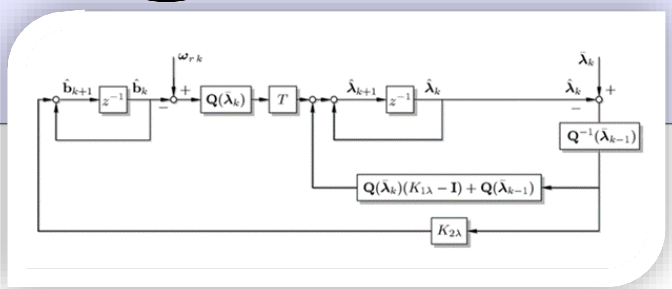
Il seguente blocco implementa il filtro complementare di assetto

L E G E N D A

- Costante
- T_GPS
- T_INS
- Continuo

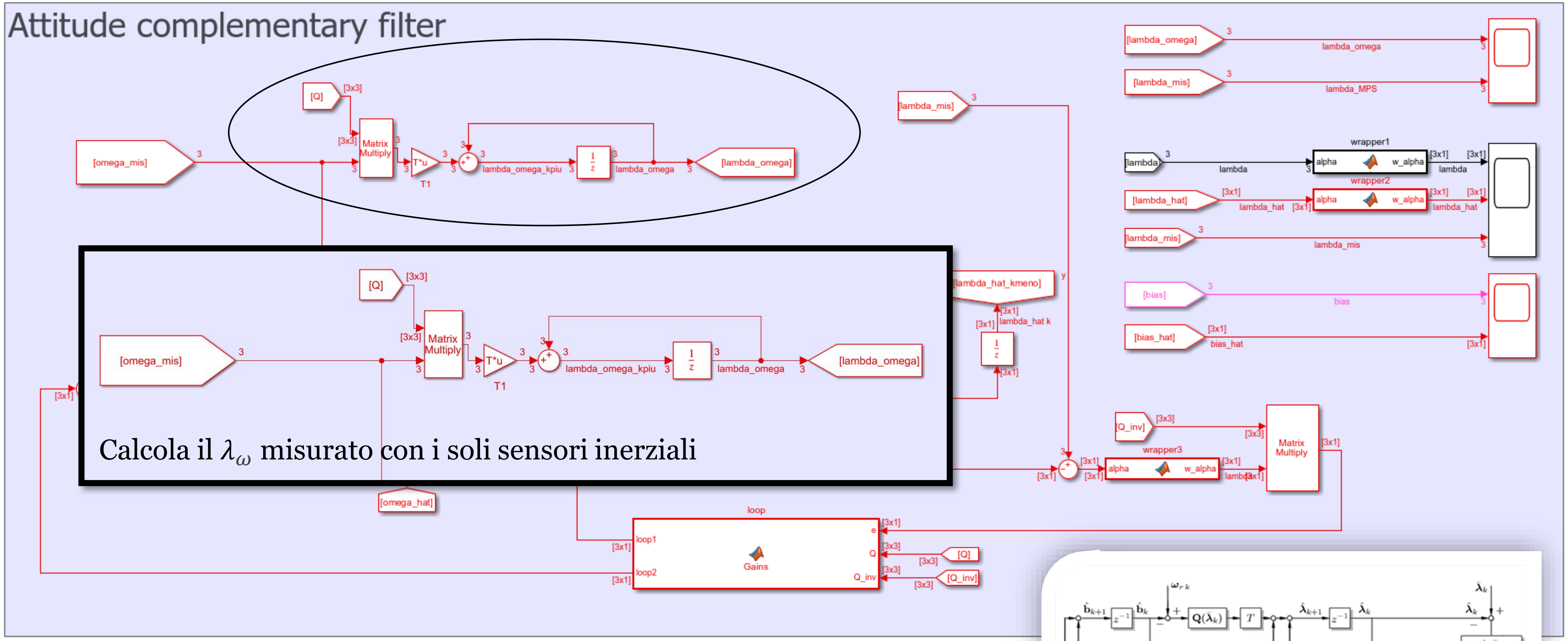


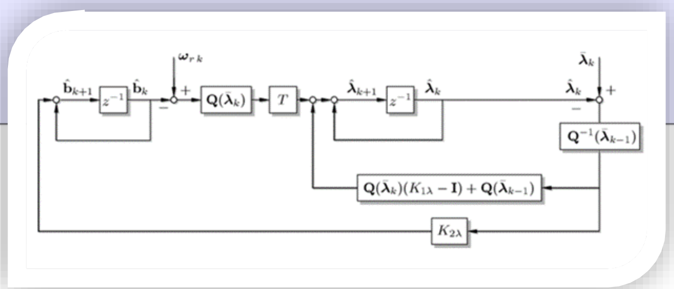
Mappa $\bar{\lambda}_k - \hat{\lambda}_k$ all'interno dell'intervallo $[\,-\pi,\ \pi\,]$



