Brückenkurs Mathematik
2017

Version für Studierende

Zu diesem Skript haben in der Vergangenheit beigetragen:
Prof. Dr. Stefan Ufer (seit 2009)
Sarah Ottinger (seit 2014)
Prof. Dr. Anke Lindmeier (2009)
Prof. Dr. Kristina Reiss (2010)
Florian Quiring (2011)
Dr. Elisabeth Reichersdorfer (2010-2012)
Dr. Andreas Obersteiner (2014)

6. Oktober 2017

Vorbemerkung

Dieses Skript soll lediglich als Zusatzmaterial zum Brückenkurs dienen. Es kann mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit mit Fehlern verschiedenster Art gerechnet werden. Die Dozierenden freuen sich über jede Rückmeldung, die zur Verbesserung des Kurses und des Begleitmaterials führen kann.

Dieses Skript basiert in verschiedenen Teilen unter anderem auch auf den folgenden Texten:

- Deiser, O. (2010). Grundbegriffe der wissenschaftlichen Mathematik. Springer.
- Reiss, K., Schmieder, G. (2007). Basiswissen Zahlentheorie. Springer.
- Lindmeier, A., Ufer, S. (2009). Brückenkurs Mathematik. Unveröffentliches Skript.

Als weitere Literatur zur Studienvorbereitung können Sie weitere Werke heranziehen. Im Gegensatz zu unserem Kurs fokussieren diese allerdings weitgehend auf die Wiederholung von Schulmathematik und weniger auf das Vermitteln und vor allem das Einüben mathematischer Arbeitsweisen. Beispiele für solche Werke sind:

- Walz, G., Zeilfelder, F., Rießinger, Th. (2011). Brückenkurs Mathematik für Studieneinsteiger aller Disziplinen. Spektrum Akademischer Verlag.
- Trippler, G., Georgi, K., Schäfer, W. (2006). Mathematik-Vorkurs. Vieweg-Studium.
- Hoever, G. (2014). Vorkurs Mathematik. Springer.
- Cramer, E., Neslehova, J. (2012). Vorkurs Mathematik. Springer.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

„Aller Anfang ist schwer. Höchstens das Aufhören ist manchmal noch schwerer.“

Victor Moritz Goldschmidt

1.1 Begrüßung

1.2 Vorstellung der DozentInnen

1.3 Erwartungsabklärung

1.4 Konzeption des Kurses

Der Brückenkurs wendet sich speziell an zukünftige Studierende des Lehramts mit Unterrichtsfach Mathematik.

1.4.1 Ziele des Kurses

- **Mathematische Inhalte**
  Erster Einblick in folgende Inhaltsbereiche:
  - Aussagenlogik
  - Teilbarkeit ganzer Zahlen
  - Beweistechniken
  - Mengen
  - Relationen
  - Abbildungen
  - Induktion und Rekursion
  - Unendlichkeit und Abzählbarkeit
  - ...dabei Wiederholung und Weiterführung von Schulmathematik.
- **Mathematische Arbeitsweisen**

  - Mathematische Fachsprache verwenden
  - Rolle von Definitionen, Sätzen, Beweisen kennen
  - Abfassung mathematischer Texte (z.B. Lösungen zu Übungsaufgaben)
  - Umgang mit der formalen Sprache der Mathematik
  - Conjecturing - Untersuchen von Vermutungen
  - Beweistechniken
- **Weitere Arbeitsweisen**
  - Präsentation von Lösungen und Ideen
  - Nutzung von Skizzen und (mentalen) Bildern
  - Umgang mit offenen mathematischen Situationen
  - Reflexion des eigenen "Bildes von Mathematik"
- **Außerdem**
  - Vertraut werden mit den üblichen Lerngelegenheiten eines Mathematikstudiums (Vorlesung, Übungsaufgaben, Präsenzübung)
  - Kennenlernen der Universität

1.4.2 Ablauf

Der Brückenkurs dauert zwei Wochen. Wir bitten darum, am gesamten Brückenkurs teilzunehmen, da nicht auf evtl. Versäumnisse Rücksicht genommen werden kann.

1.4.3 Empirische Evaluation

Wir wollen unseren Brückenkurs weiter entwickeln. Deshalb möchten wir herausfinden, wie gut und wie Sie durch den Kurs etwas lernen. Daher möchten wir Sie bitten, an einer Untersuchung teilzunehmen, die einen Teil des Kurses genauer untersucht. Konkret gehören zu dieser Untersuchung:

- Eine Vorbefragung, um etwas über Ihre Lernvoraussetzungen zu erfahren.

- sechs Mal Lösen einer Übungsaufgabe gemeinsam mit einem Kommilitonen. Hierbei erhalten Sie eigens konzipierte Unterstützungsmaterialien, die Ihnen helfen sollen besser zusammen an solchen Aufgaben zu arbeiten als es normalerweise der Fall ist. Teilweise werden wir Ihre gemeinsamen Arbeitsprozesse aufzeichnen. Am Ende jeder Sitzung schreiben Sie einen Lösungsvorschlag für die Aufgabe auf. Auf diesen Lösungsvorschlag erhalten Sie am nächsten Kurstag individuelles Feedback.

Für die Evaluation sind der Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik (Prof. Dr. Stefan Ufer, LMU München), der Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik (Prof. Kristina Reiss, TU München) und der Lehrstuhl für Pädagogische Psychologie (Prof. Frank Fischer, LMU München, Prof. Dr. Ingo Kollar, Universität Augsburg) verantwortlich. Alle Daten, die dabei erhoben werden, werden nur für wissenschaftliche Zwecke im Zuge der Evaluation der Kursversionen genutzt und auf keinen Fall Dritten zugänglich gemacht. Die Daten werden anonymisiert, so dass ein Rückschluss auf die dahinterstehende Person nach Abschluss der Untersuchung nicht mehr möglich ist. Nach Ablauf der üblichen Frist von 10 Jahren werden alle Einzeldaten gelöscht.

Wir sind bemüht, unser Verständnis für das Lernen und Lehren von Mathematik immer weiter zu verbessern. Als Arbeitsgruppe für Didaktik der Mathematik ist genau das eine unserer Aufgaben und unser Forschungsfeld. Deshalb möchten wir Sie herzlich bitten, die Einverständniserklärung zur Nutzung der erhobenen Daten auszufüllen und an die Dozierenden zurückzugeben. Wenn Sie Fragen bezüglich der Untersuchung haben, dann sprechen Sie gerne einen der Organisatoren des Brückenkurses an.

Was haben Sie selbst von der Teilnahme an der Studie?

- *Lerngelegenheiten* zur gemeinsamen Bearbeitung von Übungsaufgaben und zum mathematischen Arbeiten
- Ein wichtiger Aspekt der Studie ist die Teamarbeit mit einem (wechselnden) Arbeitspartner. Teamarbeit ist im Studium wichtig für erfolgreiches Lernen. Dies funktioniert aber nur, wenn man gut zusammenarbeitet. Genau das sollen und können Sie hier üben und lernen.
- Fokussiert wird die Fähigkeit zur Analyse und Weiterentwicklung einfacher mathematischer Aussagen. Das ist ein wichtiger Teil mathematischen Arbeitens. Sie erhalten *persönliches Feedback* auf Ihre Lösungsvorschläge zu den Aufgaben, ähnlich wie Sie im Studium Feedback auf ihre abgegebenen Übungsaufgaben erhalten.

- Sie lernen *Gestaltungsmöglichkeiten von Lernumgebungen* für komplexe mathematische Kompetenzen kennen.

1.5 Weitere Anmerkungen

- Im gesamten Skript nehmen wir vorerst an, dass uns die natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen mit ihren wesentlichen Eigenschaften vertraut sind. Ggf. werden einzelne dieser Eigenschaften noch einmal systematisch wiederholt.
- Wir sehen in diesem Skript die Null nicht als Teil der Menge der natürlichen Zahlen an ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$). Man könnte sich auch anders entscheiden und die weitere mathematische Theorie entsprechend aufbauen. Für uns wird es allerdings an vielen Stellen einfacher, wenn wir uns bei den natürlichen Zahlen nicht mit der Null herumschlagen müssen.

1.6 Präsenzübung

Die Vorstellung davon, was Mathematik eigentlich ist prägt unser mathematisches Arbeiten ziemlich stark. Die Art und Weise wie wir an mathematische Fragestellungen herangehen bzw. wie eine Lehrkraft Mathematik präsentiert (nicht unbedingt, aber möglicherweise damit zusammenhängend: wie erfolgreich sie unterrichtet) hängt stark davon ab, welche Ideen über die Natur von Mathematik sie hat. Die Schule, und insbesondere die Mathematiklehrkräfte, denen wir dort begegnen, prägen unsere Vorstellungen von Mathematik sehr stark. Die wissenschaftliche Mathematik baut mathematische Theorien formal-axiomatisch auf. Was ein Begriff bedeuten soll, wird entsprechend primär durch die Definition festgelegt und nicht durch die Anschauung. Bildliche inhaltliche Vorstellungen zu den Begriffen der Mathematik sind aber dennoch hilfreich bei der Lösung mathematischer Probleme.

2 Meta-Mathematik

„Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.“

Johann Wolfgang von Goethe

2.1 Die Sprache der Mathematik

Was Goethe in diesem Zitat zum Ausdruck bringt, erfährt jeder früher oder später, der sich mit Mathematik beschäftigt: Die Mathematik bedient sich der Worte, die wir aus der Alltagssprache kennen, gebraucht diese jedoch in einer ganz speziellen Weise. Wenn sich Mathematiker unterhalten kann es sein, dass ein Außenstehender zwar die Worte versteht, nicht aber das, was mit den Worten zum Ausdruck gebracht werden soll. Das liegt sicherlich auch an folgenden Erscheinungen:

- Die Mathematik nutzt Worte aus dem Alltag zur Beschreibung mathematischer Konzepte. Dabei kommt es vor, dass das, was in der Mathematik gemeint ist (das mathematische Konzept), nicht genau dasselbe oder etwas ganz anderes ist als das, was wir im Alltag mit demselben Wort bezeichnen. Es kann sein, dass die Bedeutungen relativ nahe beieinander liegen, z.B. beim Begriff „Dreieck“, wie er normalerweise in der euklidischen Geometrie gebraucht wird. Es kann aber auch vorkommen, dass zunächst nicht ganz klar ist, was das mathematische Konzept mit der Alltagsbedeutung zu tun hat (z.B. beim Begriff „Körper“).
- Die Bedeutung eines Wortes wird in der Mathematik (fast immer) durch eine Definition festgelegt. Die Alltagsbedeutung eines Wortes wird dagegen oft durch typische Beispiele determiniert, die unter den Begriff fallen.
- Eine gute Vorstellung (im Sinne von typischen Beispielen) von mathematischen Begriffen zu haben ist vorteilhaft für die Arbeit. Problematisch wird es, wenn diese typischen Beispiele den Begriff nur unzureichend widerspiegeln und/oder man vergisst das eigene Denken mit der eigentlichen Definition des Begriffs wieder abzugleichen.

2.1.1. Beispiel:
Begriffsbildung in der Schulmathematik, der klassischen Mathematik (z.B. seit Euklid) und der modernen Mathematik (im Sinne einer formalen Axiomatik z.B. nach Hilbert):

Schulmathematik	**Klassische Mathematik**	**Moderne Mathematik**
Intuitive Vorstellung zu einem Phänomen	Intuitive Vorstellung zu einem Phänomen	Intuitive Vorstellung zu einem Phänomen
Fassung des Begriffs als Idealisierung des Phänomens	Fassung des Begriffs als Idealisierung des Phänomens	Fassung des Begriffs als die mathematischen Objekte, die die in einer Definition angegebenen Eigenschaften erfüllen
Beschreibung eines Begriffs mit Eigenschaften	Beschreibung des Begriffs durch einen (möglichst) minimalen Satz von Eigenschaften (Axiome)	Erforschen des Begriffsumfangs, ausgehend von den Eigenschaften: Welche mathematischen Objekte erfüllen die Definition? Welche anschaulichen Phänomene stecken dahinter?
Begründung weiterer Eigenschaften anhand der bekannten Eigenschaften	Ableitung weiterer Eigenschaften des Begriffs auf Basis der Axiome	Ableitung weiterer Eigenschaften des formal definierten Begriffs auf der Basis der Definition
Kaum Interesse an weiterer Systematisierung	Interesse an Klärung der Rolle der einzelnen Axiome	Interesse an der Passung zwischen formalem Begriff und erfahrbarem Phänomen

- In der Geometrie wurden Punkte und Geraden in der Ebene aus der Anschauung heraus verstanden. Diese Begriffe wurden als Grundbegriffe verwendet. Aussagen über diese Grundbegriffe und wie sie sich zueinander verhalten, wurden durch Axiome (z.B. Parallelenaxiom) beschrieben.
  In der modernen Mathematik wird eine Geometrie (also das, was bisher die Ebene mit ihren Geraden und Punkten war) abstrakt durch ihre Eigenschaften definiert. Damit fällt nicht nur die euklidische Ebene unter den Begriff der Geometrie, sondern auch andere Geometrien (z.B. auf der Kugel).
- Eine Zahlenmenge, mit der man wie üblich rechnen kann, wird in der Mathematik als *Körper* bezeichnet. Klassisch wurden dabei die rationalen und

reellen Zahlen mit Hilfe von Axiomen so genau wie möglich beschrieben (z.B. Assoziativität, Kommuntativität, Distributivität) und daraus weitere Eigenschaften abgeleitet. In der modernen Mathematik wird der Begriff des *Körpers* durch eben diese Eigenschaften definiert. Es stellt sich heraus, dass es viele weitere Mengen an Zahlen gibt, mit denen man in diesem Sinne rechnen kann. Diese haben z.T. vielfältige Anwendungen über die üblichen Zahlen hinaus.

Auch wenn in der modernen Mathematik die Definition wesentlich ist für das, was ein Begriff bedeutet (und nicht die anschauliche Vorstellung dazu), sind solche anschaulichen Vorstellungen oft sehr hilfreich.

2.1.2. Beispiel:
Finden Sie alle Rechtecke, die Sie mit einem Gummiband auf dem folgenden (quadratisch angeordneten) 4x4-Nagelbrett spannen können. Deckungsgleiche Rechtecke zählen wir nur einmal!

2.2 Definition - Satz - Beweis

Eine grundlegende Arbeitsweise, die sich aus diesen besonderen Anforderungen herausgebildet hat, ist die präzise Betrachtung und Nutzung (mathematischer) Aussagen in mathematischen Theorien.

Mathematische Theorien bestehen aus Aussagen, die aus logischer Sicht zwar zunächst einmal alle gleichberechtigt sind, aber völlig verschiedene Funktionen innerhalb dieser Theorie haben. Es kann Orientierung in der Landschaft der Mathematik bieten, die Begriffe zu kennen, die diese Funktionen beschreiben:

Eine **Definition** stellt eine Begriffsklärung (wörtl. Abgrenzung) dar. Sie stellt klar, welche Eigenschaften bestimmte mathematische Objekte kennzeichnen.

2.2.1. Beispiel:
Definitionen des Begriffs **gerade** Zahl.

- Eine natürliche Zahl n heißt *genau dann* **gerade**, *wenn* es eine weitere natürliche Zahl m gibt, so dass $n = 2 \cdot m$.

- $n \in \mathbb{N}$ heißt **gerade** $:\Leftrightarrow$ es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $n = 2 \cdot m$.
- $n \in \mathbb{N}$ heißt *genau dann* **gerade**, *wenn* die Division von n durch 2 den Rest 0 ergibt.

Bei den ersten beiden Definitionen ist klar, dass sie dasselbe bedeuten, sie sind lediglich in mehr oder weniger formaler Form abgefasst. Dass die dritte Aussage dasselbe bedeutet muss erst bewiesen werden. Es ist aus den ersten beiden Aussagen nicht sofort offensichtlich (aber zugegebenermaßen recht schnell zu zeigen). Oft hat man mehrere gleichwertige Aussagen zur Definition eines Begriffs zur Verfügung. Dann entscheidet man sich für eine Variante als Definition und zeigt anschließend die Gleichwertigkeit der anderen Varianten (wenn sie benötigt werden).

Natürlich setzt eine solche Definition voraus, dass andere Begriffe und Objekte wie *natürliche Zahl* bzw. $\mathbb{N}$ oder das *Produkt zweier natürlicher Zahlen* bzw. Division mit Rest bereits definiert sind. Da deren Definitionen ihrerseits wiederum auf andere Begriffe zurückgreifen und so weiter, muss die Mathematik an irgendeiner Stelle zwingend auf ursprüngliche Objekte zurückgreifen, die nicht exakt definiert sind. Es stellt sich heraus, dass es in der modernen Mathematik reicht, relativ wenige grundlegende undefinierte Begriffe zu nutzen, nämlich die Begriffe *Aussage* und *Menge*.

Die Aussagen, die kennzeichnende Eigenschaften eines Begriffs beschreiben (z.B. die Existenz einer Zahl m im obigen Beispiel) heißen **Axiome**. Es gibt auch andere Arten von Axiomen. Dazu kommen wir später noch (siehe 8.2).

2.2.2. Bemerkung:
Stellen Sie sich vor, Sie möchten ein Fahrrad bauen. Dabei möchten Sie so viel wie möglich selbst tun, um einen Eindruck von den vielen Handgriffen zu bekommen, die dazu notwendig sind. Womit würden Sie beginnen?

Mit einem fertigen Rahmen? Mit Eisenstangen aus dem Baumarkt? Mit fertigen Reifen? Oder mit Gummiplatten aus dem Fachhandel?

Ein richtiger Mathematiker würde - wenn er ans Fahrradbauen so heranginge wie an die Begriffsbildung in der Mathematik - wahrscheinlich zunächst anfangen nach Eisenerz zu graben, dieses dann verhütten, es in Formen gießen,...

Der Bau eines solchen Fahrrads würde dann den gesamten Produktionsprozess anschaulich darstellen. In der Mathematik verhält es sich andersherum. Mit vielen Begriffen haben die Mathematiker jahrhundertelang gearbeitet, bevor sie sich Gedanken gemacht haben wie man sie adäquat definieren kann. Sie arbeiten also historisch eher zu den Grundlagen hin (beim Fahrrad würde das bedeuten erst Stangen zusammenzuschweißen und sich dann darüber Gedanken zu machen, wie diese eigentlich produziert wurden).

Was Sie in den Vorlesungen präsentiert bekommen, ist ein großer Teil des Endprodukts, also des Fahrradbauprozesses, der sich historisch nie so abgespielt hat. Lassen Sie sich davon nicht einschüchtern!

