

12. УЧЕТ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ СИСТЕМ

Терминология: диссипация \equiv рассеяние, трение \equiv демпфирование;
Диссипативные силы \equiv демпфирующие силы \equiv силы трения

12.1. Природа диссипации энергии в упругих системах

Колебания реальных систем всегда сопровождается рассеянием энергии; величина полной механической энергии $T + U$ уменьшается, и колебания носят затухающий характер. Влияние малого рассеяния энергии на частоты и формы свободных колебаний механических систем незначительно, поэтому изученные нами ранее характеристики собственных колебаний без учета рассеяния энергии сохраняют теоретическое и практическое значение.

Однако рассеяние энергии оказывает существенное влияние на амплитуды колебаний при резонансных режимах: они (амплитуды) оказываются конечными при наличии даже малой диссипации. Поэтому введение демпфирования – один из важнейших практических способов борьбы с нежелательными вибрациями конструкций.

Принято различать три следующих вида рассеяния энергии:

Внутреннее рассеяние энергии.

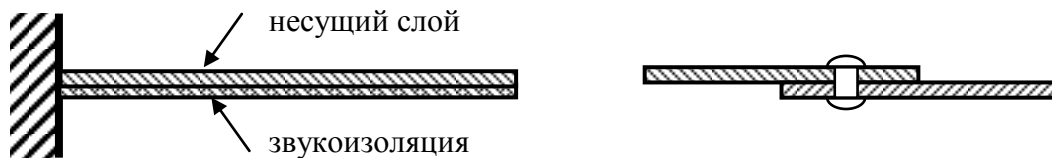
Оно обусловлено необратимыми процессами в материале. Природа внутреннего рассеяния и его количественные характеристики изучаются в физике твердого тела. К причинам, вызывающим внутреннее рассеяние, относятся:

- Вязкость; Для металлов и их сплавов вязкоупругие явления играют, по видимому, второстепенную роль. Однако для полимеров и конструкционных материалов на их основе вязкоупругость играет главную роль.
- Микроскопическая тепловая диффузия вследствие температурных градиентов. Как известно, при растяжении образца он несколько охлаждается, а при сжатии нагревается. Поэтому, если, например, стержень совершает изгибные колебания, то его волокна попеременно то нагреваются, то охлаждаются. Это вызывает периодический тепловой поток. Распространение тепла не является обратимым процессом. Все это вызывает рассеяние энергии (механической) колебаний. Часть механической энергии превращается в тепло и рассеивается.
- Микро- и макроскопическая деформация в зернах и на границах зерен в металлах и сплавах. Явление гистерезиса.

– Распространение волн в кристаллической решетке.

Конструкционное рассеяние энергии

: Обусловлено трением в опорах и соединениях, контактное трение между элементами конструкций и т. д.



Рассеяние энергии в окружающую среду

: Оно обусловлено «трением об окружающую среду»; акустическое излучение в окружающую среду, когда часть механической энергии колебаний системы превращается в энергию звуковых волн и необратимо рассеивается (жидкие и газообразные среды); рассеяние энергии через основание (грунт).

Это деление условно, поскольку в реальных условиях все три вида диссипации проявляются совместно. Механизмы некоторых видов рассеяния энергии до настоящего времени остаются недостаточно выясненными. Однако имеющиеся экспериментальные данные позволяют сформулировать определенные феноменологические представления, которые достаточны для решения инженерных задач.

12.2. Характеристики рассеяния энергии

Общепринято вводить интегральную характеристику рассеяния энергии – относительное рассеяние энергии за цикл колебаний

$$\psi = \frac{\Delta W}{W},$$

где ΔW – энергия, рассеянная за цикл колебаний,

W – энергия, накопленная в начале рассматриваемого цикла; например, потенциальная энергия при наибольшем отклонении от положения равновесия.

Декремент колебаний

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}},$$

где A_n, A_{n+1} – две последовательные амплитуды. Вообще говоря, декремент колебаний будет различным в различных точках упругой системы.

При малых δ справедливо соотношение

$$\psi \approx 2\delta.$$

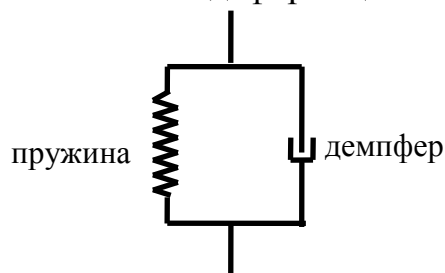
В дальнейшем будем рассматривать линейное рассеяние энергии, при котором ψ не зависит от амплитуды.

13. МЕТОДЫ УЧЕТА РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ

С точки зрения приложений наибольший интерес представляют простые математические модели учета рассеяния энергии. Рассмотрим некоторые из них.

13.1. Внутреннее трение в материале (модель Фойхта)

Предполагается, что элементарная сила трения пропорциональна скорости деформации. Для одноосного растяжения (сжатия) связь между напряжениями σ и деформациями ε принимает вид



The diagram shows a mechanical model consisting of a spring (represented by a zigzag line) and a dashpot (represented by a rectangle with a vertical line through it) connected in parallel. The spring is labeled 'пружина' and the dashpot is labeled 'демпфер'. The entire model is connected to a vertical line at the top and bottom.

$$\sigma = E \left(\varepsilon + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)$$

Здесь E – модуль продольной упругости,
 η – коэффициент вязкости.

Для чистого сдвига

$$\tau = G \left(\gamma + \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right),$$

где для η численное значение, вообще говоря, другое.

В общем случае напряженного состояния

$$\sigma_{jk} = \lambda_{jklm} \varepsilon_{lm} + \mu_{jklm} \frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial t},$$

где λ_{jklm} – тензор упругих постоянных,

μ_{jklm} – тензор вязких постоянных.

Обычно предполагается, что компоненты тензора μ_{jklm} пропорциональны компонентам тензора λ_{jklm} . Тогда

$$\sigma_{jk} = \lambda_{jklm} \left(\varepsilon_{lm} + \eta \frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial t} \right).$$

В этом случае уравнения свободных колебаний упругих систем при учете рассеяния энергии по модели Фойхта запишется в операторной форме

$$C\left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right)u + A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

В частности (при $F = \text{const}$):

продольные колебания стержней

$$-EF\left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

крутильные колебания стержней

$$-GJ_k\left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \rho J_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0,$$

изгибные колебания стержней

$$EJ\left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

изгибные колебания пластин

$$D\left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Кинематические условия не изменяются, а динамические могут измениться, т.к.

$$N = EF\left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad M_{\text{кр}} = GJ_k\left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x},$$

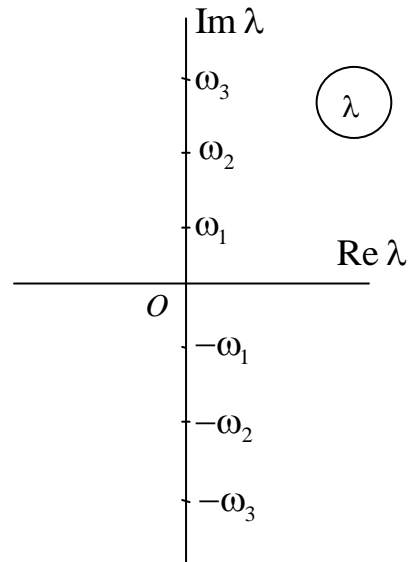
$$M_{\text{изг}} = EJ\left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad Q = EJ\left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$$

Если положить $\eta = 0$, имеем уравнения собственных колебаний

$$Cu + A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Представляя здесь $u = \varphi e^{i\omega t}$, получим $C\varphi - \omega^2 A\varphi = 0$. Решение уравнения собственных колебаний дает спектр собственных частот $\{\omega_k\}$ и спектр собственных форм $\{\varphi_k\}$. $(C\varphi_k - \omega_k^2 A\varphi_k = 0)$, ω – вещественные.

Полагая $\lambda = i\omega$ – характеристические показатели (чисто мнимые)



Любое решение можно записать в виде суммы элементарных движений

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k e^{\lambda_k t} + \text{компл. сопр.}$$

или в действительной форме

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t) \varphi_k(x)$$

Если $\eta \neq 0$, то полагая

$$u(x, t) = \varphi(x) e^{i\omega t} = \varphi(x) e^{\lambda t},$$

где ω , вообще говоря, комплексные, получим

$$C(1 + \eta\lambda)\varphi + \lambda^2\varphi = 0,$$

или

$$C\varphi + \frac{\lambda^2}{(1 + \eta\lambda)}\varphi = 0.$$

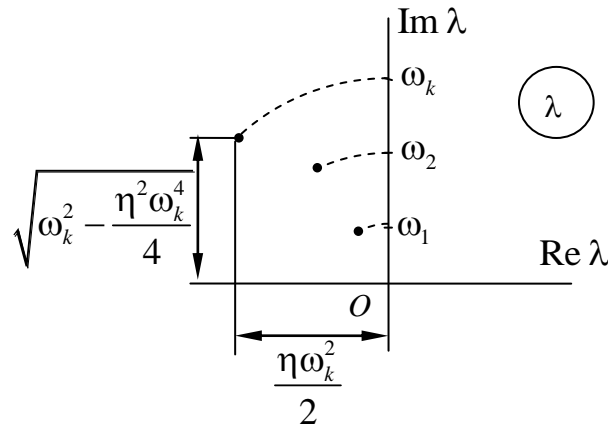
Здесь $\{\varphi_k\}$ — те же, что и при собственных колебаниях без учета демпфирования, и действительные. Тогда должно быть

$$\frac{\lambda_k^2}{1 + \eta\lambda_k} = -\omega_k^2 \quad \text{или} \quad \lambda_k^2 + \eta\omega_k^2\lambda_k + \omega_k^2 = 0$$

Отсюда

$$\lambda_k = -\frac{\eta\omega_k^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\eta^2\omega_k^4}{4} - \omega_k^2} = -\frac{\eta\omega_k^2}{2} \pm i\sqrt{\omega_k^2 - \frac{\eta^2\omega_k^4}{4}}$$

Считаем, что $\eta \ll 1$



Для высоких частот $\eta_k^* = \frac{2}{\omega_k}$

Любое решение можно представить в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k e^{\lambda_k t} + \text{компл. сопр.}$$

Или в действительной форме

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\eta \omega_k^2 t}{2}} (A_k \cos \bar{\omega}_k t + B_k \sin \bar{\omega}_k t) \varphi_k(x)$$

$$\bar{\omega}_k = \sqrt{\omega_k^2 - \frac{\eta^2 \omega_k^4}{4}}$$

Для $k > k_*(\eta^*)$ (высшие формы) составляющие движения – апериодические.

Декремент колебаний для не очень высоких частот и малых коэффициентов демпфирования η , при которых $\bar{\omega}_k \approx \omega_k$

$$\delta_k = \ln e^{\frac{\eta \omega_k^2 T}{2}} = \frac{\eta \omega_k^2 T}{2} = \frac{\eta \omega_k^2 2\pi}{2\bar{\omega}_k} \approx \pi \eta \bar{\omega}_k,$$

и относительное рассеяние за цикл колебаний

$$\psi_k = 2\delta_k = 2\pi \eta \bar{\omega}_k$$

пропорционально частоте.

Обычно рассеяние энергии слабо зависит от частоты, и это обстоятельство иногда высказывается в качестве критического замечания по этой модели.

13.2. Внешнее трение

Простейший способ учета диссипации энергии при колебаниях. В уравнения колебаний добавляют слагаемые с производной по времени, умноженной на оператор A

$$Cu + A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\varepsilon A \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

где ε – параметр внешнего трения.

Как и ранее, представим $u = \varphi e^{\lambda t}$ и подставим в уравнение

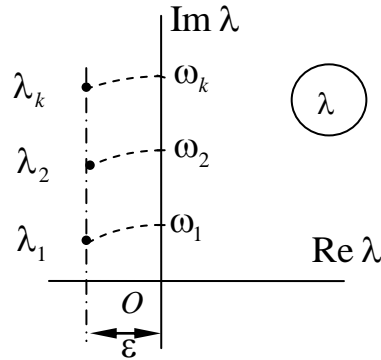
$$C\varphi + A(2\varepsilon\lambda + \lambda^2)\varphi = 0$$

Здесь $\{\varphi_k\}$ – те же, что и в системе без демпфирования и вещественные.

Тогда должно быть $2\varepsilon\lambda_k + \lambda_k^2 = -\omega_k^2$ или

$$\lambda_k^2 + 2\varepsilon\lambda_k + \omega_k^2 = 0$$

$$\lambda_k = -\varepsilon \pm i\sqrt{\omega_k^2 - \varepsilon^2} = -\varepsilon \pm i\bar{\omega}_k$$



Представим движение

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varepsilon t} (A_k \cos \bar{\omega}_k t + B_k \sin \bar{\omega}_k t) \varphi_k(x)$$

Декремент колебаний

$$\delta_k = \varepsilon T_k = \frac{2\pi\varepsilon}{\bar{\omega}_k}$$

Относительное рассеяние энергии за цикл колебаний

$$\psi_k = 2\delta_k = \frac{4\pi\varepsilon}{\bar{\omega}_k}$$

При данном способе учета рассеяния энергии ψ_k обратно пропорционально частоте.

13.3. Рассеяние энергии, не зависящее от частоты

В модели Фойхта относительное рассеяние энергии пропорционально частоте. Поэтому, если рассматривать некоторые гармонические колебания системы с внутренним трением с частотой θ , то примем коэффициент перед производной по времени, равным $\frac{\psi}{2\pi\theta}$, где величина ψ от частоты не зависит

$$C\left(1 + \frac{\psi}{2\pi\theta} \frac{\partial}{\partial t}\right)u + A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \varphi_k(x)$$

Здесь $\varphi_k(x)$ – собственные формы соответствующей системы без демпфирования $C\varphi_k - \omega_k^2 A\varphi_k = 0$

После подстановки ряда в исходное уравнение получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(f_k + \frac{\Psi}{2\pi\theta} \dot{f}_k \right) C\varphi_k + \ddot{f}_k A\varphi_k \right] = 0$$

Умножим скалярно на функции $\varphi_j(x)$ и используем формулу Релея

$\omega_k^2 = \frac{(C\varphi_k, \varphi_k)}{(A\varphi_k, \varphi_k)}$, а также учтем ортогональность собственных форм

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\ddot{f}_k + \frac{\Psi\omega_k^2}{2\pi\theta} \dot{f}_k + \omega_k^2 f_k \right] (A\varphi_k, \varphi_k) = 0$$

При свободных колебаниях $\theta = \omega_k$. Тогда имеем

$$\ddot{f}_k + \frac{\Psi}{2\pi} \omega_k \dot{f}_k + \omega_k^2 f_k = 0, \quad (k=1, 2, \dots)$$

В данном случае логарифмический декремент колебаний

$$\delta_k = \ln e^{\frac{\Psi\omega_k T}{4\pi}} = \frac{\Psi\omega_k}{4\pi} T = \frac{\Psi\omega_k}{4\pi} \frac{2\pi}{\bar{\omega}_k} \approx \frac{\Psi}{2}$$

и относительное рассеяние энергии за цикл

$$\Psi_k = 2\delta_k = \Psi$$

не зависят от частоты.

14. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

Возбуждение колебаний может быть силовым, кинематическим или смешанным. Для определенности будем говорить о силовом возбуждении. Уравнение колебаний

$$Cu + A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x, t) \text{ – без учета демпфирования}$$

$$Cu + A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Bu = q(x, t) \text{ – при наличии демпфирования}$$

$$B = \begin{cases} \eta C \frac{\partial}{\partial t} \text{ – внутреннее трение по модели Фойхта} \\ 2\varepsilon A \frac{\partial}{\partial t} \text{ – внешнее трение} \end{cases}$$

14.1. Установившиеся колебания под действием периодических сил. Решения, получаемые в замкнутом виде

$$Cu + A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q_0(x) \cos \theta t$$

Начальные условия не учитываются, т.е. рассматривается установившийся режим колебаний.

В силу линейности уравнения и справедливости принципа суперпозиции достаточно рассмотреть одну гармонику по времени.

Пусть $q_0(x)$ – амплитудное значение нагрузки; θ – частота внешних сил.

Для установившихся колебаний решение ищем с той же частотой и фазой

$$u(x, t) = u_0(x) \cos \theta t, \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

После подстановки в исходное уравнение получим

$$Cu_0 - \theta^2 Au_0 = q_0$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$C\varphi - \omega^2 A\varphi = 0$$

Его решение дает

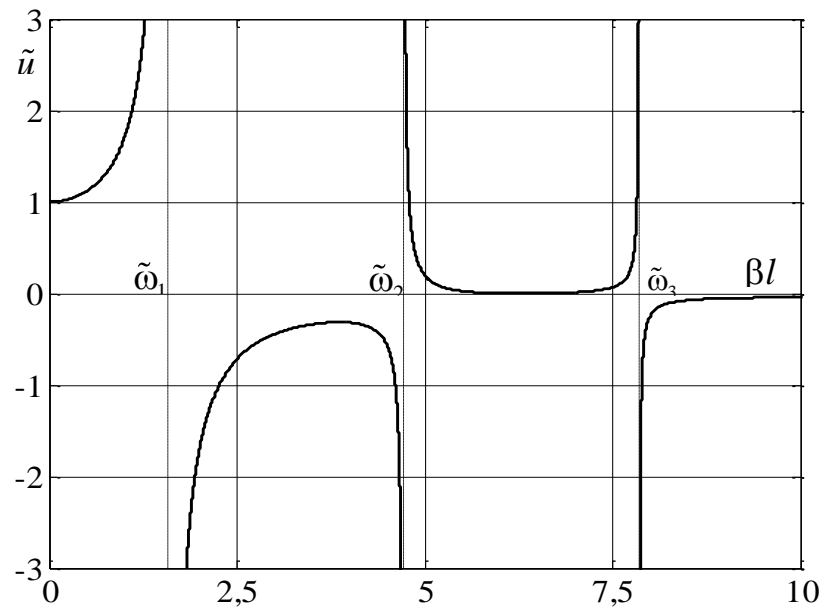
$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq \dots \\ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \end{array} \right\} \text{спектр собственных колебаний}$$

Если θ не совпадает ни с одной из собственных частот ω_k , то оператор $C - \theta^2 A$ обратим, т.е. существует ограниченный обратный оператор $(C - \theta^2 A)^{-1}$. И тогда

$$u_0 = (C - \theta^2 A)^{-1} q_0$$

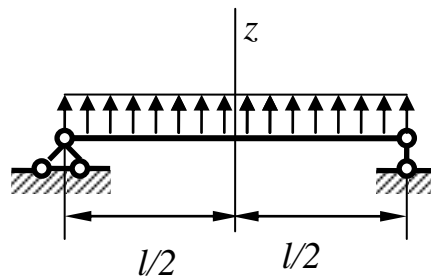
Если $\theta = \omega_k$, то уравнение неразрешимо. Исключение составляет случай, когда функция $q_0(x)$ ортогональна всем собственным формам, соответствующим частоте ω_k , т.е. $(q_0, \varphi_k) = 0$. В этом случае решение есть произвольная линейная комбинация собственных форм, соответствующих ω_k

Резольвента интегрального оператора $(C - \theta^2 A)^{-1} q_0$ есть мероморфная функция θ . Условие $\theta = \omega_k$ есть условие резонанса при действии периодической силы, а $(q_0, \varphi_k) = 0$ означает, что нагрузка не совершает работы на перемещениях, соответствующих резонансной форме



Пример

Изгибные колебания шарнирно опертого стержня



$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_0 \cos \theta t$$

Граничные условия: $w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ при $x = \pm \frac{l}{2}$

$$w(x, t) = w_0 \cos \theta t$$

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} - \beta^4 w_0 = \frac{q_0}{EI}, \quad \beta^4 = \frac{\rho F \theta^2}{EI}$$

При $x = 0$ условия симметрии: $\frac{dw_0}{dx} = \frac{d^3 w_0}{dx^3} = 0$

При $x = \frac{l}{2}$ граничные условия: $w_0 = \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0$

$w_0(x) = C e^{rx}$, характеристическое уравнение $r^4 - \beta^4 = 0$

Его решение $r_{1,2} = \pm i\beta$, $r_{3,4} = \pm \beta$

$$w_0(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \operatorname{ch} \beta x + C_4 \operatorname{sh} \beta x - \frac{q_0}{EI \beta^4}$$

