Rapport D'Analyse

Yassine Moreno
Mehdi Kitane
Amine ElRhazi
Abdelalim Tribak
Meryem Benchakroune
Karim Benhmida

11 octobre 2014

Table des matières

1 Introduction

1.1 Mise en situation

1.2 Concepts généraux et Contraintes

Concepts généraux

On considèrera dans tout ce qui suit :

- $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ le vecteur définissant la quantité hebdomadaire à fabriquer pour chaque produit (**variables de décision**).
- $Mchn = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ l'ensemble des machines utilisées dans la fabrication des produits.
- $Mtr = \{MP1, MP2, MP3\}$ l'ensemble des matières premières utilisées lors de la confection des produits.

...

Jeu de contraintes

Nous détaillerons dans cette section les contraintes imposées par les différents constituants de l'entreprise FaBrique.
Tout d'abord, les contraintes de domaine stipulent que toutes les quantités hebdomadaires à fabriquer par l'entreprise doivent être positifs ou nuls, ce qui peut se traduire par l'inégalité suivante :

$$0 \leq X \Leftrightarrow 0 \leq a, 0 \leq b, 0 \leq c, 0 \leq d, 0 \leq e, 0 \leq f$$

Ensuite, les contraintes imposées par la quantité maximale de matières premières admissible : **350 unités pour MP1, 620 unités pour MP2 et 485 unités pour MP3**. Ces contraintes se traduiront par les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} a + 2b + c + 5d + 2f \leq 350 \\ 2a + 2b + c + 2d + 2e + f \leq 620 \\ a + 3c + 2d + 2e \leq 485 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \leq \begin{pmatrix} 350 \\ 620 \\ 485 \end{pmatrix}$$

Enfin, les contraintes traduisant le volume horaire **hebdomadaire** maximal du fonctionnement des machines, ne dépassant pas 16 heures par jour, 5 jours par semaine -un total de **4800**

minutes hebdomadaires-.

$$\left\{\begin{array}{r} 8a+15b+5d+10f \leq 4800 \\ 7a+b+2c+15d+7e+12f \leq 4800 \\ 8a+b+11c+10e+25f \leq 4800 \\ 2a+10b+5c+4d+13e+7f \leq 4800 \\ 5a+7d+10e+27f \leq 4800 \\ 5a+3b+5c+8d+7f \leq 4800 \\ 5a+5b+3c+12d+8e \leq 4800 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 15 & 0 & 5 & 0 & 10 \\ 7 & 1 & 2 & 15 & 7 & 12 \\ 8 & 1 & 11 & 0 & 10 & 25 \\ 2 & 10 & 5 & 4 & 13 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 7 & 10 & 27 \\ 5 & 3 & 5 & 8 & 0 & 7 \\ 5 & 5 & 3 & 12 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \leq \begin{pmatrix} 4800 \\ 4800 \\ 4800 \\ 4800 \\ 4800 \\ 4800 \\ 4800 \end{pmatrix}$$

2 Programmation Linéaire Monocritère

2.1 Modélisation et Proposition de solution : Comptable

L'objectif du comptable est de maximiser le bénéfice, ce dernier est obtenu par la différence entre le revenu global G et des charges totales C liées à l'achat des matières premières et du cout d'usinage sur les machines de l'entreprise.
Ainsi la fonction objectif du problème de comptabilité se modélise sous la forme suivante :

$$F_{compta}(X) = G(X) - C(X)$$

En considérant les fonctions suivantes :
- Le revenu global :
$G(X) = (20\ 27\ 26\ 30\ 45\ 40) \cdot X$
$G(X) = 20 \cdot a + 27 \cdot b + 26 \cdot c + 30 \cdot d + 45 \cdot e + 40 \cdot f$
- Les charges totales :
$C(X) = C_{mtrprem}(X) + C_{machines}(X)$
Pour les matières premières : $C_{mtrprem}(X) = \sum_{i \in X} Cmtp_i \cdot i$