L E G E N D A

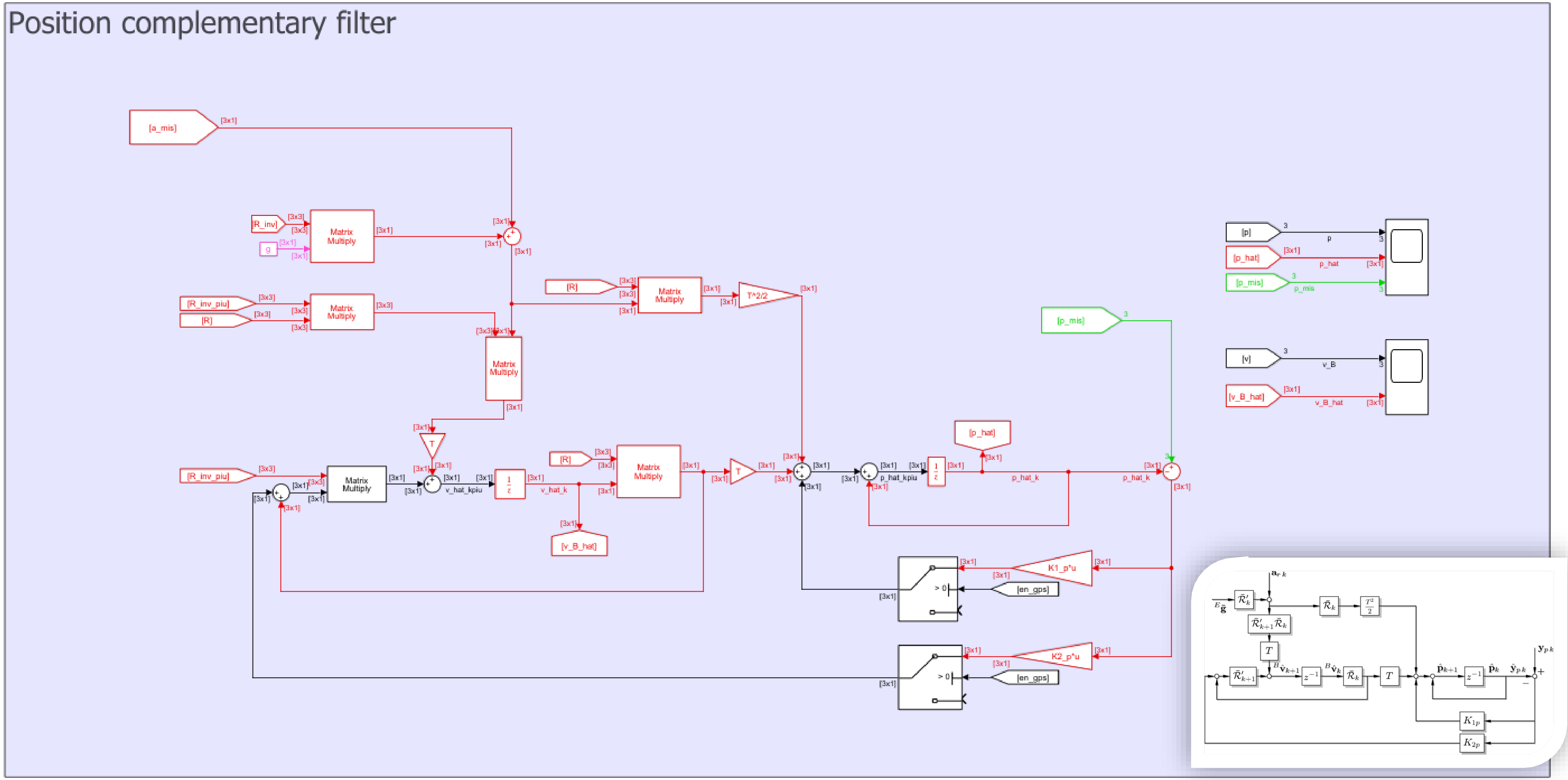
Costante · T_GPS · T_INS · Continuo





L E G E N D A

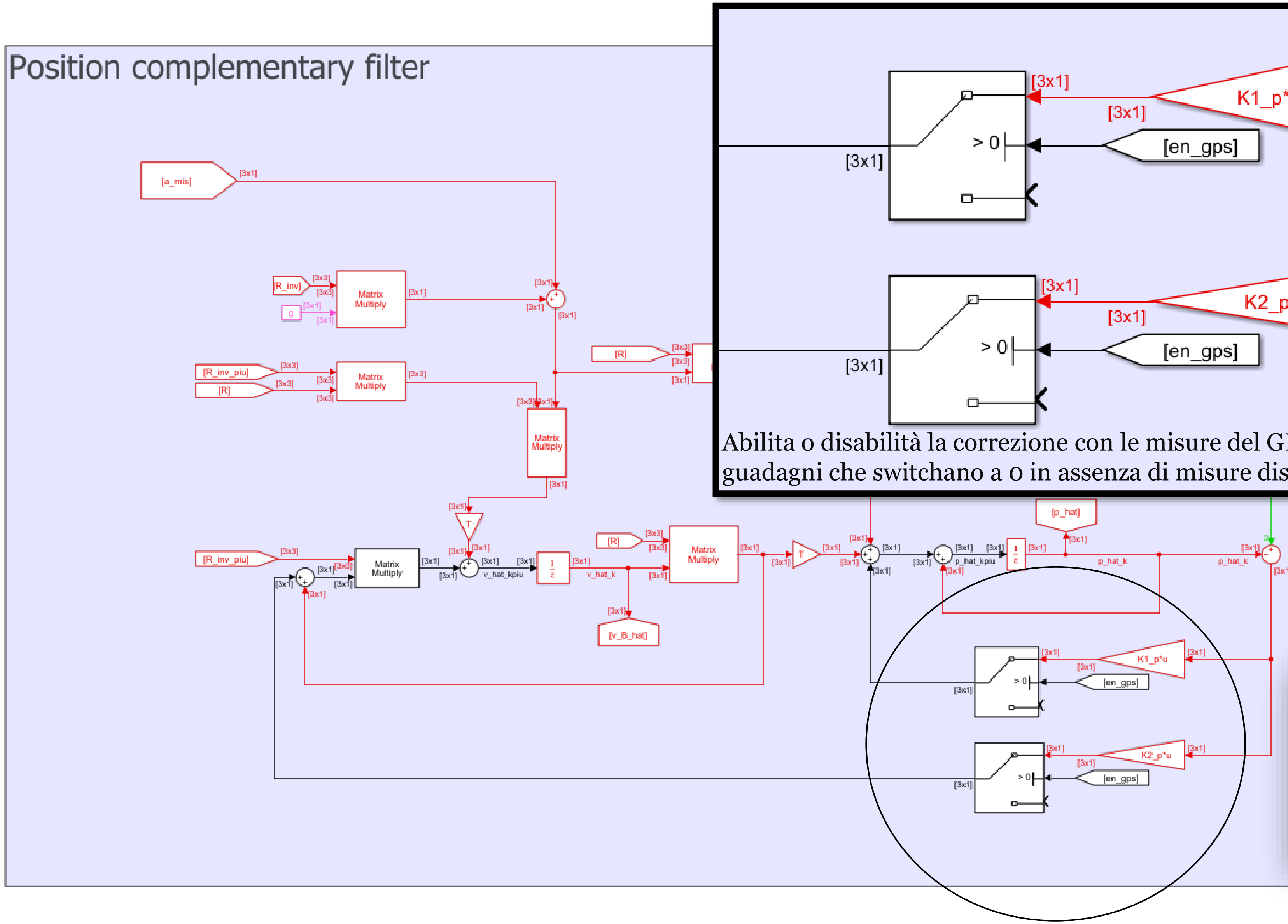
Costante T_GPS T_INS Continuo



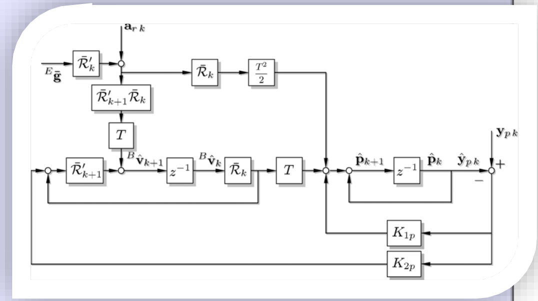
Il seguente blocco implementa il filtro complementare di posizione

L E G E N D A

Costante — T_GPS — T_INS — Continuo



Abilita o disabilità la correzione con le misure del GPS, utilizza dei guadagni che switchano a 0 in assenza di misure disponibili



LEGENDA

Costante T_GPS T_INS Continuo

SIMULAZIONI E RISULTATI

6.1 SIMULAZIONE 1

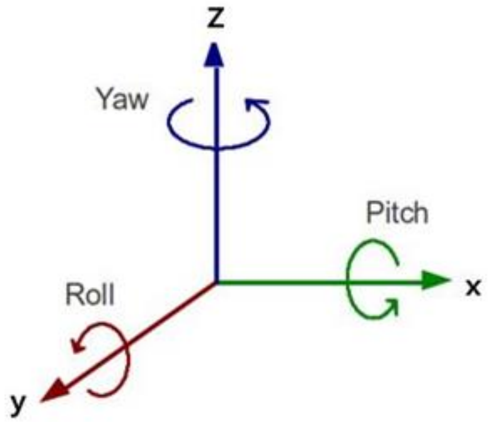
6.2 SIMULAZIONE 2

6.3 SIMULAZIONE 3

ANALISI E RISULTATI

TRAIETTORIA CIRCOLARE – STIMA BIAS PIÙ LENTA

DESCRIZIONE DEGLI INGRESSI E PARAMETRI USATI



ROLL

- **Tipo di curva**: Sinusoide
- **Ampiezza**: 10°
- **Frequenza**: $\frac{2\pi}{100}\ \frac{rad}{sec}$
- **Fase**: 0 rad

PITCH

- **Tipo di curva**: Sinusoide
- **Ampiezza**: 9°
- **Frequenza**: $\frac{2\pi}{100}\ \frac{rad}{sec}$
- **Fase**: 2 rad

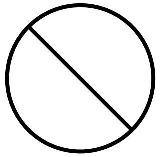
YAW

- **Tipo di curva**: Rampa

GUADAGNI FILTRO

Coefficienti proposti dall'articolo

INTERRUZIONE GPS



PARAMETRO TUNING BIAS

Agiremo sul parametro Ξ_b:

maggiore $\Xi_b \rightarrow$ *maggiore sarà la correzione*

Per questo test useremo un bias che convergerà lentamente

$\Xi_b = 10^{-10}$

ANALISI E RISULTATI

TRAIETTORIA CIRCOLARE – STIMA BIAS PIÙ LENTA

BIAS

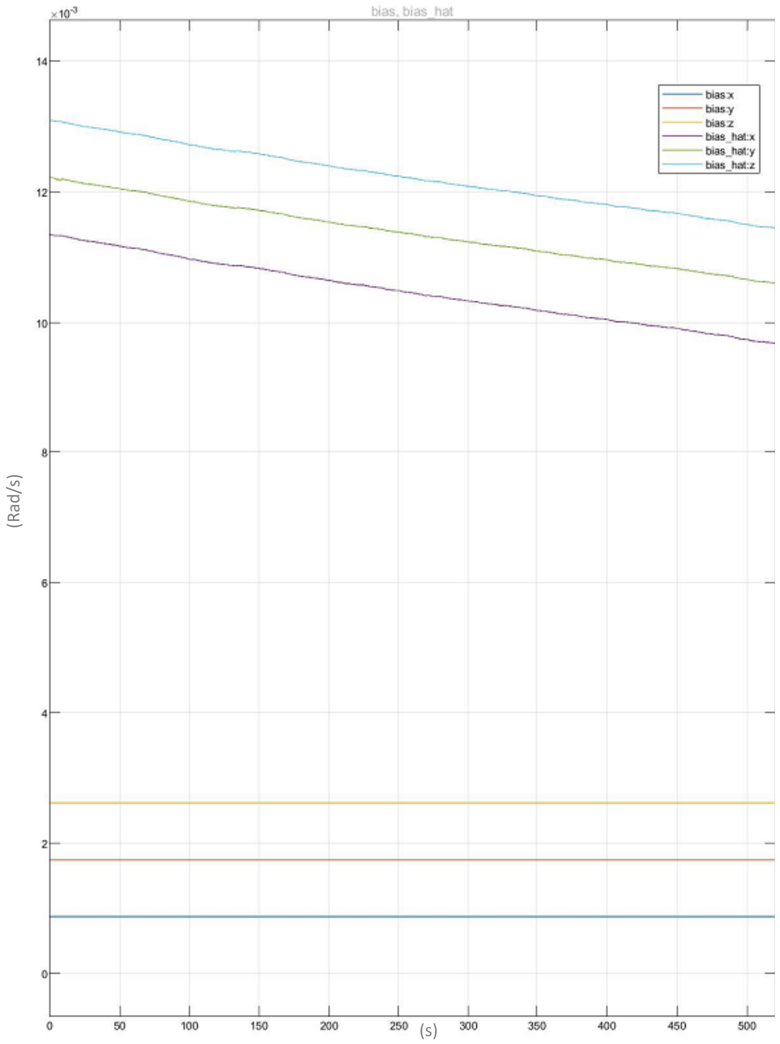


Figura 1

BIAS A CONVERGENZA

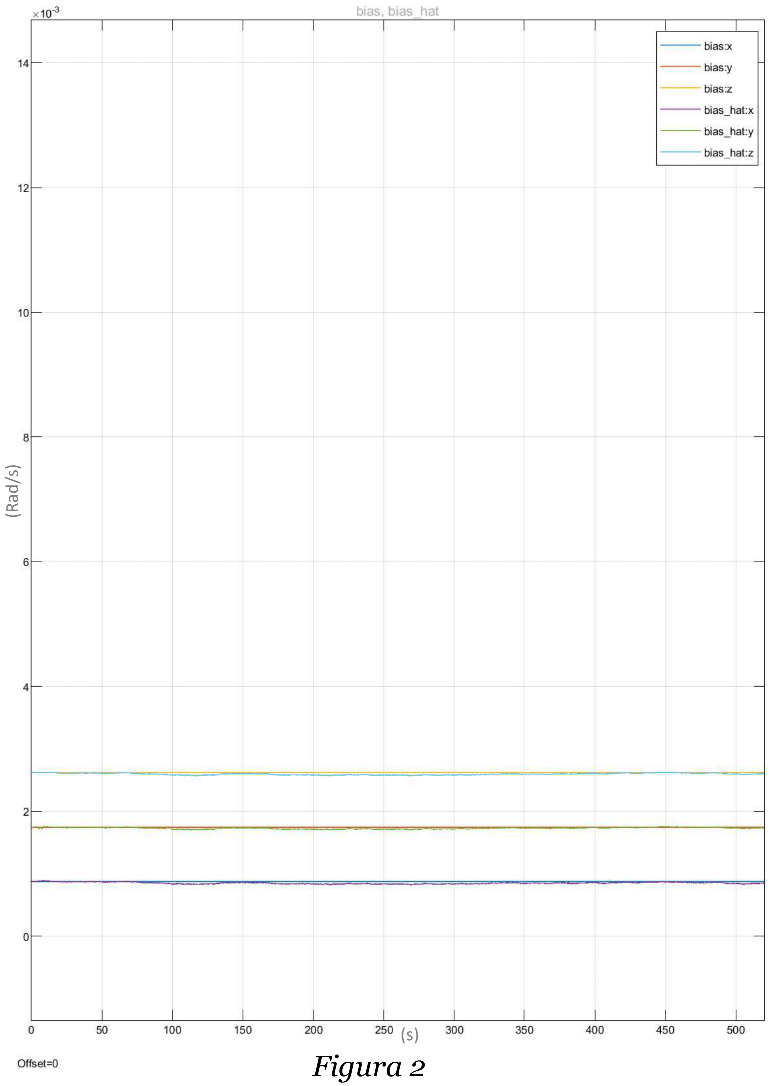


Figura 2

La scelta del parametro di tuning:

$$\Xi_b = 10^{-10}$$

covarianza rumore bianco bias

Effetto:

comporta una lenta convergenza dei bias.