2.2.3. Beispiel:
(Teilweise) Definition des Zahlenraums $\mathbb{Q}$
Eine Menge Q mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt genau dann **Zahlenraum der rationalen Zahlen**, wenn gelten:

- $+$ ist assoziativ, d.h. für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- $\cdot$ ist assoziativ, d.h....
- $+$ ist kommutativ, d.h. für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt $a + b = b + a$.
- $\cdot$ ist kommutativ, d.h....
- $+$ und $\cdot$ verhalten sich distributiv, d.h. für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
- Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{Q}$, so dass für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt $a + 0 = a = 0 + a$.
- Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{Q}$, so dass für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt $a \cdot 1 = a = a \cdot 1$.
- Für jedes $a \in \mathbb{Q}$ gibt es ein Element $\tilde{a} \in \mathbb{Q}$, so dass $a + \tilde{a} = 0 = \tilde{a} + a$.
  (Normalerweise schreiben wir statt $\tilde{a}$ einfach $-a$)
- Für jedes $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gibt es ein Element $\hat{a} \in \mathbb{Q}$, so dass $a \cdot \hat{a} = 1 = \hat{a} \cdot a$.
  (Normalerweise schreiben wir statt $\hat{a}$ einfach $\frac{1}{a}$)
- ...und weitere Aussagen.

2.2.4. Bemerkung:
Um neue mathematische Objekte (wie die Menge der rationalen Zahlen) zu definieren, gibt es zwei Herangehensweisen. Auf Fahrräder bezogen lesen sich diese so: Das Konzept *Fahrrad* könnte man definieren (wenn es noch unbekannt wäre), indem man

- ...ein Fahrrad baut und es dann per Definition Fahrrad nennt.
- ...oder zunächst Eigenschaften angibt, die ein Fahrrad erfüllen muss (zwei Räder, fahrbar, Bremse, Sattel,...) und anschließend beweist, dass es ein Objekt gibt, das diese Eigenschaften erfüllt. Oft wird man noch zeigen, dass es - bis auf unwesentliche Variationen - nur eine einzige Art von Fahrrad gibt.

Auf die rationalen Zahlen bezogen würde das jeweils bedeuten:

- ...eine Menge von Objekten anzugeben, die die rationalen Zahlen sein sollen und anschließend auch zu erklären wie man damit rechnet. Erst im letzten Schritt würde man dann die Rechengesetze für diese konkrete Menge zeigen.

- ... oder zuerst (wie oben) Eigenschaften anzugeben, die die Menge der rationalen Zahlen erfüllen soll. Anschließend würde man eine solche Menge konstruieren und auch zeigen, dass es - bis auf unwesentliche Variationen - nur eine solche Menge geben kann.

Die Definitionen einer mathematischen Theorie bilden die Basis für das Ableiten weiterer Aussagen. Diese Aussagen werden als **Sätze** bezeichnet, aber es gibt noch weitere Bezeichnungen, die die genaue Rolle des Satzes mit ausdrücken:

- Ein **Theorem** ist ein besonders wichtiger Satz.
- Ein **Lemma** ist ein Hilfssatz, der als eigenständiger Teil aus der Beweisführung eines schwierigen Satzes herausgebrochen wird, z.B. weil er häufiger Verwendung findet. Insbesondere wenn ein Teil eines Beweises andere Methoden verwendet als der Rest kann es die Übersichtlichkeit verbessern, diesen Teil in ein Lemma auszulagern. Es gibt auch recht mächtige, häufig genutzte Lemmata, die in weiten Bereichen der Mathematik genutzt werden (z.B. das Lemma von Zorn).
- Ein **Korollar** ist eine Aussage, die direkt aus einem anderen Satz folgt.
- **Proposition** ist eine lateinische Variante des Begriffes Satz.

Eine Aussage wird nur dann als Satz in eine mathematische Theorie aufgenommen, wenn ein **Beweis** für sie angegeben wird. Ein Beweis ist dabei eine logische Argumentation, die die Aussage des Satzes aus den in der Theorie sonst verfügbaren Aussagen logisch ableitet. Dabei darf einerseits auf Aussagen in den Definitionen der Theorie zurückgegriffen werden, andererseits auch auf Sätze, die bereits Teil der Theorie sind - und natürlich auf die Voraussetzungen des Satzes. Was genau als Beweis akzeptiert wird kommt später in den Kapiteln *Aussagenlogik* und *Beweistechniken* noch einmal zur Sprache.

2.2.5. Satz:
$\mathbb{Q}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sei ein (der) Zahlenraum der rationalen Zahlen und $a \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es nur ein Element $\tilde{a}$, so dass $a + \tilde{a} = 0$.

Die Grundidee des Beweises ist folgende: Wir sollen zeigen, dass es nur ein solches Element geben kann. Wir stellen uns vor, zwei Freunde (sagen wir Hans und Petra) kommen vorbei und jeder von beiden hat eine konkrete Idee für ein solches Element im Kopf. Wir werden beweisen, dass beide dasselbe Element meinen müssen. Eigentlich beweisen wir also folgende Umformulierung:

2.2.6. Satz:
Ist $\mathbb{Q}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein (bzw. der) Zahlenraum der rationalen Zahlen. Wenn $a, \tilde{a}_h, \tilde{a}_p \in \mathbb{Q}$ so gewählt sind, dass

$$a + \tilde{a}_h = 0$$

$$a + \tilde{a}_p = 0$$

gelten...dann ist $\tilde{a}_h = \tilde{a}_p$.

Beweis. $\tilde{a}_h$ und $\tilde{a}_p$ seien zwei Elemente mit der genannten Eigenschaft, also

$$a + \tilde{a}_h = 0$$

$$a + \tilde{a}_p = 0$$

Wir addieren zu $a + \tilde{a}_h$ bzw. zu 0 jeweils (von links) das Element $\tilde{a}_p$. Wegen der ersten Gleichheit müssen wir dabei dasselbe erhalten (Transitivität der Gleichheit):

$$\tilde{a}_p + (a + \tilde{a}_h) = \tilde{a}_p + 0$$

Wir nutzen die Assoziativität der Verknüpfung $+$.

$$(\tilde{a}_p + a) + \tilde{a}_h = \tilde{a}_p + 0$$

Die Eigenschaft von $\tilde{a}_p$ können wir auf der linken Seite nutzen (Voraussetzung), auf der rechten Seite die Eigenschaft des Elements 0.

$$0 + \tilde{a}_h = \tilde{a}_p$$

Und noch einmal die Eigenschaft des Elements 0 führt zu:

$$\tilde{a}_h = \tilde{a}_p$$

Also sind die beiden Elemente gleich. □

Wie man darauf kommt, dass man das so machen kann (keiner sagt, dass es nicht auch anders ginge)? Genau darum wird es in den Übungen des Kurses gehen und besonders in dem Teil der „Mathematisches Arbeiten Lernen“ heißt.

Es gibt auch Aussagen, die zwar leicht aus den Definitionen ableitbar sind, aber dennoch nicht als Sätze formuliert werden, z.B. weil sie einfach viel zu trivial zu beweisen sind.

2.2.7. Beispiel:
$\mathbb{Q}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sei ein (bzw. der) Zahlenraum der rationalen Zahlen und $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Dann gilt:

$$(a + b) + c = c + (a + b)$$

Hierbei handelt es sich nur um einen einfachen Spezialfall der Kommutativität von $+$. Aussagen wie diese sind meist nicht interessant genug, um wirklich als Satz formuliert zu werden.

2.3 Präsenzübung

2.3.1. Aufgabe:
Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ der Menge der natürlichen Zahlen[1] soll genau dann *interessant* heißen, wenn sie die folgende Eigenschaften hat:

- $2 \in A$
- $a \in A \Rightarrow a^2 \in A$
- $a \in A \Rightarrow a + 4 \in A$

Finden und beweisen Sie nicht-triviale Sätze über *interessante* Mengen! Finden Sie Beispiele für *interessante* Mengen?

2.3.2. Aufgabe:
Formulieren Sie den Satz von Pythagoras!

2.3.3. Aufgabe:
Definieren Sie die Begriffe *rechtwinkliges Dreieck*, *Kathete* und *Hypotenuse*. Schreiben Sie dazu jeweils auf, welche Begriffe Sie als bereits definiert angenommen haben!

2.3.4. Aufgabe:
Beweisen Sie den Satz von Pythagoras. Welche Aussagen (Definitionen oder Sätze, egal) haben Sie dabei verwendet?

[1] Wir verstehen hier die Null nicht als natürliche Zahl.

3 Aussagenlogik

„Logik ist die Anatomie des Denkens."

John Locke

„Logik ist die Kunst, zuversichtlich in die Irre zu gehen."

Joseph W. Krutch

Wir werden hier nur einen kleinen Einblick in aussagenlogische Zusammenhänge geben. Ziel ist nicht, dass Sie am Ende des Kurses jeden Beweis bis in die kleinste aussagenlogische Feinheit analysieren. Sie sollen einige Werkzeuge an die Hand bekommen, die Ihnen den täglichen Umgang mit mathematischen Aussagen erleichtern.

3.1 Aussagen

Was als mathematische Aussage zählt und was nicht, ist auf den ersten Blick eine einfache Frage. Wir alle haben ein intuitives Verständnis davon, oder wir entwickeln es im Rahmen unseres Studiums mit der Zeit. Zum Beispiel sind Sätze und Zeichenketten wie die Folgenden mathematische Aussagen.

- Für alle natürlichen Zahlen n und m gilt: Wenn n kleiner als m ist, dann ist $n + 1$ auch kleiner als $m + 1$.
- Jede differenzierbare Funktion auf den reellen Zahlen ist stetig.
- 4 ist ein Primzahl.
- $1 + 1 = 2$.
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.

Häufig kommen in mathematischen Formulierungen auch **Variablen** vor. Erst wenn man in die Variablen bestimmte mathematische Objekte einsetzt erhält man eine Aussage.

Klar ist uns allen auch, dass bestimmte Grundvoraussetzungen erfüllt sein müssen, um eine Aussage zu erhalten, z.B.:

- Die verwendeten Begriffe müssen (zweifelsfrei) geklärt sein. Formulierungen wie *„Jede Funktion die zuerst nach oben läuft und dann wieder nach unten hat ein Maximum.“* sind keine Aussagen.
- Eine definitive, verbindliche Formulierung ist notwendig. Wörter wie „manchmal“, „vielleicht“ oder „fast“ sind normalerweise nicht zugelassen - außer ihre Bedeutung wird klar festgelegt (beliebtes Beispiel: *fast alle*).
- Die Formulierung muss eindeutig interpretierbar sein. Für die Formulierung *„Die Zahlen* $1, 3, 5, ...$ *sind alle Primzahlen.“* ist das nicht gegeben. Die Verwendung von Pünktchen (...) wird deshalb meist als „schlechter mathematischer Stil“ betrachtet und die KorrektorInnen Ihrer Übungsblätter und Klausuren werden sich alle Mühe geben, ihre Formulierungen falsch zu interpretieren.
- Dasselbe trifft zu, wenn die Bedeutung der verwendeten Variablen nicht klar wird, z.B. *„Für jede Zahl* z *ist* $z^2 > 0$*.“*

3.1.1. Begriffsklärung:
Die Problematik, innerhalb der Mathematik schlüssig über die Sprache der Mathematik (also z.B. über den Begriff der Aussage) zu sprechen, ist ein Thema der Logik. Wir ersparen uns das und werden uns hier im Brückenkurs mit unserem intuitiven Verständnis des Begriffs **Aussage** begnügen: *Eine Aussage ist ein sprachliches Konstrukt, dessen Inhalt prinzipiell nur wahr oder falsch sein kann.*

Insbesondere kommt es nicht darauf an, ob die Aussage selbst wahr ist oder nicht. Nicht einmal darauf, ob man zweifelsfrei die Korrektheit der Aussage prüfen kann. Eine Aussage der Gödelschen Unvollständigkeitssätze ist gerade, dass es unentscheidbare Aussagen gibt, d.h. Aussagen, die man in einer bestimmten mathematischen Theorie weder beweisen noch widerlegen kann.

3.1.2. Bemerkung:
Was bedeutet es eigentlich, dass eine Aussage *stimmt* oder *wahr ist*? Die Mathematik legt ihre Grundannahmen in Definition klar fest. Diese Definitionen bilden die Grundlage jeder mathematischen Theorie. Mathematische Aussagen sagen etwas über diese Begriffe aus und sind damit natürlich nur in Bezug auf die jeweils zugrunde liegende Theorie richtig oder falsch. Zum Glück ist die Mathematik in Bezug auf ihre Theorien sehr konsistent, sodass eigentlich fast immer klar ist auf welche Theorie sich eine Aussage bezieht.

Eine Aussage wird als „richtig“ oder „wahr“ bezeichnet, wenn man sie im Rahmen der jeweiligen mathematischen Theorie aus den Definitionen ableiten kann. Eine Aussage wird als falsch bezeichnet, wenn man beweisen kann, dass sie mit Teilen der gerade untersuchten Theorie im Widerspruch steht (widerlegen). Was ein „Widerspruch“ ist, wird uns später noch beschäftigen. In allen anderen Fällen (wenn man die Aussage weder beweisen noch widerlegen kann) ist die Gültigkeit der Aussagen offen. Neben Aussagen, die als wahr oder falsch nachgewiesen wurden, gibt es sogar Aussagen, für die man beweisen kann, dass sie innerhalb einer mathematischen Theorie unentscheidbar sind. Dennoch können diese Aussagen prinzipiell nur richtig oder falsch sein - die Annahmen der Theorie reichen nur nicht aus, um dies definitiv zu entscheiden.

3.2 Junktoren

Die Arbeit mit mathematischen Aussagen wird dadurch erleichtert, dass sie eine gewisse Struktur haben. Manche Aussagen sind eigentlich nur Kombinationen von anderen Aussagen. Die Wörter, die hier die Aussagen verbinden, nennen wir **Junktoren** (lat. *iungere*, verknüpfen, verbinden). Sie haben in der Sprache der Mathematik eine feste und manchmal etwas spezielle Bedeutung.

3.2.1. Bemerkung:
Die folgenden Junktoren werden in der Mathematik häufig verwendet:

Name	*Wort*	*Symbol*	*Bemerkung*
Negation	*nicht*	$\neg$	
Konjunktion	*und*	$\wedge$	„und“ bzw. „und zugleich“
Disjunktion	*oder*	$\vee$	einschließendes Oder: „das eine, das andere, oder beide“
	entweder…oder…		exklusives Oder: „Entweder das eine oder das andere“
Implikation	*impliziert*	$\Rightarrow$	
Äquivalenz	*genau dann wenn*	$\Leftrightarrow$	

Für den Anfang ist es weniger wichtig, die konkreten Fachbegriffe und Notationen zu kennen (insbesondere die Symbole aber können natürlich enorm Zeit, Platz und ggf. Denkaufwand sparen). Zentraler ist es, sicher mit den dahinterstehenden Beziehungen zwischen Aussagen umgehen zu können. Hier im Kurs nutzen wir vor allem die symbolische Schreibweise um schnell und effizient über komplexere Kombinationen von Aussagen sprechen zu können.

3.2.2. Beispiel:
Übersetzen Sie jeweils in die Alltagssprache:

- $\neg(A \vee B)$
- $(\neg A) \vee B$
- $A \vee (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \wedge C$

Verwenden Sie z.B. die folgenden Beispiele:

- A: *Das Wetter ist trocken.*
- B: *Ich habe einen Regenschirm dabei.*
- C: *Ich muss in ein anderes Gebäude laufen.*

Wir merken, dass es schon in der Alltagssprache nicht egal ist, wo wir uns Klammern denken und wo nicht. Es gibt feste Regeln, welche Klammern man weglassen darf und welche nicht. Zum Beispiel gelten Regeln wie „$\neg$ geht vor“ ähnlich wie bei „Punkt vor Strich“. Wir werden diese Regeln hier nicht genauer behandeln und lieber ein paar Klammern mehr setzen als notwendig.

3.2.3. Beispiel:
Logik im Alltag. Wir betrachten die folgenden Aussagen (jeweils anzuwenden auf den Dozenten, morgen, 12 Uhr Mittags):

- A: *Das Wetter ist trocken.*
- B: *Ich habe einen Regenschirm dabei.*
- X: *Das Wetter ist trocken oder ich habe einen Regenschirm dabei.*
- Y: *Das Wetter ist nicht trocken und ich habe keinen Regenschirm dabei.*

Je nachdem, ob die Aussagen A oder B zutreffen (werden), können wir uns überlegen, ob auch die Aussagen X und Y zutreffen (werden). Das Ergebnis halten wir in einer **Wahrheitstafel** fest:

A	B	$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
wahr	wahr	wahr	falsch
wahr	falsch	wahr	falsch
falsch	wahr	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch	wahr

3.3 Verknüpfungen von Junktoren

Beim mathematischen Arbeiten haben wir oft mit Kombinationen von Aussagen zu tun, die mit Junktoren miteinander kombiniert sind. Die für uns an dieser Stelle zentrale Frage ist, wann man eine Kombination von Aussagen $A, B, C, ...$[1] genau so gut durch eine *andere* Kombination derselben Aussagen $A, B, C, ...$ ersetzen kann.

[1] Ja, die Nutzung von Pünktchen ist durchaus schlechter Stil, aber ein strenge mathematische Abhandlung ist *an dieser Stelle* nicht unser Ziel.

3.3.1. Beispiel:
Auf dem Planeten Logico gilt folgendes Gesetz (das auch von allen eingehalten wird):

- $A1$: Wer einen Quax oder einen Quox als Haustier hat (oder beides), der betreibt ein Restaurant.

Welche der folgenden Aussagen können wir daraus ableiten? Durch welche der folgenden Aussagen könnten wir $A1$ ersetzen, ohne den „Geist des Gesetzes“ (im Gegensatz zum Buchstaben des Gesetzes) zu ändern?

- $B1$: Wer einen Quax als Haustier hat, der betreibt ein Restaurant.
- $B2$: Wer ein Restaurant betreibt, der hat einen Quax oder einen Quox als Haustier (oder beides).
- $B3$: Wer kein Restaurant betreibt, der hat weder einen Quax noch einen Quox.

Zur einfacheren Strukturierung können wir Kurzschreibweisen für die einzelnen Teilaussagen einführen, beispielsweise (nur damit wir uns gegenseitig verstehen).

- Qa: Eine Person L besitzt einen Quax als Haustier.
- Qo: L besitzt einen Quox als Haustier.
- R: L besitzt ein Restaurant.

Wir arbeiten mit zwei (prinzipiell beliebigen) Wahrheitswerten „w“ und „f“. Für jede Kombination von Aussagen $A, B, C, ...$, Junktorenzeichen und Klammern ersetzen wir jede der enthaltenen Aussagen durch einen der Wahrheitswerte w und f. Dann können wir den Wahrheitswert der Gesamtaussage berechnen, wenn wir wissen, wie die Junktoren mit den Wahrheitswerten umgehen. Und diese letzte Frage lösen wir durch die folgende Begriffsklärung:

3.3.2. Begriffsklärung:
Die folgenden Wahrheitstafeln beschreiben, wie die Junktoren mit den Wahrheitswerten w und f umgehen:

- **nicht -** $\neg A$

A	$\neg A$
w	f
f	w

  In Alltagssprache: $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

- **und -** $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

In Alltagssprache: $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist.

- **oder -** $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

In Alltagssprache: $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn A wahr ist, (und/)oder wenn B wahr ist (also mindestens eine wahr).

- **Äquivalenz -** $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

In Alltagssprache: $A \Leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben.
Haben wir $A \Leftrightarrow B$ gezeigt, so nennen wir A und B äquivalent (oder äquivalente Aussagen).