$Prix = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} Cmtp_a = &\quad (1\ 2\ 1) \cdot Prix = 13 \\ Cmtp_b = &\quad (2\ 2\ 0) \cdot Prix = 14 \\ Cmtp_c = &\quad (1\ 1\ 3) \cdot Prix = 15 \\ Cmtp_d = &\quad (5\ 2\ 2) \cdot Prix = 27 \\ Cmtp_e = &\quad (0\ 2\ 2) \cdot Prix = 12 \\ Cmtp_f = &\quad (2\ 1\ 0) \cdot Prix = 10 \end{aligned}$$

D'où : $C_{mtrprem}(X) = 13 \cdot a + 14 \cdot b + 15 \cdot c + 27 \cdot d + 12 \cdot e + 10 \cdot f$
Pour les couts d'usinage :
$C_{machines}(X) = \sum_{i \in X} Cmachines_i \cdot i$

$$CoutMinute = \begin{pmatrix} 0.03 \\ 0.03 \\ 0.017 \\ 0.017 \\ 0.03 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrll} Cmachines_a = & (8\ 7\ 8\ 2\ 5\ 5\ 5)\cdot & CoutMinute = & 1.33 \\ Cmachines_b = & (15\ 1\ 1\ 10\ 0\ 5\ 3)\cdot & CoutMinute = & 1.11 \\ Cmachines_c = & (0\ 2\ 11\ 5\ 0\ 3\ 5)\cdot & CoutMinute = & 0.73 \\ Cmachines_d = & (5\ 15\ 0\ 4\ 7\ 12\ 8)\cdot & CoutMinute = & 1.96 \\ Cmachines_e = & (0\ 7\ 10\ 13\ 10\ 8\ 0)\cdot & CoutMinute = & 1.35 \\ Cmachines_f = & (10\ 12\ 25\ 7\ 25\ 0\ 7)\cdot & CoutMinute = & 2.45 \end{array}$$

D'où : $C_{machines}(X) = 1.33 \cdot a + 1.11 \cdot b + 0.73 \cdot c + 1.96 \cdot d + 1.35 \cdot e + 2.45 \cdot f$
Ainsi, nous pouvons déduire la fonction objectif -traduisant le bénéfice- à maximiser :

$$F_{compta}(X) = (5.67\ 12.38\ 12.27\ 1.03\ 31.65\ 27.55) \cdot X$$

De ce fait, nous avons effectué cette démarche en minimisant la fonction suivante tout en intégrant les contraintes spécifiés précédemment :

$$f(X) = -F_{compta}(X) = (-5.67\ \ -12.38\ \ -12.27\ \ -1.03\ \ -31.65\ \ -27.55) \cdot X$$

$$avec \begin{cases} f(X) \text{ à } minimiser \\ A \cdot X \leq b \\ 0 \leq X \end{cases}$$

La solution proposée est la suivante : $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 23.52 \\ 0 \\ 0 \\ 242.50 \\ 87.96 \end{pmatrix}$

Le bénéfice maximal envisageable est de : **10390 €**

2.2 Modélisation et Proposition de solution : Resp.Atelier

L'objectif du responsable d'atelier est de maximiser la fabrication des produits. Autrement dit, maximiser la quantité totale des produits. Nous modéliserons la fonction objectif sous la forme suivante :

$$F_{respAtelier}(X) = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) \cdot X$$

Ainsi, le problème est réduit à une fonction f à minimiser tout en tenant compte des contraintes globales précédentes : $f(X) = -F_{respAtelier}(X) = (-1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1) \cdot X$

$$avec \begin{cases} f(X) \text{ à } minimiser \\ A \cdot X \leq b \\ 0 \leq X \end{cases}$$

La solution proposée est la suivante : $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 56.73 \\ 38.69 \\ 0 \\ 184.46 \\ 98.92 \end{pmatrix}$