Considerazione:

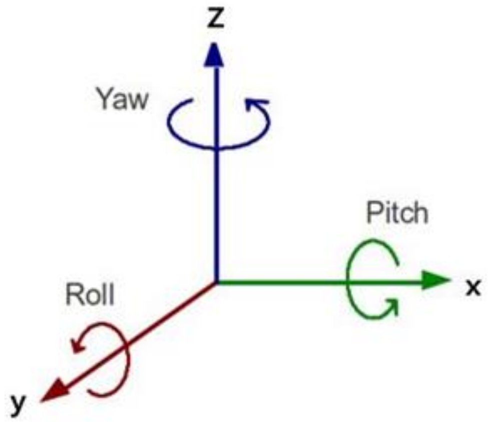
Può essere quindi utilizzato se si può supporre una buona conoscenza a priori.

- *Figura 1:* Convergenza bias partendo da condizioni iniziali distanti rispetto al valor vero
- *Figura 2:* Stima bias partendo da condizioni iniziali prossime rispetto al valor vero

ANALISI E RISULTATI

TRAIETTORIA CIRCOLARE – STIMA BIAS PIÙ VELOCE

DESCRIZIONE DEGLI INGRESSI E PARAMETRI USATI



ROLL

- **Tipo di curva**: Sinusoide
- **Ampiezza**: 10°
- **Frequenza**: $\frac{2\pi}{100} \frac{rad}{sec}$
- **Fase**: 0 rad

PITCH

- **Tipo di curva**: Sinusoide
- **Ampiezza**: 9°
- **Frequenza**: $\frac{2\pi}{100} \frac{rad}{sec}$
- **Fase**: 2 rad

YAW

- **Tipo di curva**: Rampa

GUADAGNI FILTRO

Coefficienti proposti dall'articolo

INTERRUZIONE GPS

Ci saranno due interruzioni di misure:

- Da **100** a **140** secondi
- Da **280** a **320** secondi

PARAMETRO TUNING BIAS

Agiremo sul parametro Ξ_b :

maggiore $\Xi_b \rightarrow$ *maggiore sarà la correzione*

Per questo test useremo un bias che convergerà più velocemente

$\Xi_b = 10^{-7}$

ANALISI E RISULTATI

TRAIETTORIA CIRCOLARE – STIMA BIAS PIÙ VELOCE

BIAS

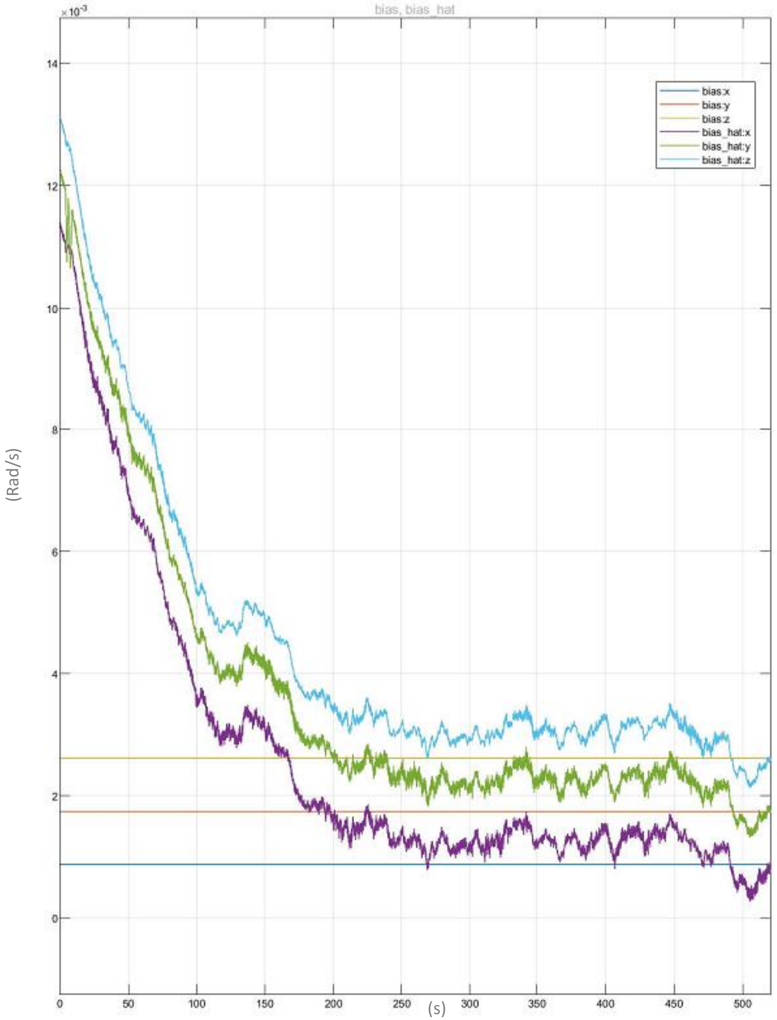


Figura 1

BIAS A CONVERGENZA

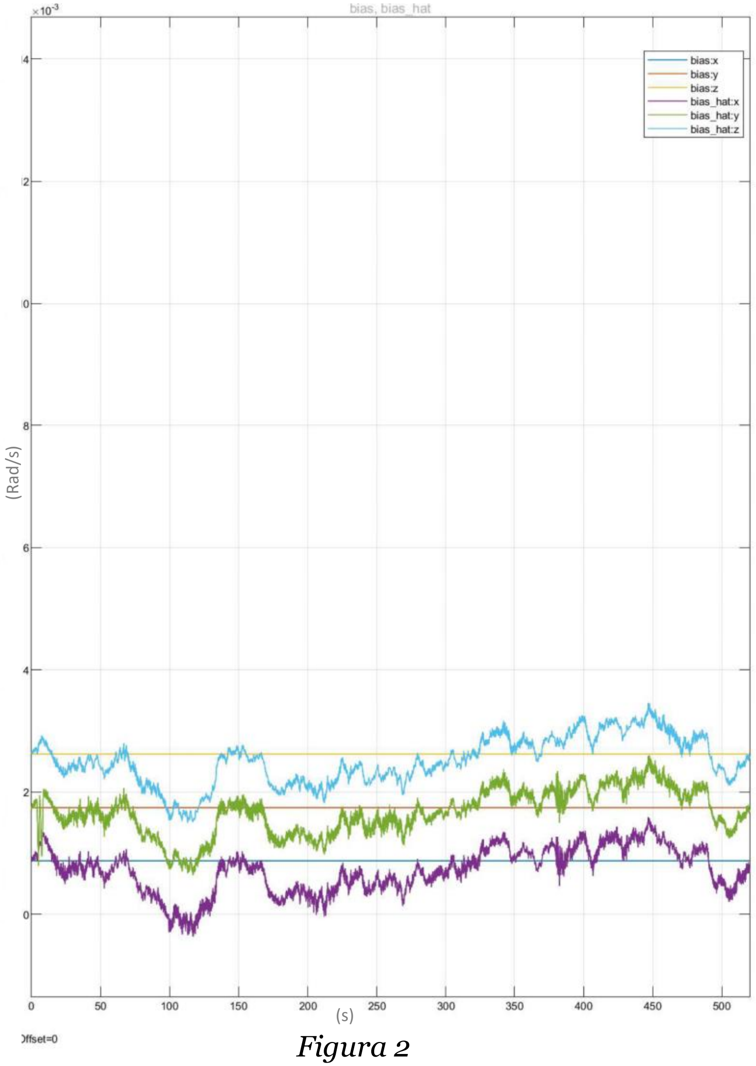


Figura 2

La scelta del parametro di tuning $\Xi_b = 10^{-7}$ comporta una convergenza dei bias più veloce. È quindi preferibile se si vuole effettuare una stima più accurata online.