Здесь $w_* = -\frac{q_0}{EI\beta^4}$ – частное решение

Из условия симметрии $C_2 = C_4 = 0$

Из граничных условий при $x = \frac{l}{2}$ получим систему

$$w_0\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad C_1 \cos \frac{\beta l}{2} + C_3 \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2} = \frac{q_0}{EI\beta^4},$$

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} \left(\frac{l}{2} \right) = 0 \quad -C_1 \cos \frac{\beta l}{2} + C_3 \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2} = 0.$$

Отсюда получим

$$C_1 = \frac{q_0}{EI\beta^4} \frac{1}{2 \cos \frac{\beta l}{2}}, \quad C_3 = \frac{q_0}{EI\beta^4} \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2}}$$

И для амплитудных значений прогиба $w_0(x)$

$$w_0(x) = \frac{q_0}{EI\beta^4} \left(\frac{\cos \beta x}{2 \cos \frac{\beta l}{2}} + \frac{\operatorname{ch} \beta x}{2 \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2}} - 1 \right)$$

При $\beta \rightarrow 0$ имеет место неопределенность вида '0/0', но она легко раскрывается и предел конечен при любых x . В силу непрерывной зависимости решения от параметра β это решение стремится к решению уравнения

$$\frac{d^4 w_{\text{ст}}}{dx^4} = \frac{q_0}{EI} \Rightarrow w_{\text{ст}}(x)$$

Полюса совпадают с корнями уравнения

$$\cos \frac{\beta l}{2} = 0, \quad \frac{\beta l}{2} = \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

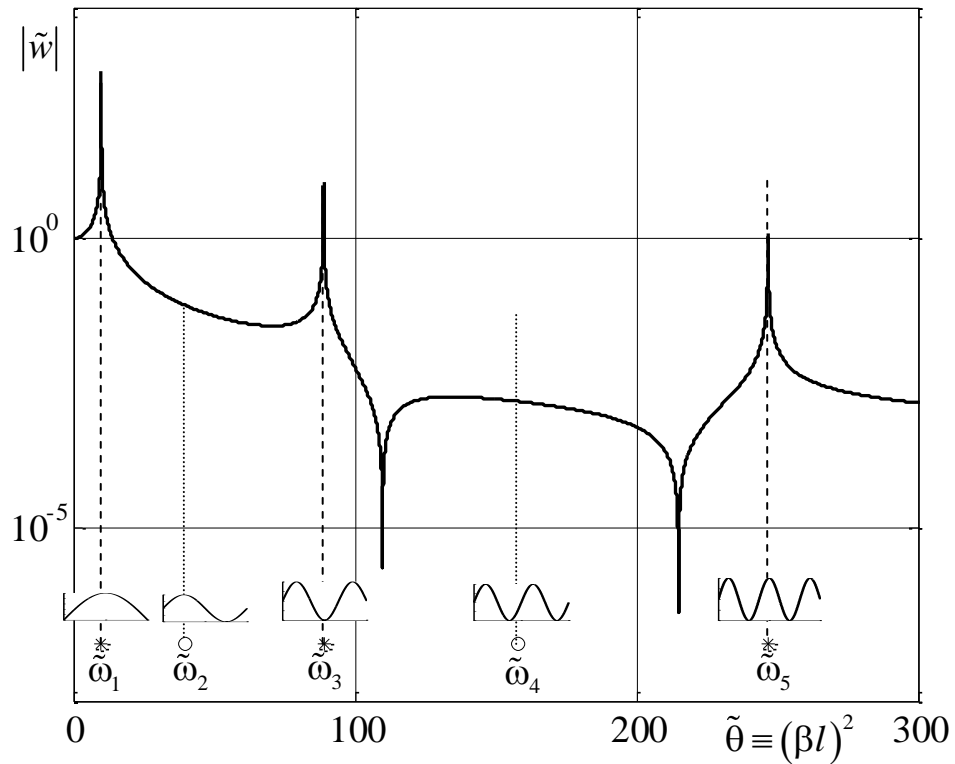
$$\beta l = (2k + 1)\pi$$

$$\theta_k = \frac{(2k + 1)^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Или

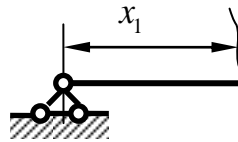
$$\theta_m = \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} = \omega_m \quad m = 1, 3, 5, 7, \dots$$

Амплитудно-частотная зависимость для сечения $x = 0$



Обратите внимание на логарифмическую шкалу ординат.

Если бы $q_0 = q_0(x)$, то частное решение можно было бы записать в такой форме



$$w_0(x_1) = \frac{1}{EI\beta^4} \int_0^{x_1} S_4[\beta(x_1 - \xi)] q_0(\xi) d\xi$$

14.2. Представление решения в виде разложения по формам собственных колебаний

$$Cu + A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q_0(x) \cos \theta t$$

$$u(x, t) = u_0(x) \cos \theta t$$

$$Cu_0 - \theta^2 Au_0 = q_0(x)$$

$$C\varphi_k - \omega_k^2 A\varphi_k = 0, \quad \{\omega_k\}, \quad \{\varphi_k\}, \quad (A\varphi_j, \varphi_k) = 0 \quad j \neq k$$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$$

После подстановки в уравнение получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k (C\varphi_k - \theta^2 A\varphi_k) - q_0(x) = 0 \mid \cdot \varphi_j$$

и скалярно умножим на φ_j . С учетом ортогональности $(A\varphi_j, \varphi_k) = 0$ при $j \neq k$

$$f_k (\omega_k^2 - \theta^2) (A\varphi_k, \varphi_k) = (q_0, \varphi_k)$$

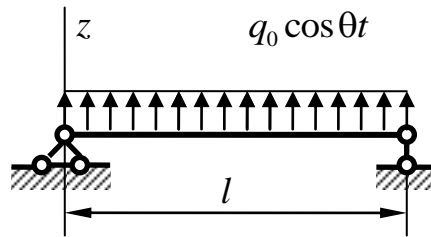
или

$$f_k (\omega_k^2 - \theta^2) = Q_k, \text{ где } Q_k = \frac{(q_0, \varphi_k)}{(A\varphi_k, \varphi_k)}$$

Отсюда получим

$$f_k = \frac{Q_k}{\omega_k^2 - \theta^2}, \quad u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{\omega_k^2 - \theta^2} \varphi_k(x)$$

Пример



$$q_0 = \text{const}$$

$$EI \frac{d^4 w_0}{dx^4} - \rho F \theta^2 w_0 = q_0, \quad w_0 = \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, l$$

$$\{\varphi_k\} = \left\{ \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$Q_k = \frac{(q_0, \varphi_k)}{(A\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{\int_0^l q_0 \sin \frac{k\pi x}{l} dx}{\int_0^l \rho F \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx} = \begin{cases} \frac{q_0 2 \frac{l}{k\pi}}{\frac{1}{2} \rho F l}, & k - \text{нечетное} \\ 0, & k - \text{четное} \end{cases}$$

$$w_0(x) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4q_0}{k\pi\rho F} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{\frac{k^4 \pi^4}{l^4} \frac{EI}{\rho F} - \theta^2} = \frac{4q_0 l^4}{\pi^5 EI} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{1 - \frac{\theta^2 l^4 \rho F}{k^4 \pi^4 EI}}$$

При $\theta = 0$

$$w_{\text{ст}}(x) = \frac{4q_0 l^4}{\pi^5 EI} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

14.3. Метод разложения по собственным формам в задачах о неустановившихся колебаниях

$$Cu + A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x, t)$$

Кроме граничных условий необходимо иметь начальные условия

$$u|_{t=0} = v_0(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v_1(x)$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \varphi_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_k C \varphi_k - \ddot{f}_k A \varphi_k) = q(x, t) = 0 | \cdot \varphi_j(x)$$

$$\ddot{f}_k + \omega_k^2 f_k = \frac{(q, \varphi_k)}{(A \varphi_k, \varphi_k)}$$

$$\ddot{f}_k + \omega_k^2 f_k = Q_k(t); \quad Q_k(t) = \frac{(q, \varphi_k)}{(A \varphi_k, \varphi_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Преобразуем начальные условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0) \varphi_k(x) = v_0(x) | \cdot \varphi_j \quad \text{с весом } A$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{f}_k(0) \varphi_k(x) = v_1(x) | \cdot \varphi_j \quad \text{с весом } A$$

Отсюда получим

$$f_k(0) = \frac{(v_0, A \varphi_k)}{(A \varphi_k, \varphi_k)}, \quad \dot{f}_k(0) = \frac{(v_1, A \varphi_k)}{(A \varphi_k, \varphi_k)}$$

Пусть, например, начальные условия нулевые

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0$$

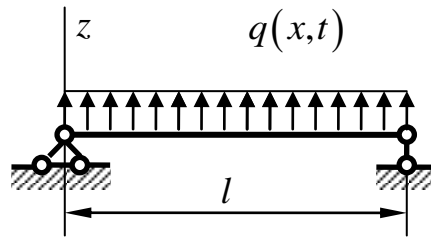
$$\text{и } q = 0 \quad \text{при } t < 0$$

Тогда с использованием интеграла Дюамеля имеем

$$f_k(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k(t - \tau) Q_k(\tau) d\tau$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k(t - \tau) Q_k(\tau) d\tau, \quad \text{при } t > 0$$

Пример Неустановившиеся изгибные колебания балки



$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t)$$

$$q(x, t) = \begin{cases} q_0, & \text{при } t > 0 \\ 0, & \text{при } t \leq 0 \end{cases}$$

Граничные условия $w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ при $x = 0, l$

Нулевые начальные условия $w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ при $t \leq 0$

$$Q_k(t) = \frac{(q, A\varphi_k)}{(A\varphi_k, \varphi_k)} = \begin{cases} \frac{4q_0}{k\pi\rho F}, & k - \text{нечетное} \\ 0, & k - \text{четное} \end{cases} t > 0,$$

$$Q_k(t) = 0 \quad \text{при } t \leq 0$$

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k(t - \tau) Q_k(\tau) d\tau$$

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\int_0^t \sin \omega_k(t - \tau) Q_k(\tau) d\tau = \frac{4q_0}{k\pi\rho F} \int_0^t \sin \omega_k(t - \tau) d\tau =$$

$$= \frac{4q_0}{k\pi\rho F} \frac{1}{\omega_k} \cos \omega_k(t - \tau) \Big|_0^t = \frac{4q_0}{k\pi\rho F \omega_k} (1 - \cos \omega_k t)$$

$$w(x, t) = \frac{4q_0 l^4}{\pi^5 EI} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{k^5} (1 - \cos \omega_k t) = \frac{4q_0 l^4}{\pi^5 EI} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{k^5} 2 \sin^2 \frac{\omega_k t}{2}$$

$$w_{\text{ст}}(x) = \frac{4q_0 l^4}{\pi^5 EI} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{k^5} \quad (\text{см. предыдущий пример при статическом действии нагрузки})$$

$$\max_t |w(x, t)| = 2w_{\text{ст}}(x)$$

14.4. Установившиеся колебания в системах с демпфированием

Пусть диссипация энергии учитывается по схеме «внешнего» трения

$$Cu + A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\varepsilon A \frac{\partial u}{\partial t} = q_0 \cos \theta t$$

Вследствие наличия трения между нагрузкой $q(x, t)$ и перемещением $u(x, t)$ возникает сдвиг фаз. Поэтому решение следует искать в виде

$$u(x, t) = v_R(x) \cos \theta t + v_I(x) \sin \theta t \quad (*)$$

или

$$u(x, t) = u_0(x) \cos [\theta t - \gamma(x)] \quad (**)$$

Связь между (*) и (**)

$$\begin{aligned} u_0(x) \cos [\theta t - \gamma(x)] &= v_R(x) \cos \theta t + v_I(x) \sin \theta t \\ u_0(x) (\cos \theta t \cos \gamma + \sin \theta t \sin \gamma) &= v_R(x) \cos \theta t + v_I(x) \sin \theta t \\ \left. \begin{aligned} u_0 \cos \gamma &= v_R \\ u_0 \sin \gamma &= v_I \end{aligned} \right| &\Rightarrow u_0 (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) = v_R^2 + v_I^2 \end{aligned}$$

Таким образом

$$u_0 = \sqrt{v_R^2 + v_I^2}, \quad \gamma(x) = \arctg \frac{v_I}{v_R} \quad \gamma(x) - \text{начальная фаза колебаний}$$

Подставляя выражение для $u(x, t)$ и приравнявая выражения при $\cos \theta t$ и $\sin \theta t$ имеем

$$\begin{cases} \cos \theta t & \left\{ (C - \theta^2 A) v_R - 2\varepsilon \theta A v_I = q_0 \right. \\ \sin \theta t & \left\{ (C - \theta^2 A) v_I + 2\varepsilon \theta A v_R = 0 \right. \end{cases}$$

Получили систему дифференциальных уравнений для определения v_R и v_I . Порядок уравнений удвоился. Можно сохранить порядок уравнений, если применить комплексную форму записи решения. Для этого представим нагрузку в виде

$$q_0 \cos \theta t \Rightarrow q_0 e^{i\theta t}$$

И введем комплекснозначную функцию (амплитуду)

$$\begin{aligned} V(x) &= v_R(x) + i v_I(x) \\ \tilde{u}(x, t) &= V(x) e^{i\theta t}, \quad u(x, t) = \operatorname{Re} [\tilde{u}(x, t)] \\ (C - \theta^2 A + 2i\varepsilon \theta A) V &= q_0 \\ u_0(x) &= |V(x)|, \quad \gamma(x) = \arg V \end{aligned}$$

Рассмотрим случай внутреннего трения Фойхта

$$\begin{aligned} C \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) u + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= q_0 \cos \theta t \\ u(x, t) &= v_R(x) \cos \theta t - v_I(x) \sin \theta t \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos \theta t & \left\{ (C - \theta^2 A) v_R - \eta \theta C v_I = q_0 \right. \\ \sin \theta t & \left. (C - \theta^2 A) v_I + \eta \theta C v_R = 0 \right\} \end{cases}$$

Для комплексной формы

$$(C - \theta^2 A + i \eta \theta C) V = q_0$$

14.5. Применение метода разложения по формам собственных колебаний

$\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – формы собственных колебаний системы без демпфирования

$$v_R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(R)} \varphi_k(x), \quad v_I(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(I)} \varphi_k(x)$$

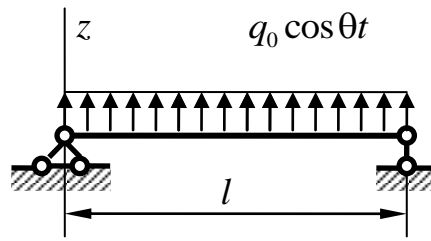
Или в комплексной форме

$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x), \quad f_k = f_k^{(R)} + i f_k^{(I)}$$

Основные соотношения для систем с демпфированием

Внешнее трение	Внутреннее трение Фойхта
$(\omega_k^2 - \theta^2 + 2i\varepsilon\theta) f_k = Q_k$	$[\omega_k^2(1 + i\eta\theta) - \theta^2] f_k = Q_k$
$Q_k = \frac{(q_0, \varphi_k)}{(A\varphi_k, \varphi_k)}$	
$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k \varphi_k(x)}{\omega_k^2 - \theta^2 + 2i\varepsilon\theta}$	$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k \varphi_k(x)}{(1 + i\eta\theta)\omega_k^2 - \theta^2}$
$f_k^{(R)}(x) = \frac{(\omega_k^2 - \theta^2) Q_k}{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2 \theta^2}$	$f_k^{(R)}(x) = \frac{(\omega_k^2 - \theta^2) Q_k}{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + \eta^2 \theta^2 \omega_k^4}$
$f_k^{(I)}(x) = -\frac{2\varepsilon\theta Q_k}{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2 \theta^2}$	$f_k^{(I)}(x) = -\frac{\eta\theta\omega_k^2 Q_k}{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + \eta^2 \theta^2 \omega_k^4}$
$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k \varphi_k(x) \cos(\theta t + \gamma_k)}{\sqrt{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2 \theta^2}}$	$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k \varphi_k(x) \cos(\theta t + \gamma_k)}{\sqrt{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + \eta^2 \theta^2 \omega_k^4}}$
$\gamma_k = \arctg \frac{f_k^{(I)}}{f_k^{(R)}} = \arctg \left(-\frac{2\varepsilon\theta}{\omega_k^2 - \theta^2} \right)$	$\gamma_k = \arctg \frac{f_k^{(I)}}{f_k^{(R)}} = \arctg \left(-\frac{\eta\theta\omega_k^2}{\omega_k^2 - \theta^2} \right)$

Амплитуды колебаний при любых θ ограничены.

Пример

$$q_0 = \text{const}$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \theta^2 w + 2\varepsilon \rho F \frac{\partial w}{\partial t} = q_0 \cos \theta t, \quad w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, l$$

$$\{\varphi_k\} = \left\{ \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Заменим $q_0 \cos \theta t \Rightarrow q_0 e^{i\theta t}$

Тогда придем к уравнению

$$EI \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} + 2\rho F \varepsilon \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = q_0 e^{i\theta t} \quad (*)$$

Физический смысл имеет $w(x, t) = \text{Re}[\tilde{w}(x, t)]$

Решение уравнения (*) ищем в виде $\tilde{w}(x, t) = V(x) e^{i\theta t}$

$$EI \frac{d^4 V}{dx^4} - \rho F \theta^2 V + 2i\varepsilon \theta \rho F V = q_0$$

Представим решение этого уравнения в виде ряда по формам собственных колебаний

$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

После подстановки в уравнение умножаем на $\sin \frac{j\pi x}{l}$ и интегрируем по длине балки

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \left[EI \frac{k^4 \pi^4}{l^4} - \rho F \theta^2 + 2i\varepsilon \theta \rho F \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = q_0 \cdot \sin \frac{j\pi x}{l} \text{ и } \int_0^l \dots dx$$

С учетом ортогональности после интегрирования получим

$$f_k \left(EI \frac{k^4 \pi^4}{l^4} - \rho F \theta^2 + 2i\varepsilon \theta \rho F \right) \frac{l}{2} = \begin{cases} \frac{2q_0 l}{k\pi}, & k = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$f_k (\omega_k^2 - \theta^2 + 2i\varepsilon \theta) \rho F \frac{l}{2} = \frac{2q_0 l}{k\pi}, \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

$$f_k = \frac{4q_0}{k\pi\rho F} \frac{1}{\omega_k^2 - \theta^2 + 2i\varepsilon\theta} = \frac{4q_0}{k\pi\rho F} \left[\frac{\omega_k^2 - \theta^2}{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2} - i \frac{2\varepsilon\theta}{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2} \right] =$$

$$= f_k^{(R)} + if_k^{(I)}$$

$$V(x) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4q_0}{k\pi\rho F} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{\omega_k^2 - \theta^2 + 2i\varepsilon\theta}$$

$$\tilde{w}(x, t) = V(x) e^{i\theta t} = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} f_k \sin \frac{k\pi x}{l} (\cos \theta t + i \sin \theta t) =$$

$$= \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (f_k^{(R)} + if_k^{(I)}) \sin \frac{k\pi x}{l} (\cos \theta t + i \sin \theta t)$$

$$w(x, t) = \operatorname{Re} [\tilde{w}(x, t)] = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (f_k^{(R)} \cos \theta t - f_k^{(I)} \sin \theta t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$= \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \sqrt{(f_k^{(R)})^2 + (f_k^{(I)})^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos(\theta t - \gamma_k)$$

$$\sqrt{(f_k^{(R)})^2 + (f_k^{(I)})^2} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2}{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2} \right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2}}$$

$$\gamma_k = \operatorname{arctg} \frac{f_k^{(I)}}{f_k^{(R)}} = \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon\theta}{\omega_k^2 - \theta^2}$$

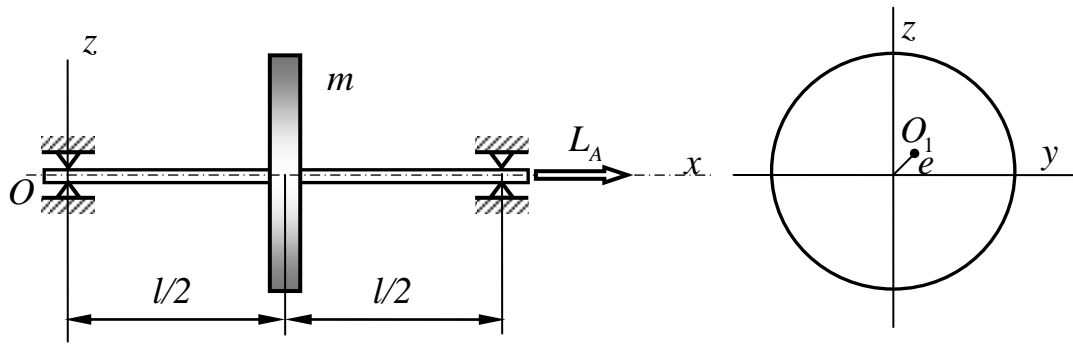
$$w(x, t) = \frac{4q_0}{\rho F} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l} \cos(\theta t - \gamma_k)}{\sqrt{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2}}$$

$$w(x, t) = \frac{4q_0 l^4}{\pi^5 EI} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l} \cos(\theta t - \gamma_k)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_k^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\varepsilon\theta}{\omega_k^2}\right)^2}}$$

15. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛОВ С НЕУРАВНОВЕШЕННЫМИ ДИСКАМИ

15.1. Колебания вала с неуравновешанным диском

Получим уравнение колебаний упругого вала с одним диском, симметрично расположенным на валу



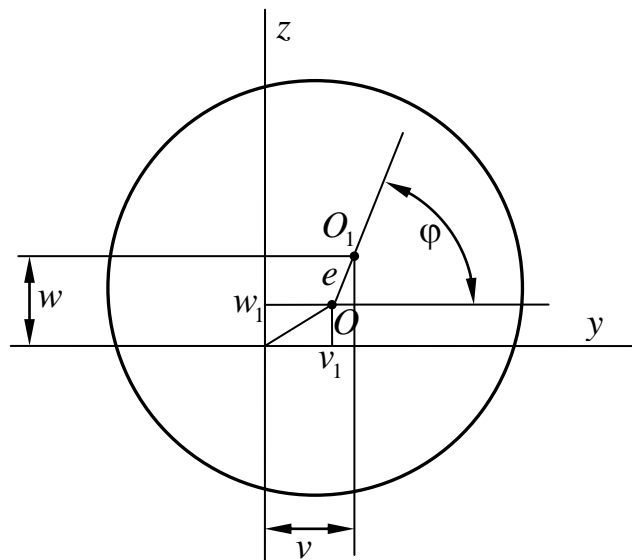
L_A – момент активных сил

e – дисбаланс

Допущения:

1. массой вала пренебрегаем
2. диск совершает колебания в плоскости, параллельной плоскости yOz , не перекашиваясь
3. главные моменты инерции сечения равны между собой (круг, квадрат,...)
4. влиянием трения, силами тяжести пренебрегаем
5. вал считается абсолютно жестким на растяжение и кручение

Составим уравнение колебаний диска



Обобщенные координаты: v, w, φ

Воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = Q_j - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} J_p \dot{\varphi}^2,$$

где J_p – момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс.

Потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{1}{2}c(v_1^2 + w_1^2),$$

где c – коэффициент жесткости вала (при шарнирном опирании $c = \frac{48EI}{l^3}$)

С учетом того, что

$$v_1 = v - e \cos \varphi,$$

$$w_1 = w - e \sin \varphi$$

выражение для Π преобразуется

$$\Pi = \frac{1}{2}c[(v - e \cos \varphi)^2 + (w - e \sin \varphi)^2] = \frac{1}{2}c(v^2 + w^2 + e^2 - 2ev \cos \varphi - 2ew \sin \varphi)$$

Соответствующие производные

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial v} = -cv + ce \cos \varphi; \quad -\frac{\partial \Pi}{\partial w} = -cw + ce \sin \varphi$$

Виртуальная работа внешних сил

$$\delta'A = (L_A - L_T)\delta\varphi = Q_\varphi \delta\varphi$$

L_T – тормозящий момент, Q_φ – обобщенная сила

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_\varphi = -cev \sin \varphi + cew \cos \varphi + (L_A - L_T)$$

Таким образом, приходим к уравнениям

$$m\ddot{v} + cv = ce \cos \varphi$$

$$m\ddot{w} + cw = ce \sin \varphi$$

$$J_\rho \ddot{\varphi} + ce(v \sin \varphi - w \cos \varphi) = L_A - L_T$$

Получили нелинейную систему уравнений. Рассмотрим случай регулируемой угловой скорости, т.е. случай $\dot{\varphi} = \text{const}$. Пусть

$$L_A = L_T + ce(v \sin \varphi - w \cos \varphi)$$

Тогда

$$J_\rho \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \text{const} = \Omega \Rightarrow \varphi = \Omega t + \varphi_0$$

Момент инерции $J_\rho = m\rho^2$, где ρ – радиус инерции диска. Если $e \ll \rho$, но $e \gg |v|, |w|$, то $\dot{\varphi}$ изменяется незначительно.

Можно считать, что $\varphi_0 = 0$.

Тогда уравнения движения принимают вид

$$m\ddot{v} + cv = ce \cos \Omega t$$

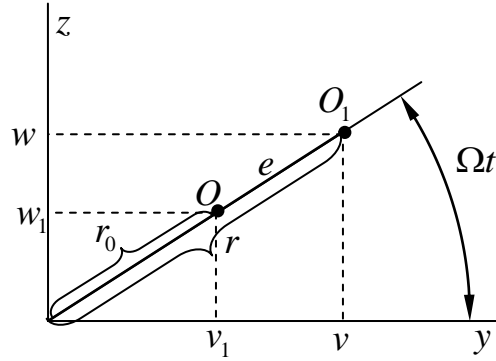
$$m\ddot{w} + cw = ce \sin \Omega t$$

или, обозначив $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – частота собственных изгибных колебаний невращающегося вала с диском,

$$\ddot{v} + \omega^2 v = \omega^2 e \cos \Omega t$$

$$\ddot{w} + \omega^2 w = \omega^2 e \sin \Omega t$$

Решение этих уравнений, соответствующее установившимся колебаниям, имеет вид



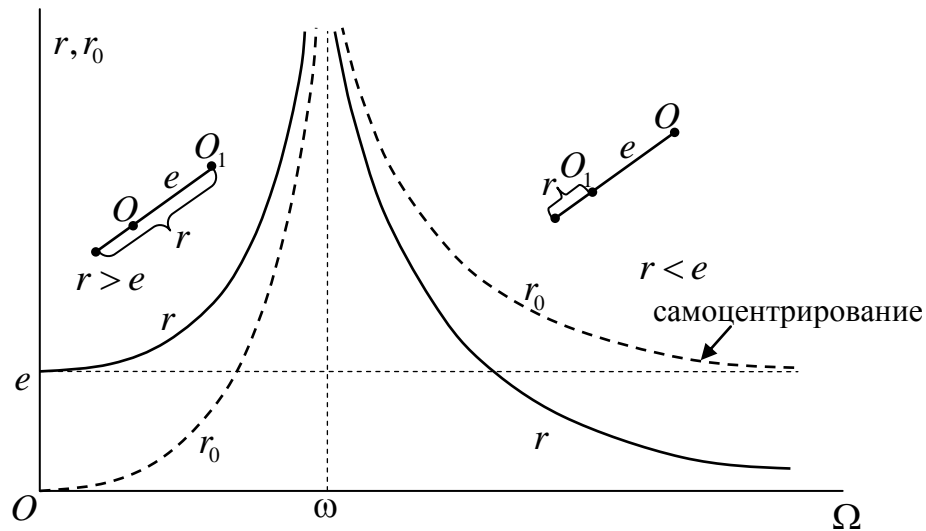
$$v = \frac{e \cos \Omega t}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}, \quad w = \frac{e \sin \Omega t}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}$$

$$r = \sqrt{v^2 + w^2} = \frac{e}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|}$$

$$v_1 = v - e \cos \Omega t = e \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} - 1 \right) \cos \Omega t$$

$$w_1 = w - e \sin \Omega t = e \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} - 1 \right) \sin \Omega t$$

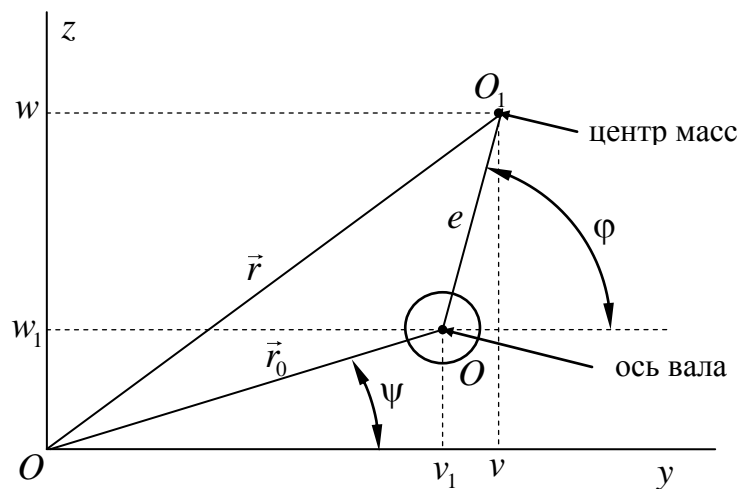
$$r_0 = \frac{e}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|}$$



$\Omega_* = \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – критическая скорость вращения неуравновешенного вала.

Особенность этой задачи состоит в том, что плоские колебания диска необходимо рассматривать совместно с вращательным движением изогнутого вала.

Вал, работающий за критической скоростью (первой), называется гибким.



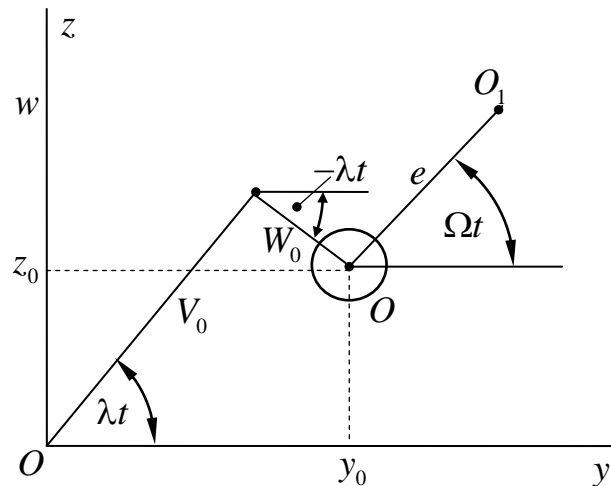
В комплексной форме

$$\vec{r} = v + iw = r_0 e^{i\psi} + e e^{i\varphi}$$

$\varphi = \Omega t$ угловая скорость постоянна.

Вообще говоря, центр вала может описывать эллипс. В таких случаях можно записать

$$\vec{r} = \underbrace{V_0 e^{i\lambda t} + W_0 e^{-i\lambda t}}_{\text{ЭЛЛИПС}} + e e^{i\Omega t}$$



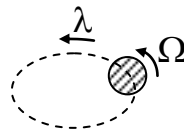
$V_0, W_0, \lambda, \Omega$ – постоянные. λ – скорость прецессии.

$$y_0 = (V_0 + W_0) \cos \lambda t$$

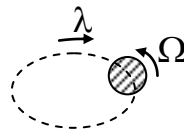
$$z_0 = (V_0 - W_0) \sin \lambda t$$

Прецессионное движение оси вала

– прямая прецессия, если $V_0 > W_0$



– обратная прецессия, если $V_0 < W_0$



В частном случае, когда V_0 или W_0 обращаются в нуль, прецессионное движение представляет собой круговое вращение центра вала.

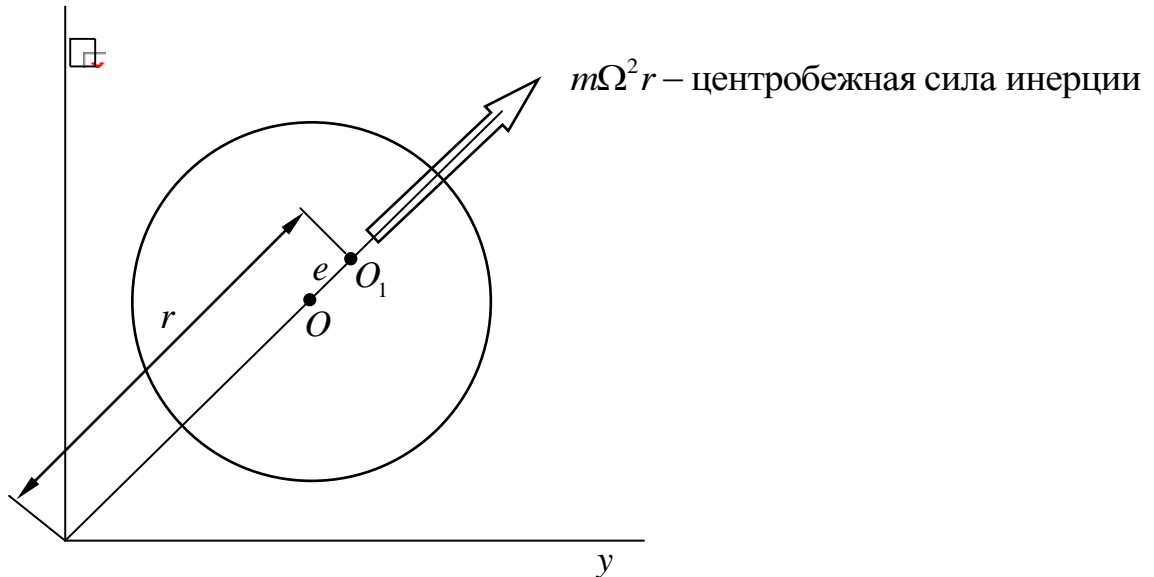
Если $W_0 = 0$, то прямая синхронная прецессия.

Если $V_0 = 0$, то обратная синхронная прецессия.

Прецессия характеризует упругие деформации вала. В рассматриваемом нами случае имеет место прямая прецессия с угловой скоростью, равной скорости вращения вала $W_0 = 0$, $\lambda = \Omega$. Деформации вала не изменяются со временем. Такую прецессию называют нулевой или синхронной.

15.2. Квазистатический подход для определения критических скоростей неуравновешенных вращающихся валов

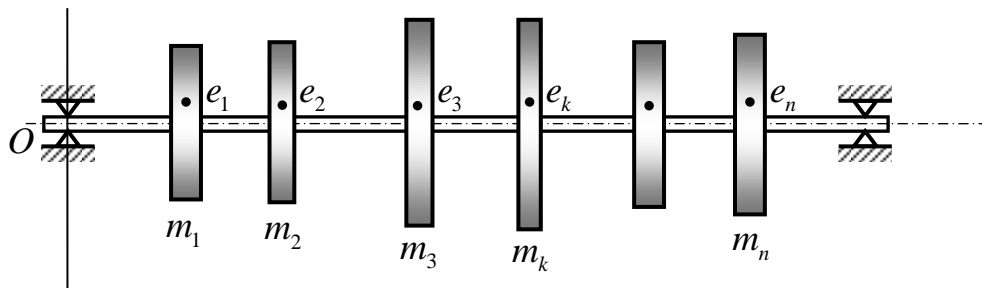
Пусть вал имеет одинаковые изгибные жесткости. Рассмотрим сразу установившуюся нулевую прецессию



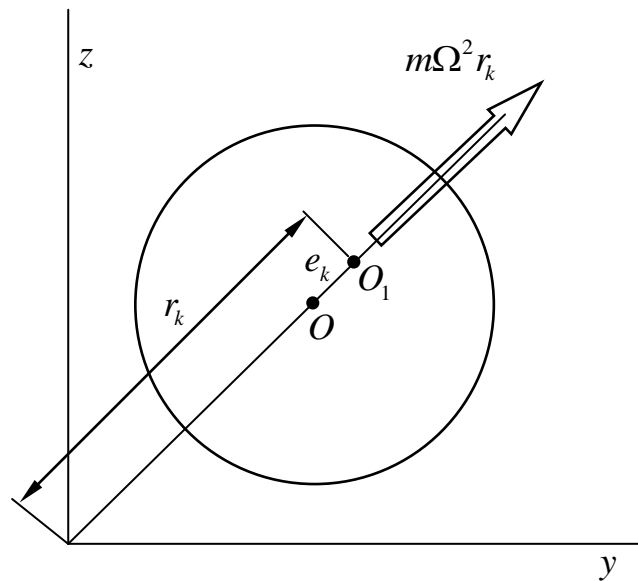
Вычислим прогиб вала $r - e = m\Omega^2 r \cdot \frac{1}{c}$ или $r - e = \frac{\Omega^2}{\omega^2} r$. Откуда

$$r = \frac{e}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}$$

Если вал несет несколько дисков, то без ограничения общности можно предположить, что все центры масс дисков расположены в одной плоскости. Кроме того, пренебрегаем эффектами, связанными с перекосами дисков при деформировании вала (гироскопическими эффектами).



Рассматривается нулевая (синхронная) прецессия



Прогиб вала в месте крепления j -го диска

$$r_j - e_j = \sum_{k=1}^n m_k \Omega^2 r_k \eta_{jk}$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

η_{jk} – матрица единичных перемещений (матрица единичных податливостей).

$$\sum_{k=1}^n (\delta_{jk} - m_k \Omega^2 \eta_{jk}) r_k = e_j \quad (*)$$

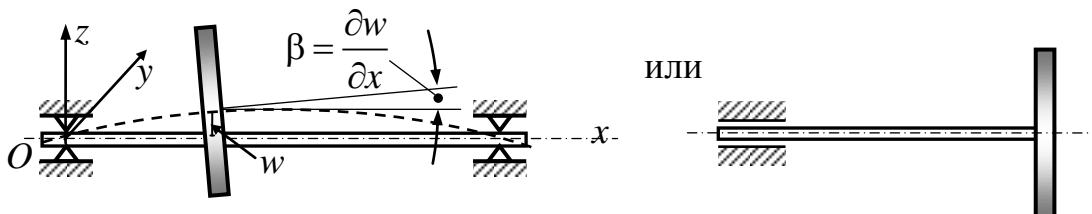
$$j = 1, 2, \dots, n$$

Отсюда получим уравнение для определения критических скоростей вращающегося вала (равенство нулю определителя системы (*))

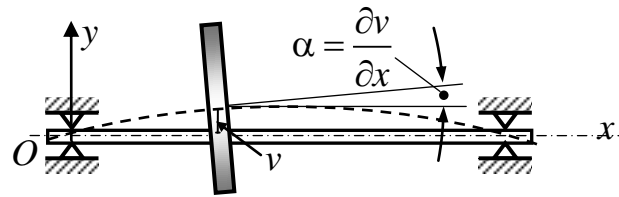
$$\det [\delta_{jk} - m_k \Omega^2 \eta_{jk}] = 0 \Rightarrow \Omega_{*(k)} = \omega_k$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

15.3. Влияние гироскопических сил на критические скорости



Предположим вначале, что $e = 0$, ($v_1 = v$, $w_1 = w$)

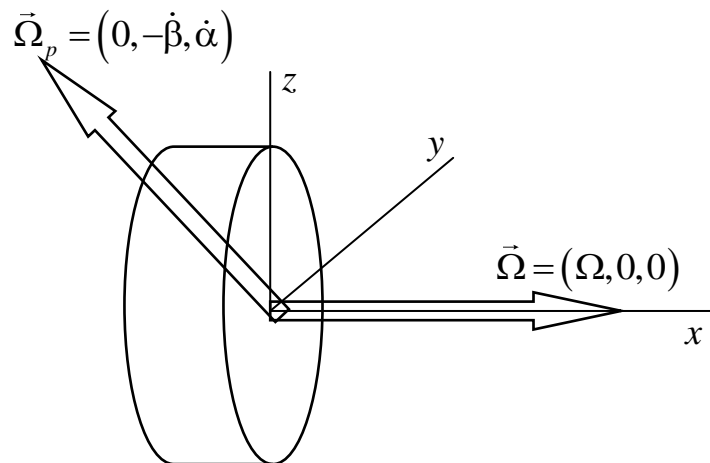


Обобщенные координаты диска: $v, w, \alpha, \beta, \varphi$

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \ll 1$$

$\varphi = \Omega t$ – циклическая координата

Диск вращается с угловой скоростью Ω (гироскопическое движение) и прецессионное движение с угловой скоростью Ω_p