- **Implikation -** $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

In Alltagssprache: $A \Rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist.

Wenn wir also $A \Rightarrow B$ gezeigt haben, dann bedeutet das nichts anderes, als dass $\neg A$ gilt[2] oder (z.B. wenn das nicht der Fall ist) B gilt.

[2] also „beweisbar ist“

3.3.3. Beispiel:
Insbesondere die Implikation ist manchmal schwer zu verstehen. Wir betrachten ein Beispiel. Peter hat seiner Freundin Hannah ein Versprechen gegeben: *Wenn morgen die Sonne scheint, dann kaufe ich Dir ein Eis!* Mathematisch gesehen hat er sich versprochen dafür zu sorgen, dass eine Implikation gilt:

$$\text{Sonne scheint} \Rightarrow \text{Hannah bekommt ein Eis}$$

Die Fälle, in denen er sein Versprechen gehalten hat, sollten mit denen übereinstimmen, in denen die Implikation als wahr erachtet wird:

- *Am nächsten Tag scheint die Sonne und Hannah bekommt ihr Eis*: Klar, er hat sein Versprechen gehalten (1. Zeile der Wahrheitstafel).
- *Am nächsten Tag scheint die Sonne nicht und Hannah bekommt ihr Eis*: Naja, auf jeden Fall kann sich niemand beschweren, dass er sein Versprechen gebrochen hat (3. Zeile der Wahrheitstafel).
- *Am nächsten Tag scheint die Sonne nicht und Hannah bekommt kein Eis*: Kann sich Hannah ernsthaft beschweren? Nein, eigentlich nicht. Er hat sein Versprechen gehalten (4. Zeile der Wahrheitstafel).

Lediglich in einem Fall können wir Peter vorwerfen, dass er sein Versprechen gebrochen hat: Wenn morgen die Sonne scheint und Peter Hannah trotzdem kein Eis kauft (2. Zeile der Wahrheitstafel).

3.3.4. Bemerkung:
Was hier als „In Alltagssprache“ angegeben ist macht ja zunächst einmal keinen Sinn (Warum? Wir hatten uns ja darauf geeinigt, dass wir nicht von „wahren“ und „falschen“ Aussagen sprechen!).
Wir verstehen, wenn wir von Wahrheitstafeln sprechen, „hat den Wahrheitswert f“ im Sinne von „kann widerlegt werden“ und „hat den Wahrheitswert w“ im Sinne von „ist beweisbar“ .
Wir verwenden diese Wahrheitswerte als reines Werkzeug zur Untersuchung von Verknüpfungen von Junktoren.

3.3.5. Begriffsklärung:
Wann dürfen wir nun eine Kombination u von Junktoren und Aussagen $A, B, C, ...$ durch eine andere Kombination v von Junktoren und denselben Aussagen $A, B, C, ...$ ersetzen?

Wir einigen uns darauf, dass wir u durch v ersetzen, falls...

- ...für jede Belegung von $A, B, C, ...$ mit den Wahrheitswerten w oder f gilt: Wenn u den Wahrheitswert w liefert, dann auch v, und wenn u den Wahrheitswert f liefert, dann auch v.

  oder (äquivalent)

- ...$u \Leftrightarrow v$ für jede Belegung von $A, B, C, ...$ mit den Wahrheitswerten w oder f den Wahrheitswert w liefert.

3.3.6. Bemerkung:
Es ist wichtig, dass Sie sich den Unterschied zwischen einer „Aquivalenz“ und einer „Implikation“ klarmachen. Viele Studierende haben hier Schwierigkeiten.

3.3.7. Satz:
Seien A und B Aussagen. Wenn wir die Kombination $(A \Rightarrow B) \wedge A$ beweisen können, dann können wir damit auch B beweisen (umgangssprachlich: Anwenden einer Implikation).

Beweis. Wir verwenden das Werkzeug der Wahrheitstafeln in einer recht eleganten Notation[3]:

$((A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\wedge$	$A)$	B
w	w	w	**w**	w	**w**
w	f	f	**f**	w	**f**
f	w	w	**f**	f	**w**
f	w	f	**f**	f	**f**
	1		2		

□

3.3.8. Satz:
Für jede Belegung der Platzhalter A, B, C mit den Wahrheitswerten w bzw. f ergeben die folgenden Aussagen den Wahrheitswert w:

1. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
2. $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
3. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
4. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
5. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
7. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$

Beweis. 1. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

[3] siehe Deiser, 2010.

A	$\vee$	$(B$	$\vee$	$C)$	$\Leftrightarrow$	$(A$	$\vee$	$B)$	$\vee$	C
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	w	w	f	w	w	w	w	w	f
w	w	f	w	w	w	w	w	f	w	w
w	w	f	f	f	w	w	w	f	w	f
f	w	w	w	w	w	f	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w	f	f	f	w	w
f	w	w	w	f	w	f	w	w	w	f
f	f	f	f	f	w	f	f	f	f	f
	2		1		3		1		2	

Die restlichen Aussagen sind eine einfache Übung. □

3.3.9. Bemerkung:
Nachdem wir die Assoziativität von $\vee$ und $\wedge$ gezeigt haben, können wir Klammern weglassen, solange nur eine der beiden Operationen involviert ist:

1. $A \vee B \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
2. $A \wedge B \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$

Problematisch wird das allerdings bei Kombinationen, bei denen beide Operationen vorkommen: Vergleichen Sie $A \vee (B \wedge C)$ und $(A \vee B) \wedge C$.

3.4 Junktoren und Umgangssprache

Besonders im Bereich der Junktoren gibt es in der Umgangssprache feine Bedeutungsschattierungen, die in der Mathematik nicht berücksichtigt werden - auch um Klarheit zu schaffen.

3.4.1. Beispiel:
Der Junktor „und“:

- „Ich werde krank und gehe ins Krankenhaus“ (um gesund zu werden)
- „Ich gehe ins Krankenhaus und werde krank“ (weil ich mich dort angesteckt habe)

Im Alltag schwingt beim Junktor „und“ oft eine zeitliche Abfolge oder gar eine Ursache-Wirkungs-Relation mit. In der Mathematik ist „A und B“ stets gleichwertig zu „B und A“.

3.4.2. Beispiel:
Der Junktor „oder“:

- „Sie verlassen mein Haus oder ich rufe die Polizei“

- „Ich rufe die Polizei oder Sie verlassen mein Haus“

Vor allem wird der Junktor „oder“— in der Umgangssprache meist als Hinweis auf eine zu treffende Wahl zwischen zwei (sich ggf. ausschließenden) Alternativen verwendet. So ist die Antwort „ja“ auf die folgenden Fragen zwar meist korrekt, enthält aber nicht die vom Fragenden erwartete Information

- „Willst Du hierbleiben oder nach Hause gehen?“
- „Willst Du den gelben oder den roten Ball?“

3.4.3. Beispiel:
Bei der *Implikation* schwingt in der alltäglichen Bedeutung oft eine Ursache-Wirkungs-Beziehung mit. Auch in der Mathematik wird dies so verstanden. Problematisch wird dies aber, wenn z.B. die Voraussetzung (subjektiv) sehr unwahrscheinlich erscheint oder sogar falsch (d.h. in der gerade bearbeiteten mathematischen Theorie widerlegbar) ist.

Würden Sie - im Alltagskontext - sagen, dass die folgende Implikation wahr ist?
Wenn Dieter Bohlen ein guter Koch ist, dann bin ich der Kaiser von China.

Die Implikation kann im Alltag als gültig angenommen werden (vorausgesetzt Herr Bohlen kann in der Tat nicht kochen).

Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist innerhalb der Mathematik am ehesten im Sinne der äquivalenten Aussage $\neg A \vee B$ zu verstehen, also: „A gilt nicht (ist widerlegbar) oder B gilt (ist beweisbar)“.

3.5 Präsenzübung

3.5.1. Aufgabe:
Auf dem Planeten Logico wird das Leben durch einfache Regeln bestimmt, die von allen Personen immer eingehalten werden müssen - und auch werden. Im Folgenden finden Sie eine dieser Regeln und dazu Aussagen. Geben Sie an, ob die Aussagen auf dem Planeten Logico immer gültig sind, oder immer falsch sind, oder ob man darüber mit Hilfe der Regel nichts sagen kann. Welche der Aussagen sind gleichwertig zu den Regeln?

Formulieren Sie die Aussagen auch in symbolischer Schreibweise. Überprüfen Sie mit Wahrheitstafeln.

Regel: Wenn Sandsturm ist, dann darf keine Musik gemacht werden.

1. Wenn Musik zu hören ist, dann ist sicher kein Sandsturm.
2. Wenn kein Sandsturm ist, dann ist immer Musik.
3. Wenn kein Sandsturm ist, dann ist nie Musik.
4. Wenn Musik ist, dann ist gerade ein Sandsturm.

3.5.2. Aufgabe:
Betrachten Sie die folgenden Kombinationen der Aussagen A und B mit Junktoren. Welche Kombinationen sind äquivalent?

1. $\neg(A \wedge B)$
2. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
3. $\neg A \vee B$
4. $A \wedge (B \vee C)$
5. $\neg(A \vee B)$
6. $A \vee (B \wedge C)$
7. $\neg A \wedge \neg B$
8. $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
9. $A \Rightarrow B$
10. $\neg A \vee \neg B$

Machen Sie sich jeweils die Bedeutung der Aussagen mit Hilfe von Alltagsbeispielen klar.

Versuchen Sie zusammengehörige Aussagen zu finden und überprüfen Sie Ihre Ideen mit Hilfe von Wahrheitstafeln.

3.5.3. Aufgabe:
Analog zur Planet-Logico-Aufgabe oben:

Regel: Wer einen Quaz oder einen Quox als Haustier hat, der betreibt ein Restaurant.

1. Wer einen Quox als Haustier hat, der betreibt ein Restaurant.
2. Wer weder einen Quaz, noch einen Quox hat, der betreibt kein Restaurant.
3. Wer einen Quaz und einen Quox hat, der betreibt ein Restaurant.
4. Wer ein Restaurant betreibt, besitzt immer einen Quaz.
5. Wer kein Restaurant betreibt, besitzt weder einen Quaz, noch einen Quox.

3.5.4. Aufgabe:
Erstellen Sie eine Wahrheitstafel mit den Spalten A, B, C und P. Tragen Sie alle möglichen Kombinationen von Wahrheitswerte w und f für A, B, C ein (8 Kombinationen). Belegen Sie die P-Spalte zufällig mit w und f.

Finden Sie nun eine Kombination von A, B, C mit Hilfe von Junktoren, die immer die Wahrheitswerte der Spalte P ergibt.

3.5.5. Aufgabe:
Analog zur Planet-Logico-Aufgabe oben:

Regel: Wenn Ferien sind und die Sonne scheint, muss man entweder Kickball spielen oder ins Freibad gehen.

1. Wenn keine Sonne scheint und keine Ferien sind, spielt niemand Kickball und es ist keiner im Freibad.
2. Wenn keiner Kickball spielt und niemand im Freibad ist, dann scheint keine Sonne oder es sind keine Ferien.
3. Wenn alle entweder Kickball spielen oder im Freibad sind, scheint die Sonne und es sind Ferien.
4. Wenn die Sonne scheint, aber niemand ist im Freibad oder spielt Kickball, dann sind keine Ferien.

3.5.6. Aufgabe:
Analog zur Planet-Logico-Aufgabe oben:

Regel: Wer keine kurzen Haare hat, darf nicht mit dem Ufo fliegen.

1. Alle Bewohner mit kurzen Haaren dürfen mit dem Ufo fliegen.
2. Bewohner mit langen Haaren dürfen bei schönem Wetter mit dem Ufo fliegen.
3. Wenn kein Ufo fliegt, hat niemand kurze Haare.

4. Jeder der mit dem Ufo fliegt, hat kurze Haare.
5. Wenn ein Ufo fliegt, gibt es niemanden mehr auf dem Planeten mit kurzen Haaren.

4 Quantoren

4.1 Begriffsklärung

Junktoren beschreiben bereits recht effektiv die Struktur mathematischer Aussagen. An einigen Stellen stoßen wir alleine mit ihnen jedoch an Grenzen.

4.1.1. Beispiel:
Betrachten wir die folgenden beiden Aussagen über eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- A: Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$, für das $f(x) = 0$ gilt.
- B: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) \neq 0$.

Intuitiv wird uns relativ schnell klar, dass $\neg A$ nichts anderes sagt als B, nämlich dass f keine Nullstelle hat. Die Äquivalenz dieser beiden Aussagen können wir mit Junktoren alleine aber nicht verstehen.

Sprachkonstrukte, die Wörter wie „für alle", „es gibt ein" oder „es gibt kein" enthalten, können oft mit sogenannten Quantoren beschrieben werden.

4.1.2. Begriffsklärung:
Zur kürzeren Schreibweise verwenden wir in der Mathematik die folgenden **Quantoren**.

- $\forall x \;\; A(x)$ bedeutet: „für alle x gilt die Eigenschaft $A(x)$"
- $\exists y \;\; B(y)$ bedeutet: „es gibt (mindestens) ein y mit der Eigenschaft $B(y)$"
- $\exists! z \;\; C(z)$ bedeutet: „es gibt *genau* ein z mit der Eigenschaft $C(z)$"

Dabei stehen $A(x), B(y)$ und $C(z)$ für Aussagen, in denen eine (oder auch mehrere) Variablen enthalten sind.

4.1.3. Bemerkung:
Die Symbole x, y und z sind hierbei als Variablen zu verstehen. Welche Elemente man für diese Variablen einsetzen darf, muss im konkreten Kontext festgelegt werden.

Oft wird auch eine Menge angegeben, deren Elemente für die Variable eingesetzt werden dürfen, z.B.

- $\exists x \in \mathbb{R} \;\; x > 2$
- $\forall y \in \mathbb{Z} \;\; y + 1 \in \mathbb{Z}$

4.1.4. Beispiel:
(mit Lösungen)

- Es gibt keine größte natürliche Zahl; Oder, gleichbedeutend:
  Für jede natürliche Zahl n gibt es eine weitere natürliche Zahl, die größer als n ist.
  $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N}\; m > n$
- n ist eine Primzahl
  n ist größer als 1 und für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $a \cdot b = n$, so ist $a = 1$ oder $b = 1$
  $n > 1 \wedge \forall a, b \in \mathbb{N} \quad (a \cdot b = n \Rightarrow a = 1 \vee b = 1)$
- Die Verknüpfung $\circ$ von Elementen einer Menge M ist nicht kommutativ
  Es gibt Elemente x, y von M so dass gilt $x \circ y \neq y \circ x$.
  $\exists x, y \in M \quad x \circ y \neq y \circ x$
- Für jede natürliche Zahl n gibt es eine zweite natürliche Zahl k, so dass entweder $n = 2 \cdot k$ oder $n = 2 \cdot k + 1$.
  $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N}\; (n = 2 \cdot k \vee n = 2 \cdot k + 1)$
- Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegt immer (mindestens) eine weitere rationalen Zahl (mit Skizze am Zahlenstrahl veranschaulichen).
  $\forall p, q \in \mathbb{Q}\, \exists r \in \mathbb{Q}\; (p < q \Rightarrow p < r < q)$

4.1.5. Bemerkung:
Betrachten wir die Rolle von Variablen in unseren Aussagen genauer, dann können wir zwei verschiedene Typen von Variablen identifizieren. Wir betrachten noch einmal das folgende Beispiel:

$$n > 1 \wedge \forall a, b \in \mathbb{N} \quad (a \cdot b = n \Rightarrow a = 1 \vee b = 1)$$

Welchen Unterschied können Sie zwischen den Variablen a, b auf der einen Seite und der Variablen n auf der anderen Seite erkennen?

4.1.6. Begriffsklärung:
Wir nennen eine Variable...

- ...**frei**, wenn ihr Inhalt nicht durch einen Quantor innerhalb der Aussage festgelegt wird.
- ...**gebunden**, wenn ihr Inhalt durch einen Quantor innerhalb der Aussage festgelegt wird.

Für freie Variablen dürfen wir beliebige mathematische Objekte (je nach Kontext eingeschränkt) einsetzen. Bei gebundenen Variablen macht das keinen Sinn.

4.1.7. Beispiel:
Noch einmal das Beispiel von oben:

$$n > 1 \wedge \forall a, b \in \mathbb{N} \quad (a \cdot b = n \Rightarrow a = 1 \vee b = 1)$$

- n ist eine freie Variable. Wenn wir z.B. 5 für n einsetzen erhalten wir eine sinnvolle mathematische Aussage:

$$5 > 1 \wedge \forall a, b \in \mathbb{N} \quad (a \cdot b = 5 \Rightarrow a = 1 \vee b = 1)$$

- a, b sind gebundene Variablen. Sie durch eine Zahl zu ersetzen führt zu keiner sinnvollen Aussage. Es ist ja gerade der Sinn am Quantor $\forall$, dass er alle möglichen Ersetzungen für a bzw. b berücksichtigt.

4.2 Umformungen von Quantoren

Wie bei der Arbeit mit Junktoren stellt sich in der täglichen Arbeit mit mathematischen Aussagen die folgende entscheidende Frage:

Wann dürfen wir nun eine Kombination u von Junktoren, Quantoren und Aussagen $A, B, C, ...$ durch eine andere Kombination v von Junktoren, Quantoren und denselben Aussagen $A, B, C, ...$ ersetzen?

Leider gibt es für diese Frage kein so einfaches, mechanisches Werkzeug mehr wie die Methode der Wahrheitstafeln für Junktoren. Dennoch gibt es einige Umformungsregeln, die die Arbeit mit Quantoren sehr erleichtern.

4.2.1. Beispiel:
Betrachten wir noch einmal die beiden Aussagen aus dem Beispiel oben:

- A: Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$, für das $f(x) = 0$ gilt.
- B: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) \neq 0$.

Die Aussagen $\neg A$ und B sind offenbar gleichwertig, da beide bedeuten, dass f keine Nullstelle hat. Mit Quantoren können sie so geschrieben werden:

- $\neg A$: $\neg(\exists x \in \mathbb{R} \;\; f(x) = 0)$
- B:$\forall x \in \mathbb{R} \;\; \neg(f(x) = 0)$.

4.2.2. Beispiel:
Sehr einfache Beispiele:

- A: Es gibt eine Eisdiele in München, in der es Schokoladeneis gibt.
- B: In allen Eisdielen in München gibt es Schokoladeneis.

Und noch etwas versteckter:

- C: Es gibt keine Eisdiele in München, in der es Schokoladeneis gibt.
- D: In keiner Eisdiele in München gibt es Schokoladeneis.

4.2.3. Bemerkung:
Es gelten die folgenden Umformungsregeln für Quantoren:

- $\neg(\exists x \ \ A(x))$ ist gleichwertig zu $\forall x \ \ \neg A(x)$
- $\neg(\forall x \ \ A(x))$ ist gleichwertig zu $\exists x \ \ \neg A(x)$

Umgangssprachlich verkürzt: „Die Negation vertauscht Existenz- und Allquantor“.