- *Figura 1:* Convergenza bias partendo da condizioni iniziali distanti rispetto al valor vero
- *Figura 2:* Stima bias partendo da condizioni iniziali prossime rispetto al valor vero

ANALISI E RISULTATI

TRAIETTORIA CIRCOLARE – CONFRONTO BIAS

STIMA BIAS LENTA

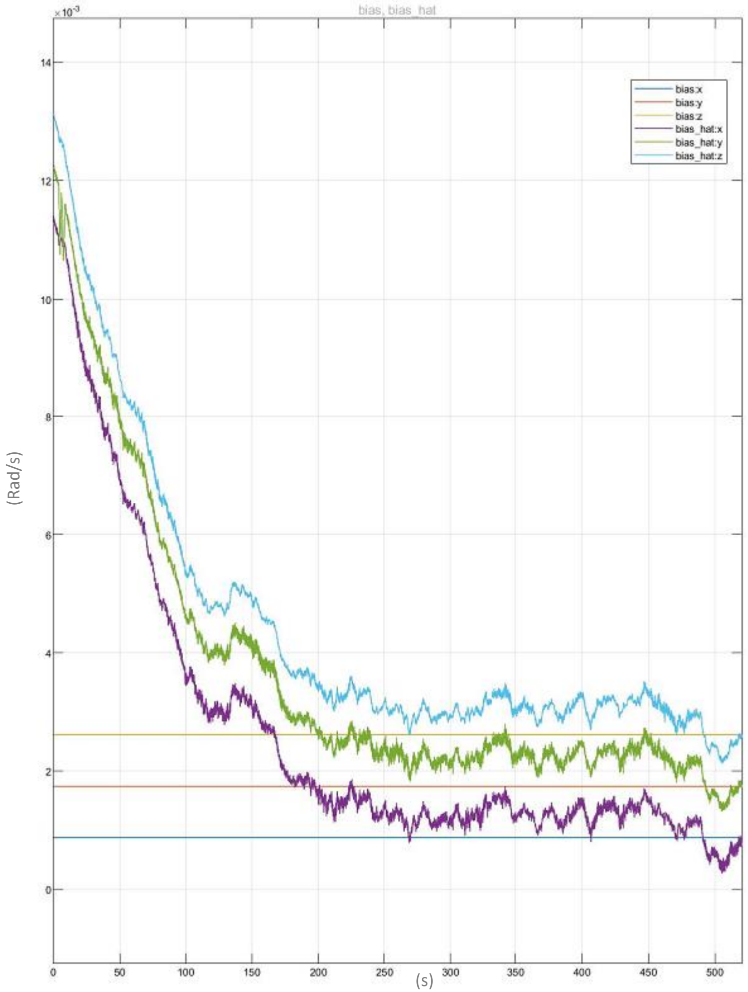


Figura 1

STIMA BIAS VELOCE

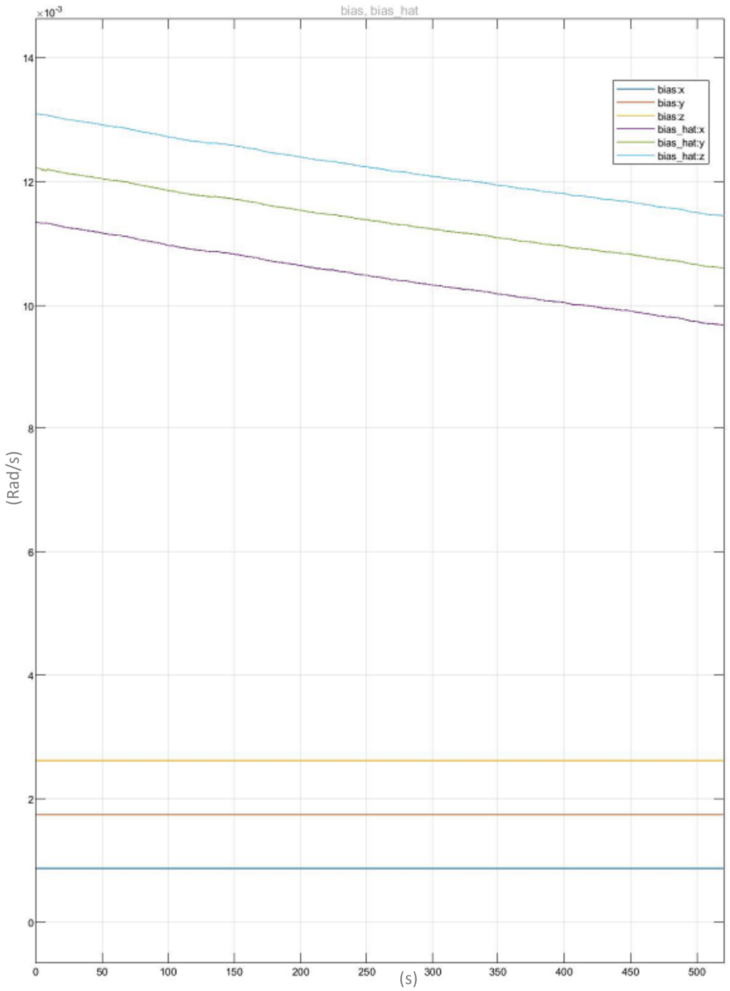


Figura 2

Considerazioni sul parametro tuning Bias

$$\textit{Figura 1} \rightarrow \Xi_b = 10^{-7}$$
$$\textit{Figura 2} \rightarrow \Xi_b = 10^{-10}$$

Dalle due immagini è possibile osservare un comportamento profondamente diverso che può essere riassunto in due concetti chiave:

1. **CONVERGENZA**: Aumentare il parametro Ξ_b comporta ad avere una velocità di convergenza maggiore.
   Le due figure rappresentano infatti la stessa traiettoria con le medesime condizioni, fatta eccezione proprio da Ξ_b

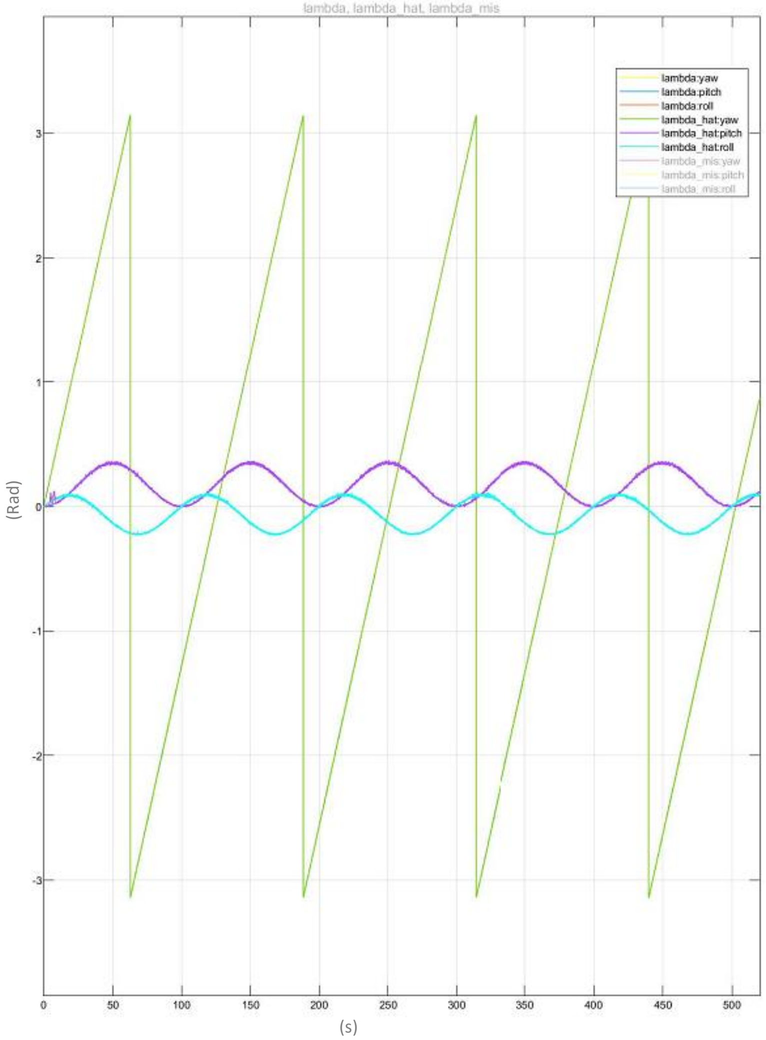
2. **OSCILLAZIONE**: Tuttavia diminuire Ξ_b comporterà ad avere come in *Figura 2* un andamento regolare in netta contrapposizione alla *Figura 1* dove è possibile notare fin da subito un rumore più accentuato.

Conclusione: se ipotizziamo una stima iniziale del bias corretta conviene usare un bias a lenta convergenza per garantire una evoluzione più regolare nel tempo

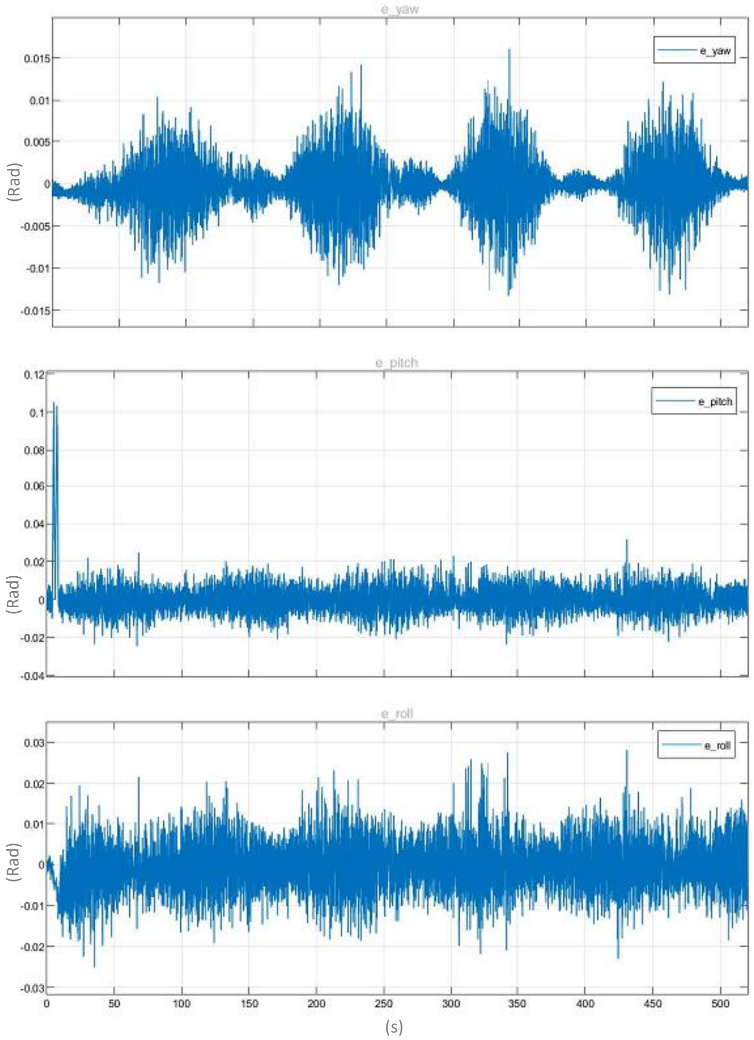
ANALISI E RISULTATI

TRAIETTORIA CIRCOLARE – STIMA BIAS PIÙ VELOCE

LAMBDA



ERRORE LAMBDA



Estimation Error	Mean Standard Deviation
$\hat{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}$	$\begin{bmatrix} 2.01 & 2.01 & 2.01 \end{bmatrix}$ m
$\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \bar{\boldsymbol{\lambda}}$	$\begin{bmatrix} 0.03 & 0.19 & 0.19 \end{bmatrix}$ °
$\hat{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}$	$\begin{bmatrix} 0.46 & 0.46 & 0.46 \end{bmatrix}$ m/s
$\hat{\mathbf{b}}_\omega - \bar{\mathbf{b}}_\omega$	$\begin{bmatrix} 1.56 \times 10^{-3} & 1.69 \times 10^{-3} & 1.27 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$ °/s