La production maximale envisageable est de : **378.8 Produits**

2.3 Modélisation et Proposition de solution : Resp.Stock

La problématique du responsable des stocks est double, puisqu'il s'agit de minimiser le stock global de l'entreprise tout en préservant un niveau minimal d'activité au sein de l'entreprise.
Nous nous attaquerons dans un premier temps à la fonction objectif , obtenu par la somme des quantités des produits et des quantités de matières premières pour chaque produit :

$$F_{respStock}(X) = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) + (4\ 4\ 5\ 9\ 4\ 3) \cdot X$$
$$F_{respStock}(X) = (5\ 5\ 6\ 10\ 5\ 4) \cdot X$$

Néanmoins, cette fonction -à minimiser- admet le vecteur nul comme solution minimale, réduisant à néant la productivité de l'entreprise.
De ce fait, afin de contourner le problème, nous ajouterons 2 contraintes supplémentaires concernant la production totale de l'entreprise pour traduire l'activité.
- La première contrainte, qui concerne la production maximale, se traduit par l'inégalité suivante : **a+b+c+d+e+f $<$ 378.8**
- La deuxième contrainte concerne un seuil minimal (pourcentage de la production maximale, à définir) d'activité : **378.8*i $<$ a+b+c+d+e+f avec 0<i<1**

En intégrant les nouvelles contraintes au jeu établi précédemment par le biais de A_{new} et de b_{new} , nous avons pu modéliser l'évolution du stock global $F_{respStock}(X)$ en fonction du pourcentage $\%prodMax$ de la production maximale imposé en seuil minimal d'activité (cf. Figure 1).
Ainsi, nous constatons un point d'inflexion établi à **47%** de la production maximale. Au delà, on constate une augmentation très rapide du stock qui ne satisfait nullement l'objectif fixé. C'est à partir de ce point particulier que nous construirons notre solution au problème suivant : $f(X) = F_{respStock}(X) = (5\ 5\ 6\ 10\ 5\ 4) \cdot X$

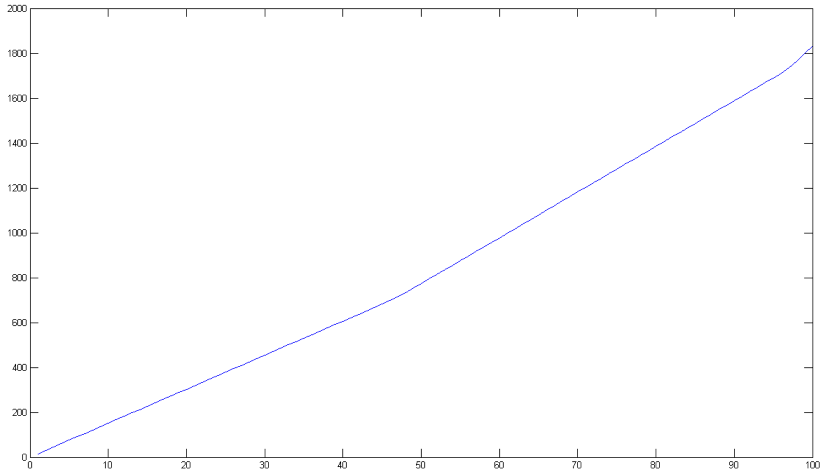

FIGURE 1 – Évolution du stock en fonction de %prodMax

$$avec \begin{cases} f(X) \text{ à } minimiser \\ A_{new} \cdot X \leq b_{new} \\ 0 \leq X \end{cases}$$

La solution optimale pour ce problème est la suivante : $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.03 \\ 175 \end{pmatrix}$

Le stock minimal obtenu par ces données est de : **715 unités**

2.4 Modélisation et Proposition de solution : Resp.Commercial

Le responsable commercial a pour objectif la réalisation de l'équilibre entre la première famille de produits (A,B et C) et la seconde (D,E et F). Cette contrainte d'égalité se modélise par l'équation suivante :

$$a + b + c = d + e + f \Leftrightarrow (1\ 1\ 1\ \ -1\ \ -1\ \ -1) \cdot X = 0 \Leftrightarrow A_{eq} \cdot X = b_{eq}$$