- $\forall x \forall y \ \ A(x, y)$ ist gleichwertig zu $\forall y \forall x \ \ A(x, y)$
- $\exists x \exists y \ \ A(x, y)$ ist gleichwertig zu $\exists y \exists x \ \ A(x, y)$

Umgangssprachlich verkürzt: „Existenzquantoren darf man vertauschen, Allquantoren auch“.

Einige Vertauschungen sind nicht erlaubt, weil die eine Stellung der Quantoren eine **stärkere Aussage** beschreibt als die andere.

4.2.4. Bemerkung:
Es gilt die folgende Implikation

$$(\exists y \ \forall x \ A(x, y)) \Rightarrow (\forall x \ \exists y \ A(x, y))$$

Die Umkehrung der Implikation ist im allgemeinen falsch (Gegenbeispiel siehe unten, mittleres Bild).

4.2.5. Beispiel:
Wir nehmen zur Veranschaulichung wieder die Eisdielen:

- In allen Eisdielen Münchens gibt es eine Eissorte, die Ingwer enthält.
- Es gibt eine Eissorte, die man in allen Eisdielen Münchens kaufen kann und die Ingwer enthält.

Die Grundidee des Beweises ist einfach: Nach Voraussetzung wissen wir, dass es ein einziges s_0 (EisSorte) gibt, so dass für alle d (EisDiele) $A(s, d)$ (in der Eisdiele d gibt es die Eissorte s und die Sorte s enthält Ingwer) gilt. Damit können wir aber auch für alle d ein s (nämlich dieses eine s_0) angeben, so dass $A(s, d)$ gilt.

Umgekehrt geht das nicht. Wenn wir nur wissen, dass es für jede Eisdiele d irgendeine Eissorte s gibt (die Ingwer enthält), dann kann die Eissorte s unterschiedlich sein, je nachdem welche Eisdiele d wir betrachten. Das kann die Angabe einer (einzigen) Eissorte s, die für alle Eisdielen d $A(d, s)$ erfüllt, unmöglich machen.

Beweis. Wir nehmen $\exists s \, \forall d \; A(d, s)$ an. Wir können uns also ein s_0 wählen, so dass $\forall d \; A(d, s_0)$, also „für alle d gilt $A(d, s_0)$. Insbesondere gibt es für alle d ein s (nämlich immer dasselbe s_0), so dass $A(d, s)$.

Für alle d gilt also $\exists s \; A(d, s)$. Diese Aussage ist viel schwächer als das, was wir wissen, nämlich dass wir immer dasselbe s nehmen können; sie folgt aber dennoch aus unseren Voraussetzungen.

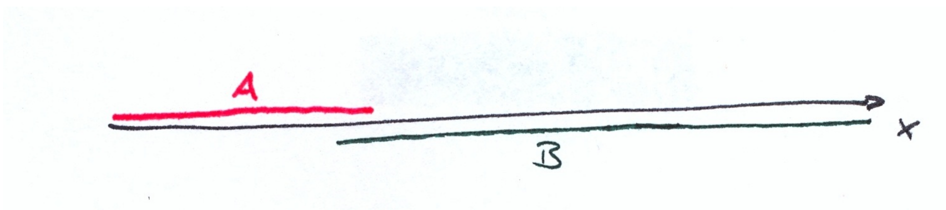
In Zeichen haben wir damit: $\forall x \, \exists y \; A(x, y)$. $\square$

4.2.6. Bemerkung:

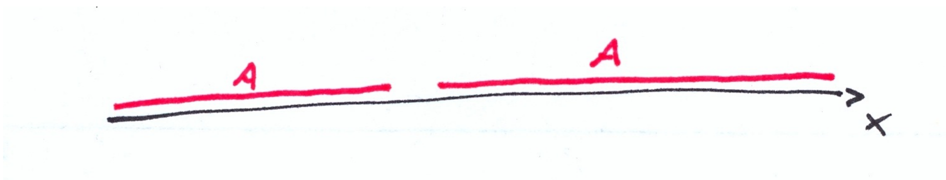
Es gelten - unter anderem - die folgenden Regeln zur Umformung von Quantoren:

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x \; A(x)) &\Leftrightarrow \exists x \; \neg A(x) \\
\neg(\exists x \; A(x)) &\Leftrightarrow \forall x \; \neg A(x) \\
\forall x \forall y \; A(x, y) &\Leftrightarrow \forall y \forall x \; A(x, y) \\
\exists x \exists y \; A(x, y) &\Leftrightarrow \exists y \exists x \; A(x, y) \\
\exists y \forall x \; A(x, y) &\Rightarrow \forall x \exists y \; A(x, y) \\
\forall x \; A(x) \wedge \forall x \; B(x) &\Leftrightarrow \forall x \; (A(x) \wedge B(x)) \\
\exists x \; A(x) \vee \exists x \; B(x) &\Leftrightarrow \exists x \; (A(x) \vee B(x)) \\
\forall x \; A(x) \vee \forall x \; B(x) &\Rightarrow \forall x \; (A(x) \vee B(x)) \\
\exists x \; (A(x) \wedge B(x)) &\Rightarrow \exists x \; A(x) \wedge \exists x \; B(x) \\
\forall x \; (A(x) \Rightarrow B(x)) &\Rightarrow \forall x \; A(x) \Rightarrow \forall x \; B(x) \\
\exists x \; (A(x) \Rightarrow B(x)) &\Leftrightarrow \forall x \; A(x) \Rightarrow \exists x \; B(x)
\end{aligned}$$

Um sich von der Gültigkeit der Äquivalenzen und Implikationen zu überzeugen kann man z.B. Grafiken der folgenden Art nutzen:



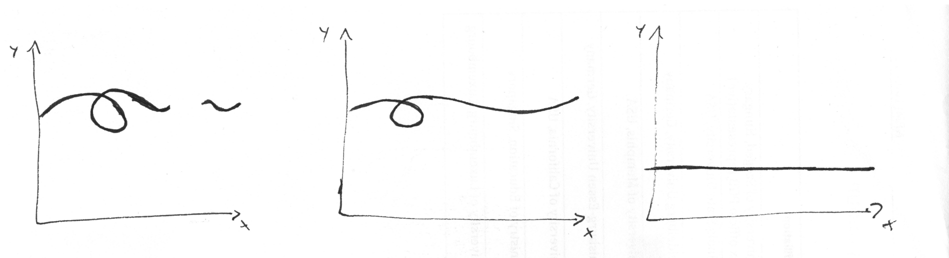
Für die erste Äquivalenz beispielsweise:



Für die fünfte Implikation z.B. kann man die folgenden Grafiken verwenden, um zusätzlich zu verdeutlichen, dass die Umkehrung nicht gilt:

- Das linke Bild illustriert einen Fall, in dem Voraussetzung der Implikation $\exists y \forall x\ A(x,y)$ falsch ist, und auch die Behauptung $\forall x \exists y\ A(x,y)$.
- Das rechte Bild illustriert einen Fall, in dem Voraussetzung der Implikation $\exists y \forall x\ A(x,y)$ wahr ist, und auch die Behauptung $\forall x \exists y\ A(x,y)$.
- Das mittlere Bild illustriert einen Fall, in dem Voraussetzung der Implikation $\exists y \forall x\ A(x,y)$ falsch ist, die Behauptung $\forall x \exists y\ A(x,y)$ allerdings wahr ist.

Damit illustriert die mittlere Grafik ein Gegenbeispiel für die Implikation $\forall x \exists y\ A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x\ A(x,y)$. Und das ist genau die Umkehrung der fünften Implikation in der Bemerkung oben.



4.3 Präsenzübung

4.3.1. Aufgabe:
Betrachten Sie die Aussagen

- M: Menge aller Menschen
- Z: Menge aller Zeitpunkte
- $L(x, y)$: x lügt zum Zeitpunkt y

Drücken Sie die folgenden Aussagen formal aus:

1. Manche Menschen lügen immer.
2. Alle Menschen lügen manchmal.
3. Manche Menschen sagen manchmal die Wahrheit.
4. Es gibt genau einen Menschen, der immer die Wahrheit sagt.
5. Von je zwei verschiedenen Menschen sagt zu einem bestimmten Zeitpunkt immer der eine die Wahrheit und der andere nicht.

4.3.2. Aufgabe:
Analog zur Planet-Logico-Aufgabe im letzten Kapitel:

Regel: Es wird nie auf allen Baustellen gleichzeitig gearbeitet.

1. Es gibt eine Baustelle auf der nicht gearbeitet wird.
2. Auf allen Baustellen wird nicht gearbeitet.
3. Es wird nur auf einer Baustelle gearbeitet.
4. Auf allen Baustellen wird zum selben Zeitpunkt gearbeitet.
5. Es gibt mindestens eine Baustelle auf der gearbeitet wird.

4.3.3. Aufgabe:
Versuchen Sie Formulierungen der folgenden Aussagen mit jeweils nur einem Quantor zu finden! Welche Formulierungen sind äquivalent, welche sind schwächer oder stärker als die ursprünglichen Aussagen?

Teilweise hilft einfach ein Blick in das Vorlesungsskript. M ist ein Menge.

1. $\forall x \in M\ A(x) \wedge \forall x \in M\ B(x)$
2. $\exists x \in M\ A(x) \vee \exists x \in M\ B(x)$
3. $\forall x \in M\ A(x) \vee \forall x \in M\ B(x)$
4. $\exists x \in M\ A(x) \wedge \exists x \in M\ B(x)$

5. $\forall x \in M\ A(x) \Rightarrow \forall x \in M\ B(x)$
6. $\forall x \in M\ A(x) \Rightarrow \exists x \in M\ B(x)$

Nutzen Sie Zeichnungen wie in der Vorlesung, um eventuelle Gegenbeispiele für nicht gültige Implikationen zu finden.

4.3.4. Aufgabe:
Aus Deiser, 2010:

Übung 21 *(Die Sprache der Mathematik, IV)*
Lesen Sie „∀x“ als „für alle Menschen x“, „b“ als „der Butler“, „g“ als „der Gärtner“, „l“ als „der Lord“, „K(x, y)“ als „x hat y ermordet“, „A(x, y)“ als „x hat Angst vor y“, „H(x, y)“ als „x haßt y“, und formalisieren Sie die folgenden Aussagen:

(a) Der Butler oder der Gärtner hat den Lord umgebracht, oder der Lord hat Selbstmord begangen.
(b) Man mordet nur die, die man haßt und vor denen man Angst hat.
(c) Diejenigen, die der Lord haßt, mag der Gärtner.
(d) Diejenigen, die der Lord haßt, haßt auch der Butler.
(e) Der Lord haßt sich selbst, und er haßt den Gärtner.
(f) Der Butler haßt alle, die Angst vor dem Lord haben.
(g) Jeder mag den Lord, den Butler oder den Gärtner.

Nehmen Sie nun diese Informationen als gegeben an, und ermitteln Sie durch eine möglichst detaillierte logische Argumentation den Mörder des Lords.

5 Teilbarkeit, Teil I

Wir arbeiten in diesem Kapitel mit den wohlbekannten ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

In erster Linien interessieren wir uns für natürliche Zahlen, aber in $\mathbb{Z}$ können wir freier rechnen, weil wir hier beliebig subtrahieren können.

5.0.1. Bemerkung:
Wir nehmen die folgenden Aussagen über $\mathbb{Z}$ als gegeben an:

1. Assoziativität und Kommutativität von Addition und Multiplikation
2. Eigenschaften von 0 und 1 als neutrale Elemente von Addition bzw. Multiplikation.
3. Die Existenz von Inversen bezüglich der Addition (d.h. eine Zahl $-a$ für jede ganze Zahl a).
4. Die Kürzungsregel: Aus $r \cdot x = r \cdot y$ und $r \neq 0$ folgt immer $x = y$.
5. Gilt für $r, s \in \mathbb{Z}$, dass $r \cdot s = 1$, so folgt $r = s = 1$ oder $r = s = -1$.
6. Die bekannten Eigenschaften der Ordnungsrelation „kleiner als“ für ganze Zahlen.
7. Die Existenz eines minimalen Elements für jede Teilmenge der nicht-negativen ganzen Zahlen ($\mathbb{N}$ und Null zusammen).
8. Typische Eigenschaften der Betragsfunktion.

Wir werden im Folgenden lediglich diese Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{N}$ verwenden, um eine kleine Theorie der Teilbarkeit aufzubauen.

5.1 Begriffsklärung

5.1.1. Definition:
Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen.

- a ist ein Teiler von b $:\Leftrightarrow$ es gibt $r \in \mathbb{Z}$ mit $b = r \cdot a$.
- b ist ein Vielfaches von a $:\Leftrightarrow$ es gibt $r \in \mathbb{Z}$ mit $b = r \cdot a$

5.1.2. Bemerkung:
Offensichtlich gilt:

$$a \text{ ist ein Teiler von } b \Leftrightarrow b \text{ ist ein Vielfaches von } a.$$

In diesem Fall schreiben wir auch $a|b$.

5.1.3. Beispiel:
Beispielsweise $7|35$, weil es die Zahl $5 \in \mathbb{Z}$ gibt mit $35 = 7 \cdot 5$.

5.1.4. Satz:
Einfache Eigenschaften Für alle $a, b, c, ... \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $a|a$, $1|a$, $a|0$, $0|a \;\Leftrightarrow\; a = 0$,
2. $d|a$ und $a|d \;\Leftrightarrow\; |d| = |a|$,
3. $d|a$ und $a \neq 0 \;\Rightarrow\; |d| \leq |a|$,
4. $a|b$ und $b|c \;\Rightarrow\; a|c$,
5. $d|a \;\Rightarrow\; (m \cdot d)|(m \cdot a)$
6. $(n \cdot d)|(n \cdot a)$ und $n \neq 0 \;\Rightarrow d|a$

Beweis.

1. Offenbar ist $a = 1 \cdot a$, $a = a \cdot 1$ und $0 = 0 \cdot a$, was die ersten drei Aussagen beweist.

   Gilt $0|a$, so gibt es ein $r \in \mathbb{Z}$, so dass $a = r \cdot 0$ also $a = 0$. Ist andererseits $a = 0$, so gilt $0|a$, weil $0|0$ (da ja $0 = 0 \cdot 0$).

2. Ist eine der beiden Zahlen a, d gleich 0, so auch die andere (siehe 1). In diesem Fall ist die Aussage klar. Wir nehmen also im Folgenden (ohne Einschränkung) $a \neq 0$ und $d \neq 0$ an.

   $\underline{\Rightarrow}$: Es gibt nach Voraussetzung $r, s \in \mathbb{Z}$, so dass $d = r \cdot a$ und $a = s \cdot d$. Also gilt $a = r \cdot s \cdot a$. Da $a \neq 0$ folgt daraus $1 = r \cdot s$ (Kürzungsregel). Damit folgt $r, s = \pm 1$, also auch $|d| = |a|$.

   $\underline{\Leftarrow}$: Ist $|d| = |a|$, so gibt es $r \in \{+1, -1\}$, so dass $d = r \cdot a$. Da $r \cdot r = 1$ ergibt Multiplikation mit r auf beiden Seiten: $a = r \cdot d$.

3. Es gibt $r \in \mathbb{Z}$, so dass $a = r \cdot d$. Da $a \neq 0$, gilt auch $r \neq 0$, insbesondere also $|r| \geq 1$.
   Damit ist $|a| = |r| \cdot |d| \geq |d|$.

4. Wir suchen eine Zahl z, so dass $c = z \cdot a$. Nach Voraussetzung gibt es $r, s \in \mathbb{Z}$, so dass $b = r \cdot a$ und $c = s \cdot b$. Einsetzen ergibt $c = s \cdot (r \cdot a) = (s \cdot r) \cdot a$, also $a|c$.

Die weiteren Aussagen werden Sie in der Präsenzübung selbst beweisen. □

5.1.5. Satz:
Es seien $a, m, n, x, y \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

1. $a|m \;\Rightarrow\; a|x \cdot m$
2. $a|x$ und $a|y \;\Rightarrow\; a|(x + y)$
3. $a|x$ und $a|y \;\Rightarrow\; a|(m \cdot x + n \cdot y)$

Beweis. Ganz offensichtlich sind 1. und 2. Spezialfälle von 3. Also zeigen wir nur 3.

Es gibt $r, s \in \mathbb{Z}$ so dass $x = r \cdot a$ und $y = s \cdot a$. Dann ist $m \cdot x + n \cdot y = m \cdot r \cdot a + n \cdot s \cdot a = (m \cdot r + n \cdot s) \cdot a$. □

5.2 Division mit Rest

Ein wichtiges Werkzeug beim Umgang mit ganzen Zahlen ist die Division mit Rest.

5.2.1. Satz:
Satz von der Division mit Rest

Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft

$$a = q \cdot b + r \text{ und } 0 \leq r < |b|$$

In diesem Fall nennen wir q den **Quotienten** und r den **Rest** (von a bei der Division durch b).

5.2.2. Bemerkung:
Hier haben wir es mit einer typischen Art mathematischer Aussagen zu tun. Behauptet wird nämlich nicht nur, dass es bestimmte Objekte (hier die Zahlen q, r mit bestimmten Eigenschaften) *gibt*, sondern außerdem, dass man nur eine einzige Möglichkeit für die Wahl dieser Zahlen hat.

Entsprechend sind auch zwei Dinge zu zeigen: *Existenz* und *Eindeutigkeit* der betreffenden Objekte. Oft ist es in der alltäglichen Arbeit leichter, mit der Eindeutigkeit anzufangen.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $b \geq 1$ (die Verallgemeinerung findet sind im Kapitel zu Beweistechniken, wobei die Einschränkung hier eigentlich nur für die Existenz relevant ist). <u>Eindeutigkeit:</u> Es seien $q, r \in \mathbb{Z}$ und $q', r' \in \mathbb{Z}$ Zahlen mit der genannten Eigenschaft, also

$$a = q \cdot b + r \text{ und } 0 \leq r < |b|$$

$$a = q' \cdot b + r' \text{ und } 0 \leq r' < |b|$$

Wir werden $q = q'$ und $r = r'$ zeigen.
Dazu ziehen wir die beiden Gleichungen voneinander ab, formen etwas um und erhalten:

$$(q - q') \cdot b = r' - r$$

Das bedeutet $b|(r' - r)$.
Es gilt außerdem $|r'-r| < |b|$: Einerseits ist $r \leq r+r' < |b|+r'$ (weil $0 \leq r'$ und $r < b$) und (genauso, nur mit r und r' vertauscht) andererseits auch $r' \leq r' + r < |b| + r$, zusammen also $r - r' < |b|$ und $-(r - r') < |b|$. Beides zusammen bedeutet, dass $|r' - r| < |b|$.
Wegen Aussage 3. im ersten Satz 5.1.4 muss dann auch $r' - r = 0$ sein (selbst prüfen). Es gilt also $r' = r$ und

$$(q - q') \cdot b = 0$$

Nach der Kürzungsregel (es ist ja $b \geq 1$) gilt damit $q - q' = 0$ und so $q = q'$.