La tabella riporta i risultati di deviazione standard ottenuti nell'articolo in merito agli errori di:

- Posizione
- Assetto
- Velocità
- Bias

Tali valori sono stati ottenuti tramite un set di simulazioni Montecarlo la cui traiettoria impostata è coerente con quella scelta nella sezione corrente: (*Traiettoria Circolare*)

Anche per quanto riguarda i modelli dei sensori sono stati scelti parametri uguali, ad eccezione per i bias.
Come visto nelle slide precedenti si è infatti optato per avere bias differenti lungo gli assi della terna.

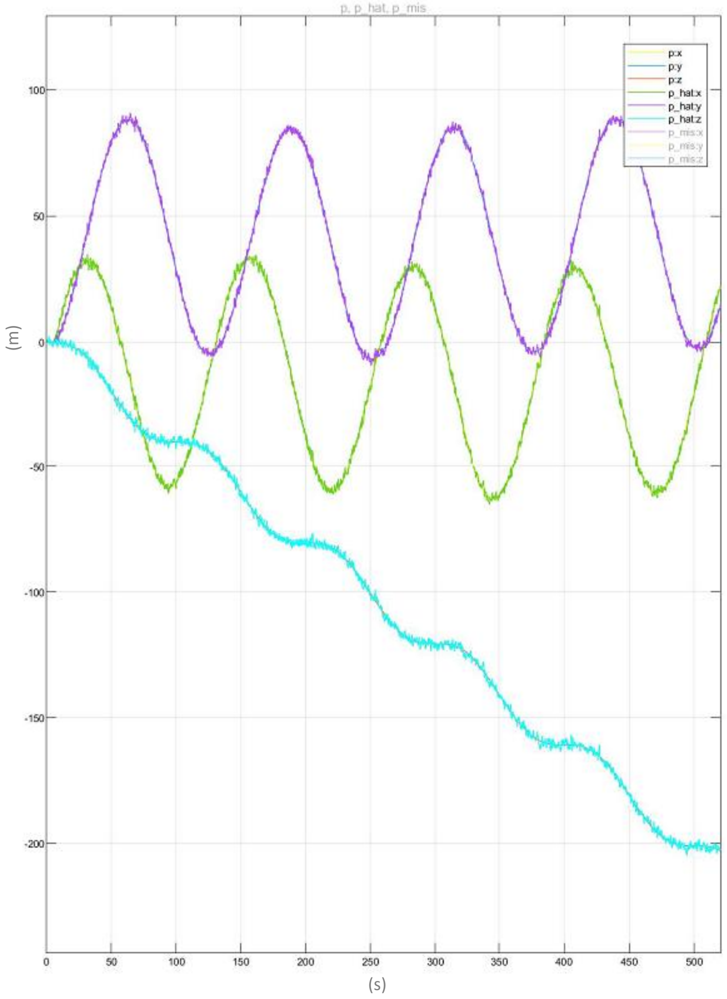
La conversione della deviazione standard in radianti dell'errore d'assetto risulterà:

$$[\,5{,}3 \cdot 10^{-4} \quad 0{,}003 \quad 0{,}003\,]\ rad$$

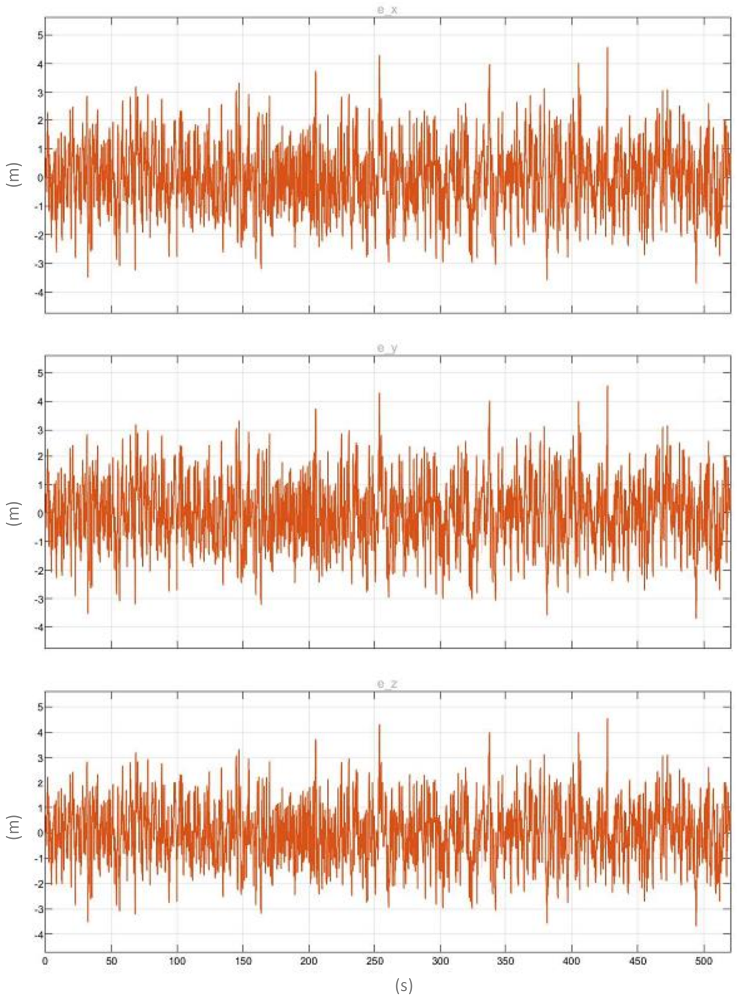
ANALISI E RISULTATI

TRAIETTORIA CIRCOLARE – STIMA BIAS PIÙ VELOCE

POSIZIONE



ERRORE POSIZIONE



Estimation Error	Mean Standard Deviation
$\hat{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}$	$\begin{bmatrix} 2.01 & 2.01 & 2.01 \end{bmatrix}$ m
$\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \bar{\boldsymbol{\lambda}}$	$\begin{bmatrix} 0.03 & 0.19 & 0.19 \end{bmatrix}$ °
$\hat{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}$	$\begin{bmatrix} 0.46 & 0.46 & 0.46 \end{bmatrix}$ m/s
$\hat{\mathbf{b}}_\omega - \bar{\mathbf{b}}_\omega$	$\begin{bmatrix} 1.56 \times 10^{-3} & 1.69 \times 10^{-3} & 1.27 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$ °/s

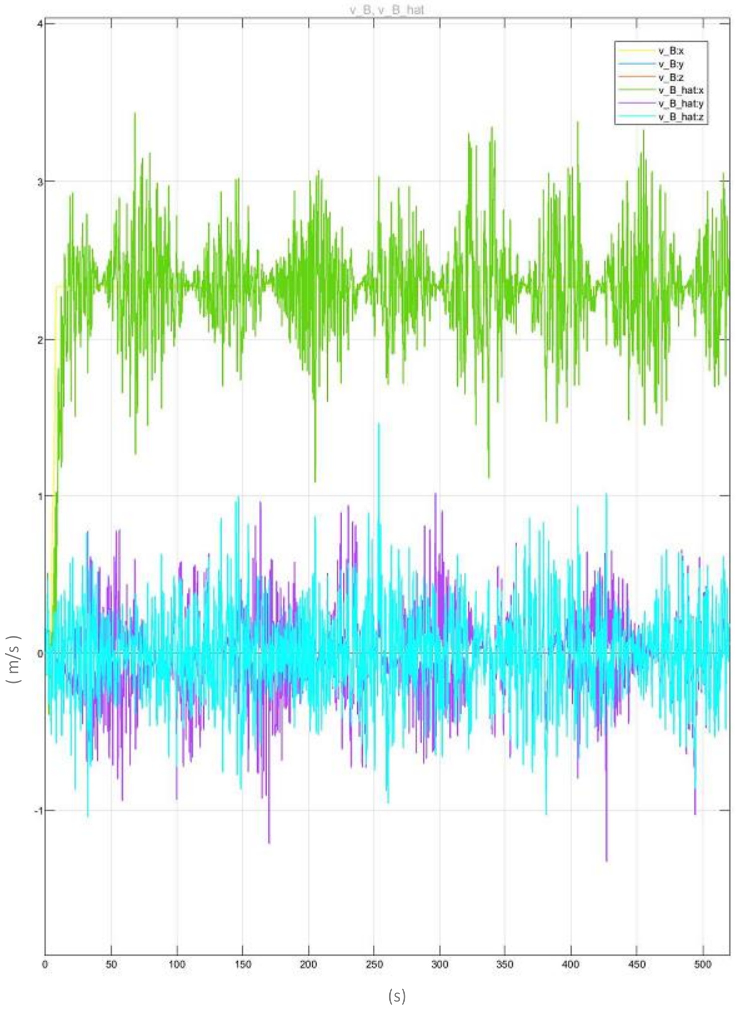
L' errore delle posizioni in simulazione risulta essere coerente con quello ricavato nell'articolo.