Гироскопический момент

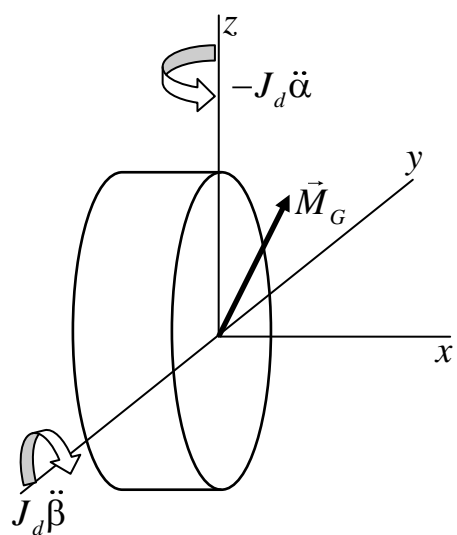
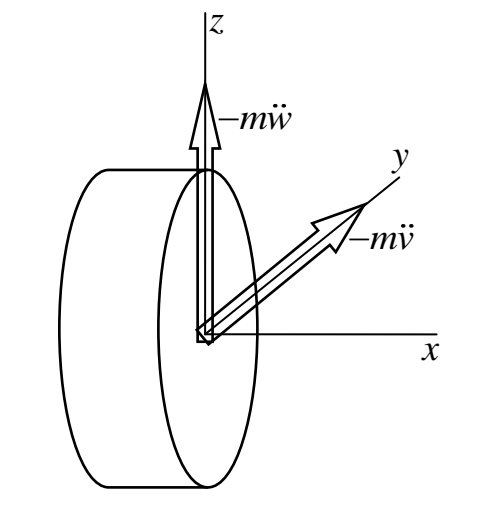
$$\vec{M}_G = J_\rho \vec{\Omega} \times \vec{\Omega}_p = J_\rho \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\beta} & \dot{\alpha} \end{vmatrix} = J_\rho \cdot 0 \cdot \vec{e}_x - J_\rho \cdot \Omega \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{e}_y - J_\rho \cdot \Omega \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{e}_z$$

Итак

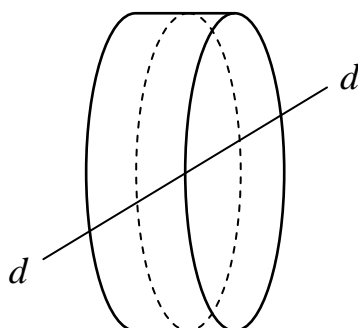
$$\vec{M}_G = (0, -J_\rho \Omega \dot{\alpha}, -J_\rho \Omega \dot{\beta})$$

Вывод уравнений колебаний диска

Силы и моменты инерции



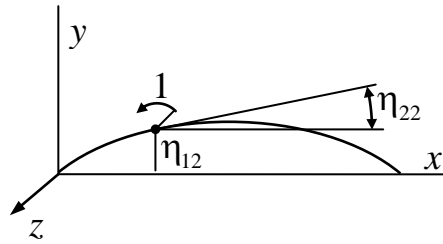
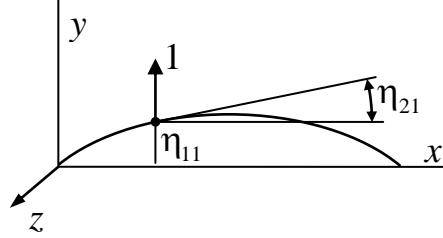
$$\vec{M}_G = (0, -J_p\Omega\dot{\alpha}, -J_p\Omega\dot{\beta})$$



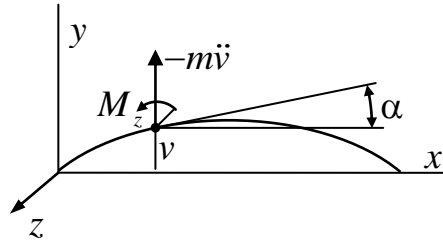
J_d — момент инерции относительно диаметра
Суммарные моменты относительно осей Oz и Oy

$$M_z = -J_d \ddot{\alpha} - J_\rho \Omega \dot{\beta}, \quad M_y = J_d \ddot{\beta} - J_\rho \Omega \dot{\alpha}$$

Рассмотрим плоскость yOx



Так определяются элементы матрицы податливостей η , ($\eta_{12} = \eta_{21}$).



$$v = \eta_{11}(-m\ddot{v}) + \eta_{12}M_z$$

$$\alpha = \eta_{22}M_z + \eta_{21}(-m\ddot{v})$$

Или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} v \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -m\ddot{v} \\ M_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -m\ddot{v} \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Здесь $c_{11} = \frac{\eta_{22}}{\Delta}$, $c_{22} = \frac{\eta_{11}}{\Delta}$, $c_{12} = c_{21} = -\frac{\eta_{12}}{\Delta} = -\frac{\eta_{21}}{\Delta}$, $\Delta = \eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21} > 0$

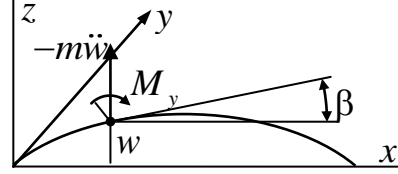
$$-m\ddot{v} = c_{11}v + c_{12}\alpha$$

$$M_z = c_{21}v + c_{22}\alpha$$

$$m\ddot{v} + c_{11}v + c_{12}\alpha = 0$$

$$J_d\ddot{\alpha} + J_\rho\Omega\dot{\beta} + c_{21}v + c_{22}\alpha = 0$$

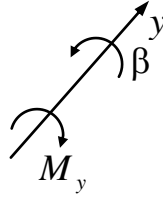
Теперь рассмотрим плоскость zOx



$$w = \eta_{11}(-m\ddot{w}) - \eta_{12}M_y$$

$$\beta = \eta_{21}(-m\ddot{w}) - \eta_{22}M_y$$

$-M_y$, так как \Rightarrow



$$\begin{bmatrix} w \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -m\ddot{w} \\ -M_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -m\ddot{w} \\ -M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$m\ddot{w} + c_{11}w + c_{12}\beta = 0$$

$$J_d\ddot{\beta} - J_\rho\Omega\dot{\alpha} + c_{21}w + c_{22}\beta = 0$$

Таким образом, имеем систему дифференциальных уравнений

$$m\ddot{v} + c_{11}v + c_{12}\alpha = 0$$

$$m\ddot{w} + c_{11}w + c_{12}\beta = 0$$

$$J_d\ddot{\alpha} + J_\rho\Omega\dot{\alpha} + c_{21}v + c_{22}\alpha = 0$$

$$J_d\ddot{\beta} - J_\rho\Omega\dot{\alpha} + c_{21}w + c_{22}\beta = 0$$

Здесь гироскопические члены $J_\rho\Omega\dot{\beta}$, $-J_\rho\Omega\dot{\alpha}$

Удобно ввести комплексные переменные $u = v + iw$ и $\gamma = \alpha + i\beta$
Тогда

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + c_{11}u + c_{12}\gamma &= 0 \\ J_d\ddot{\gamma} - iJ_\rho\Omega\dot{\gamma} + c_{21}u + c_{22}\gamma &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Определение собственных частот

Получим частотное уравнение. Пусть

$$u = Ae^{i\omega t}, \quad \gamma = Be^{i\omega t}$$

Подставим в уравнение (*), получим систему уравнений относительно амплитуд

$$\begin{aligned} (c_{11} - \omega^2 m)A + c_{12}B &= 0 \\ c_{21}A + (c_{22} - J_d\omega^2 + J_\rho\Omega\omega)B &= 0 \end{aligned}$$

Условие нетривиальности решения для A и B дает частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 m & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - J_d\omega^2 + J_\rho\Omega\omega \end{vmatrix} = 0$$

При отсутствии гироскопических сил $c_{11} - \omega^2 m = 0$

Раскрывая определитель, получим

$$mJ_d\omega^4 - mJ_\rho\Omega\omega^3 + (-c_{22}m - c_{11}J_d)\omega^2 + J_\rho c_{11}\Omega\omega + c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0$$

или

$$\omega^4 - \frac{J_\rho}{J_d}\Omega\omega^3 - \left(\frac{c_{22}}{J_d} + \frac{c_{11}}{m}\right)\omega^2 + \frac{J_\rho}{J_d}\frac{c_{11}}{m}\Omega\omega + \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{mJ_d} = 0$$

Теорема Декарта о корнях многочлена (1637): Число положительных корней многочлена с действительными коэффициентами равно или на четное число меньше числа перемен знаков в ряду его коэффициентов.

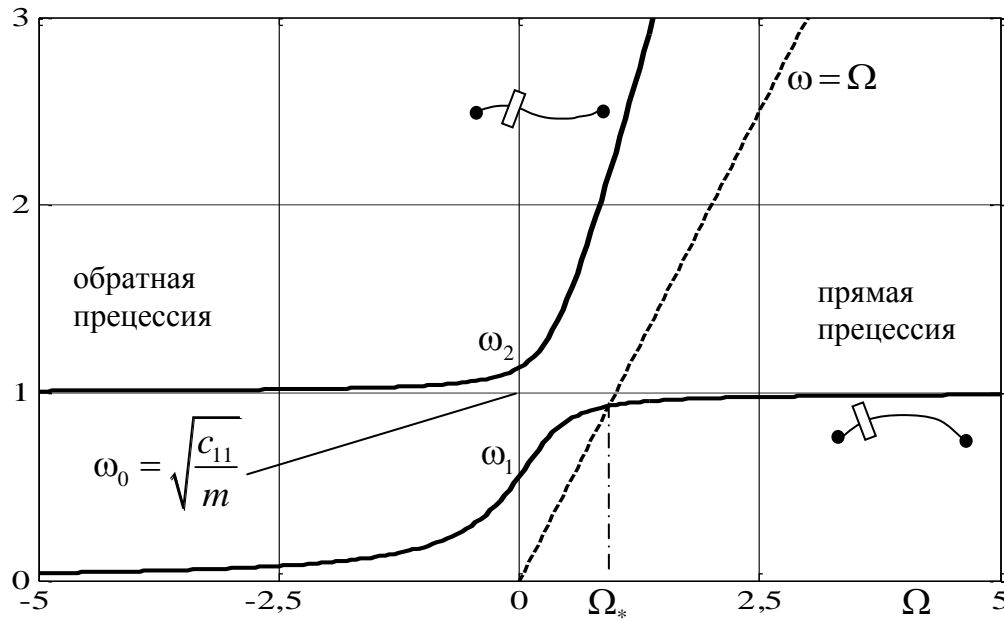
Если $\Omega > 0$, то по теореме Декарта число положительных корней равно двум, т.к. знаки коэффициентов $+-++$ (ω_1^+, ω_2^+)

Если $\Omega < 0$, то также два положительных корня, т.к. знаки коэффициентов $++--$ (ω_1^-, ω_2^-)

На рисунке представлены вычисления для ротора с шарнирно опертом по концам валом жесткостью EI и несущем на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины от левого конца диск радиуса R малой толщины и массой m . В этом случае матрица единичных податливостей имеет вид

$$[\eta_{jk}] = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \frac{4l^3}{243} & \frac{2l^2}{81} \\ \frac{2l^2}{81} & \frac{l}{9} \end{bmatrix}$$

Собственные частоты отнесены к характерной частоте $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_{11}}{m}}$



Частоты собственных колебаний повышаются при $\Omega > 0$ и понижаются при $\Omega < 0$

Если имеется неуравновешенность $e \neq 0$, то

$$m\ddot{v} + c_{11}(v - e \cos \Omega t) + c_{12}\alpha = 0$$

$$m\ddot{w} + c_{11}(w - e \sin \Omega t) + c_{12}\beta = 0$$

$$J_d\ddot{\alpha} + J_p\Omega\dot{\alpha} + c_{21}v + c_{22}\alpha = 0$$

$$J_d\ddot{\beta} - J_p\Omega\dot{\beta} + c_{21}w + c_{22}\beta = 0$$

Напомним, что v и w отклонения центра масс от оси вращения.

Как и прежде $u = v + iw$ и $\gamma = \alpha + i\beta$. Тогда

$$m\ddot{u} + c_{11}u + c_{12}\gamma = c_{11}e \cdot e^{i\Omega t}$$

$$J_d\ddot{\gamma} - iJ_p\Omega\dot{\gamma} + c_{21}u + c_{22}\gamma = 0$$

Имеем задачу о вынужденных колебаниях

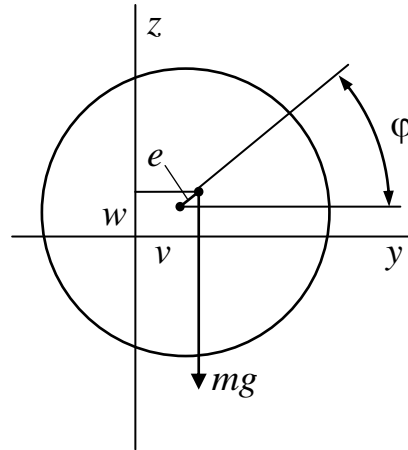
$$u = Ce^{i\Omega t}, \quad \gamma = De^{i\Omega t}$$

Подстановка в уравнения дает неоднородную систему относительно амплитуд C и D . Определитель этой системы совпадает с частотным уравнением при $\omega \Rightarrow \Omega$.

Критические скорости с учетом гироскопических сил выше. Существенно, что неуравновешенности вызывают критическое состояние вала только на движении типа прямой прецессии.

15.4. Влияние собственного веса. Критические скорости второго порядка

Неравномерность вращения – причина возникновения критических скоростей второго рода. Рассмотрим неравномерность вращения вследствие влияния собственного веса.



Уравнения движения в данном случае

$$m\ddot{v} + cv = ce \cos \varphi$$

$$m\ddot{w} + cw = ce \sin \varphi - mg$$

$$J_p \ddot{\varphi} + ce(v \sin \varphi - w \cos \varphi) = (L_A - L_T) - \underset{\text{тормозящий момент}}{mge \cos \varphi}$$

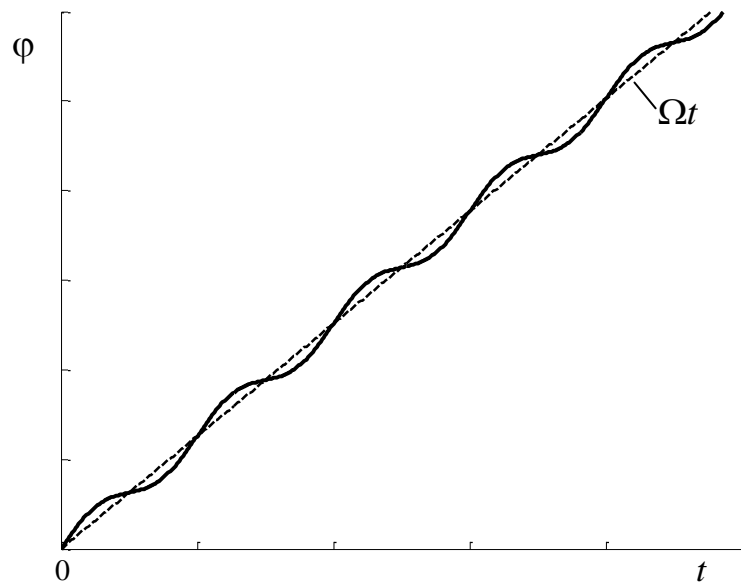
Предположим (как и раньше), что $L_A = L_T + ce(v \sin \varphi - w \cos \varphi)$

Тогда $\varphi \approx \Omega t$. Третье уравнение примет вид

$$J_p \ddot{\varphi} = -mge \cos \varphi$$

Интегрируем $\varphi = \Omega t + \varphi_0 + \frac{mge}{J_p \Omega^2} \cos \Omega t$

Пусть $\varphi_0 = 0$ и $\varepsilon = \frac{mge}{J_p \Omega^2} \ll 1$

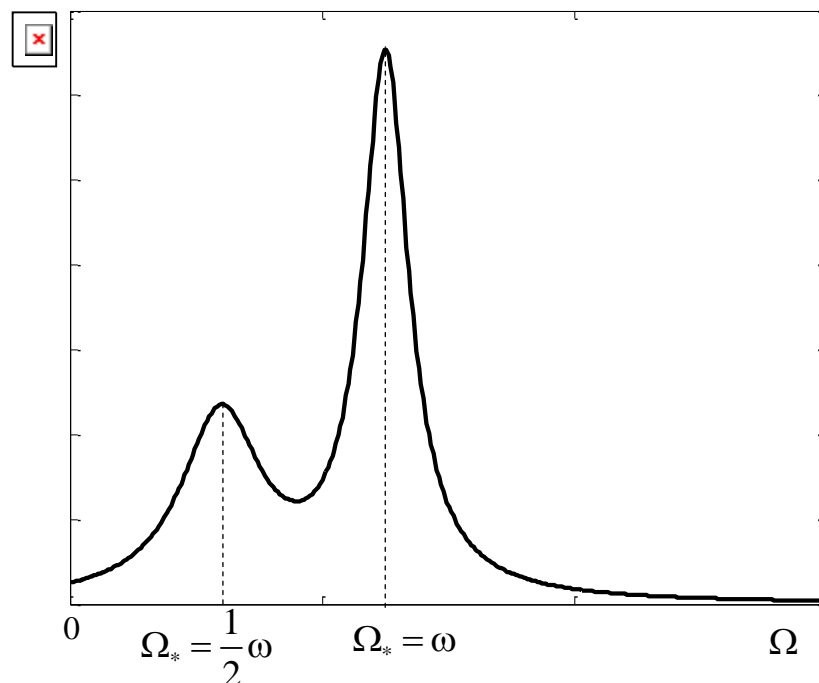


В правые части первого и второго уравнения входят $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$

$$\cos \varphi = \cos(\Omega t + \varepsilon \cos \Omega t) \approx \cos \Omega t - \varepsilon \cos \Omega t \sin \Omega t = \cos \Omega t - \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\Omega t$$

Таким образом, кроме резонанса $\Omega_* = \omega$, возможен резонанс в окрестности

$2\Omega = \omega$. Критическая скорость второго рода $\Omega_* = \frac{1}{2}\omega$



Учет внешнего трения

$$\ddot{v} + 2\varepsilon \dot{v} + \omega^2 v = \omega^2 e \cos \Omega t$$

$$\ddot{w} + 2\varepsilon \dot{w} + \omega^2 w = \omega^2 e \sin \Omega t$$

Или, если ввести $r = v + iw$

$$\ddot{r} + 2\varepsilon\dot{r} + \omega^2 r = \omega^2 e \cdot e^{i\Omega t}$$

$$r = Ae^{i\Omega t}$$

$$A = \frac{\omega^2 e}{\omega^2 - \Omega^2 + 2i\varepsilon\Omega}$$

$$a = |r| = |A| = \frac{\omega^2 e}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\Omega^2}}$$

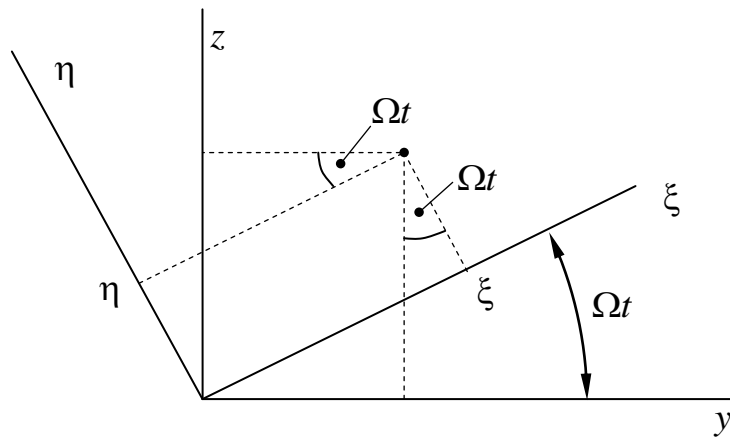
15.5. Влияние внутреннего трения на критические скорости вращения вала

Пусть диск сбалансирован ($e = 0$). Тогда

$$\begin{aligned} \ddot{v} + \omega^2 v &= 0 \\ \ddot{w} + \omega^2 w &= 0 \end{aligned} \quad \text{и} \quad r = v + iw$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \omega^2 r = 0 \quad (*)$$