<u>Existenz:</u> Wir machen eine Fallunterscheidung und betrachten zunächst den $\boxed{\text{Fall } a \geq 0}$: Wir betrachten die Menge U aller Zahlen der Form $a - q \cdot b$, die entstehen, wenn man Zahlen $q \in \mathbb{Z}$ wählt, für die $q \cdot b \leq a$ ist. Wegen dieser letzten Bedingung enthält U nur natürliche Zahlen (und ggf. die Null), und außerdem ist offenbar $a = a - 0 \cdot b$ ein Element von U, d.h., U ist eine nicht-leere Teilmenge der Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen ($\mathbb{N}$ und Null).
Nach einer unserer Grundannahmen (s.o.) hat U damit ein kleinstes Element, wir nennen es r. Weil wir U so konstruiert haben, gibt es dazu eine Zahl $q \in \mathbb{Z}$, für die gilt: $r = a - q \cdot b$. Das heißt also, dass $a = q \cdot b + r$ ist. Außerdem ist $0 \leq r$, weil r ein Element von U ist und diese Menge ja nur nicht-negative ganze Zahlen enthält. *Wäre* nun $r \geq b$ (Erinnerung: wir nehmen gerade an, dass $b \geq 1$), dann wäre auch $a-(q+1)\cdot b$ ein Element von U, weil $q+1 \in \mathbb{Z}$, $q+1 \geq 0$ und $(q+1)\cdot b = q \cdot b + b = (a - r) + b \leq (a - b) + b < a$. Außerdem wäre dann auch $a - (q + 1) \cdot b < a - q \cdot b$. Das ist ein offensichtlicher Widerspruch dazu, dass $a - q \cdot b$ als das kleinste Element von U gewählt wurde. Es muss also $r < b$ gelten.

Jetzt der $\boxed{\text{Fall } a < 0}$: Wir finden nach dem eben Bewiesenen zwei Zahlen $q', r' \in \mathbb{Z}$ mit

$$-a = q' \cdot b + r' \text{ und } 0 \leq r' < b.$$

Ist $r' = 0$, so nehmen wir $q = -q'$ und $r = 0$ und sind fertig(!).
Ansonsten ($r' > 0$) setzen wir $r = b - r'$ und $q = -q' - 1$. Damit ist $0 \leq r < b$ (weil $0 < r' < b$) und außerdem

$$q \cdot b + r = -q' \cdot b - b + b - r' = -q' \cdot b - r' = a.$$

$\square$

5.3 Präsenzübung

5.3.1. Aufgabe:
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für ganze Zahlen $a, b, c, ... \in \mathbb{Z}$:

1. $a|b \Rightarrow a|cb$
2. $a|b \Rightarrow ca|b$
3. $ca|b \Rightarrow a|b$
4. $a|cb \Rightarrow a|b$
5. $c|ab \Rightarrow c|a \vee c|b$
6. $c|ab \Rightarrow c|a \wedge c|b$
7. $c|a \vee c|b \Rightarrow c|ab$
8. $c|a \wedge c|b \Rightarrow c|ab$
9. $a|b + c \wedge a|b \Rightarrow a|c$
10. $d|a \;\Rightarrow\; (m \cdot d)|(m \cdot a)$
11. $ab|c \Rightarrow a|c \vee b|c$
12. $ab|c \Rightarrow a|c \wedge b|c$
13. $(n \cdot d)|(n \cdot a) \;\Rightarrow d|a$
14. $a|c \vee b|c \Rightarrow ab|c$
15. $a|c \wedge b|c \Rightarrow ab|c$

Welche Aussagen lassen sich leicht umformulieren, so dass sie allgemein gültig werden?

5.3.2. Aufgabe:
Zeigen Sie mit Hilfe der bisher erarbeiteten Regeln die folgenden Implikationen:

1. $4|(2a + 3b) \Rightarrow 4|(2a + 7b)$
2. $6|(5x + 3y) \Rightarrow 2|(5(x + 1) + 5(y - 3))$

5.3.3. Aufgabe:
Zeigen Sie für $n \in \mathbb{Z}$:

- n ist gerade $\Leftrightarrow$ n liefert bei Division durch 2 den Rest 0.
- n ist ungerade $\Leftrightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $n = 2 \cdot k + 1$.

Ggf. auch in der nächsten Übung:

5.3.4. Aufgabe:
Es seien $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass a und b genau dann denselben Rest bei Division durch d liefern, wenn $d|(a-b)$ gilt.

5.3.5. Aufgabe:
Es seien $a, b, d \in \mathbb{Z}$. r_a sei der Rest von a bei Division durch d, r_b sei der Rest von b bei Division durch d.

Zeigen Sie, dass $a + b$ bei Division durch d denselben Rest liefert wie $r_a + r_b$.

6 Teilbarkeit, Teil II

6.1 Folgerungen aus dem Satz von der Division mit Rest

Nachdem wir viel Arbeit in den Satz mit der Division mit Rest gesteckt haben, können wir nun einige Aussagen beweisen (und damit in unsere Theorie aufnehmen), die sonst gar nicht so einfach gewesen wären. Außerdem können wir besser mit Zahlen umgehen, die eben *nicht* durch eine gegebene Zahl teilbar sind, zum Beispiel mit ungeraden Zahlen.

6.1.1. Definition:
Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt *gerade*, wenn es ein $r \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $n = 2r$.
Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt *ungerade*, wenn es ein $r \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $n = 2r + 1$.

6.1.2. Bemerkung:
Der Satz von der Division mit Rest hilft uns, zwei relativ offensichtliche Tatsachen auch in unserer Theorie abzusichern:

- Aufgrund der Existenz einer Zerlegung nach dem Satz von der Division mit Rest (durch 2) können wir schließen, dass jede ganze Zahl gerade oder ungerade sein muss ist. Es kann also keine Zahl geben, die weder gerade noch ungerade ist.
- Aufgrund der Eindeutigkeit dieser Zerlegung können wir schließen, dass keine Zahl sowohl gerade als auch ungerade sein kann.

Wir leiten zwei einfache Folgerungen her, die uns später immer wieder helfen werden. Die zweite Folgerung ist einfach eine Verallgemeinerung der ersten. Wir nutzen den Spezialfall, um die zentrale Idee zu erklären, dann verallgemeinern wir diese Idee.

6.1.3. Korollar:
Von fünf aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist immer eine durch fünf teilbar.

Beweis. Es sei $a \in \mathbb{Z}$ die größte der fünf Zahlen. Die fünf aufeinander folgenden ganzen Zahlen sind dann $a-4, a-3, a-2, a-1, a$.
Nach dem Satz von der Division mit Rest gibt es (eindeutig bestimmte) ganze Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq r < 5$ so dass $a = 5q + r$. Damit ist $a - r = 5q$, also durch 5 teilbar. Weil aber $r \in \{4, 3, 2, 1, 0\}$ ist, ist $a - r$ auch eine unserer fünf Zahlen. $\square$

6.1.4. Korollar:
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Von n aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist immer eine durch n teilbar.

Der Beweis geht - verallgemeinert - genau so wie im Fall $n = 5$.

Beweis. Es sei $a \in \mathbb{Z}$ die größte der n Zahlen. Die n aufeinander folgenden Zahlen sind also alle von der Form $a - s$, wobei $s \in \mathbb{Z}, 0 \leq s < n$.
Nach dem Satz von der Division mit Rest gibt es (eindeutig bestimmte) ganze Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq r < n$ so dass $a = qn + r$. Damit ist $a - r = qn$, also durch n teilbar. Weil aber $0 \leq r < n$ ist, ist $a - r$ auch eine unserer n Zahlen. □

6.2 Teilbarkeitsregeln

ine Möglichkeit, unsere kleine „Theorie der Teilbarkeit“ sinnvoll zu nutzen, ist, die uns bekannten Teilbarkeitsregeln zu beweisen. Sie helfen uns, einzelne Teilbarkeitsaussagen direkt an der dezimalen Zifferndarstellung einer Zahl abzulesen.

6.2.1. Satz:
Eine ganze Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn die aus ihrer Zehner- und Einerstelle gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.

Wir könnten (und müssten) eigentlich noch genauer definieren was die „aus der Zehner- und Einerstelle gebildete Zahl“ eigentlich ist. An dieser Stelle verlassen wir uns aber auf das korrekte Gespür aller Anwesenden und verzichten auf eine exakte Definition.

Beweis. Es sei z eine ganze Zahl. Wir können ohne Einschränkung $z \geq 0$ annehmen, weil $4|z \Leftrightarrow 4|\,|z|$. Es sei a die aus der Zehner- und Einerstelle von z gebildete Zahl. Aufgrund der Struktur des Dezimalsystems (die wir hier nicht genauer diskutieren) finden wir eine Zahl $b \in \mathbb{Z}$, so dass $z = a + 100 \cdot b$.

$\underline{\Rightarrow:}$ Angenommen, 4 ist ein Teiler von z. Da 100 ebenfalls durch 4 teilbar ist, erhalten wir mit 5.1.5, dass auch $a = z - 100 \cdot b$ durch 4 teilbar ist.

$\underline{\Leftarrow:}$ Angenommen, 4 ist ein Teiler von a. Da 4 auch ein Teiler von 100 ist, muss, wieder nach 5.1.5, 4 auch ein Teiler von $z = 100 \cdot b + a$ sein. □

6.2.2. Satz:
Eine ganze Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre Einerstelle durch 2 teilbar ist.

Eine ganze Zahl ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die aus ihrer Hunderter-, Zehner- und Einerstellen gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.

Allgemeiner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: Eine ganze Zahl ist genau dann durch 2^n teilbar, wenn die aus ihren n niedrigwertigsten Ziffern gebildete Zahl durch 2^n teilbar ist.

Beweis. Analog 6.2.1. □

6.2.3. Satz:
Eine ganze Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Eine ganze Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Beweis. Es sei $z \in \mathbb{Z}$. Wieder können wir uns ohne Einschränkung auf den Fall $z \geq 0$ beschränken. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, ..., a_n \in \{0, 1, ..., 9\}$ seien die Dezimalstellen von z, also

$$z = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 100 + ... + a_n \cdot 10^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i$$

Außerdem sei $q = a_0 + a_1 + ... + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ die Quersumme von z. Dann gilt

$$z = q + \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (10^i - 1).$$

Wir sehen vielleicht bereits, wie der Beweis ablaufen wird, nämlich genauso wie oben. Damit das klappt, müssen wir zeigen, dass die zweite Summe immer durch 9 teilbar ist.

Für alle $i \geq 0$ gilt: $10^i - 1 = (10 - 1) \cdot \sum_{k=0}^{i-1} 10^k$. Damit ist die Summe in der Formel oben immer durch 9 (und damit auch durch 3) teilbar. Der weitere Beweis verläuft genauso wie der für 6.2.1. □

Neben den obigen Aussagen gilt auch noch der folgende Satz, den wir ohne Beweis verwenden:

6.2.4. Satz:
Sind $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und sind a und b Teiler von c, so gilt:
Gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ so dass $\alpha a + \beta b = 1$, so folgt auch $a \cdot b | c$.

Das bedeutet also: Wenn wir zwei Teiler einer Zahl gefunden haben, dann können wir schließen, dass auch das Produkt der beiden Teiler die Zahl teilt, *wenn* wir die 1 als Summe von Vielfachen der beiden Teiler darstellen können.

6.2.5. Bemerkung:
Wir sehen uns zwei Beispiele an:

- $a := 3$ und $b := 4$ teilen beide $c := 132$. Es gilt $1 = b + (-1) \cdot a$. Damit können wir schließen, dass auch $12 = ab$ die Zahl 132 teilt. Und in der Tat, das stimmt auch: $132 = 11 \cdot 12$.
- $a := 6$ und $b := 4$ teilen beide $c := 132$. a und b haben allerdings den gemeinsamen Teiler 2. Deshalb gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, dass $2|(\alpha a + \beta b)$ und damit $\alpha a + \beta b \neq 1$.

  Deshalb können wir *nicht* folgern, dass $24 = ab$ die Zahl 132 teilt. Das ist gut, es stimmt nämlich auch nicht: $132 = 5 \cdot 24 + 12$ ist nicht durch 24 teilbar.

Beweis. Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ so dass $a|c$ und $b|c$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, so dass $1 = \alpha a + \beta b$.
Es gibt also $p, q \in \mathbb{Z}$, so dass $c = pa = qb$.
Es folgt $c = c \cdot 1 = c(\alpha a + \beta b) = c\alpha a + c\beta b = qb\alpha a + pa\beta b = ab(q\alpha + p\beta)$. Also $ab|c$. $\square$

6.3 Präsenzübung

6.3.1. Aufgabe:
Beweisen Sie:

- Die Summe von zwei geraden Zahlen ist immer gerade.
- Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer ungerade.
- Das Produkt von zwei ungeraden Zahlen ist immer ungerade.

6.3.2. Aufgabe:
Formulieren und beweisen Sie Teilbarkeitsregeln für die Teilbarkeit durch

- 2
- 8
- $2^n, n \in \mathbb{N}$

6.3.3. Aufgabe:
Untersuchen Sie, für welche $i \in \mathbb{N}$ die folgenden beiden Aussagen gelten

- $11 | 10^i + 1$
- $11 | 10^i - 1$

Formulieren und beweisen Sie Ihre Vermutung!

Hinweis: $10^i + 1 = 11 + 10 \cdot (10^{(i-1)} - 1)$.

6.3.4. Aufgabe:
Für jede Zahl $z \in \mathbb{Z}$ definieren wir die *alternierende Quersumme*:
Ist $z = \pm \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i$ die Dezimaldarstellung von z (d.h. $n \in \mathbb{N}$ und für alle $i = 1, ..., n : a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$), so ist $A(z) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$ die alternierende Quersumme von z.

- Berechnen Sie die alternierende Quersumme für einige ganze Zahlen und prüfen Sie die folgende Behauptung anhand von einigen Beispielen:

  Eine ganz Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

- Beweisen Sie die obige Behauptung.

  Hinweis: 6.3.3, Beweis der Teilbarkeitsregel für 9 bzw. 3.

Ggf. noch fehlende Aufgaben 5.3.4 und 5.3.5.

6.3.5. Aufgabe:
Zeigen Sie: Jede natürliche Zahl liefert bei Division durch 9 denselben Rest wie ihre Quersumme.

Verallgemeinern Sie auf andere Teilbarkeitsregeln!

6.3.6. Aufgabe:
Versuchen Sie eine Regel zu finden, mit der man prüfen kann, ob eine 2-stellige (bzw. 3-stellige,..., beliebige) ganze Zahl durch 7 teilbar ist.

7 Beweistechniken

7.1 Direkter Beweis

Das ist eigentlich die klassische Methode und nebenbei die Grundlage der meisten Beweise. Man setzt eine Aussage P voraus und möchte die Aussage Q beweisen. Dazu sucht man geeignete Aussagen $A_1, A_2, \ldots, A_n$, sodass die Schlusskette $(P \Longrightarrow A_1) \wedge (A_1 \Longrightarrow A_2) \wedge (A_2 \Longrightarrow A_3) \wedge \ldots \wedge (A_n \Longrightarrow Q)$ gültig ist.

7.1.1. Beispiel:
Wenn man zeigen möchte, dass x^2 eine ungerade natürliche Zahl ist, falls $x \in \mathbb{N}$ ungerade ist, so kann man das direkt beweisen.

Behauptung: $x \in \mathbb{N}$ ist ungerade $\Longrightarrow x^2 \in \mathbb{N}$ ist ungerade.

Beweis: $x \in \mathbb{N}$ ist ungerade $\Longrightarrow$ es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $x = 2n+1$, also $x^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2 \cdot (2n^2 + 2n) + 1 \Longrightarrow x^2$ ungerade (weil $2 \cdot (2n^2 + 2n)$ gerade, also $2 \cdot (2n^2 + 2n) + 1)$ ungerade ist).

7.2 o.B.d.A.

In mathematischen Lehrbüchern findet man manchmal die Abkürzung „o.B.d.A.“, was ausführlich „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ gelesen wird. Auch die Abkürzung „o.E. der Allgemeinheit“, gelesen als „ohne Einschränkung der Allgemeinheit“, ist durchaus üblich. Was steckt dahinter? Nun, wenn man o.B.d.A. oder o.E. der Allgemeinheit in einem Beweis verwendet, so bedeutet das immer, dass an irgendeiner Stelle Einschränkungen gemacht werden, diese aber die allgemeine Aussage im Wesentlichen nicht tangieren.

So etwas sollte man nur dann tun, wenn

- ...entweder A sehr einfach aus P folgt,
- ...oder die Implikation $P \wedge \neg A \Rightarrow Q$ sehr ähnlich bewiesen werden kann,
- ...oder auf andere Art und Weise der allgemeine Fall aus dem speziellen abgeleitet werden kann.

Manchmal macht es Sinn in einer kurzen Anmerkung klarzumachen, warum die zusätzliche Annahme A hinzugezogen werden darf.

7.3 Indirekter Beweis (Kontrapositionsbeweis)

Seien P und Q mathematische Aussagen und sei $P \implies Q$ ein korrekter Schluss, dann ist auch $\neg Q \implies \neg P$ ein korrekter Schluss und umgekehrt. Die Aussagen $P \implies Q$ und $\neg Q \implies \neg P$ sind äquivalent. Möchte man den Schluss $P \implies Q$ durch Kontraposition beweisen, so geht man von der Negation der Folgerung Q aus. Ihre Negation $\neg Q$ wird angenommen, daraus wird $\neg P$, also die Negation der Voraussetzung abgeleitet. Ist dieser Schluss gelungen, so hat man damit (auch) die ursprüngliche Behauptung bewiesen.

Indirekte Beweise laufen nach folgendem Schema ab:

- Wir nehmen an, es gelte $\neg Q$ (und bringen dies auch zum Ausdruck!)
- Aus den Aussagen $\neg Q$ (und allen anderen Aussagen unserer Theorie) leiten wir $\neg P$ ab.
- Wegen der oben beschriebenen Äquivalenz dürfen wir dann auch $P \Rightarrow Q$ als bewiesen annehmen.

7.3.1. Beispiel:
Behauptung: Für $a, b \in \mathbb{N}$ sei a+b gerade $\implies$ entweder sind a und b beide gerade oder beide ungerade.

Beweis: Sei o.B.d.A. $a \in \mathbb{N}$ gerade und $b \in \mathbb{N}$ ungerade. Dann ist $a = 2m$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ und $b = 2n + 1$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt $a + b = 2m + 2n + 1 = 2 \cdot (m + n) + 1$. Dann ist aber $a + b$ eine ungerade Zahl.

7.3.2. Bemerkung:
Der Beweis durch Kontraposition hat durchaus ein Äquivalent in der Verwendung von Logik in Alltagssituationen. Nimmt man an, dass ein Herr H. möglicherweise in einen Raubüberfall in Hamburg verwickelt war, so kann man seine direkte Beteiligung leicht ausschließen, wenn man weiß, dass er nicht am Tatort war, sondern etwa eine Opernaufführung in München besucht hat. Konkret: Wir möchten „Herr H. war in München“ $\implies$ „Herr H. war am Raubüberfall unbeteiligt“ zeigen. Wir nutzen zur Argumentation den Umkehrschluss: „Herr H. war nicht unbeteiligt“ $\implies$ „Herr H. war nicht in München (sondern in Hamburg)“. Also: Wäre Herr H. am Raubüberfall beteiligt gewesen, so hätte er nicht in München sein können (was er aber war).