Infatti l'errore risulterà limitato in $\pm 3\sigma$

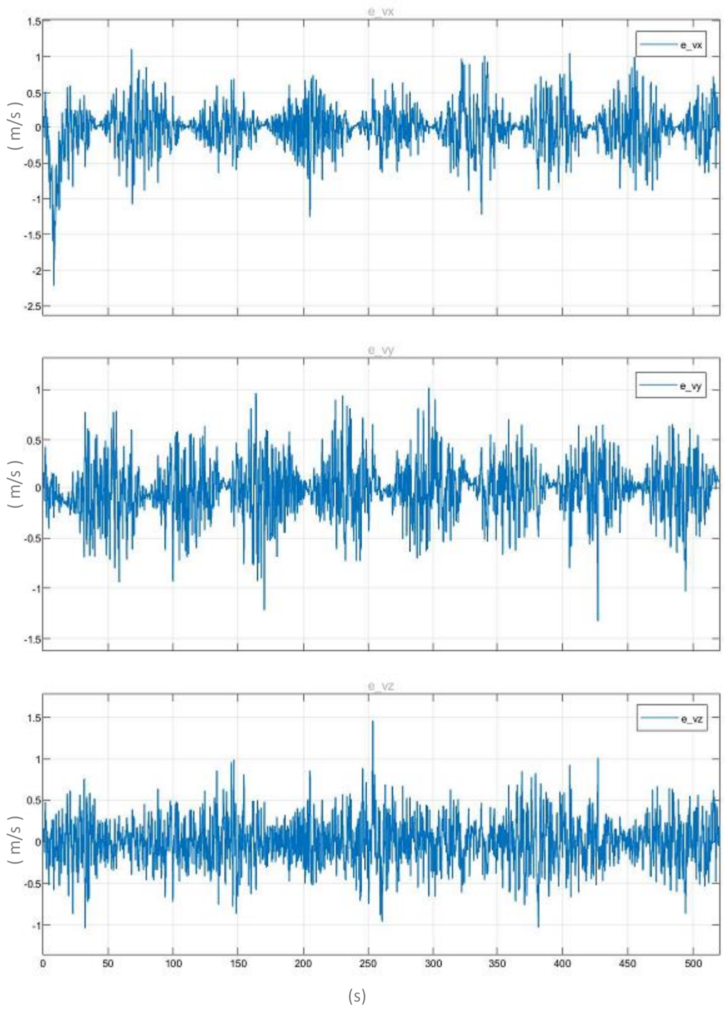
ANALISI E RISULTATI

TRAIETTORIA CIRCOLARE – STIMA BIAS PIÙ VELOCE

VELOCITÁ



VELOCITÁ



Estimation Error	Mean Standard Deviation
$\hat{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}$	$\begin{bmatrix} 2.01 & 2.01 & 2.01 \end{bmatrix}$ m
$\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \bar{\boldsymbol{\lambda}}$	$\begin{bmatrix} 0.03 & 0.19 & 0.19 \end{bmatrix}$ °
$\hat{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}$	$\begin{bmatrix} 0.46 & 0.46 & 0.46 \end{bmatrix}$ m/s
$\hat{\mathbf{b}}_\omega - \bar{\mathbf{b}}_\omega$	$\begin{bmatrix} 1.56 \times 10^{-3} & 1.69 \times 10^{-3} & 1.27 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$ °/s

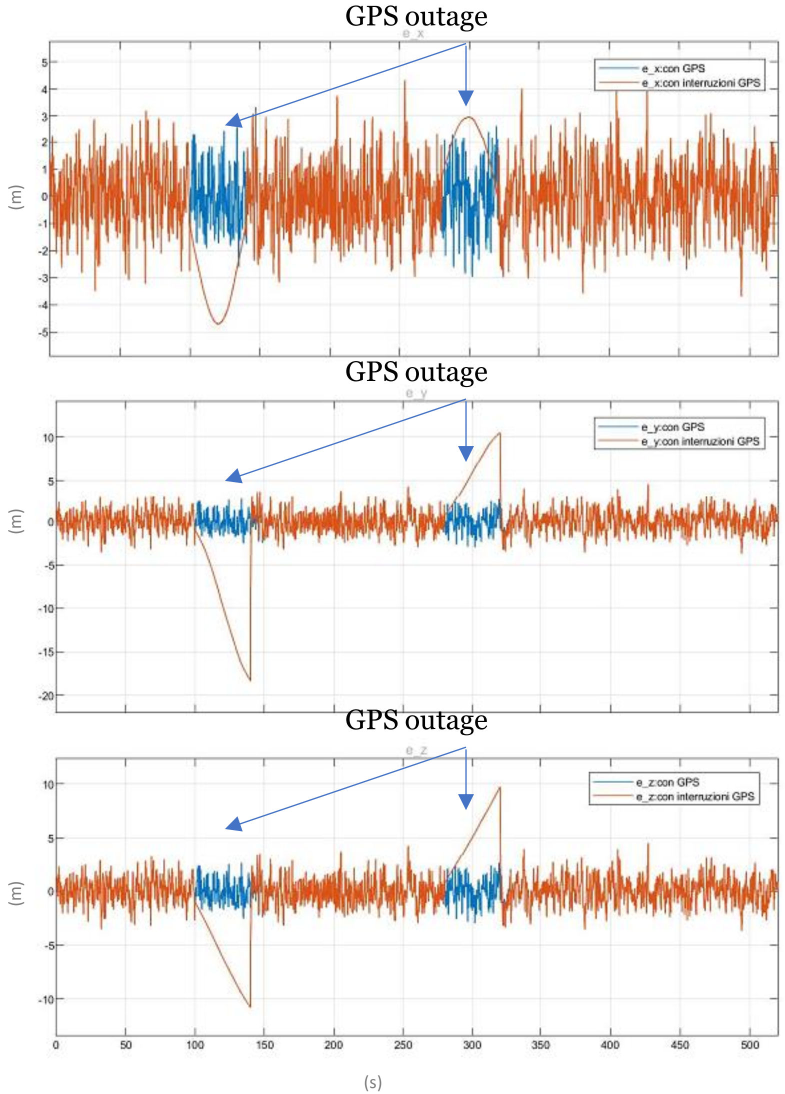
L' errore delle velocità in simulazione risulta essere coerente con quello ricavato nell'articolo.

Infatti l'errore risulterà limitato in $\pm 3\sigma$

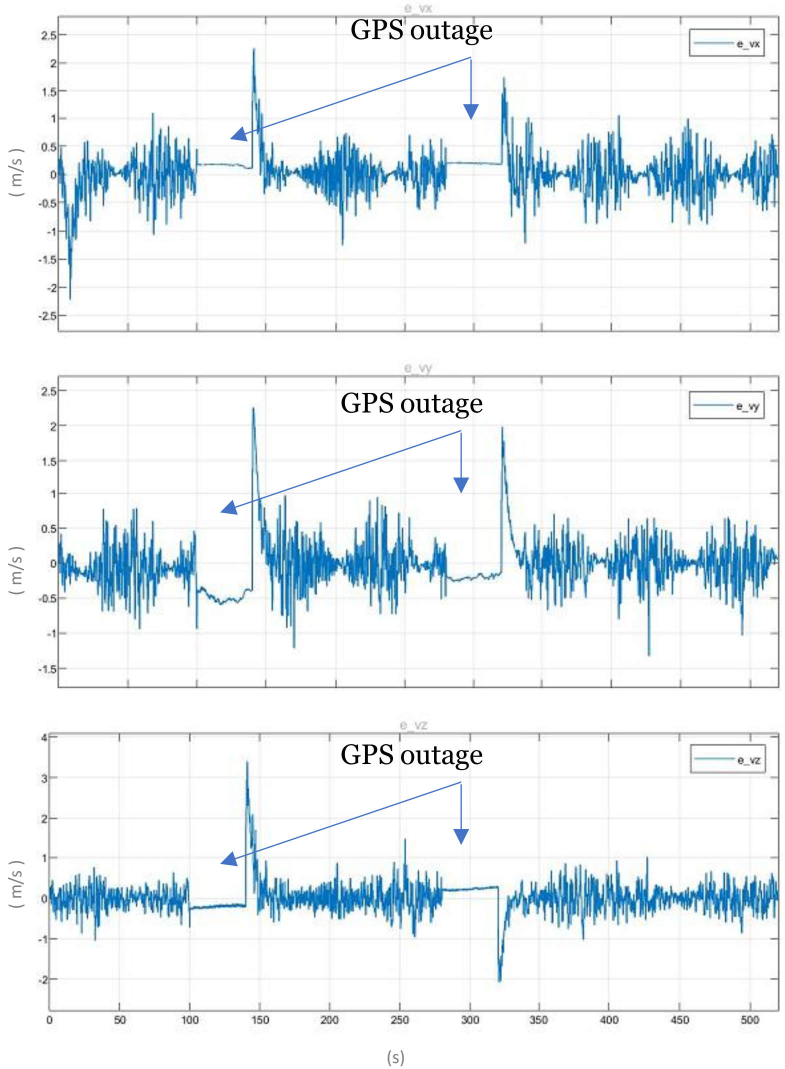
ANALISI E RISULTATI

TRAIETTORIA CIRCOLARE – STIMA BIAS PIÙ VELOCE

ERRORI POSIZIONI



ERRORI VELOCITÀ



Il grafico mostra il confronto degli errori delle posizioni stimate con e senza l'interruzione dei dati del GPS

Con un interruzione di 40 s l'errore che viene accumulato non supera i:

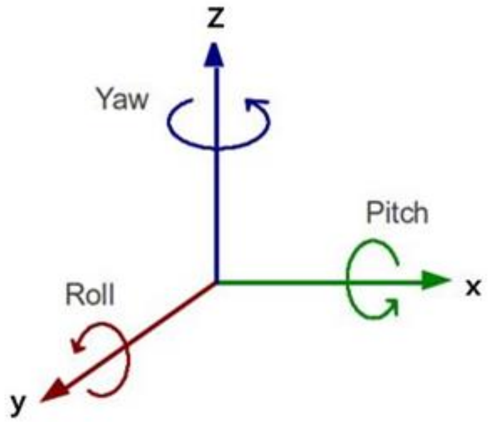
- 5 m lungo x
- 20 m lungo y
- 15 m lungo z

L'errore di velocità stimato è infatti attorno ai:

- 0.25 m/s lungo x
- 0.5 m/s lungo y
- 0.4 m/s lungo z

ANALISI E RISULTATI
TRAIETTORIA RETTILINEA

DESCRIZIONE DEGLI INGRESSI E PARAMETRI USATI



ROLL

- **Tipo di curva**: Sinusoide
- **Ampiezza**: 10°
- **Frequenza**: $\frac{2\pi}{100}\ \frac{rad}{sec}$
- **Fase**: 0 rad

PITCH

- **Tipo di curva**: Sinusoide
- **Ampiezza**: 9°
- **Frequenza**: $\frac{2\pi}{100}\ \frac{rad}{sec}$
- **Fase**: 2 rad

YAW

GUADAGNI FILTRO

Coefficienti proposti dall'articolo

INTERRUZIONE GPS

Ci saranno due interruzioni di misure:

- Da **100** a **140** secondi
- Da **280** a **320** secondi

CORREZIONE BIAS

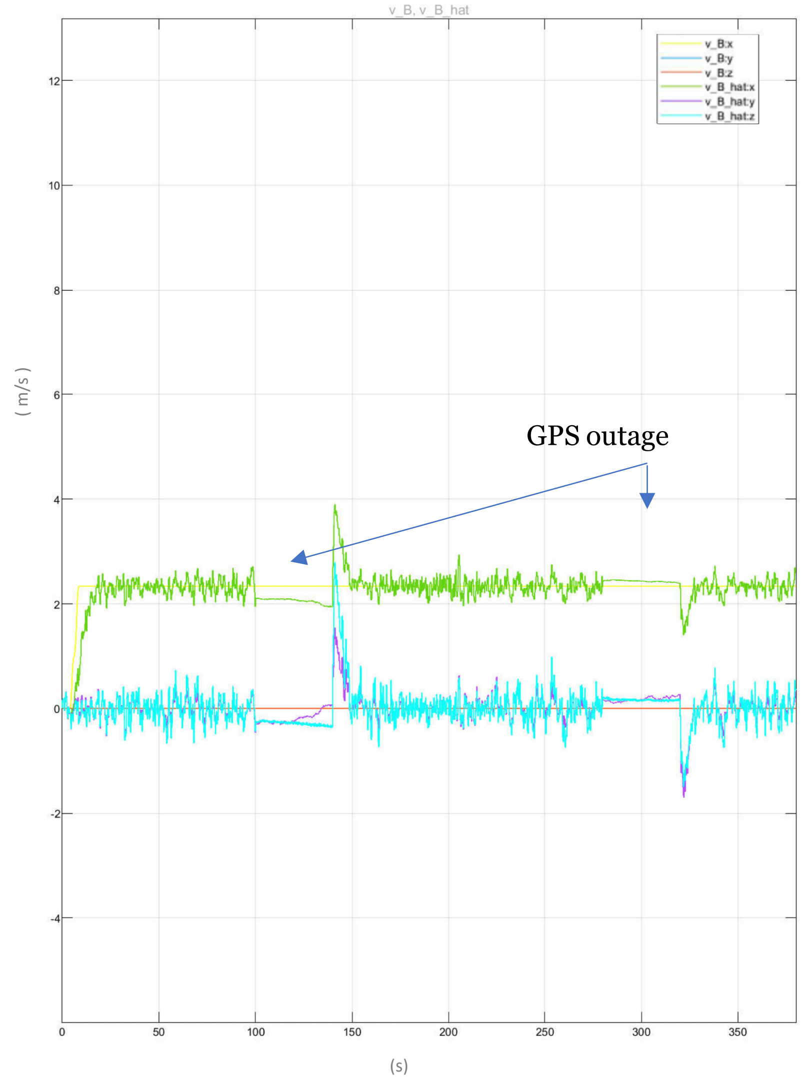
Per questo test useremo un bias che convergerà lentamente

$$\Xi_b = 10^{-10}$$

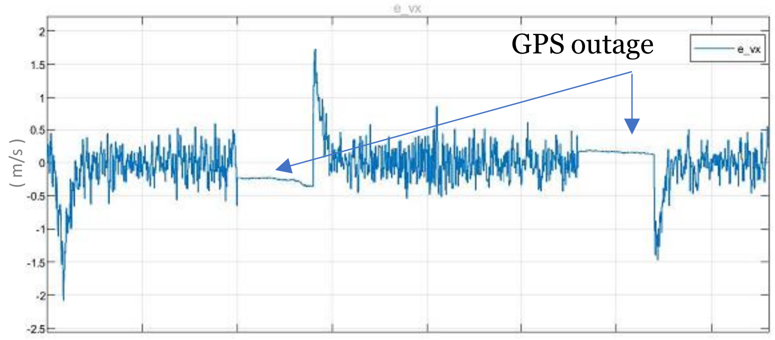
ANALISI E RISULTATI

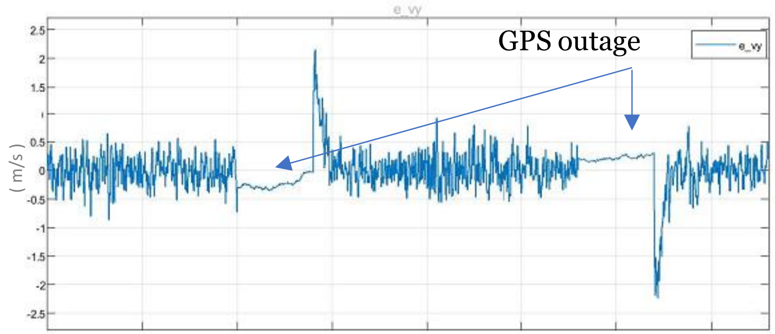
TRAIETTORIA RETTILINEA

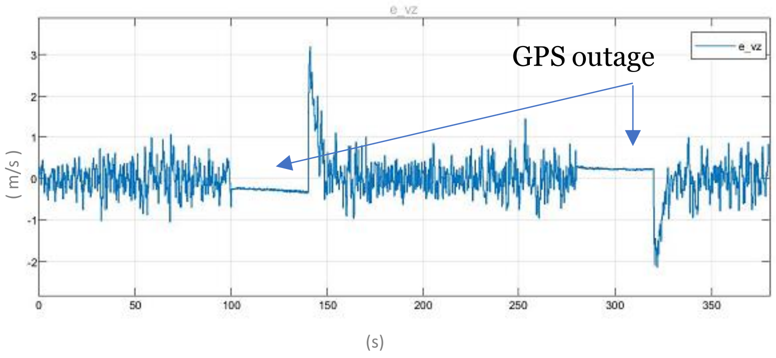
VELOCITÁ



ERRORI VELOCITÀ







Nei momenti in cui il segnale GPS viene a mancare l'errore di velocità si mantiene attorno ai valori:

lungo X: $-0{,}32\ m/s$

lungo Y: $-0{,}22\ m/s$

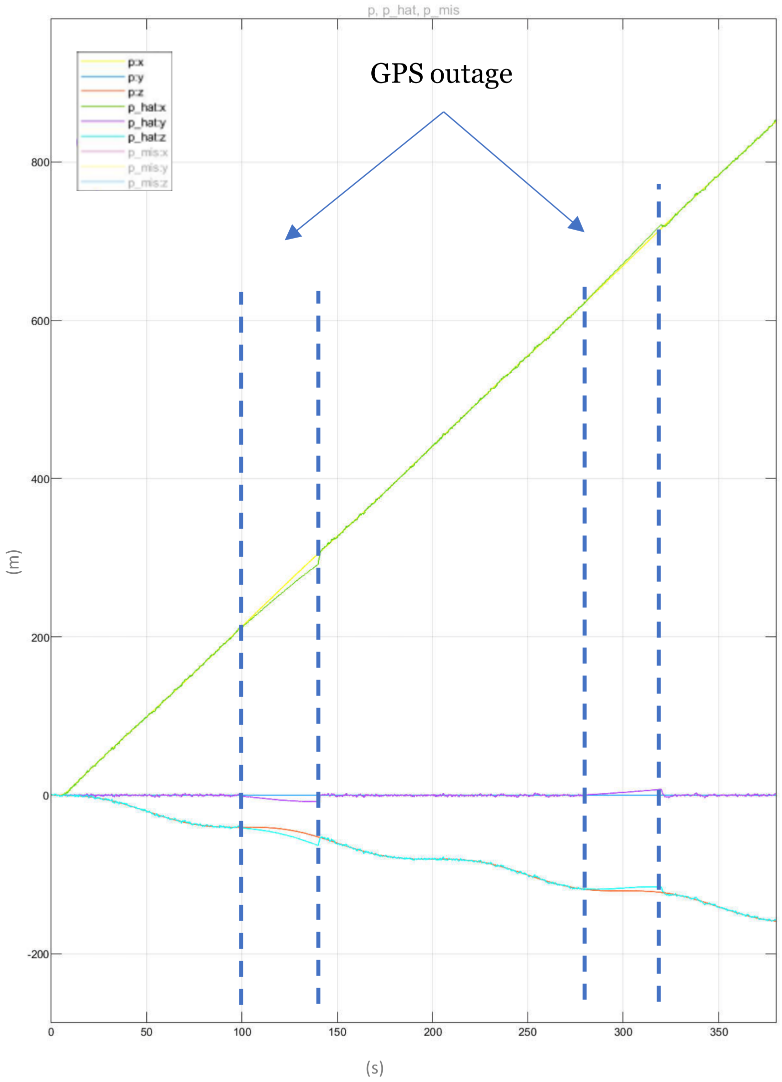
lungo Z: $-0{,}28\ m/s$

Nell'istante in cui il GPS torna disponibile l'errore riporta un picco nel suo transitorio.