Для введения внутреннего трения перейдем к вращающейся системе координат (ξ, η)



$$r = \varsigma e^{i\Omega t}, \text{ где } \varsigma = \xi + i\eta$$

Преобразуем уравнение (*)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \dot{\varsigma} e^{i\Omega t} + i\Omega \varsigma e^{i\Omega t} = (\dot{\varsigma} + i\Omega \varsigma) e^{i\Omega t} \\ \ddot{r} &= (\ddot{\varsigma} + 2i\Omega \dot{\varsigma} - \Omega^2 \varsigma) e^{i\Omega t} \end{aligned}$$

И вместо (*) имеем

$$\ddot{\varsigma} + 2i\Omega \dot{\varsigma} + (\omega^2 - \Omega^2) \varsigma = 0$$

Добавим в это уравнение член, учитывающий внутреннее трение $\varepsilon_i \dot{\zeta}$

$$\ddot{\zeta} + 2i\Omega\dot{\zeta} + \varepsilon_i \dot{\zeta} + (\omega^2 - \Omega^2)\zeta = 0 \quad (**)$$

А теперь вернемся к неподвижной системе координат

$$\begin{aligned}\zeta &= r e^{-i\Omega t} \\ \dot{\zeta} &= (\dot{r} - i\Omega r) e^{-i\Omega t} \\ \ddot{\zeta} &= (\ddot{r} - 2i\Omega\dot{r} - \Omega^2 r) e^{-i\Omega t}\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (**), получим

$$\ddot{r} + \varepsilon_i \dot{r} + \omega^2 r - i\varepsilon_i \Omega r = 0$$

Если учесть еще и внешнее трение $\varepsilon_e \dot{\zeta}$

$$\ddot{r} + (\varepsilon_e + \varepsilon_i) \dot{r} + \omega^2 r - i\varepsilon_i \Omega r = 0 \quad (***)$$

Или в координатной форме

$$\begin{aligned}\ddot{v} + (\varepsilon_e + \varepsilon_i) \dot{v} + \omega^2 v + \varepsilon_i \Omega w &= 0 \\ \ddot{w} + (\varepsilon_e + \varepsilon_i) \dot{w} + \omega^2 w - \varepsilon_i \Omega v &= 0\end{aligned}$$

Решение уравнения (***) ищем в виде $r(t) = |r| e^{i\lambda t}$. Здесь λ – характеристические показатели, определяемые из уравнения

$$\lambda^2 + (\varepsilon_e + \varepsilon_i) i\lambda + \omega^2 - i\varepsilon_i \Omega = 0$$

На границе области устойчивости $\text{Im}\lambda = 0$. Тогда из предыдущего уравнения имеем два условия

$$\begin{aligned}1. \lambda^2 - \omega^2 &= 0 \\ 2. (\varepsilon_e + \varepsilon_i) \lambda - \varepsilon_i \Omega &= 0\end{aligned}$$

Из первого условия следует известный результат $\lambda = \omega$, т.е. колебания происходят с собственной частотой. Из второго условия находим критическую частоту вращения Ω_* . Так как $2. \Rightarrow (\varepsilon_e + \varepsilon_i) \omega - \varepsilon_i \Omega_* = 0$

$$\Omega_* = \omega \left(1 + \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_i} \right)$$

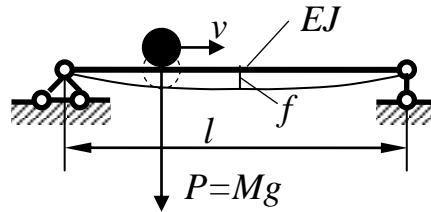
Качественно эта формула правильно отражает стабилизирующую роль внешнего трения. Однако количественно эта формула экспериментально не подтверждается из-за чрезмерной схематизации сил трения.

16. КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

16.1. Постановка задачи. Решение Кокса

Поводом для постановки первых теоретических и экспериментальных исследований динамического действия подвижных нагрузок послужило обрушение Честерского моста (Англия) в 1847 г.

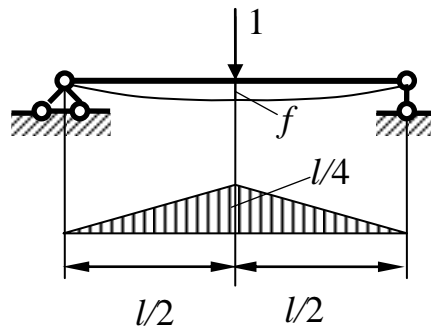
Первая попытка теоретического решения – Кокс (1848) для задачи



Динамический коэффициент для этой задачи по Коксу $k_d = 2$.

Рассуждения Кокса следующие: $A = P \cdot f$ – работа силы, когда груз находится в середине пролета.

Потенциальная работа упругой деформации балки



$$\Pi = \frac{1}{2} c f^2, \text{ где } c = \frac{48EJ}{l^3}$$

Действительно, податливость (единичное перемещение точки приложения единичной силы) f_{11}

$$f_{11} = \frac{l^3}{48EJ}; \quad c = \frac{1}{f_{11}} = \frac{48EJ}{l^3}$$

Тогда потенциальная энергия определится как

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{48EJ}{l^3} f^2$$

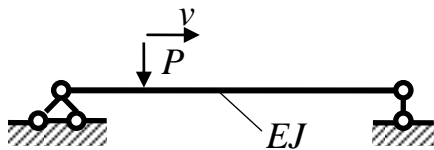
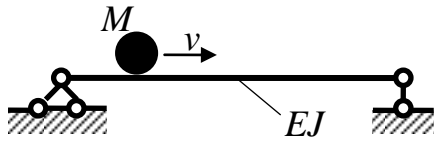
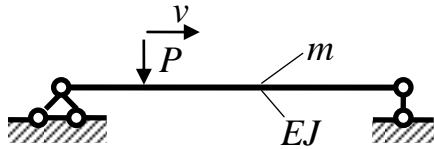
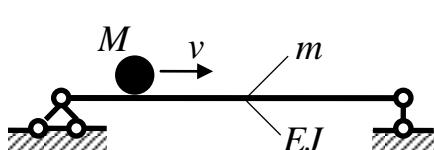
Закон сохранения энергии дает

$$A = \Pi \Rightarrow Pf = \frac{24EJ}{l^3} f^2 \Rightarrow f = \frac{Pl^3}{24EJ} = 2 \frac{Pl^3}{48EJ} = 2f_{ст}$$

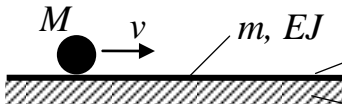
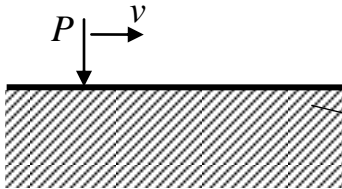
$$\boxed{k_d = 2}$$

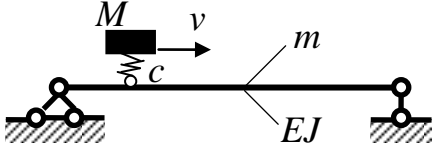
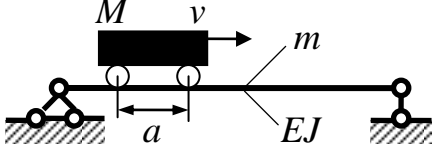
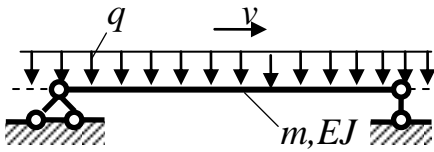
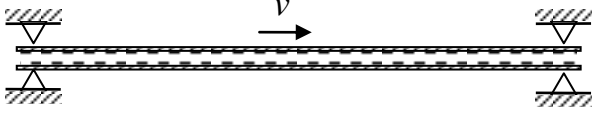
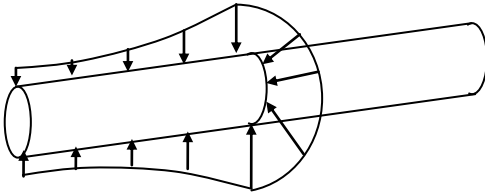
Уже через год Стокс опроверг этот результат: Баланс энергии у Кокса ($A = \Pi$) не учитывает работу горизонтальной силы, необходимой для поддержания скорости груза постоянной.

Дальнейшие исследования – различные постановки задачи

1		Балка и груз - безинерционные
2		Груз – инерционный, балка - безинерционная
3		Балка – инерционная, груз – безинерционный
4		Балка и груз – инерционная

Некоторые другие задачи на действие подвижной нагрузки

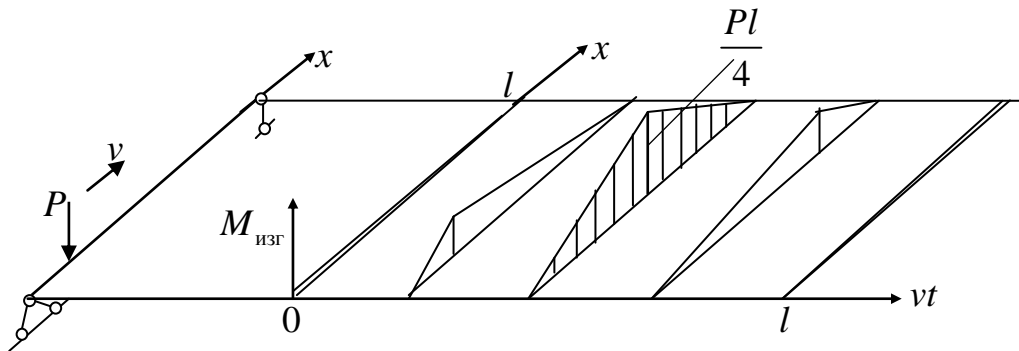
a)		балка упругое основание
б)		упругое полупространство

б)	 <p>Движение поддрессоренного груза</p>
в)	
г)	 <p>Подвижная распределенная нагрузка</p>
д)	 <p>Движение жидкости в гибком трубопроводе</p>
жс)	 <p>Действие ударной волны</p>

Рассмотрим простейшие задачи

16.2. Действие безинерционной подвижной нагрузки на безинерционную балку

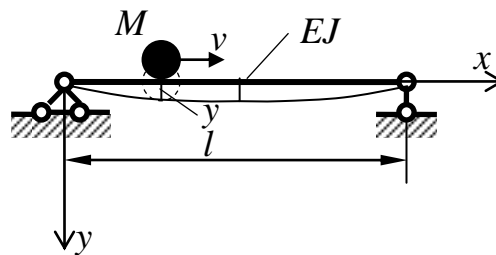
1. Схема 1. Действие безинерционной подвижной нагрузки на безинерционную балку (схема 1). Винклер, Мор (середина XIX века). Динамики нет, только кинематика.



Строится линия влияния. Такое приближение справедливо для малых скоростей движения v .

16.3. Действие инерционной подвижной нагрузки на безинерционную балку

2. Схема 2 (инерционный груз, безинерционная балка). Исследование сводится к решению задачи о массе на пружине с переменной во времени жесткостью (Виллис – 1849).



Уравнение движения

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = Mg - c(t) y$$

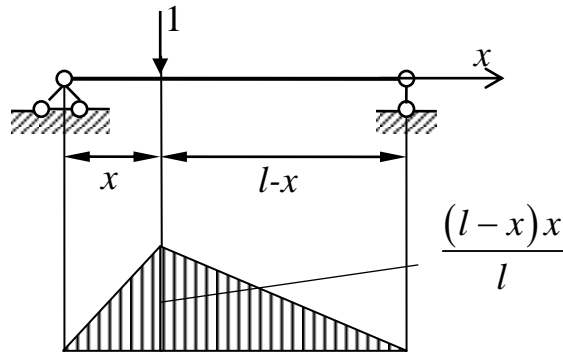
Координата массы x является функцией времени

$$x = vt, \quad \frac{d}{dt} = v \frac{d}{dx}$$

Уравнение движения можно переписать

$$M \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{c(x)}{v^2} y = \frac{Mg}{v^2}$$

Определим жесткость балки как функцию координаты массы $c(x)$



Используя метод Максвелла-Мора, получим

$$c(x) = \frac{3EJl}{x^2(l-x)^2}$$

Окончательно уравнение движения массы имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{3EJl}{Mv^2 x^2 (l-x)^2} y = \frac{g}{v^2}$$

Это дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Решение Стокса (приближенное в рядах и в квадратурах). Коэффициент динамичности в первом приближении

$$k_d \approx 1 + \frac{Ml}{3EJ} v^2$$

Буссинеск (1883) – предложил замену переменных

$$\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{l-x}, \quad \eta = y \frac{8v^2}{gl^2} \operatorname{ch} \xi,$$

которая приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + a^2 \eta = \frac{2}{\operatorname{ch}^2 \xi}, \quad \text{где } a^2 = \left| \frac{12EJ}{mlv^2} - 1 \right|$$

Ошибка Бресса

(1859)

Пусть $t = \frac{l}{2v}$, т.е. груз находится посередине пролета балки.

Изгибающий момент в этом сечении равен

$$M_{\text{изг}} = \frac{Pl}{4} + \frac{Pl}{4g} \frac{v^2}{\rho} \quad (*)$$

Здесь $\frac{1}{\rho}$ – кривизна траектории движения груза,

$\frac{Pl}{4g} \frac{v^2}{\rho}$ – дополнительный изгибающий момент от центробежной силы.

Из элементарной теории изгиба стержней имеем

$$M_{\text{изг}} = \frac{EJ}{\rho} \quad (**)$$

Исключая $\frac{1}{\rho}$ из соотношений (*) и (**), получим

$$M_{\text{изг}} = \frac{Pl}{4 - \frac{Plv^2}{EJg}}$$

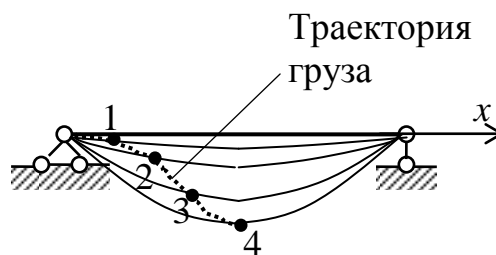
Отсюда получаем критическое значение скорости движения груза

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{4gEJ}{Pl}},$$

при котором изгибающий момент стремится к бесконечности $M_{\text{изг}} \rightarrow \infty$.

Но это решение неверно, т.к. $\frac{1}{\rho}$ в выражении (*) и $\frac{1}{\rho}$ в выражении (**)

разные: соответственно – кривизна траектории и кривизна упругой линии. Это разные величины

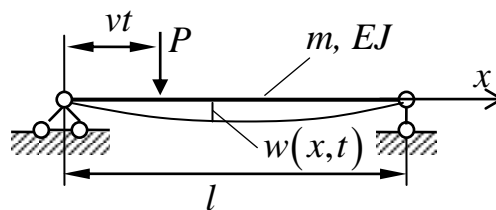


т. 1, 2, 3, 4 – различные моменты времени через интервал Δt

Указанные кривизны различны и для схемы 1.

16.4. Действие безинерционной подвижной нагрузки на инерционную балку

3. Схема 3. Безинерционная нагрузка, инерционная балка



На балку действует подвижная сосредоточенная сила, которую представим с помощью дельта-функции и учтем в уравнении движения внешнее трение

$2\epsilon m \frac{\partial w}{\partial t}$. Тогда получим

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\epsilon m \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P\delta(x - vt).$$

Это уравнение интегрируется с нулевыми начальными условиями. Применим метод собственных функций (метод разложения по формам собственных колебаний)

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} W_j(t) \varphi_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} W_j(t) \sin \frac{j\pi x}{l}$$

Подставим в уравнение, умножим на $\sin \frac{k\pi x}{l}$ и проинтегрируем от 0 до l (процедура метода Бубнова-Галеркина)

$$\ddot{W}_j + 2\varepsilon \dot{W}_j + \omega_j^2 W_j = \begin{cases} \frac{2}{ml} P \sin \frac{j\pi vt}{l}, & 0 < t < \frac{l}{v} \\ 0, & t \leq 0 \\ 0, & t \geq \frac{l}{v} \end{cases}$$

Для отрезка времени $0 < t < \frac{l}{v}$ имеем задачу о вынужденных колебаниях. С помощью интеграла Дюамеля

$$W_j(t) = \frac{2P}{ml} \frac{1}{\omega_{ej}} \int_0^t \sin \frac{j\pi v\tau}{l} e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega_{ej}(t-\tau) d\tau, \quad t < \frac{l}{v}$$

Далее $\left(t > \frac{l}{v}\right)$ решается задача о свободных колебаниях с начальными условиями при $t = \frac{l}{v}$.

Через ω_{ej} обозначено $\omega_{ej} = \sqrt{\omega_j^2 - \varepsilon^2}$, $\omega_j = \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$

Для усилий ряды оказываются расходящимися, но для $w(x, t)$ – ряд сходится. Хуже ряд сходится для напряжений.

Введем параметры

$$\alpha = \frac{\theta}{\omega_1}, \quad \theta = \frac{\pi v}{l}, \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{v}{2f_1 l} = \frac{T_1}{2T}$$

Здесь $f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}$, $T = \frac{l}{v}$, $T_1 = \frac{1}{f_1}$

$$\alpha = \frac{vl}{\pi} \left(\frac{m}{EJ} \right)^{1/2} = \frac{v}{v_{кр}}, \quad \text{где} \quad v_{кр} = \frac{\pi}{l} \left(\frac{EJ}{m} \right)^{1/2}$$

$$\beta = \frac{\varepsilon}{\omega_1} = \frac{\delta}{2\pi}, \quad \delta - \text{декремент колебаний}$$

Для $t \leq T$ получим следующую формулу

$$w(x, t) = w_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2 [j^2 (j^2 - \alpha^2) + 4\alpha^2 \beta^2]} \left[j^2 (j^2 - \alpha^2) \sin j\theta t - \right. \\ \left. - \frac{j\alpha [j^2 (j^2 - \alpha^2) - 2\beta^2]}{(j^2 - \alpha^2)^{1/2}} e^{-\varepsilon t} \sin \omega_{\varepsilon j} t - \right. \\ \left. - 2j\alpha\beta (\cos j\theta t - e^{-\varepsilon t} \cos \omega_{\varepsilon j} t) \right] \sin \frac{j\pi x}{l}$$

где

$$w_0 \approx \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ}, \quad w_0 = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

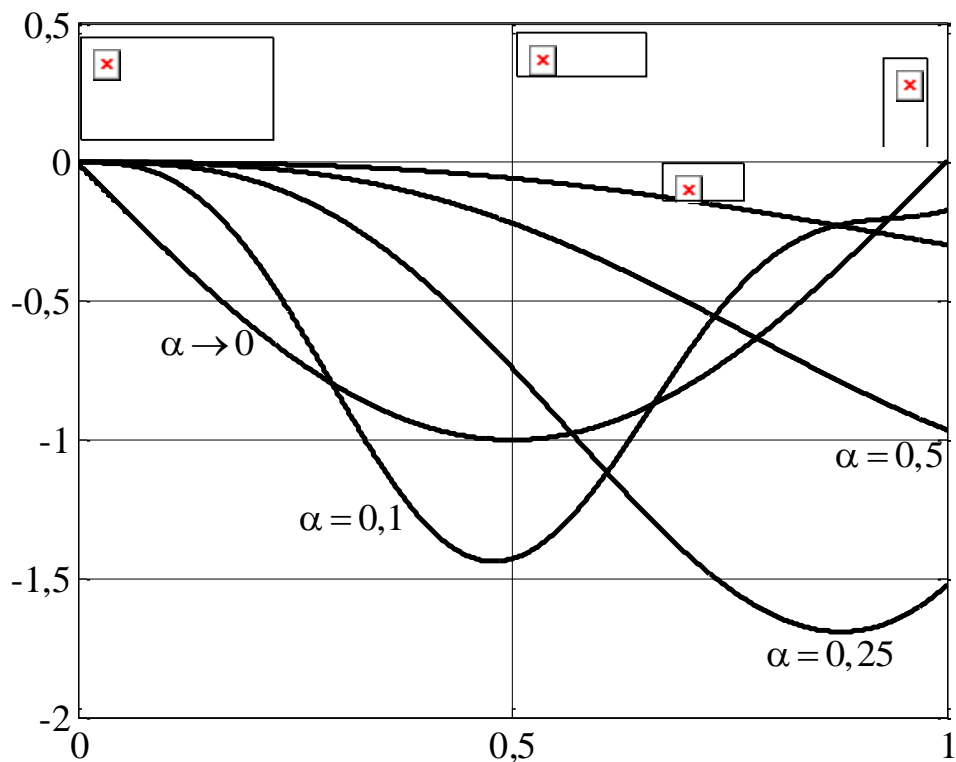
(по Галеркину) (точное)