7.4 Beweis durch Widerspruch

Der Beweis durch Widerspruch basiert darauf, dass $P \Longrightarrow Q$ und $\neg\,(P \wedge \neg\,Q)$ äquivalent sind. Man nimmt an, dass P und gleichzeitig $\neg\,Q$ gilt und leitet daraus einen Widerspruch und folglich die Negation der Aussage in der Klammer ab. Gelingt dies, dann ist wiederum die ursprüngliche Behauptung bewiesen.

Ein Beweis der Aussage $P \Rightarrow Q$ durch Widerspruch folgt meist dem folgenden Schema:

- Wir bringen zum Ausdruck, dass der Beweis durch Widerspruch erfolgen soll. Meist schreiben wir einfach: *Widerspruchsannahme:* $\neg Q$.

  Es macht oft Sinn, diese Aussage auch noch einmal deutlich zu formulieren, und insbesondere Umformungsregeln für die Negation und ggf. Quantoren bzw. Junktoren anzuwenden.

- Aus den Aussagen P und $\neg Q$ (und allen anderen Aussagen unserer Theorie) leiten wir eine Aussage ab, die offensichtlich unserer Theorie widerspricht. Wir beweisen also $\neg A$ für irgendeine bereits bewiesene Aussage A. Welche Aussage A wir dazu nehmen ist egal.

- Wir bringen diesen Widerspruch zum Ausdruck durch das Wort *Widerspruch* oder ein Zeichen wie ↯.

Hier bleibt ersteinmal noch nicht definiert, was wir als Widerspruch werten. Beispiele für Widersprüche sind:

- $0 = 1$.
- Es gibt ein x, so dass $x \neq x$.
- $A \wedge \neg A$ für irgendeine Aussage A.
- $A \Leftrightarrow \neg A$ für irgendeine Aussage A.
- ...

7.4.1. Beispiel:
Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist eine gerade Zahl.

Behauptung: $a, b \in \mathbb{N}$ ungerade $\Longrightarrow a + b$ ist gerade.

Beweis: Wir nehmen an, dass $a, b, a + b$ ungerade sind. Ist $a + b$ ungerade, dann ist $a + b = 2n + 1$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}_0$. Entsprechend gilt $a = 2m_1 + 1$ und $b = 2m_2 + 1$ für geeignete $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$, denn a und b sind ungerade. Damit ist $a + b = 2n + 1 = (2m_1 + 1) + (2m_2 + 1)$ und somit $2n + 1 = 2 \cdot (m_1 + m_2) + 2 = 2 \cdot (m_1 + m_2 + 1)$. Es folgt $2 \cdot (m_1 + m_2 + 1) - 2n = 2 \cdot (m_1 + m_2 + 1 - n) = 1$. Dann wäre aber 1 eine gerade Zahl und das ist nicht möglich.

Soweit das methodische Vorgehen. Warum ist das nun ein gültiges Beweisprinzip?

7.4.2. Bemerkung:
Begründung für das Prinzip des Beweises durch Widerspruch

Die Idee des Beweises durch Widerspruch beruht auf der eben überlegten Äquivalenz. Anstelle von $P \Rightarrow Q$ zeigen wir also zunächst $\neg(P \wedge \neg Q)$.

Und wie zeigen wir die Verneinung einer Aussage, also dass eine Aussage nicht gilt? Wir führen diese Aussage zum Widerspruch. Wir zeigen also $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg A$ für irgendeine bereits bewiesene Aussage unserer Theorie. Welche Aussage wir für A nehmen ist egal.

Wenn wir das erreicht haben, dann gilt (siehe indirekter Beweis) auch $A \Rightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$, also haben wir $\neg(P \wedge \neg Q)$ bewiesen, weil ja A bereits bewiesen ist.

Wegen der Äquivalenz von $\neg(P \wedge \neg Q)$ und $P \Rightarrow Q$ ist damit auch letzteres bewiesen.

7.4.3. Bemerkung:
Auch Beweise durch Widerspruch sind aus der Argumentation in Alltagssituationen durchaus bekannt. Um zu beweisen, dass Herr H. nicht der Täter bei einem Raubüberfall in Hamburg war, weil er zur gleichen Zeit bei einer Opernaufführung in München war (also: „Herr H. war in München“ $\Longrightarrow$ „Herr H. war am Raubüberfall unbeteiligt“), kann man so argumentieren: Angenommen Herr H. wäre der Täter, dann folgt daraus, dass er in Hamburg war. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass er in München war. Folglich war unsere Annahme, Herr H. wäre der Täter, falsch. Herr H. muss also unschuldig sein. Diese Argumentation ist der beim Beweis durch Kontraposition verwendeten (s. oben) sehr ähnlich.

7.5 Beweis durch Fallunterscheidung

Bei mathematischen Beweisen ist die Fallunterscheidung ein häufig genutztes Mittel, um die Komplexität zu reduzieren. Manchmal sind die verschiedenen Fälle ganz unterschiedlich zu sehen, manchmal kann man einen Fall sogar als Zwischenergebnis nutzen.

Diese Beweismethode für eine Implikation $P \Rightarrow Q$ folgt dem Schema:

- Wir finden Aussagen $P_1, ..., P_n$ so dass $P = P_1 \vee ... \vee P_n$.
- Wir beweisen $\forall n \in \{1, ..., n\}\ P_i \Rightarrow Q$

Das Finden von Aussagen $P_1, ..., P_n$ ist oft eine Frage der Kreativität. Oft nimmt man P_1 und $\neg P_1$, aber auch andere Zusammensetzungen kommen vor. Auf jeden Fall sollte man prüfen, dass die betrachteten Fälle die ganze Aussage P abdecken.

Ab und an kommt es vor, dass man im Beweisprozess einer der Fälle zum Widerspruch führt (d.h. der Fall kann nicht eintreten). Dann wird man diesen Spezialfall ggf. vorher ausschließen (z.B. o.B.d.A. kann ... angenommen werden).

7.5.1. Beispiel:
Behauptung: Zu zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt es immer eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{Z}$, sodass $x = q \cdot y + r$ und $0 \leq r < y$ ist („Satz von der eindeutigen Division mit Rest“).

Beweis: Fall 1: $x \geq 0$: Dann... (siehe Beweis oben).
Fall 2: $x < 0$. Dann ist $-x > 0$, also gibt es (Fall 1) $q, r \in \mathbb{Z}$, sodass $-x = q \cdot y + r$ und $0 \leq r < y$. Dann folgt $x = -q \cdot y - r = (-q-1) \cdot y + (y - r)$ und es ist $0 \leq y - r < y$, also gibt es auch in diesem Fall eine solche Zerlegung.

7.6 Zyklischer Beweis der Äquivalenz mehrerer Aussagen

Oft sind Sätze in der folgenden Form formuliert:

„Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- A_1
- A_2
- ...
- A_n“

Solche Aussagen lassen sich beweisen, in dem man die folgenden Aussagen zeigt:

- $A_1 \Rightarrow A_2$
- $A_2 \Rightarrow A_3$
- ...
- $A_{n-1} \Rightarrow A_n$
- $A_n \Rightarrow A_1$

Offensichtlich kann man über die Transitivität der Implikation für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$ die Aussage $A_i \Rightarrow A_j$ aus diesen Aussagen ableiten. Damit gilt auch: $A_i \Leftrightarrow A_j$

7.6.1. Beispiel:
Mit $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(1) p hat genau die beiden Teiler 1 und p .

(2) Falls $a, b \in \mathbb{N}$ und p Teiler von ab ist, dann gilt $p|a$ oder $p|b$.

(3) Für $a, b \in \mathbb{N}$ folgt aus $p = ab$ stets $a = 1$ oder $b = 1$.

Beweis: Leider ist dieses Beispiel nicht ganz einfach zu zeigen. Man muss im Prinzip drei Schritte erledigen: (1) $\Longrightarrow$ (2), (2) $\Longrightarrow$ (3) und (3) $\Longrightarrow$ (1).

7.6.2. Beispiel:
Mit $n \in \mathbb{N}$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(1) n ist ungerade

(2) n^2 ist ungerade.

(3) $n + 1$ ist gerade.

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2) siehe Beweis 6.1.1
(2) $\Longrightarrow$ (3): n^2 ungerade $\Rightarrow n^2 - 1$ gerade $\Rightarrow (n-1)(n+1)$ gerade. Da $(n-1)$ und $(n+1)$ beide entweder ungerade oder gerade sind (Differenz 2) und ihr Produkt gerade ist, müssen beide gerade sein $\Rightarrow (n+1)$ gerade.
(3) $\Longrightarrow$ (1) trivial.

7.7 Sonstige Beweistricks

7.7.1. Bemerkung:
Es gelten für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ und alle Zahlen $b, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{7.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(b \cdot a_i) = b \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{7.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i \tag{7.3}$$

7.7.2. Beispiel:
Formel von Gauß (eine von vielen)
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

7.8 Präsenzübung

7.8.1. Aufgabe:
Lesen Sie sich noch einmal den Abschnitt zum Beweis durch Fallunterscheidung durch (ggf. anschreiben oder projizieren).
Welche Aussagen werden eigentlich bewiesen? Welche Umformungsregel für Junktoren ist notwendig, um wirklich auf $P \Rightarrow Q$ schließen zu können?

7.8.2. Aufgabe:
Überlegen Sie sich einen einfacheren Ausdruck für

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b) = ...$$

7.8.3. Aufgabe:
Beweisen Sie die Formel aus 7.7.2.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle für gerades und ungerades n (also $n = 2k$ bzw. $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$). Zerlegen Sie die Summe jeweils in die ersten $2k$ und die letzen $2k$ Summanden und ggf. einen weiteren einzelnen Summanden.

Überlegen Sie sich ggf. erst einen Beweis mit Hilfe von Pünktchen (heuristisches Werkzeug).

7.8.4. Aufgabe:
m Beweis zu 8.3.2 werden wir - nach einer Widerspruchsannahme - eine Aussage der Form $P \Leftrightarrow \neg P$ zeigen und dies als Widerspruch bezeichnen (was intuitiv ja wirklich Sinn macht). Inwiefern passt das in das Beweisschema des Widerspruchsbeweises, wie es in der Vorlesung beschrieben wurde?

Hinweis: Untersuchen Sie die Wahrheitswerte von $(A \Leftrightarrow \neg A) \Rightarrow B$. Welche Aussagen sollte man für A und B einsetzen um das Schlussschema anwenden zu können?

7.8.5. Aufgabe:
Beweisen Sie - unter Nutzung der Summenschreibweise - die folgende Formel für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Hinweis: Zuerst die Gleichung etwas umformen.

8 Mengen

Ein grundlegender Teil der Sprache der Mathematik ist der Begriff der Menge sowie der eng damit zusammengehörigen Konzepte.

8.1 Grundbegriffe

Georg Cantor, der Begründer der Mengenlehre und damit einer der Mitbegründer der modernen Mathematik, hat Ende des 19. Jahrhunderts folgende intuitive Beschreibung des Mengenbegriffs gegeben:

> *„Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen."*
>
> Georg Cantor

8.1.1. Begriffsklärung:
Wir verstehen den Begriff der **Menge** hier zunächst im Sinne Cantors.

Ist M eine Menge und x ein Element von M, so schreiben wir
$x \in M$ (**Elementrelation**).

Ebenso wie der Begriff der Aussage lässt sich der Mengenbegriff immer nur umschreiben, aber nicht im üblichen Sinne definieren. Auch die Mathematik muss auf irgendwelchen Grundbegriffen aufbauen und der Mengenbegriff hat sich hier gut bewährt. Alle anderen mathematischen Begriffe lassen sich mit Hilfe des Mengenbegriffs definieren, seien es Zahlen (jeglicher Art), Funktionen, geometrische Räume,...

Zunächst einmal werden wir uns der Frage widmen, wann zwei Mengen gleich sind - analog zu der in Kapitel 3 betrachteten Frage, wann eigentlich zwei Aussagen als gleichwertig zu betrachten sind.

8.2 Extensionalität

Das sogenannte **Extensionalitätsprinzip** besagt – als ein Axiom der Mengenlehre – genau das, was wir intuitiv annehmen würden:

8.2.1. Begriffsklärung:
Haben zwei Mengen dieselben Elemente, so sind sie gleich.

In Quantorensprache formuliert liest sich dieses Prinzip so:

$$\forall x\,\forall y\ \ (\forall z\ \ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)\ \ \Rightarrow\ \ x = y)$$

Dabei folgen wir der (für dieses Kapitel gültigen) Konvention, dass alle betrachteten Objekte Mengen sind. In der Tat ist die Konstruktion aller mathematischen Objekte so, dass sie sich bei genauerer Betrachtung als Mengen erweisen.

$$\forall x\,\forall y\,(x = y\ \ \Rightarrow\ \ (\forall z:\ z \in x \Leftrightarrow z \in y))$$

Diese Implikation gilt aus rein logischen Gründen: Wenn zwei Objekte gleich sind, dann stimmen sie in allen Eigenschaften überein, insbesondere also auch (als Mengen) in ihren Elementen.

8.2.2. Bemerkung:
Das Extensionalitätsprinzip hat zur Folge, dass Reihenfolge und Wiederholungen bei der Mengenbildung keine Rolle spielen.

8.2.3. Beispiel:
Beispiele zur Mengengleichheit

- $\{1, 2\} = \{2, 1\}$
- $\{1, 1, 1, 1, 2\} = \{1, 2\}$
- $\{1, 3, 2, 5, 3, 4\} = \{2, 5, 3, 2, 1, 4\}$

8.2.4. Definition:
Für alle Mengen A, B definieren wir:

- **Teilmenge**: $A \subset B\ \ :\Leftrightarrow\ \ \forall a \in A\ a \in B$
- **echte Teilmenge**: $A \subsetneq B\ \ :\Leftrightarrow\ \ A \subset B \wedge A \neq B$
- **Obermenge**: $A \supset B\ \ :\Leftrightarrow\ \ B \subset A$
- **echte Obermenge**: $A \supsetneq B\ \ :\Leftrightarrow\ \ B \subsetneq A$

8.2.5. Definition:
Sei $\mathscr{E}(x)$ eine Eigenschaft. Wir definieren, wenn es eine solche Menge gibt, das Symbol

$$\{x \mid \mathscr{E}(x)\}$$

als die Menge aller Objekte x mit der Eigenschaft $\mathscr{E}(x)$. Diese Menge heißt dann die zu $\mathscr{E}(x)$ gehörige **Mengenkomprehension**.

8.2.6. Bemerkung:
Ist $M = \{x \mid \mathscr{E}(x)\}$, dann gilt nach Definition offensichtlich:

$$\forall x \ \ (x \in M \Leftrightarrow \mathscr{E}(x))$$

Was zunächst etwas eigenartig anmutet ist der Zusatz „wenn es eine solche Menge gibt“. Der Grund für diesen Zusatz ist, dass es eben nicht immer möglich ist, jede „Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens“ zu „einem Ganzen“ zusammenzufassen. Es gibt Eigenschaften, die nicht zu einer Menge führen, wie wir gleich sehen werden.

8.3 Russell-Zermelo-Paradoxon

Wir werden uns überlegen, dass es keine Menge

$$K = \{x \mid x \notin x\}$$

geben kann.

Das Argument, das genau dies zum Widerspruch führt, lässt sich vielleicht an einer kleinen Metapher veranschaulichen.

8.3.1. Beispiel:
Russells Dorfbarbier

Wir stellen uns ein Dorf vor, in dem auch ein Barbier lebt. Dieser behauptet (z.B. auf seiner Werbetafel): „Ich schneide genau den Dorfbewohnern die Haare, die sich nicht selbst die Haare schneiden“.

Die Menge K oben entspricht dem „Kundenkreis“ des Barbiers (nämlich den Bewohnern, die sich nicht selbst die Haare schneiden).

Selbst wenn wir dem Barbier gerne glaube möchten, führt seine Aussage zwingend zu einem Widerspruch, wenn wir uns die Frage stellen „Wer schneidet dem Dorfbarbier die Haare?“. Etwas formaler ausgedrückt sagt der Dorfbarbier

$$\forall x \text{ (Der Barbier schneidet } x \text{ die Haare } \Leftrightarrow \ x \text{ schneidet } x \text{ nicht die Haare)}$$

wobei für x alle Dorfbewohner als Einsetzungen erlaubt sind.

Da auch der Barbier ein Dorfbewohner ist, dürfen wir ihn für x einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \text{Der Barbier schneidet dem Barbier die Haare} &\quad\Leftrightarrow \\ \text{Der Barbier schneidet dem Barbier nicht die Haare} & \end{aligned}$$

Das ist nun offensichtlich ein Widerspruch.

8.3.2. Satz:
Die Eigenschaft $\mathscr{B}(x):\ x \notin x$ führt über Komprehension nicht zu einer Menge.

Beweis. Wir können eine ähnliche Argumentation wie beim Barbier anwenden. Angenommen es gäbe eine durch Komprehension mit $\mathscr{B}(x)$ gebildete Menge

$$K := \{x \mid x \notin x\}$$

Nach 8.2.6 gilt damit als Aussage über die Menge K:

$$\forall x \ \ (x \in K \Leftrightarrow x \notin x)$$

Wir setzen für x die Menge K selbst ein und erhalten (als logisch abgeleitete Aussage):

$$K \in K \Leftrightarrow K \notin K$$

Das ist offensichtlich ein Widerspruch. □

8.3.3. Bemerkung:
Offenbar müssen wir also bei der Bildung von Mengen durch Mengenkomprehension vorsichtig sein. In der alltäglichen mathematischen Arbeit gibt es allerdings eine erhebliche Erleichterung, denn meist werden sowieso Aussagen über Elemente einer bereits gegebenen Menge betrachtet, also Aussagen der Form

$$\mathscr{E}(x) : x \in M \wedge ...,$$

wobei M eine Menge ist. In all diesen Fällen ergibt die Komprehension immer eine Menge.

Dennoch bleiben prinzipielle Einschränkungen bei der Bildung von Mengen. Bespielsweise ist es aus genau den oben genannten Gründen nicht (widerspruchsfrei) möglich, die „Menge aller Mengen“ oder z.B. die „Menge aller Vektorräume“ (o.ä.) zu bilden.

8.4 Einfache Mengenbildungen

Wir sind gewohnt, Mengen auch durch einfache Aufzählungen von (endlich vielen) Elementen angeben zu können. Diese Schreibweisen lassen sich aufbauend auf unserem bisherigen Mengenverständnis recht leicht definieren.