Le fonction objectif du responsable commercial demeure identique à celle du responsable d'atelier, maximiser la production de l'entreprise -pour assurer l'activité de l'entreprise- tout en tenant compte de la nouvelle contrainte d'équilibre.

$$F_{respComm}(X) = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) \cdot X$$

Ainsi, le problème est mathématiquement réduit à une fonction f à minimiser tout en tenant compte des contraintes globales précédentes en plus de la nouvelle contrainte d'équilibre : $f(X) = -F_{respComm}(X) = (-1\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ -1) \cdot X$

$$avec \begin{cases} f(X) \text{ à } minimiser \\ A \cdot X \leq b \\ A_{eq} \cdot X = b_{eq} \\ 0 \leq X \end{cases}$$

La solution optimale pour ce problème est la suivante : $X = \begin{pmatrix} 142.11 \\ 0 \\ 44.42 \\ 0 \\ 104.80 \\ 81.73 \end{pmatrix}$

La production de la première famille s'élève à **186.53 unités**
La production de la deuxième famille s'élève à **186.53 unités**
L'écart théorique constaté entre ces deux familles est de : **0 unités**

2.5 Modélisation et Proposition de solution : Resp.Personnel

La problématique du responsable du personnel concerne la réduction de l'usage des machines 3 et 5 tout en maintenant une activité correcte de l'entreprise. La fonction objectif modélisant le problème se retranscrit sous la forme suivante :

$$F_{respPers}(X) = F_{TmpsMachine3}(X) + F_{TmpsMachine5}(X)$$
$$F_{TmpsMachine3}(X) = (8\ 1\ 11\ 0\ 10\ 25) \cdot X$$
$$F_{TmpsMachine5}(X) = (5\ 0\ 0\ 7\ 10\ 25) \cdot X$$
$$F_{respPers}(X) = (13\ 1\ 11\ 7\ 20\ 50) \cdot X$$

Cependant, le minimum envisageable pour cette fonction est le vecteur nul, solution absurde pour assurer l'activité de l'entreprise. Ainsi, de manière identique au problème du responsable des stocks, nous ajouterons 2 contraintes supplémentaires liées à l'activité maximale de l'entreprise. - La première contrainte, qui concerne la production maximale, se traduit par l'inégalité suivante : **a+b+c+d+e+f < 378.8**
- La deuxième contrainte concerne un seuil minimal (pourcentage de la production maximale, à définir) d'activité : **378.8*i < a+b+c+d+e+f avec 0<i<1**
A partir du jeu de contraintes modifié interprété par A_{new} et de b_{new}, nous pouvons établir une relation traduisant l'impact du seuil minimal sur les temps d'usinage des machines 3 et 5 ainsi que sur le temps d'utilisation global (cf. Figure 2)
A partir de l'analyse des graphiques produits, nous déduisons que la solution optimale pour cette problématique s'établit à **82%** de la production maximale, assurant un compromis idéal entre l'utilisation maximale des deux machines et l'utilisation indépendante de chacune d'entre elles. Cette condition supplémentaire nous permettra de construire notre solution au

problème suivant : $f(X) = F_{respPers}(X) = (13\ 1\ 11\ 7\ 20\ 50) \cdot X$

$$avec \begin{cases} f(X) \text{ à } minimiser \\ A_{new} \cdot X \leq b_{new} \\ 0 \leq X \end{cases}$$

La solution optimale pour ce problème est la suivante : $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 174.38 \\ 1.23 \\ 0 \\ 135 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le temps total minimal obtenu est de : **2887.9 mn**
Le temps minimal de la machine 3 obtenu est de : **1537.9 mn**
Le temps minimal de la machine 5 obtenu est de : **1350 mn**

3 Programmation Linéaire Multicritère

4 Partie3

test

Annexe

test