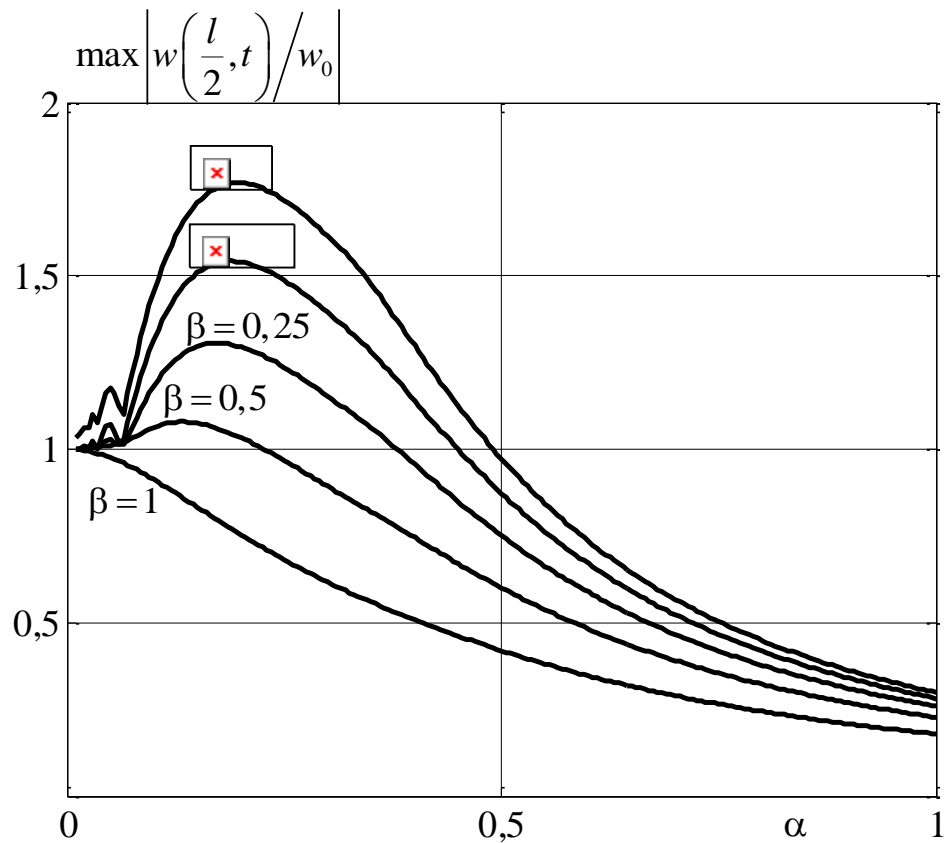
В случае отсутствия диссипации

$$w(x, t) = w_0 \sum_{j=1}^{\infty} \sin \frac{j\pi x}{l} \frac{1}{j^2 (j^2 - \alpha^2)} \left(\sin j\theta t - \frac{\alpha}{j} \sin \omega_j t \right)$$

При $j = \alpha$ могут быть особенности

Некоторые графики





Для стальной балки $v_{кр} = 2f_1 l = \frac{10^3}{4l} \approx 500 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, т.е. для реальных конструкций критические скорости не достигаются.

16.5. Действие инерционной подвижной нагрузки на инерционную балку

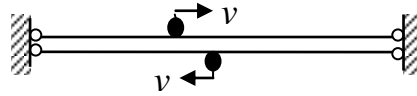
4. Схема 4. Груз и балка – инерционные.

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\epsilon m \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left(\underset{\substack{\text{полная} \\ \text{производная} \\ \text{по времени}}}{Mg - M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}} \right) \delta(x - vt)$$

Для определения сил инерции груза необходимо учитывать, что его координата x зависит от времени, т.е. $x = vt$. Поэтому проекция скорости груза на ось y равна полной производной по времени

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{d^2 w}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{d}{dt} \left(v \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}_{\text{вертикальное ускорение}} + \underbrace{2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}}_{\text{кориолисово ускорение}} + \underbrace{v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{\text{центробежное ускорение}} \end{aligned}$$

Обычно ищут решение без второго $\left(2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)$ члена, соответствующего кариолисову ускорению для схем



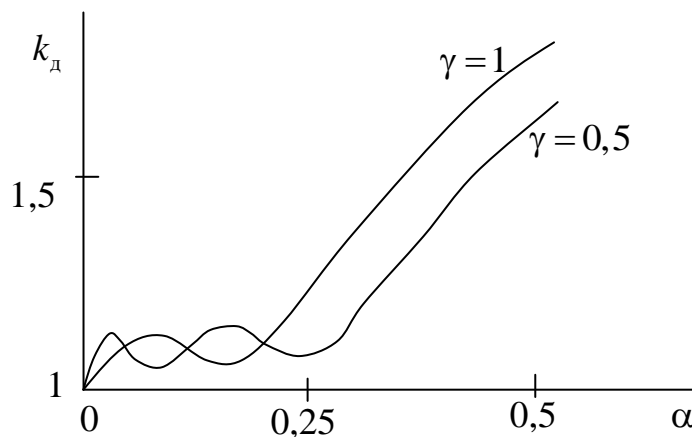
Применяют метод собственных функций

$$w(x, t) = \sum_j W_j(t) \sin \frac{j\pi x}{l},$$

однако система уравнений относительно обобщенных координат не разделяется

В некоторых задачах второй член является главным (задачи динамической неустойчивости). Задача в этом случае оказывается неконсервативной.

А.П.Филиппов предложил сводить к интегральному уравнению с последующим численным решением



$$\gamma = \frac{M}{ml}$$

16.6. Исследование устойчивости трубопровода с протекающей жидкостью

Неконсервативные нагрузки на упругие системы, в частности, на трубопроводы возникают со стороны протекающей по ним жидкости. Задача об устойчивости участка трубопровода, по которому протекает жидкость, рассмотрена в известном сборнике задач В.И.Феодосьева. Область устойчивости и частота флаттера здесь определялись путем представления решения уравнения возмущенного движения в виде степенного ряда. В данном параграфе мы построим границу описанными выше методами.

Рассмотрим прямолинейный участок трубопровода, наполненный невязкой жидкостью, которая движется с невозмущенной скоростью v . Расчетная схема трубопровода может быть представлена в виде стержня с

изгибной жесткостью EI , погонной массой m_0 и длиной l . Пусть один конец стержня жестко зашпелен в заделке, а другой свободен от закреплений (рис. 1). Плотность протекающей жидкости обозначим через m , а перемещения сечений стержня при отклонениях от прямолинейной формы равновесия – через $w(x, t)$.

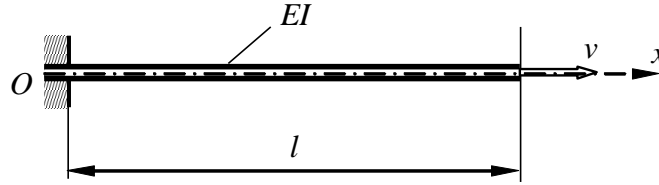


Рис. 1. Расчетная схема участка трубопровода

Будем считать движение жидкости одномерным, а условия на выходе из трубопровода такими, что осевые усилия от потока отсутствуют. При этом можно трактовать жидкость как подвижную нагрузку с интенсивностью сил

инерции, равной $-m \frac{d^2 w}{dt^2}$. Здесь под оператором d^2/dt^2 понимается полная производная по времени, при вычислении которой необходимо учитывать, что жидкость участвует в двух движениях: движение по трубопроводу со скоростью v и в отклонениях $w(x, t)$ от оси Ox вместе с деформациями трубопровода

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Кроме обычной нормальной даламберовой силы, учитываемой первым членом в правой части этого выражения, второй член соответствует кориолисовому ускорению из-за поворота потока частиц жидкости, и третий член связан с центробежными силами, определяемыми кривизной потока при колебаниях трубопровода. Введем в рассмотрение также силы внутреннего трения по модели Фойхта. Оператор внешнего рассеяния энергии считаем пропорциональным инерционному оператору. Тогда уравнение малых колебаний около невозмущенной формы равновесия $w \equiv 0$ можно записать в виде

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b_i EI \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + 2b_e (m_0 + m) \frac{\partial w}{\partial t} + (m_0 + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2mv \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + mv^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

где b_i, b_e – параметры внутреннего (фойхтовского) и внешнего трения. Уравнение (1) необходимо дополнить граничными условиями

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (x = 0),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \left(1 + b_i \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad (x = l). \quad (2)$$

Введем безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}, \quad \varepsilon_i = b_i \omega_0, \quad \varepsilon_e = \frac{b_e}{\omega_0}, \quad (3)$$

$$\mu = \frac{m}{m_0 + m}, \quad \alpha = v \sqrt{\frac{ml^2}{EI}}.$$

За параметры нагружения, на плоскости которых будем строить границу области устойчивости прямолинейной формы равновесия трубопровода, будем считать следующие: α – параметр, характеризующий расход жидкости и μ – относительную погонную массу жидкости. Уравнение (1) относительно $w(\xi, \tau)$ и граничные условия (2) с учетом (3) переписутся следующим образом

$$(1 - \mu) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \varepsilon_i (1 - \mu) \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + 2\varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\alpha \sqrt{\mu(1 - \mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + \alpha^2 (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \quad (4)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad (\xi = 0), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \left(1 + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0, \quad (\xi = 1).$$

В силу линейности уравнения возмущенного движения (4) представим его решение $w(\xi, \tau)$ в виде

$$w(\xi, \tau) = W(\xi) \exp(\lambda \tau). \quad (6)$$

Подстановка (6) в уравнение (4) приводит к обобщенной задаче на собственные значения с обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(1 - \mu) \frac{d^4 W}{d\xi^4} + \alpha^2 (1 - \mu) \frac{d^2 W}{d\xi^2} + 2\lambda \alpha \sqrt{\mu(1 - \mu)} \frac{dW}{d\xi} + (\lambda^2 + 2\varepsilon \lambda) W = 0 \quad (7)$$

и граничными условиями:

$$W = \frac{dW}{d\xi} = 0, \quad (\xi = 0), \quad (8)$$

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} = \frac{d^3 W}{d\xi^3} = 0, \quad (\xi = 1).$$

Характеристические показатели λ , соответствующие нетривиальному решению однородной краевой задаче (7), (8), образуют дискретное множество. Общее решение линейного дифференциального уравнения (7) можно записать в виде

$$W(\xi) = \sum_{j=1}^4 C_j e^{r_j \xi}, \quad (9)$$

где C_j – некоторые постоянные, r_j – показатели, определяемые из алгебраического уравнения

$$(1-\mu)r^4 + \alpha^2(1-\mu)r^2 + 2\lambda\alpha\sqrt{\mu(1-\mu)}r + \lambda^2 + 2\varepsilon\lambda = 0. \quad (10)$$

В общем случае характеристические показатели λ являются комплексными, образуя комплексно сопряженные пары. Следовательно, и коэффициенты алгебраического уравнения (10) комплексны, а его корни $r_{1\div 4}$ уже не являются комплексно сопряженными.

Удовлетворение граничным условиям (8) и требование нетривиальности решения уравнений для $C_{1\div 4}$ приводят к уравнению, определяющую границу области устойчивости в пространстве параметров системы

$$\Delta(\alpha, \mu, \lambda) = 0, \quad (11)$$

где

$$\Delta(\alpha, \mu, \lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ r_1^2 e^{r_1} & r_2^2 e^{r_2} & r_3^2 e^{r_3} & r_4^2 e^{r_4} \\ r_1^3 e^{r_1} & r_2^3 e^{r_2} & r_3^3 e^{r_3} & r_4^3 e^{r_4} \end{vmatrix}.$$

Применение метода разложения по формам собственных колебаний приводит к уравнению относительно обобщенных координат $\mathbf{q}(\tau)$ вида

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \left[2\varepsilon\mathbf{A} + 2\alpha\sqrt{\mu(1-\mu)}\mathbf{B} \right] \dot{\mathbf{q}} + (1-\mu)(\mathbf{C} + \alpha^2\mathbf{D})\mathbf{q} = 0, \quad (12)$$

где матрицы \mathbf{A}, \mathbf{C} и \mathbf{D} вычисляются по тем же формулам (см. лекции по УМС), а матрица \mathbf{B} по формуле

$$\mathbf{B} = \int_0^1 \frac{d\boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi} \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi$$

или в индексных выражениях для элементов матрицы $\mathbf{B} = [b_{jk}]$,

($j, k = 1, 2, \dots, n$) можно записать

$$b_{jk} = \int_0^1 \frac{d\varphi_j(\xi)}{d\xi} \varphi_k(\xi) d\xi$$

Коэффициенты характеристического полинома для рассматриваемой задачи суть следующие матрицы

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{P}_1 = 2\varepsilon\mathbf{A} + 2\alpha\sqrt{\mu(1-\mu)}\mathbf{B}, \quad \mathbf{P}_0 = (1-\mu)(\mathbf{C} + \alpha^2\mathbf{D}). \quad (13)$$

Как показали вычисления, при определенных сочетаниях параметров потока жидкости в системе возможна потеря устойчивости только колебательного типа, т.е. флаттер. На рис. 2 для коэффициентов демпфирования $\varepsilon_i = 0,1$ и $\varepsilon_e = 0$ на плоскости относительная масса жидкости μ – расход жидкости α приведены результаты вычислений границы области устойчивости двумя вышеизложенными методами. Точная граница флаттера, построенная с использованием уравнения (11), показана сплошной линией. Область устойчивости расположена ниже этой линии. Пунктирные, штриховая и штрихпунктирная линии соответствуют вычислениям при

различном числе членов ряда в разложении прогиба в ряд, о чем свидетельствуют числа, стоящие у кривых. Из рисунка следует, что граница флаттера имеет достаточно сложную конфигурацию с наличием участков немонотонной зависимости $\alpha(\mu)$. Чтобы достаточно точно построить границу при использовании метода разложения по собственным формам колебаний необходимо удержание не менее восьми членов ряда.

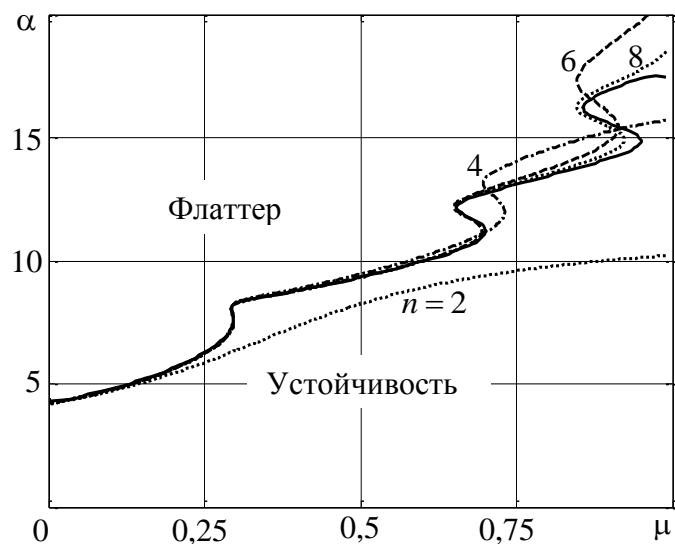


Рис. 2. Граница области устойчивости для участка трубопровода с протекающей жидкостью

17. УДАРНОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

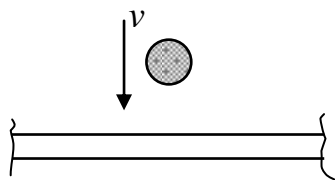
17.1. Предварительные замечания

Термин «удар», оторванный от контекста, имеет разные значения. Само по себе он выражает идею о внезапном факте. Тем не менее, в различных отраслях знаний таких, как психология, физика, техника смысл этого слова не тождествен.

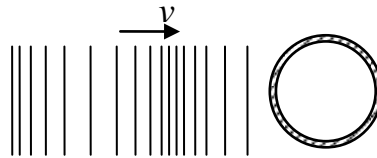
Под физическим ударом понимается процесс, связанный с соударением двух или нескольких объектов. Такое определение удара включает широкий круг процессов.

Основные типы задач:

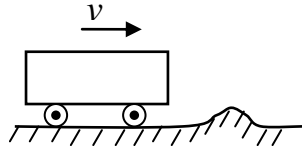
– удар твердого тела об упругую систему



– действие акустических или приливных волн на упругую систему



– удар, который передается кинематическим образом через основание



Удар – нестационарный процесс, для которого характерное время изменения сил мало по сравнению с характерным периодом собственных колебаний упругой системы.

17.2. Элементарная теория удара твердого тела об упругую систему

Задача о поперечных динамических прогибах балки при ударном воздействии рассматривалась еще в начале XIX столетия многими авторами. Рассматриваемая здесь элементарная теория удара принадлежит Коксу (1849).

Основные предположения этой теории:

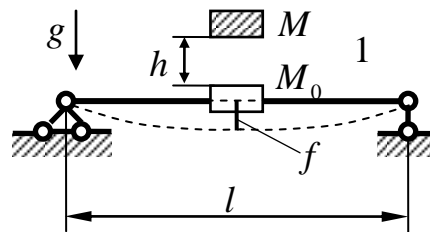
а) упругая система трактуется как система с одной степенью свободы (волновые эффекты не учитываются);

б) удар груза считается вполне неупругим в смысле ньютоновской теории удара (груз прилипает к системе и движется с ней с одинаковой скоростью);

в) местные деформации (в месте контакта) не учитываются;

г) демпфирование при колебаниях в системе не учитывается.

Предположения б) – г) можно обобщить.



M_0 – приведенная масса упругой системы, M – масса падающего груза, f – обобщенная координата, перемещение центра масс, измеряемое от статического прогиба, вызванного силой $M_0 g$.