8.4.1. Definition:
Wir definieren:

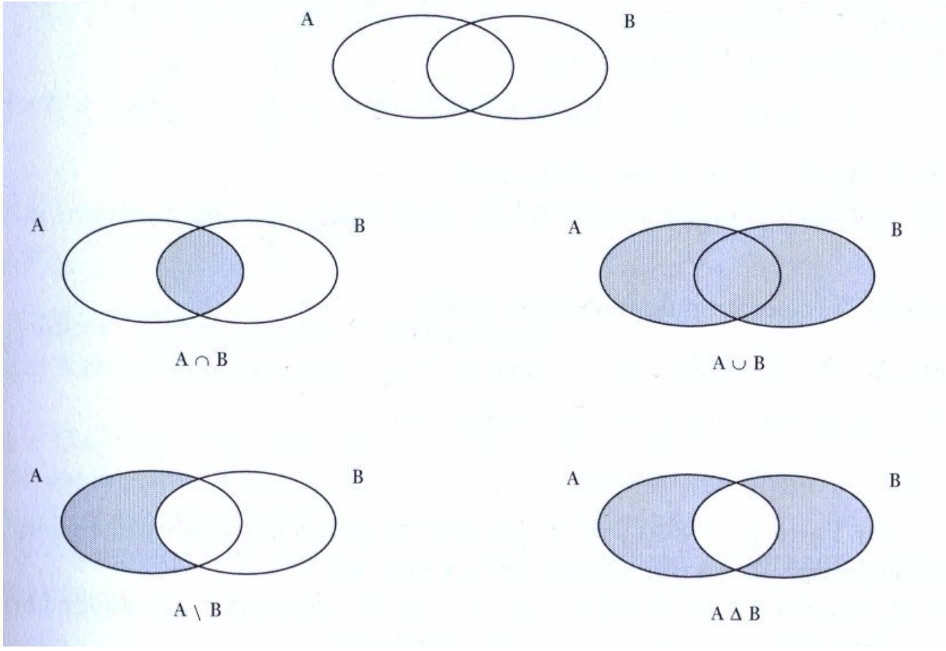
- $\varnothing := \{x | x \neq x\}$
- $\{a\} := \{x | x = a\}$
- $\{a_1, ..., a_n\} := \{x | x = a_1 \vee ... \vee x = a_n\}$

8.4.2. Beispiel:
Entscheiden Sie, ob es sich um Mengen handelt oder nicht:

1. $\mathbb{N}$
2. $M = \{\text{Alle Studierende der TU München.}\}$
3. $M = \{1, 2, 3, 3, 4\}$
4. Alle Menschen dieser Welt.
5. $M = \{\text{rot, gelb, blau}\}$
6. $M = \{1, 2, 3, ...\}$
7. Alle gleichseitigen Vielecke in der Ebene.
8. $\mathbb{Q}$
9. $\varnothing$
10. $M = \{\text{Dreieck}, \text{Viereck}, \text{Fünfeck}, \text{Sechseck}, ...\}$
11. $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ist stetig}\}$
12. Die Menge aller Kleidungsstücke bei H&M.
13. Die Menge aller Mengen.

8.4.3. Definition:
Für alle Mengen A, B setzen wir:

- **Vereinigung:** $A \cup B := \{a | a \in A \vee a \in B\}$
- **Schnitt:** $A \cap B := \{a | a \in A \wedge a \in B\}$
- **Differenz:** $A \setminus B := \{a | a \in A \wedge a \notin B\}$
- **Symmetrische Differenz:** $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



[1]

Ein zur Konstruktion neuer mathematischer Objekte häufig benötigter Mengentyp ist die Menge der geordneten Paare (a, b), wobei $a \in, b \in B$ aus zwei Mengen A, B sind. Diese Menge nennt man das **kartesische Produkt von** A **und** B und man schreibt dafür $A \times B$.

Natürlich könnte man sich auf den Standpunkt stellen, dass ein geordnetes Paar ein „Objekt unserer Anschauung oder unseres Denkens“ ist, und damit diese Menge nach der Definition Cantors als gegeben betrachten. Unschön wäre dabei aber, dass man wieder einen neuen Typ von Objekt undefiniert einführen müsste. Wir werden uns etwas besseres überlegen

8.4.4. Beispiel:
Ein Beispiel für die Bildung eines neuen Objekts in Form von geordneten Paaren ist die Bildung der euklidischen Ebene (d.h. die Ebene, in der sich die übliche Schulgeometrie abspielt). Dazu nutzen wir (als reine Vorüberlegung), dass wir jeden Punkt dieser Ebene durch seine zwei Koordinaten beschreiben können[2], wenn wir zwei zueinander senkrechte Achsen (wir nennen sie einmal X-Achse und Y-Achse) gewählt haben. So definieren wir:

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

[1]Quelle: Deiser, 2010
[2]ehrlicher: Das wollen wir können, wenn wir den Begriff der Ebene definiert haben. Und dann machen wir uns die Definition eben so, dass das sicher klappt.

Offensichtlich muss hier die Reihenfolge der beiden Teile im Paar eine Rolle spielen, weil sich z.B. der Punkt $(1, 7)$ vom Punkt $(7, 1)$ unterscheiden soll.

Nun aber zur Definition des Begriffs *geordnetes Paar*.

8.4.5. Bemerkung:
Für geordnete Paare sollten (mindestens) die folgenden Eigenschaften gelten:

- $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ und $b = d$.
- Insbesondere $(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b$.

Mit den uns zur Verfügung stehenden Begriffen können wir $A \times B$ definieren.

8.4.6. Definition:
Für alle a, b setzen wir $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Darauf aufbauend definieren wir für alle Mengen A, B:

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

Dass unsere Definition in der Tat die Forderungen aus der Bemerkung erfüllt, werden Sie sich in der Präsenzübung überlegen.

8.5 Präsenzübung

8.5.1. Aufgabe:
Cantors Definition des Mengenbegriffs enthält verschiedene Forderungen, die gemeinsam erfüllt sein müssen, um ein Objekt als Menge zu identifizieren:

- Die betrachteten Objekte müssen „wohlunterschieden" sein.
- Die betrachteten Objekte müssen „bestimmt" sein.

Versuchen Sie „Zusammenfassung von Objekten Ihrer Anschauung" zu finden, die jeweils eine der beiden bzw. beide Forderungen nicht erfüllen.

8.5.2. Aufgabe:
Wir überprüfen, ob unsere Definition eines „geordneten Paares" unsere obige Forderung erfüllt.

Zeigen Sie, dass für alle a,b,c,d gilt:

$$(a, b) = (c, d) \;\Leftrightarrow\; a = c \wedge b = d$$

8.5.3. Aufgabe:
Zeigen Sie für alle Mengen A, B:

$$A = B \;\Leftrightarrow\; A \subset B \wedge B \subset A$$

8.5.4. Aufgabe:
Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass für alle Mengen A, B, C gilt:

1. $A\Delta B = B\Delta A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
2. $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$
3. $(A\Delta B) \cup C = (A \cup C)\Delta(B \cup C)$
4. $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$
5. ...finden Sie selbst weitere Beispiele.

Nutzen Sie ggf. Venn-Diagramm als Hilfe.

8.5.5. Aufgabe:
Überlegen Sie sich einen Zusammenhang zwischen den Regeln für Junktoren und Rechenregeln für Mengenverknüpfungen. Wo sehen Sie Analogien, wo können Sie keine Beziehungen herstellen?

Finden und beweisen Sie jeweils alternative Formen für die folgenden Mengenverknüpfungen, wobei $P, Q \subset M$

1. $(A \cup B) \cup C$

2. $(A \cap B) \cap C$
3. $(A \cup B) \cap C$
4. $(A \cap B) \cup C$
5. $M \setminus (P \cap C)$
6. $M \setminus (P \cup C)$

Nutzen Sie ggf. Venn-Diagramme als Hilfe.

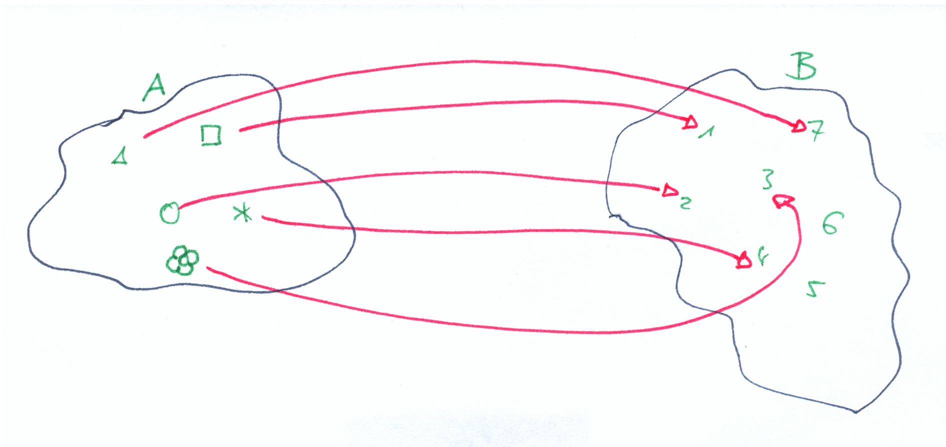
8.5.6. Aufgabe:
Untersuchen Sie, analog zu den obigen Aufgaben, die Beziehungen zwischen dem „kartesischen Produkt“ und den anderen Mengenverknüpfungen.

z.B. $A \times (B \Delta C) = ...?$

9 Abbildungen

9.1 Begriffsklärung

Der Begriff der **Abbildung** ist eng mit dem aus der Schule wohlbekannten Begriff der Funktion verwandt. In der Mathematik werden die beiden Begriffe oft (fast) austauschbar verwendet, aber während eine Funktion meist mit Zahlenmengen wie $\mathbb{R}$ zu tun hat, spricht man auch von Abbildungen, wenn andere Mengen beteiligt sind.



Genauer betrachtet würden wir den Begriff der Abbildung also gerne in etwa so definieren:

9.1.1. Begriffsklärung:
Sind A und B Mengen, so nennen wir eine Zuordnung, die *jedem Element* von A *genau ein Element* von B zuordnet eine Abbildung.

Wir fordern also zwei Dinge: Jedem Element von A muss erstens ein Element von B zugeordnet werden. Zweitens soll dies in eindeutiger Weise geschehen. Also darf es kein Element von A geben, dem zwei oder mehr Elemente zugeordnet werden.

Eine formale Definition ist möglich, wenn man für den Begriff der *Zuordnung* auf den bereits definierten Begriff der *geordneten Paare* zurückgreift.

9.1.2. Definition:
Es seien A und B Mengen. Eine Teilmenge $f \subset A \times B$ heißt *Abbildung von A nach B*, wenn gilt:

$$\text{Für alle } a \in A \text{ gibt es genau ein } b \in B, \text{ so dass } (a, b) \in f.$$

In diesem Fall schreiben wir kurz $f : A \to B$ für „f ist eine Abbildung von A nach B".
Außerdem schreiben wir anstelle von $(a, b) \in f$ kürzer (und vertrauter): $f(a) = b$.

Im Endeffekt ist eine Abbildung nach unserer Definition nichts anderes als eine vollständige Auflistung (als Menge) von Paaren

$$(\text{Element aus A}, \text{zugehöriger Funktionswert}).$$

So haben wir den Begriff der *Zuordnung* relativ elegant in den Griff bekommen: Wenn wir ein Element $a \in A$ haben, suchen wir in der Menge f ein Paar, das mit a anfängt (es gibt ein solches, und zwar genau eines) und nehmen für $f(a)$ das zweite Element des Paares. Schön, oder?

9.1.3. Beispiel:
Für jede Menge A gibt es eine besonders einfache Abbildung $\mathrm{id}_A : A \to A, x \mapsto x$. Sie heißt die **Identität auf A**.

9.2 Definition von Abbildungen

Um konkrete Abbildungen zu definieren gibt es mehrere Möglichkeiten. Allen gemeinsam ist, dass unbedingt auch die beiden beteiligten Mengen angegeben werden müssen! Sonst ist es schon alleine schwer zu prüfen, ob wir wirklich eine Abbildung definiert haben.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Abbildung $P \to Q$ für Mengen P, Q zu definieren. In jedem Fall muss man die *Wohldefiniertheit* dieser Abbildung zeigen, d.h. man muss die Unabhängigkeit von der Wahl der Repräsentanten zeigen.

Möglichkeit 1: Angabe einer Zuordnungsvorschrift: Diese Version werden Sie wahrscheinlich kennen. Oft gibt es eine Rechenvorschrift, mit der man für jedes Element von P das zugehörige Element von Q berechnen kann.

9.2.1. Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2 \cdot \sin(x + 3)$$

Wir schreiben auch *x wird abgebildet auf...*:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2 \cdot \sin(x + 3)$$

Wir können dabei auch verschiedene Fälle unterscheiden:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{falls } x > 1 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Möglichkeit 2: Direkte Angabe der Zuordnungen: Bei endlichen Mengen können wir auch für jedes Element von P angeben, auf welches Element von Q es abgebildet werden soll. Möglichkeiten sind hier Tabellen, aber auch Bilder wie das obige.

Weitere Möglichkeiten: Um eine Abbildung zu definieren ist es nicht notwendig eine Abbildungsvorschrift anzugeben. Es muss nur klar sein, dass das Zielelement eindeutig bestimmt ist. Es ist nicht einmal notwendig, eine nachvollziehbare Vorschrift anzugeben, nach der man die zugeordneten Elemente finden kann.

9.2.2. Beispiel:

$$p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \to p(x), p(x) \text{ ist die zu x nächst größere Primzahl}$$

9.3 Verknüpfung von Abbildungen

Eine schöne Eigenschaft von Zuordnungen ist, dass man sie kombinieren kann. Hat man zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$, so kann man die Verkettung (Komposition der beiden Abbildungen bilden, indem man zuerst f auf ein Element von A anwendet und dann g auf das Ergebnis anwendet.

9.3.1. Definition:
Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen, so definieren wir eine Funktion

$$g \circ f : A \to C \quad a \mapsto g(f(a))$$

Wir sagen statt $g \circ f$ auch „g nach f“.

Mit dieser Definition haben wir eine neue Verknüpfung definiert, die wir nun selbst auf Eigenschaften untersuchen können. Eine interessante Frage ist, wann man eine Zuordnung „umdrehen“ darf. Dieses Umkehren versucht die folgende Definition genauer zu fassen:

9.3.2. Definition:
Es seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung.
Wir nennen f **umkehrbar** oder invertierbar, falls es eine Abbildung $g : B \to A$ gibt, so dass gelten:

$$\begin{aligned} & g \circ f = \mathrm{id}_A, \quad \text{d.h. } \forall a \in A \; g(f(a)) = a \\ \text{und} \quad & f \circ g = \mathrm{id}_B, \quad \text{d.h. } \forall b \in B \; f(g(b)) = b \end{aligned}$$

In diesem Fall nennen wir g die **inverse Abbildung** oder **die Umkehrabbildung** zu f und schreiben dafür auch f^{-1}.

9.4 Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Im Folgenden werden wir einige Eigenschaften von Abbildungen einführen, die zu den Grundbegriffen der Mathematik gehören. Sie werden Ihnen immer wieder begegnen. Wir werden hier zunächst nur die Definitionen angeben. Genauere Untersuchungen werden Sie in der Übung anstellen.

9.4.1. Definition:
Es seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung.

- f heißt **injektiv**, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ mit $f(a_1) = f(a_2)$ auch $a_1 = a_2$ folgt.
- f heißt **surjektiv**, wenn es für alle $b \in B$ (mindestens) ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$.
- f heißt **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

9.5 Bijektivität und Umkehrbarkeit

Die Begriffe *injektiv*, *surjektiv*, *bijektiv* und *umkehrbar* hängen sehr eng zusammen, wie der folgende Satz zeigt:

9.5.1. Satz:
Sind A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung, so sind äquivalent:

- f ist bijektiv
- f ist umkehrbar

Beweis. $\Rightarrow$: Es sei f bijektiv. Für jedes $b \in B$ gibt es also ein Element aus A, das unter f auf b abgebildet wird. Dieses Element nennen wir jeweils (für jedes $b \in B$) a_b. Da f injektiv ist, ist für jedes $b \in B$ dieses Element $a_b \in A$ eindeutig bestimmt

und es gilt $f(a_b) = b$.
Wir definieren $g : B \to A$ für alle $b \in B$ durch $g(b) := a_b$.
Dann gilt für alle $b \in B$: $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a_b) = b$, als $f \circ g = \mathrm{id}_B$.
Außerdem gilt für alle $a \in A$: $f(a) = (f \circ g)(f(a)) = f(g(f(a))$. Da f injektiv ist folgt damit aber $a = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$. Also $g \circ f = \mathrm{id}_A$.
Damit ist f umkehrbar.

$\Leftarrow$: Es sei f umkehrbar und $g : B \to A$ sei die Umkehrabbildung, d.h. $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$.
f ist injektiv: Sind $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$, so ist $g(f(x)) = g(f(y))$, also $x = y$.
f ist surjektiv: Ist $b \in B$, so sei $a := g(b)$. Dann gilt $f(a) = f(g(b)) = b$. □

Die Charakterisierung von *umkehrbar* über die Eigenschaften injektiv und surjektiv ist sehr hilfreich, wenn es einmal schwierig ist eine Umkehrabbildung explizt anzugeben. Injektivität und Surjektivität zu prüfen ist dann oft - aber bei Weitem nicht immer - leichter zu prüfen.

9.5.2. Satz:
Sind A, B, C Mengen und $f : A \to B, g : B \to C$ Abbildungen, so gelten:

- f, g bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv.
- f, g umkehrbar $\Rightarrow g \circ f$ umkehrbar.

Beweis. Nach dem Satz zuvor beweisen wir o.B.d.A. nur die zweite Aussage.
Sind f, g umkehrbar, so gibt es Abbildungen $\hat{f} : B \to A$ und $\hat{g} : C \to B$ mit $f \circ \hat{f} = \mathrm{id}_B, \hat{f} \circ f = \mathrm{id}_A$ und $g \circ \hat{g} = \mathrm{id}_C, \hat{g} \circ g = \mathrm{id}_B$.
Es gilt: $(g \circ f) \circ (\hat{f} \circ \hat{g}) = g \circ (f \circ \hat{f}) \circ \hat{g} = g \circ \mathrm{id}_A \circ \hat{g} = \mathrm{id}_B$
sowie: $(\hat{f} \circ \hat{g}) \circ (g \circ f) = \hat{f} \circ (\hat{g} \circ g) \circ f = \hat{f} \circ \mathrm{id}_B \circ \hat{g} = \mathrm{id}_A$.
Damit ist $\hat{f} \circ \hat{g}$ eine Umkehrabbildung zu $g \circ f$. □

9.5.3. Bemerkung:
Die Umkehrungen

- $g \circ f$ bijektiv $\Rightarrow f, g$ bijektiv.
- $g \circ f$ umkehrbar $\Rightarrow f, g$ umkehrbar.

sind jeweils nicht wahr, wie man leicht durch (ein!) Gegenbeispiel belegen kann.

9.6 Präsenzübung I

9.6.1. Aufgabe:
Rufen Sie sich die Begriffe in Erinnerung, die in der Vorlesung über Abbildungen definiert wurden.
Versuchen Sie die dazugehörigen Definitionen zu reproduzieren (aus dem Kopf).

9.6.2. Aufgabe:
Betrachten Sie die Funktionen (auch Abbildungen)

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad & x \mapsto 2x + 4 \\ i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad & x \mapsto 3x + 7 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie Funktionsterme für die Abbildungen $i \circ h$ und $h \circ i$. Was fällt Ihnen auf?