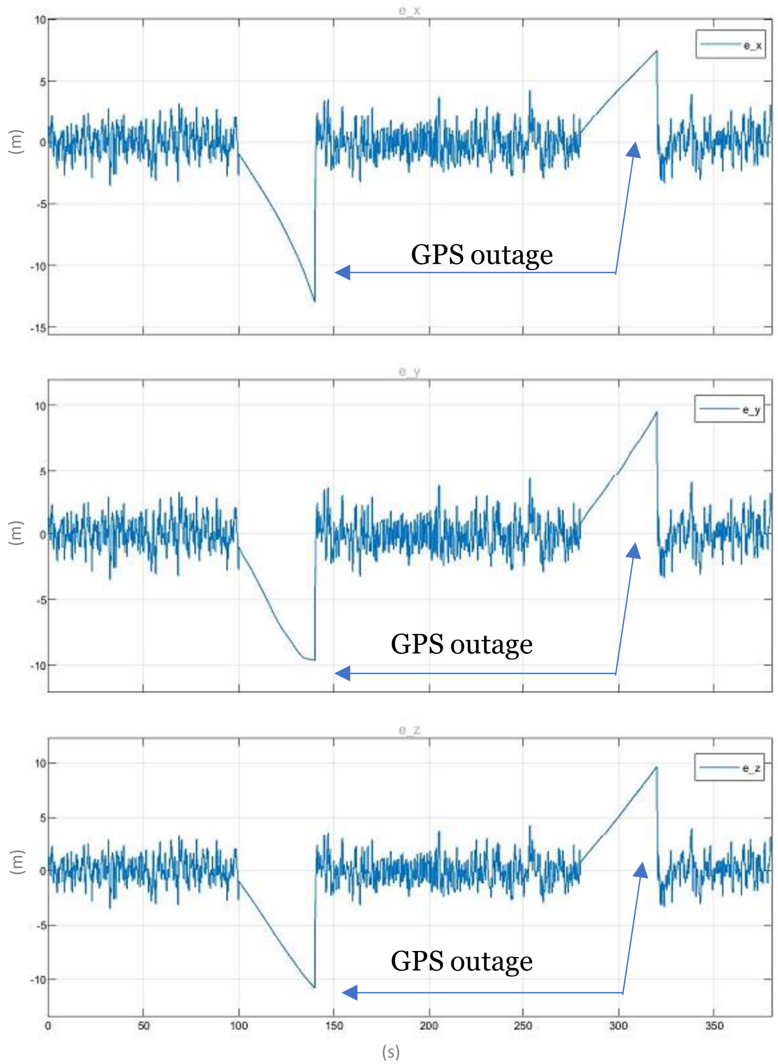
ANALISI E RISULTATI

TRAIETTORIA RETTILINEA

POSIZIONE



ERRORI POSIZIONI



Nei momenti in cui il segnale GPS viene a mancare l'errore di posizione, come conseguenza dell' errore di stima per le velocità precedentemente mostrato tende a divergere.

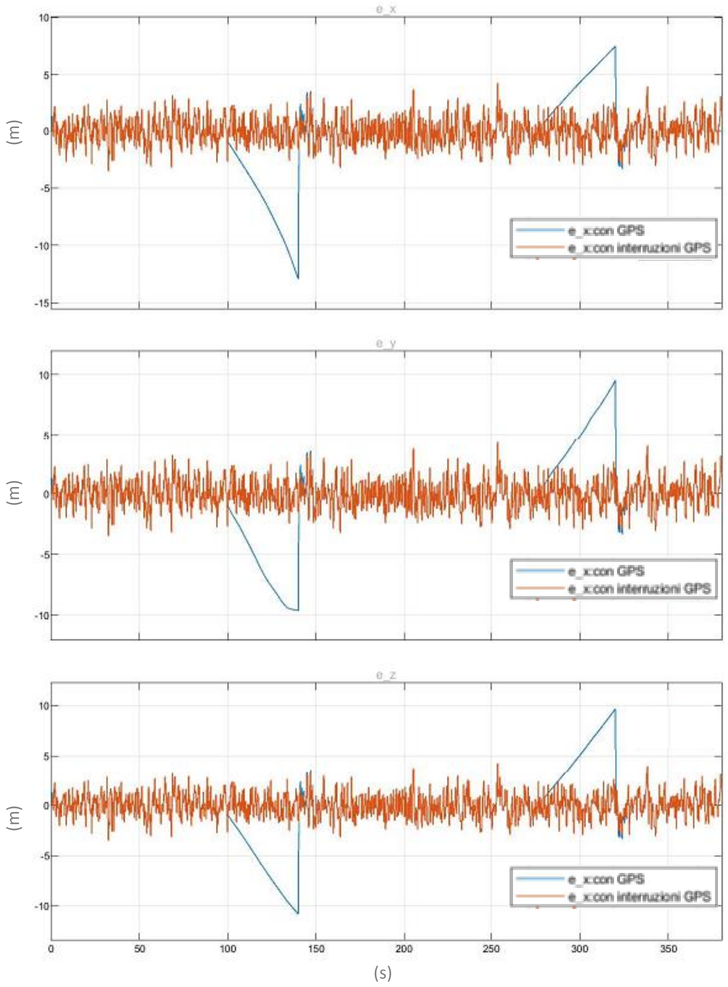
Con due interruzione di 40 secondi, l'errore accumulato fino al ripristino del GPS è risultato:

	Interruzione 1 [100, 140] secondi	Interruzione 2 [280, 320] secondi
X	$-13{,}7\ m$	$7{,}48\ m$
Y	$-9{,}68\ m$	$9{,}85\ m$
Z	$-\ 11{,}01\ m$	$9{,}76\ m$

ANALISI E RISULTATI

TRAIETTORIA RETTILINEA

ERRORI POSIZIONI CON E SENZA INTERRUZIONE GPS



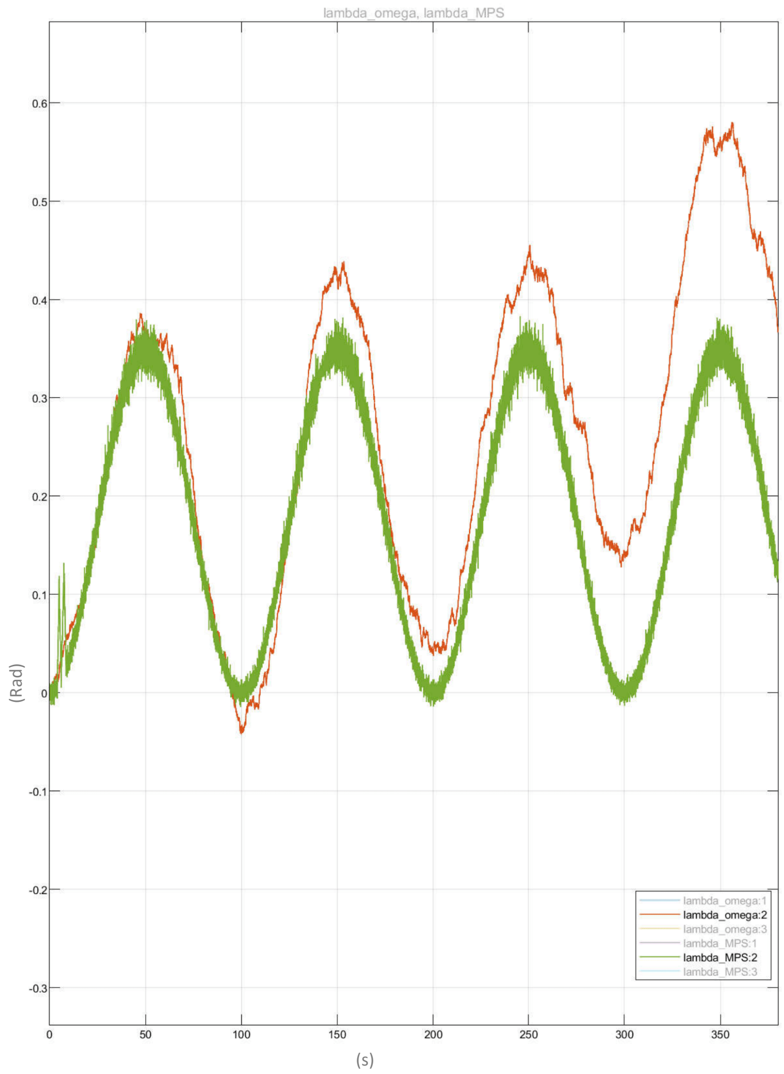
Nel caso in cui il GPS non dovesse essere staccato possiamo osservare un bound in tutti gli assi entro il quale confinare l'andamento dell'errore.

$$bound_{X,Y,Z} \quad \pm 3{,}8\ m$$

ANALISI E RISULTATI

TRAIETTORIA RETTILINEA

LAMBDA MISURATI



Dal grafico è possibile osservare come l'evoluzione dei lambda misurati differisca in base al sensore ustilizzato. È in particolare riportato l'andamento per la misura di pitch.

Misura ottenuta dall'integrazione di sensori inerziali risulta:

- **Meno** rumorosa in **alte** frequenza
- **Più** rumorosa in **basse** frequenze.

NB *L'errore di stima diverge lentamente.*

Misura ottenuta dal **MPS** risulta:

- **Più** rumorosa in **alte** frequenza
- **Meno** rumorosa in **basse** frequenze.