Система находится в потенциальном поле сил тяжести. Запишем уравнение движения после взаимодействия масс

$$(M + M_0) \frac{d^2 f}{dt^2} + cf = Mg$$

где c – коэффициент жесткости системы (если шарнирное опирание и масса в середине пролета $c = \frac{48EJ}{l^3}$)

Начальные условия:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \frac{df(0)}{dt} &= v \end{aligned}$$

Здесь v – общая скорость масс после их взаимодействия. В силу второго предположения эту скорость легко найти из закона сохранения количества движения

$$MV = (M_0 + M)v; \quad v = \frac{M}{M_0 + M}V, \quad \text{где } V = \sqrt{2gh}$$

Перепишем уравнение движения

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = \frac{Mg}{M + M_0}, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{M + M_0}}$$

Общее решение этого уравнения

$$f(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{Mg}{c}$$

Для определения констант используем начальные условия

$$f(0) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{Mg}{c}$$

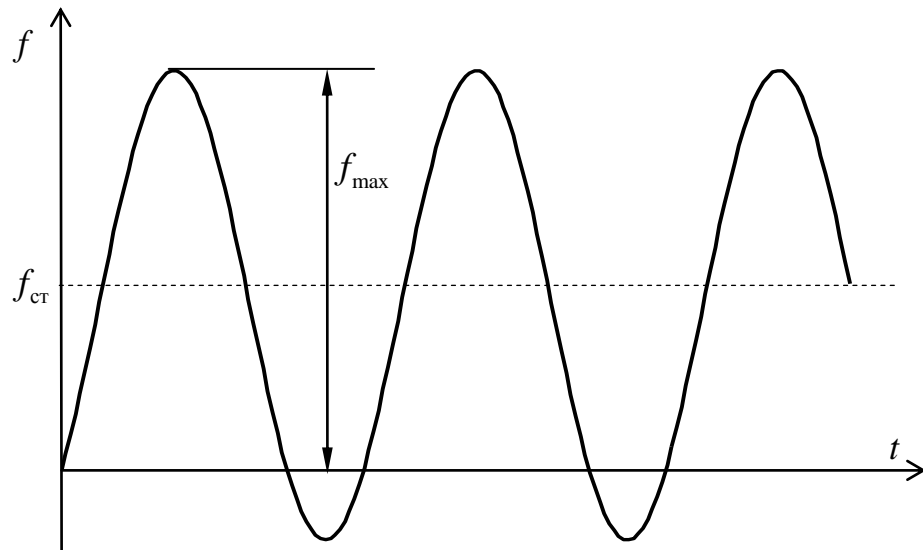
$$f'(0) = v \Rightarrow \omega C_1 = \frac{M}{M + M_0}V$$

Тогда закон движения

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{M}{M + M_0} \frac{V}{\omega} \sin \omega t - \frac{Mg}{c} \cos \omega t + \frac{Mg}{c} = \\ &= \frac{Mg}{c} + \sqrt{\left(\frac{Mg}{c}\right)^2 + \left(\frac{M}{M + M_0} \frac{V}{\omega}\right)^2} \sin(\omega t - \chi), \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{Mg(M + M_0)\omega}{cMV}$$

$\frac{Mg}{c} = f_{\text{ст}}$ – статический прогиб от силы веса груза



Интерес представляет наибольшее значение прогиба и напряжений. Очевидно, что

$$\max_t f(t) = f_{\text{ст}} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g f_{\text{ст}} \left(1 + \frac{M_0}{M} \right)}} \right] = f_{\text{ст}} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{\text{ст}} \left(1 + \frac{M_0}{M} \right)}} \right]$$

$$f_{\text{max}} = f_{\text{ст}} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{\text{ст}} \left(1 + \frac{M_0}{M} \right)}} \right] = f_{\text{ст}} k_{\text{дин}}$$

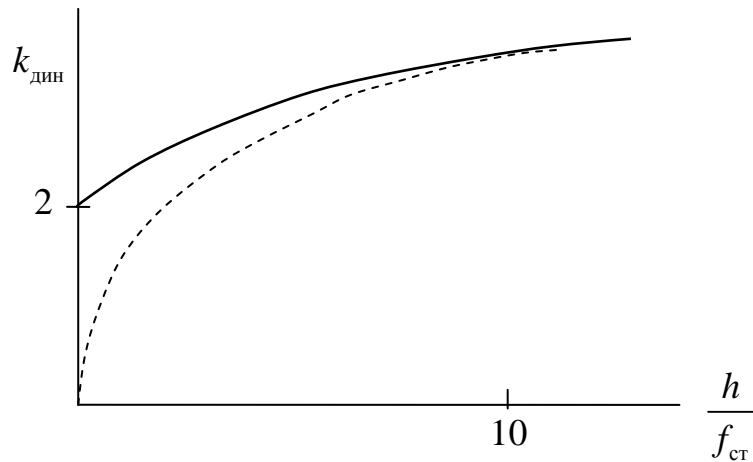
Динамический коэффициент $k_{\text{дин}} = \frac{f_{\text{max}}}{f_{\text{ст}}}$

$$k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g f_{\text{ст}} \left(1 + \frac{M_0}{M} \right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{\text{ст}} \left(1 + \frac{M_0}{M} \right)}}$$

Максимальные напряжения в балке будут вычисляться по формуле

$$\sigma_{\text{max}} = k_{\text{дин}} \sigma_{\text{ст}}$$

с тем же $k_{\text{дин}}$.



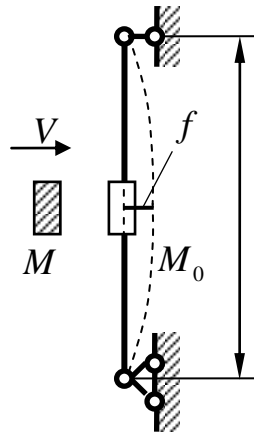
$f_{\text{ст}}$ – податливость системы. Чем податливее система, тем меньше динамический коэффициент.

Динамический коэффициент мгновенного нагружения равен 2.

Если $h \gg f_{\text{ст}}$, то

$$k_{\text{дин}} \approx \sqrt{\frac{2h}{f_{\text{ст}} \left(1 + \frac{M_0}{M}\right)}}$$

Нужно различать случай, когда отсутствует гравитационное поле или вектор скорости перпендикулярен вектору g (ускорению свободного падения)



$$(M_0 + M) \frac{d^2 f}{dt^2} + cf = 0$$

$$f(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{M_0 + M}}$$

$$f(0)=0 \Rightarrow C_2=0$$

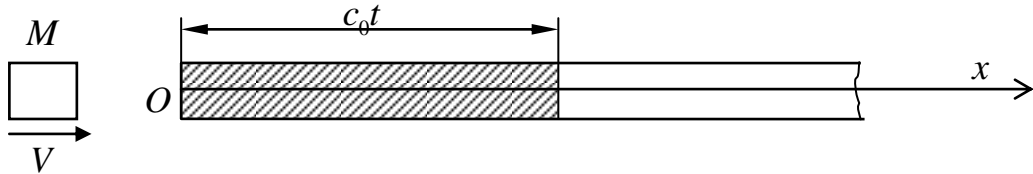
$$\dot{f}(0)=\frac{M}{M_0+M}V \Rightarrow C_1=\frac{1}{\omega}\frac{M}{M_0+M}V=\sqrt{\frac{M_0+M}{c}}\frac{M}{M_0+M}V=\sqrt{\frac{M}{c}}\frac{V}{\sqrt{1+\frac{M_0}{M}}}$$

$$f_{\text{дин}}=\max_t f(t)=\sqrt{\frac{M}{c}}\frac{V}{\sqrt{1+\frac{M_0}{M}}}$$

16.3. Понятие о волновой теории Сен-Венана-Буссинеска

(вторая половина XIX века)

Рассмотрим полубесконечный стержень (или время до первого отражения для конечного стержня). Контактные эффекты игнорируются.



Найдем распределение перемещений, деформаций и напряжений.

Уравнение продольных колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Начальные условия

$$u(x, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \begin{cases} V, & \text{при } x = 0 \\ 0, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Граничные условия ($t > 0$)

$$EF \frac{\partial u}{\partial x} = - \left(-M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \Big|_{x=0}$$

(продольная сила равна силе инерции груза)

Решение ищем в виде волны, распространяющейся вправо (решение Даламбера)

$$u(x, t) = \begin{cases} f(c_0 t - x), & x \leq c_0 t \\ 0, & x > c_0 t \end{cases}$$

Здесь $f(z)$ – неизвестная функция, и ее надо определить. Положим $c_0 t - x = z$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c_0 \frac{df}{dz}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{df}{dz},$$

Перепишем начальные и граничные условия:

– начальные условия

$$f(0) = 0$$

$$c_0 \frac{df(0)}{dz} = V$$

– граничные условия

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{EF}{M} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_{x=0} = 0$$

$$\frac{EF}{M} = \frac{c_0^2 \rho F}{M} = \frac{c_0^2 m}{M}, \quad m = \rho F$$

$$c_0^2 \frac{d^2 f(c_0 t)}{dz^2} + \frac{c_0^2 m}{M} \frac{df(c_0 t)}{dz} = 0 \quad \text{для } \forall t, \quad \text{т.е. при } z > 0$$

Функция $f(z)$ должна удовлетворять такому уравнению

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{m}{M} \frac{df}{dz} = 0 \quad (z > 0)$$

Его решение

$$f(z) = C_1 + C_2 e^{-\frac{m}{M} z}$$

Удовлетворим граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} f(0) = 0 &\Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{df}{dz} = \frac{V}{c_0} &\Rightarrow -\frac{m}{M} C_2 = \frac{V}{c_0} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{M}{m} \frac{V}{c_0} \\ C_2 &= -\frac{M}{m} \frac{V}{c_0} \end{aligned}$$

Для $f(z)$ имеем

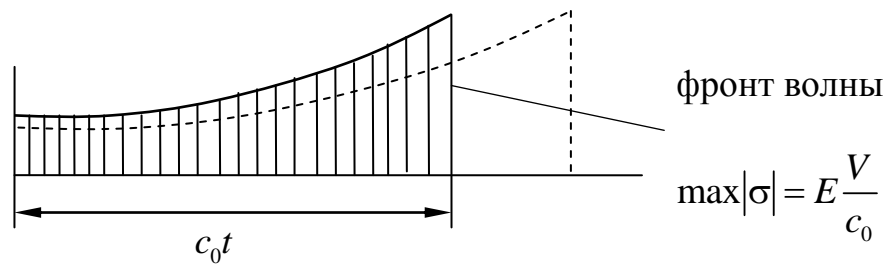
$$f(z) = \frac{M}{m} \frac{V}{c_0} \left(1 - e^{-\frac{m}{M} z} \right)$$

Окончательно для перемещений в стержне получим

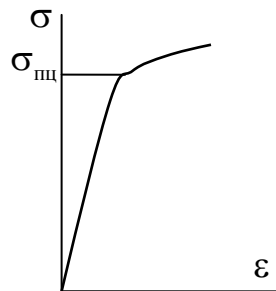
$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{M}{m} \frac{V}{c_0} \left(1 - e^{-\frac{m}{M}(c_0 t - x)} \right), & x \leq c_0 t \\ 0, & x > c_0 t \end{cases}$$

Перемещения $u(x, t)$ непрерывные по x . Зная перемещения, найдем деформации и напряжения. Очевидно, что скорости, деформации и напряжения претерпевают разрыв

$$\sigma = E\varepsilon = \begin{cases} -E \frac{V}{c_0} e^{-\frac{m}{M}(c_0 t - x)}, & x \leq c_0 t \\ 0, & x > c_0 t \end{cases}$$



Установим пределы применимости теории упругого удара



Здесь $\sigma_{\text{пл}}$ – вообще говоря, динамический предел пропорциональности

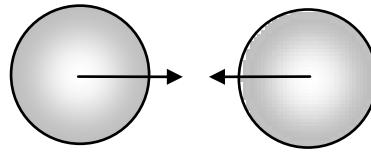
$$\max|\sigma| = E \frac{V}{c_0} < \sigma_{\text{пл}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_* = c_0 \frac{\sigma_{\text{пл}}}{E}}$$

Для стали Ст 3 $\sigma_{\text{пл}} = 200 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $c_0 \approx 5000 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

И для предельной скорости имеем $V_* = 5000 \frac{200}{2 \cdot 10^5} = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

16.4. Понятие о теории удара С.П.Тимошенко

Условие мгновенного контакта или равномерного распределения напряжений по сечению стержня предполагает, что поверхности соударения являются идеально гладкими плоскостями, перпендикулярными к направлению относительной скорости. Все это ограничивает практическую ценность теоретических рассмотрений в такой постановке. Необходим учет местных деформаций. Первые достижения, связанные с учетом местных контактных деформаций, основаны на схеме Герца (1894)



Удар двух упругих шаров с учетом местных деформаций. Герц пренебрегал динамическими эффектами в шарах. Он решил задачу о времени контакта двух шаров.

Сближение шаров определяется формулой

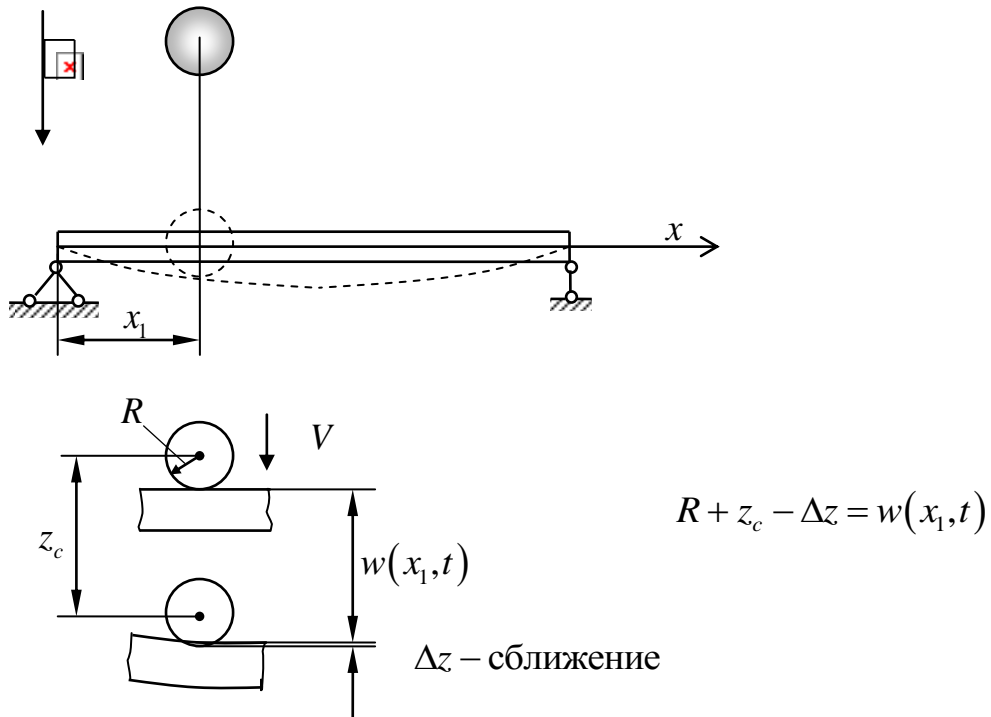
$$\Delta z = \alpha P^{2/3} -$$

закон двух третей, α зависит от кривизны поверхностей в точке контакта и свойств материалов.

С.П.Тимошенко (1912) рассмотрел удар шара по балке.

Допущения:

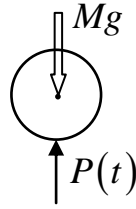
- а) упругими колебаниями шара пренебрегаем
- б) статическое отклонение, вызванное весом шара и балки мало



Уравнение колебаний балки

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(t) \delta(x - x_1)$$

Уравнение движения груза

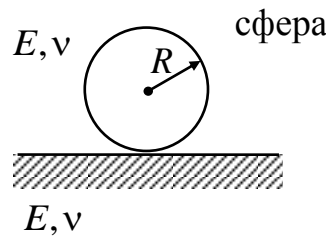


$$M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = Mg - P(t)$$

Связь между w и z_c – кинематическая (см. рисунок)

$$R + z_c - \Delta z = w(x_1, t)$$

$$\Delta z = \alpha P^{2/3}, \quad P - \text{сила контакта}, \quad (\Delta z = \alpha P^m)$$



$$\alpha = \frac{1}{R^{1/3}} \left(\frac{3}{2} \frac{1 - \nu^2}{E} \right)^{2/3}$$

Итак, получили замкнутую систему уравнений.
Решение ищем в виде

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \varphi_k(x)$$

Тогда для обобщенных координат получим

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \omega_k^2 f_k = \frac{P(t) \varphi_k(x)}{\int_0^l m \varphi_k^2(x) dx}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Начальные условия нулевые. Решая эти уравнения, получим

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x_1) \varphi_k(x)}{\omega_k \int_0^l m \varphi_k^2(x) dx} \int_0^t P(\tau) \sin[\omega_k(t - \tau)] d\tau$$

Теперь интегрируем уравнение движения груза и используем начальные условия

$$z_c(0) = -R \quad (\text{начало контакта})$$

$$\dot{z}_c(0) = V$$

$$z_c(t) = C_1 t + C_2 + \frac{1}{M} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} [Mg - P(\tau)] d\tau$$

Из начальных условий

$$C_2 = -R, \quad C_1 = V$$

Тогда

$$z_c(t) = -R + Vt + \frac{1}{M} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} [Mg - P(\tau)] d\tau$$

Из кинематического соотношения

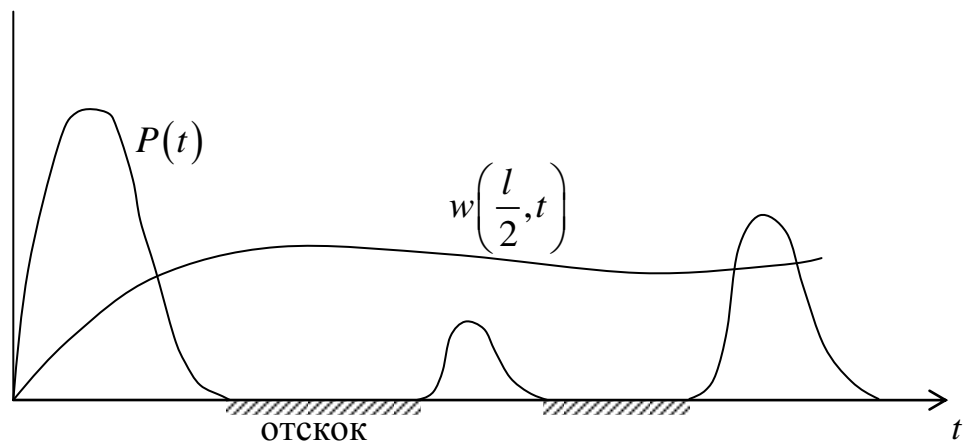
$$R + z_c - \Delta z = w(x_1, t)$$

$$Vt + \frac{1}{M} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} [Mg - P(\tau)] d\tau - \alpha P^m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x_1) \varphi_k(x)}{\omega_k \int_0^l m \varphi_k^2(x) dx} \int_0^t P(\tau) \sin[\omega_k(t - \tau)] d\tau$$

Или, окончательно, интегральное уравнение С.П.Тимошенко

$$Vt - \alpha P^m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x_1) \varphi_k(x)}{\omega_k \int_0^l m \varphi_k^2(x) dx} \int_0^t P(\tau) \sin[\omega_k(t - \tau)] d\tau - \frac{1}{M} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} [Mg - P(\tau)] d\tau$$

Решение можно получить численно, например, методом последовательных приближений



18. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

18.1. Предварительные замечания

Параметрическими колебаниями в упругих системах называются колебания, которые возникают и поддерживаются за счет периодического изменения параметров системы (изменение жесткости, массы (инертности), действия вибрационных параметрических нагрузок и т.д.)

18.2. Устойчивость решений уравнений с периодическими коэффициентами. Теория Флоке – Ляпунова

Для механических систем, в которых возможно параметрическое возбуждение необходимо проводить исследование устойчивости систем по отношению к малым возмущениям её параметров, приводящим к параметрическим резонансам, т. е. к неустойчивости системы. Уравнение параметрических колебаний линейных систем с конечным числом степеней свободы в общем случае могут быть представлены в виде

$$\mathbf{A}(t) \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbf{B}(t) \frac{d \mathbf{q}}{dt} + \mathbf{C}(t) \mathbf{q} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{q}(t)$ – вектор обобщённых координат, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ и $\mathbf{C}(t)$ – квадратные матрицы, элементы которых – действительные функции времени. Матрица $\mathbf{A}(t)$ при всех t является положительно определённой. На матрицы $\mathbf{B}(t)$ и $\mathbf{C}(t)$ это ограничение не накладывают. Пусть все коэффициенты уравнения (1.1) – непрерывные периодические функции времени t с периодом T , то есть:

$$\mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t), \quad \mathbf{B}(t+T) = \mathbf{B}(t), \quad \mathbf{C}(t+T) = \mathbf{C}(t). \quad (2)$$

Частота параметрического возбуждения связана с периодом T соотношением

$$\theta = \frac{2\pi}{T}$$

Уравнение (1) имеет тривиальное решение $\mathbf{q} \equiv 0$, которое отвечает невозмущённому равновесию или невозмущённому периодическому движению системы, если уравнение (1) получено при исследовании периодических решений. Коэффициенты уравнения зависят от некоторых параметров, характеризующих свойства параметрического воздействия и (или) системы. При некоторых значениях параметров решение $\mathbf{q} \equiv 0$ может оказаться неустойчивым. Это означает, что имеет место параметрическое возбуждение колебаний механической системы. Множество точек, соответствующих неустойчивости, образуют области в пространстве параметров, которые называют областями динамической неустойчивости механической системы. Если параметрическое воздействие периодическое и если среди варьируемых параметров содержатся частоты параметрического воздействия, то особую важность представляет нахождение частотных

соотношений, при которых наблюдается наиболее интенсивное параметрическое возбуждение. Эти частотные соотношения, как и возбуждаемые при этих соотношениях колебания, называют параметрическими резонансами.

Введём матрицу-столбец фазовых переменных $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$

Тогда уравнение (1) можно представить в нормальной форме Коши

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{G}(t)\mathbf{x}, \quad (3)$$

где $\mathbf{G}(t)$ – матрица размерностью $2n \times 2n$ вида

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где \mathbf{O} – нулевая матрица размерностью $n \times n$, \mathbf{E} – единичная матрица той же размерности. При периодическом параметрическом возбуждении матрица $\mathbf{G}(t)$ периодическая, т.е. $\mathbf{G}(t+T) = \mathbf{G}(t)$.