9.6.3. Aufgabe:
Wählen Sie sich jeweils zwei endliche Mengen A, B und versuchen Sie je eine Zuordnung $A \to B$ zu finden, die...

- ...injektiv, aber nicht surjektiv ist.
- ...surjektiv, aber nicht injektiv ist.
- ...bijektiv ist.
- ...nicht jedem Element von A ein Element von B zuordnet.
- ...nicht eindeutig ist.
- ...weder injektiv noch surjektiv ist.

Begründen Sie jeweils!

An welchen Stellen der Bilder sehen Sie jeweils, dass...

- ...eine Abbildung (nicht) injektiv ist?
- ...eine Abbildung (nicht) surjektiv ist?
- ...eine Zuordnung (nicht) eindeutig ist?
- ...eine Zuordnung (nicht) jedem Element der Ursprungsmenge etwas zuordnet?

9.6.4. Aufgabe:
Zeichnen Sie das Pfeilbild für eine umkehrbare Abbildung zwischen zwei endlichen Mengen.

Tauschen Sie Ihr Bild mit dem Ihres Nachbarn aus und zeichnen Sie zu seiner Abbildung die Umkehrabbildung (wenn möglich).

9.7 ggf. Präsenzübung II

9.7.1. Aufgabe:
Versuchen Sie jeweils eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zu finden, die

- ...injektiv, aber nicht surjektiv ist.
- ...surjektiv, aber nicht injektiv ist.
- ...bijektiv ist.
- ...weder injektiv noch surjektiv ist.

Begründen Sie jeweils!

9.8 ggf. Präsenzübung III

9.8.1. Aufgabe:
Es sei A eine Menge. Zeigen Sie, dass id_A injektiv, surjektiv, bijektiv und umkehrbar ist.

9.8.2. Aufgabe:
Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ umkehrbare Abbildungen. Ist $g \circ f$ umkehrbar? Wenn ja, was können Sie über die Umkehrabbildung sagen?

9.8.3. Aufgabe:
Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie möglichst viele der folgenden Aussagen:

1. Ist $g \circ f$ injektiv, so auch f.
2. Ist $g \circ f$ injektiv, so auch g.
3. Sind g und f injektiv, so auch $g \circ f$.
4. Ist f injektiv, so auch $g \circ f$.
5. Ist g injektiv, so auch $g \circ f$.

Sie können sich diese Fragen auch für die Begriffe *surjektiv*, *bijektiv* und *umkehrbar* stellen.

9.8.4. Aufgabe:
Welche weiteren Eigenschaften wie z.B. injektiv, surjektiv, bijektiv hat jede umkehrbare Abbildung? Stellen Sie Vermutungen auf und versuchen Sie diese zu beweisen.

Hinweis: Siehe 9.8.1, 9.8.3

9.8.5. Aufgabe:
Zeigen Sie: Jede umkehrbare Abbildung ist bijektiv.

Hinweis: Siehe 9.8.1, 9.8.3 für injektiv. Surjektiv geht genauso.

9.8.6. Aufgabe:
Zeigen Sie: Jede bijektive Abbildung ist umkehrbar.

10 Abzählbarkeit

Die zentrale Frage, die über diesem letzten Kapitel steht, ist die folgende: „Wie beschreibt man am besten die Anzahl der Elemente einer Menge?“. Für endliche Mengen ist das relativ klar, denn durch Zählen der Elemente (so wie wir das als Kinder gelernt haben) bekommt man eine natürliche Zahl, die die Anzahl der Elemente angibt. Für unendliche Mengen haben wir keine entsprechenden Zahlen zur Verfügung (zumindest keine natürlichen Zahlen). Wir werden uns zunächst die Situation für endliche Mengen anschauen und danach die entsprechende Idee für unendliche (und endliche) Mengen verallgemeinern.

10.1 Endliche Mengen

Wenn wir eine endliche Menge M gegeben haben, können wir durch Zählen die Anzahl ihrer Elemente als natürliche Zahl feststellen, indem wir wie folgt vorgehen: Wir gehen nacheinander die Elemente der Menge durch und

- ...weisen *jedem* Element der Menge eine natürliche Zahl zu,
- ...wobei wir die natürlichen Zahlen *in der „richtigen“ Reihenfolge* von der 1 ausgehend abarbeiten,
- ...und jedem Element nur *eine* Zahl zuordnen (also kein Element doppelt oder mehrfach zählen).
- Die letzte Zahl, die wir dabei brauchen ist die „Anzahl der Elemente der Menge“.

In anderen Worten: Wir geben eine Abbildung

$$f : \{1, 2, ..., n\} \to M$$

an, die injektiv (weil wir kein Element doppelt zählen) und surjektiv (weil jedes Element eine Zahl zugeordnet bekommt) ist.

Der folgende - ganz allgemeine - Satz sagt uns, dass diese Abbildung umkehrbar sein muss. Wir könnten also im Nachhinein im Prinzip angeben, welchem Element wir welche Zahl angegeben hatten.

10.1.1. Satz:
Eine Abbildung ist genau dann bijektiv, wenn sie umkehrbar ist.

Beweis. Nicht schwer, aber nicht hier. □

Da wir die Idee einer konkreten Zahl als die „Anzahl von Elementen" wohl nicht auf unendliche Mengen verallgemeinern können werden wir eine einfachere Frage lösen, nämlich die, wann zwei Mengen die gleiche Anzahl an Elementen haben.

10.1.2. Definition:
Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig**, falls es eine umkehrbare (oder, äquivalent, bijektive) Abbildung $f : A \to B$ gibt.

10.1.3. Bemerkung:
Hat eine endliche Menge M n Elemente, so sind M und $\{1, 2, ..., n\}$ gleichmächtig.

Diese Definition berücksichtigt offenbar auch unendliche Mengen.

10.1.4. Beispiel:
Die Mengen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $\{a, b, c, d, e\}$ sind offenbar gleichmächtig (geben Sie selbst eine umkehrbare Abbildung an)!

10.2 Unendliche Mengen, Abzählbarkeit

Eine Menge heißt unendlich, falls sie nicht gleichmächtig zu einer Menge der Form $\{1, 2, ..., n\}$ ist.

10.2.1. Beispiel:
Es sei G die Menge der geraden Zahlen und U die Menge der ungeraden Zahlen. G und U sind gleichmächtig, wie die Abbildung

$$f : G \to U, \quad x \mapsto x + 1$$

zeigt.

Die intuitive Idee derselben (unendlichen) Anzahl von Elementen ist im Bereich der unendlichen Mengen nicht mehr hilfreich, wie das folgende Beispiel zeigt:

10.2.2. Beispiel:
Die Menge der geraden Zahlen G und die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind gleichmächtig, wie die Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \to G, \quad x \mapsto 2 \cdot x$$

zeigt.

Mengen, die gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen sind, bekommen einen eigenen Namen.

10.2.3. Definition:
Eine Menge M heißt abzählbar unendlich, falls M und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

Sind damit alle unendlichen Mengen gleichmächtig, also abzählbar? Der folgende Satz fasst einige zentrale Aussagen aus diesem Bereich zusammen.

10.2.4. Satz:
Beispiele abzählbarer und nicht abzählbarer Mengen

- Die folgenden Mengen sind abzählbar: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$.
- Die folgenden Mengen sind nicht abzählbar: $\mathbb{R}$, die Menge aller Abbildungen $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$, die Menge aller Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Beweis. Für $\mathbb{N}$ ist die Aussage klar. Der Beweis für $\mathbb{Z}$ ist einfach. Der Beweis für $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ greift auf das sogenannte erste Cantorsche Diagnonalargument (1874) zurück (das man an der Tafel sicher verständlicher erklären kann als hier im Text). Für $\mathbb{R}$ folgt die Aussage aus dem nächsten Satz. Für die Mengen aller Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ findet man ähnliche Argumente wie für $\mathbb{R}$. □

Es gibt also - aus mathematischer Sicht - nicht wesentlich mehr rationale Zahlen als natürliche Zahlen. Ein „Sprung in der Mächtigkeit“ erfolgt jedoch von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen.

10.2.5. Satz:
Ist $A \subset \mathbb{N}$, so gibt es keine surjektive Abbildung von A nach $]0, 1[$.

Es ist leicht zu sehen, dass $]0, 1[$ gleichmächtig zur $\mathbb{R}$ ist, da die Abbildung $]0, 1[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ bijektiv ist (finden Sie die Umkehrfunktion!). Also folgt aus diesem Satz, dass $\mathbb{R}$ weder endlich noch abzählbar sein kann.

Beweis. Zweites Cantorsches Diagnonalargument (1877)
Ist $f : A \to]0, 1[$ eine Abbildung. Für alle $n \in A$ können wir $f(n)$ als Dezimalbruch schreiben. Dabei nennen wir für alle $n \in A, m \in \mathbb{N}$ die m-te Dezimalstelle von $f(n)$ im Folgenden $a_{nm} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Es gilt also (wenn beispielsweise $1, 2, 3, 4 \in A$):

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}... \\ f(2) & = & 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}... \\ f(3) & = & 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}... \\ f(4) & = & 0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}... \\ \text{usw.} & & \end{array}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $b_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ so, dass $b_n \neq a_{nn}$, falls $n \in A$, bzw. als $b_n := 0$, falls $n \notin A$. Die unendliche Summe

$$b := \sum_{n \geq 1} b_n \cdot 10^{-n}$$

ist dann eine reelle Zahl aus dem Intervall $]0, 1[$ (Achtung! Hier verwenden wir einiges über die Dezimaldarstellung von reellen Zahlen, das ist nicht völlig selbstverständlich). Für alle $n \in A$ gilt $b \neq f(n)$, da die n-ten Dezimalstellen der beiden Zahlen (nämlich b_n und a_{nn}) nicht gleich sind. Das bedeutet, dass f nicht surjektiv ist. $\square$

10.3 Präsenzübung

10.3.1. Aufgabe:
Begründen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind A und B Mengen mit n Elementen, dann sind A und B gleichmächtig.

10.3.2. Aufgabe:
Überlegen Sie jeweils, ob die folgenden Mengen jeweils gleich mächtig sind. Welche Abbildung kommt zum Beweis in Frage (oder wie könnte man das sonst beweisen)?

- Die Menge der geraden Zahlen G und die Menge der ungeraden Zahlen U.
- $\mathbb{N}$ und G
- $\mathbb{N}$ und U
- $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$

10.3.3. Definition:
Ist A eine Menge, so definieren wir die **Potenzmenge von** A als

$$\mathscr{P}(A) := \{B | B \subset A\}$$

also die Menge aller Teilmengen von A.

10.3.4. Aufgabe:
Es seien A, B gleichmächtige Mengen. Zeigen Sie, dass die Potenzmengen $\mathscr{P}(A)$ und $\mathscr{P}(B)$ gleichmächtig sind.

10.3.5. Aufgabe:
Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $(\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times \{1\})$ gleichmächtig sind.

10.3.6. Aufgabe:
Es seien A und B Mengen mit $A \cap B = \varnothing$. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathscr{P}(A \cup B)$ gleichmächtig ist zu $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$.

10.3.7. Aufgabe:
Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

10.3.8. Aufgabe:
Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times ... \times \mathbb{N} = \times_{i=0}^{n} \mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

10.3.9. Aufgabe:
Zeigen Sie, dass es eine Teilmenge $M \subset \mathscr{P}(\mathbb{N})$ gibt, die zu $\mathbb{R}$ gleichmächtig ist.

11 Induktion und Rekursion

11.1 Natürliche Zahlen

11.1.1. Definition:
Eine Menge (N, f) heißt eine (die[1]) Menge der natürlichen Zahlen, falls gelten:

- f ist eine injektive Abbildung $N \to N$.
- Es gibt ein Element $1 \in N$, so dass für alle $n \in N$ gilt $f(n) \neq 1$.
- Ist $X \subset N$ eine Menge, die 1 enthält und für die $x \in X \Rightarrow f(x) \in X$ gilt, so ist $X = N$.

Gemeint ist, dass die Menge der natürlichen Zahlen eine Menge ist,...

- ...bei der es für jedes Element ($n \in N$) einen Nachfolger ($f(n)$) in N gibt (wir kennen diesen als $n + 1$),
- ...bei der es ein „erstes“ Element 1 gibt, das nicht Nachfolger eines anderen Elements ist und
- ...die keine echte Teilmenge hat, die die 1 enthält und in der jedes Element auch einen Nachfolger hat.

Die letzte Forderung sagt also, dass wir hier in gewissem Sinne die kleinste Menge nehmen, die die beiden anderen Aussagen erfüllt.

Im Folgenden werden wir verwenden, dass $(\mathbb{N}, f)$ mit der Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x+1$ eine (die) Menge der natürlichen Zahlen im Sinne der obigen Definition ist.

11.1.2. Bemerkung:
Man kann das erste Element von $\mathbb{N}$ natürlich auch 0 nennen und nicht 1, dann würde man im Weiteren Verlauf die Definitionen für Addition und Multiplikation nur etwas anders gestalten.

[1] Dass es - in gewissem Sinne - nur eine solche Menge gibt müsste man noch zeigen.

11.2 Vollständige Induktion

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion hilft uns, Aussagen der Form

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; A(n)$$

zu zeigen. Es geht im Wesentlichen nach dem folgenden Schema vor:

- Zunächst zeigen wir $A(0)$ (Induktionsanfang)
- Dann zeigen wir für alle $n \in \mathbb{N}$: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, d.h. wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, dann auch für den Nachfolger (Induktionsschritt).

  Dazu dürfen wir also voraussetzen, dass $A(n)$ gilt (Induktionsvoraussetzung, I.V.) und müssen beweisen, dass $A(n+1)$ gilt.
- Das Prinzip der vollständigen Induktion sagt (s.u.) dann, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

11.2.1. Satz:
(Schwaches) Prinzip der vollständigen Induktion

Ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage und gelten

- $A(1)$ und
- für alle $n \in \mathbb{N}$: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$,

so gilt auch

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; A(n)$$

Beweis. $\mathbb{N}$ erfüllt die Aussagen aus der Definition der natürlichen Zahlen oben mit der üblichen 1 und der Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$.

Wir definieren eine Menge $X := \{x \in \mathbb{N} | A(x) \text{ gilt}\}$.

Nach Voraussetzung gilt $A(1)$, also ist $0 \in X$.

Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, also $n \in X \Rightarrow n+1 \in X$ bzw. anders aufgeschrieben $n \in X \Rightarrow f(n) \in X$.

Nach der dritten Forderung der Definition oben muss damit also $X = \mathbb{N}$ gelten.

Das bedeutet, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \in X$, also gilt auch $A(n)$. □

11.2.2. Bemerkung:
Das starke Prinzip der vollständigen Induktion formuliert sich im Vergleich dazu folgendermaßen (und gilt ebenso):

Ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage und gelten

- $A(1)$ und
- für alle $n \in \mathbb{N}$: $(\forall m \leq n\ A(m)) \Rightarrow A(n+1)$,

so gilt auch

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ A(n)$$

Hier dürfen wir im Induktionsschritt nicht nur annehmen, dass $A(n)$ gilt, sondern dass $A(m)$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. In gewisser Hinsicht wird uns damit der Beweis des Induktionsschritt erleichtert. Dass das trotzdem reicht ist also eine noch schönere (und, wie die Mathematiker sagen, stärkere) Aussage als das oben bewiesene Prinzip.

11.2.3. Bemerkung:
Natürlich kann man dieselbe Idee auch verwenden, wenn man $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zeigen möchte. Dann muss man eben anstellen von $A(1)$ am Anfang $A(0)$ zeigen.

11.2.4. Satz:
Ungleichung von Bernoulli: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion (über n).

Induktionsanfang, $n = 0$: Die linke Seite ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$:

$$(1+x)^0$$

Nun gilt $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$ weil ja $1 + x \neq 0$. Also haben wir die Behauptung des Satzes für $n = 0$ gezeigt.

Induktionsschritt von n nach $n+1$: Wir dürfen annehmen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Damit ist $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx) \cdot (1+x)$ nach der Induktionsvoraussetzung (I.V.).

Weiter ist $(1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$. Also haben wir die Behauptung des Satzes für $n+1$ gezeigt, wenn wir annehmen, dass sie für n gilt.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion haben wir damit also die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. □

11.2.5. Satz:
Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Summiert man die ersten n ungeraden natürlichen Zahlen, so erhält man immer eine Quadratzahl (nämlich n^2).

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion (über n).

Induktionsanfang, $n = 0$: Die Summe der ersten 0 ungeraden Zahlen ist die leere Summe und damit als 0 definiert(!) (linke Seite). Andererseits ist $0 = 0^2$ (rechte Seite). Also gilt die Behauptung des Satzes für $n = 0$.

Induktionsschritt von n nach $n + 1$: Wir dürfen annehmen, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen n^2 ergibt (I.V.). Also gilt

$$\sum_{i=0}^{n-1}(2i + 1) = n^2$$

Die Summe der ersten $n + 1$ ungeraden Zahlen ist also

$$\sum_{i=0}^{n}(2i + 1) = \sum_{i=0}^{n-1}(2i + 1) + 2n + 1$$

Wir können die Induktionsvoraussetzung (I.V.) anwenden und erhalten

$$\sum_{i=0}^{n}(2i + 1) = n^2 + 2n + 1$$

Mit der ersten binomischen Formel (oder wie man leicht durch Ausmultiplizieren nachprüfen kann) folgt daraus:

$$\sum_{i=0}^{n}(2i + 1) = (n + 1)^2$$

Also haben wir die Behauptung des Satzes für $n + 1$ gezeigt, wenn wir annehmen, dass sie für n gilt.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion haben wir damit also die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. □

11.3 Rekursion

Genauso wie man durch *vollständige Induktion* Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ *beweisen* kann, kann man durch *Rekursion* mathematische Objekte O_n für alle $n \in \mathbb{N}$ *definieren.*

Im Folgenden definieren wir - nur unter Nutzung der Nachfolgerabbildung f auf $\mathbb{N}$ - die Addition von natürlichen Zahlen.

11.3.1. Definition:
Wir definieren eine Abbildung $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a, b) \mapsto a + b$, indem wir für alle $a, b \in \mathbb{N}$ das Objekt $a + b$ durch Rekursion über b definieren. Sei also $a \in \mathbb{N}$ beliebig und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Nachfolgerabbildung auf den natürlichen Zahlen.
$\underline{b = 1}$: Definiere $a + b := f(a)$ (Bemerkung: Das macht Sinn, da $b = 1$, also $a + b = a + 1$).
$\underline{b \to b + 1}$: Wir nehmen an $a + b$ sei schon definiert und definieren $a + (b + 1) := f(a + b)$ (Bemerkung: Das macht Sinn, weil ja später ohnehin $+$ assoziativ, also $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ sein soll).

11.4 Präsenzübung

11.4.1. Aufgabe:
Zeigen Sie durch vollständige Induktion die folgenden Formeln:

- $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für $x \neq 1$.
- $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

11.4.2. Aufgabe:
Definieren Sie die Multiplikation auf der Menge der natürlichen Zahlen, nur unter Nutzung der Nachfolgerabbildung und der oben definierten Addition. Tipp: Es soll später ohnehin gelten, dass: $a(b+1) = ab + b$.