Система линейных дифференциальных уравнений (3) с периодической матрицей коэффициентов $\mathbf{G}(t)$ имеет совокупность $N = 2n$ линейно независимых решений, образующих фундаментальную матрицу

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1N}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2N}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{N1}(t) & x_{N2}(t) & \dots & x_{NN}(t) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где первый индекс обозначает номер функции, второй – номер решения. Если фундаментальная матрица $\mathbf{X}(t)$ удовлетворяет условию $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$, т.е. единичной матрице размерностью $N \times N$, то $\mathbf{X}(t)$ есть фундаментальная матрица Коши или матрицант. Значение матрицанта в конце первого периода, т.е. $\mathbf{X}(T) = \mathbf{R}$ даёт матрицу перехода или матрицу монодромии. Собственные значения матрицы перехода, т.е. корни уравнения

$$\det(\mathbf{R} - \rho\mathbf{E}) = 0 \quad (6)$$

называются мультипликаторами. Свойства решений уравнения (3), в частности устойчивость или неустойчивость его нулевого решения, полностью определяются свойствами мультипликаторов. Для всякого мультипликатора ρ найдётся хотя бы одно решение, обладающее свойством:

$$\mathbf{x}(t+T) = \rho \cdot \mathbf{x}(t). \quad (7)$$

Мультипликатору $\rho = 1$ отвечает периодическое решение с периодом T , мультипликатору $\rho = -1$ – решение с периодом $2T$. Эти решения называют, соответственно, T – и $2T$ –периодическими.

Если все мультипликаторы $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2n}$ лежат в единичном круге $|\rho| \leq 1$, причём мультипликаторы, лежащие на граничной окружности $|\rho| = 1$, являются либо простыми корнями уравнения (6), либо имеют простые элементарные делители, то решение $\mathbf{q} \equiv 0$ уравнения (1.1) устойчиво по Ляпунову []. Решение уравнения (1) $\mathbf{q} \equiv 0$ асимптотически устойчиво, если все мультипликаторы лежат внутри единичного круга $|\rho| < 1$. Решение $\mathbf{q} \equiv 0$ уравнения (1) неустойчиво, если среди мультипликаторов найдется хотя бы один, по модулю больший единицы $|\rho| > 1$, или найдутся кратные мультипликаторы $|\rho| = 1$ с непростыми элементарными делителями.

Выход хотя бы одного мультипликатора за единичную окружность определяет границу между областями устойчивости и неустойчивости тривиального решения уравнения (1.1) на плоскости параметров.

18.3. Метод матриц монодромии для построения границ областей параметрического резонанса

Существует ряд методов, позволяющих с той или иной точностью определить границы областей параметрического резонанса: метод малого параметра, метод определителей Хилла и др. Главное положение, которое закладывается в основу этих методов, это существование на границах областей неустойчивости периодических решений периодических решений и/или переход характеристического показателя $\lambda = \frac{1}{T} \ln \rho$ в правую полуплоскость. Эти методы связаны с проведением аналитических вычислений достаточно большого объема.

Весьма эффективным численным методом, ориентированным на применение компьютеров, является метод матриц монодромии (метод матриц перехода). Основан этот метод непосредственно на теории Флоке–Ляпунова и состоит в вычислении матрицы монодромии \mathbf{R} и исследование мультипликаторов как собственных значений этой матрицы. На первом этапе метода строится матрица \mathbf{R} . Для этого $2n$ раз решается задача Коши с начальными условиями, совпадающими со столбцами единичной матрицы размерностью $2n \times 2n$. Матрица монодромии \mathbf{R} определяется как значение матрицанта в конце первого периода T . На втором этапе определяются мультипликаторы как собственные значения матрицы \mathbf{R} и проверяется условие $|\rho| \leq 1$.

Все вычисления по определению границ областей неустойчивости для параметрических систем проведены с использованием этого метода.

18.4. Примеры построения областей неустойчивости

С целью верификации алгоритмов и программ, применяемых в дальнейших вычислениях в данном разделе проводятся вычисления областей параметрического резонанса для классических систем с одной и двумя

степенями свободы, рассмотренных в справочнике [Вибрации в технике]. Параметрические колебания системы с одной степенью свободы относительно обобщенной координаты $q(t)$ описываются уравнением

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 [1 + 2\mu\Phi(t)]q = 0, \quad (8)$$

где ε – коэффициент демпфирования, ω_0 – собственная частота системы, μ – коэффициент параметрического возбуждения, характеризующий его амплитуду, $\Phi(t)$ – T – периодическая функция возбуждения. При $\varepsilon = 0$ из уравнения (1) получим уравнение Матье – Хилла

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 [1 + 2\mu\Phi(t)]q = 0. \quad (9)$$

При гармоническом параметрическом возбуждении уравнение (9) называется уравнение Матье

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 [1 + 2\mu \cos \theta t]q = 0. \quad (10)$$

Здесь θ – частота параметрического возбуждения. В учебной литературе часто распределение областей неустойчивости (диаграмма Айнса – Стретта)

представляется на плоскости параметров $h = \frac{4\omega_0^2}{\theta^2}\mu$, $a = \frac{4\omega_0^2}{\theta^2}$. В справочнике

области неустойчивости для уравнения (8) построены на плоскости μ, θ с использованием аналитических методов ещё в 50–х годах прошлого столетия, что не могло не отразиться на точности положения границ. Построим границы областей неустойчивости для этого же уравнения на плоскости μ, θ с использованием метода матриц монодромии. Как уже отмечалось, применение этого метода связано с интегрированием уравнения движения в течение одного периода с начальными условиями, соответствующими столбцам единичной матрицы. Интегрирование уравнения проведем с использованием системы имитационного моделирования Simulink. Для уравнения (8) блок-схема имитационного моделирования представлена на рисунке 1. По существу Simulink, как одна из компонент вычислительной системы Matlab, представляет собой цифровой аналог, но с несомненно более широкими возможностями, систем электронного моделирования, применявшихся для исследования различных динамических (в том числе и механических) систем в 50 – 60 г.г. прошлого столетия. Отсылая за подробностями к описанию системы Simulink и литературе (например, []), опишем кратко работу представленной на рисунке 1 схемы. Двукратное интегрирование уравнения (8), переписанного в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -2\varepsilon \frac{dq}{dt} - \omega_0^2 [1 + 2\mu \cos \theta t]q, \quad (11)$$

реализуется с помощью двух интеграторов. Правая часть уравнения (11) формируется в сумматоре. После первого интегрирования первая

производная $\frac{dq}{dt}$ умножается на удвоенный коэффициент демпфирования и подается в сумматор. После второго интегрирования обобщенная координата $q(t)$ умножается на отдельно сформированное параметрическое воздействие (нижняя часть диаграммы) $1 + 2\mu \cos \theta t$ и также подается в сумматор. Здесь принято $\omega_0 = 1$. Обобщенная координата и обобщенная скорость подаются на «экран» и в рабочую область для дальнейшей обработки.

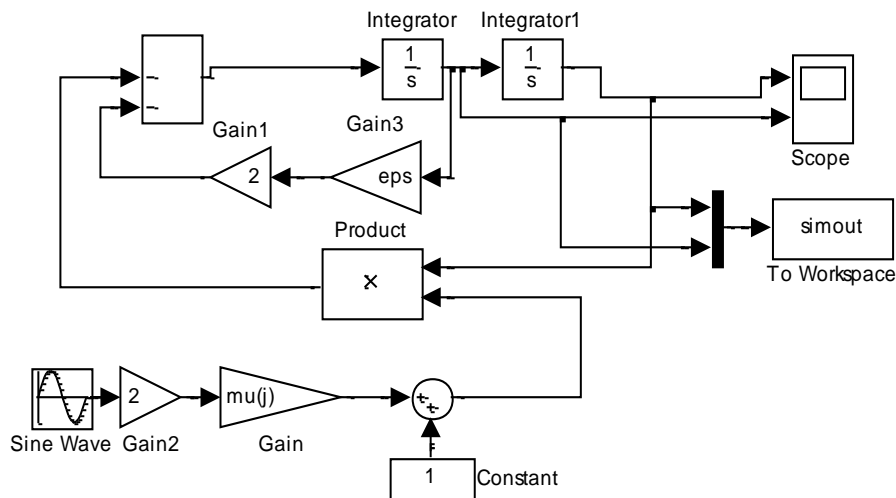


Рисунок 1 Блок-схема имитационного моделирования для исследования параметрических колебаний системы с одной степенью свободы

Интегрирование уравнение с использованием имитационного моделирования проводилось как для формирования матрицы монодромии, так и для непосредственной проверки устойчивости решения путем интегрирования с некоторыми начальными условиями на продолжительном отрезке времени. В области устойчивости имеем затухающее решение, а в областях параметрического резонанса решение при любых сколь угодно малых начальных условиях неограниченно возрастают. На границе указанных областей согласно теории Флоке имеют место периодические решения. На рисунке 2 представлены границы области параметрического резонанса для уравнения (8) на плоскости μ, θ для случая, когда собственная частота равна $\omega_0 = 1$, а коэффициент демпфирования – $\varepsilon = 0,01$. Рисунок 3 иллюстрирует области параметрического резонанса для $\varepsilon = 0,05$. Кроме весьма малых значений частоты возбуждения θ на рисунках четко просматривается структура областей неустойчивости, включая главный $\theta = 2\omega_0$ и побочные $\theta = \frac{2\omega_0}{k}, (k = 2, 3, \dots)$ параметрические резонансы.

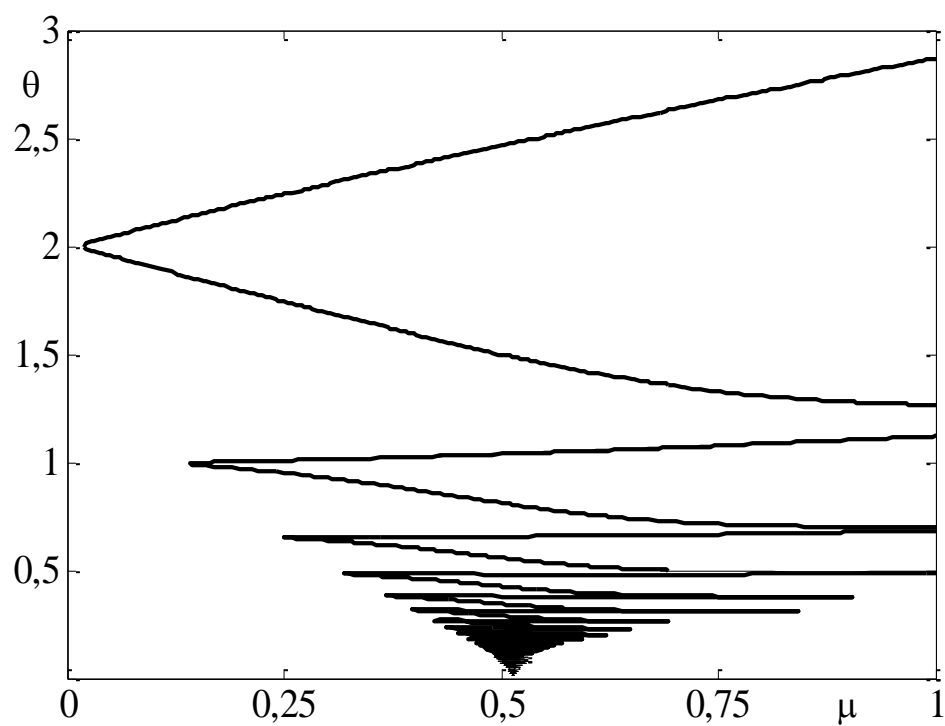


Рисунок 2 Области параметрического резонанса для системы с одной степенью свободы при $\varepsilon = 0,01$

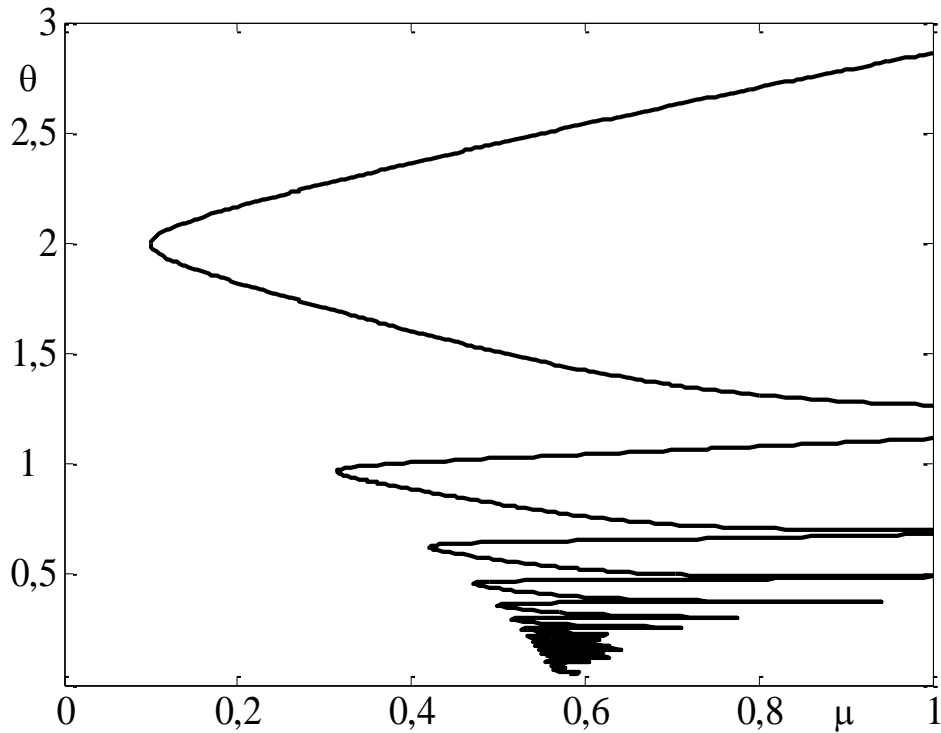
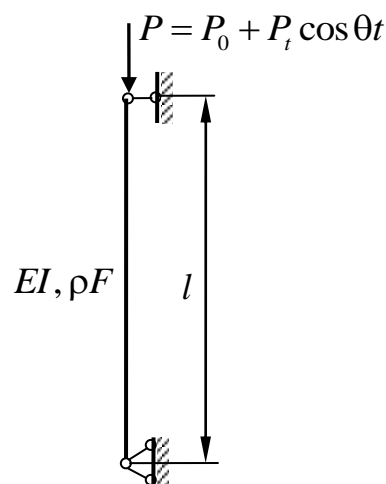


Рис. 3 Области параметрического резонанса для системы с одной степенью свободы при $\varepsilon = 0,05$

18.5. Пример распределенной системы при параметрическом воздействии



Нужно рассмотреть как изгибные, так и продольные колебания стержня. Если частота $\theta \ll \omega_{\text{прод}}$, то можно ограничиться рассмотрением изгибных колебаний. По отношению к изгибным колебаниям данная нагрузка является параметрической; по отношению к продольным колебаниям нагрузка является вынуждающей (прямое нагружение периодической силой). В распределенных системах правильнее говорить о действии параметрического возбуждения. На рисунке изображена задача Ю.И.Беляева (1924)

Уравнение изгибных колебаний

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Граничные условия $w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (x = 0, l)$

Вообще необходимо поставить и начальные условия, но мы будем от них отвлекаться, рассматривая установившейся режим.

Если $P = 0$, то имеем задачу о собственных колебаниях. Если инерционными силами пренебречь, а $P = \text{const}$, то получаем задачу устойчивости (задача Эйлера)

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Если $P = \text{const}$ и учитываются инерционные силы, то имеем задачу о собственных колебаниях системы при действии продольных сил.

Будем искать решение в виде

$$w(x, t) = \sum_k f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Граничные условия удовлетворяются. Остается удовлетворить уравнению

$$\ddot{f}_k + \frac{EI}{\rho F} \frac{k^4 \pi^4}{l^4} f_k - \frac{P}{\rho F} \frac{k^2 \pi^2}{l^2} f_k = 0$$

или

$$\ddot{f}_k + \omega_k^2 \left(1 - \frac{P}{P_k^\exists} \right) f_k = 0,$$

где $\omega_k^2 = \frac{k^4 \pi^4}{l^4} \frac{EI}{\rho F}, \quad P_k^\exists = \frac{k^2 \pi^2 EI}{l^2}$

если сила P есть функция времени $P(t)$, то получим уравнение с переменными коэффициентами типа Матье – Хилла. В стандартной форме для гармонической силы $P(t) = P_0 + P_t \cos \theta t$

$$\ddot{f}_k + \Omega_k^2 (1 - 2\mu_k \cos \theta t) f_k = 0,$$

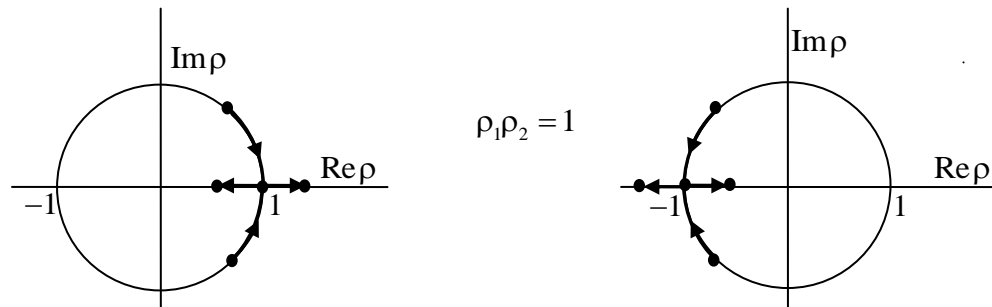
где μ_k – глубина модуляции

$$\Omega_k^2 = \left(1 - \frac{P_0}{P_k^\exists} \right) \omega_k^2, \quad \mu_k = \frac{1}{2} \frac{P_t}{P_k^\exists - P_0}$$

Для каждой обобщенной координаты мы пришли к уравнению Матье и для каждого уравнения можно использовать общую теорию, например, теорию Флоке

$$f_k(t) = C_{1k} \exp(\lambda_{1k} t) \psi_{1k}(t) + C_{2k} \exp(\lambda_{2k} t) \psi_{2k}(t)$$

где $\lambda_{jk} = \frac{\ln \rho_{jk}}{T}$ – характеристические показатели, ρ_{jk} – мультипликаторы, $T = \frac{2\pi}{\theta}$ – период. В случае устойчивости $|\rho_{jk}| = 1$ (устойчивость – существование ограниченного решения уравнения с переменными коэффициентами). Устойчивость будет нарушаться, если мультипликаторы ведут себя следующим образом

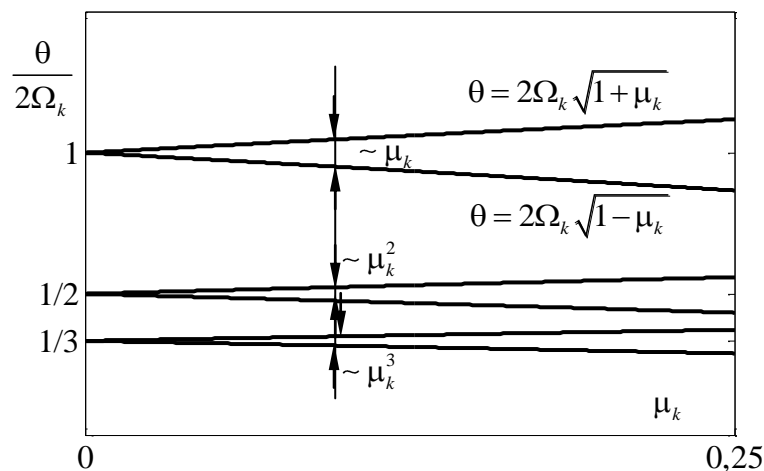


На границе области неустойчивости будет иметься периодическое решение с периодом T или $2T$ в зависимости от того, через какую точку мультипликаторы покидают единичную окружность.

Если $\rho_1 = \rho_2 = 1$, то T – периодическое

Если $\rho_1 = \rho_2 = -1$, то $2T$ – периодическое

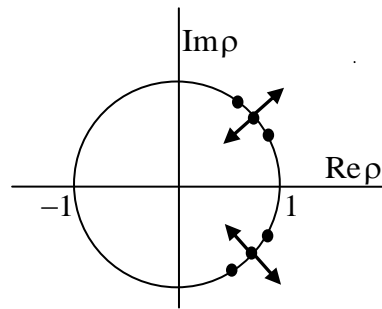
Картина областей неустойчивости



Резонансы в окрестности $\frac{\theta}{2\Omega_k} \approx \frac{1}{n}$. При наличии демпфирования кривые смещаются вправо.

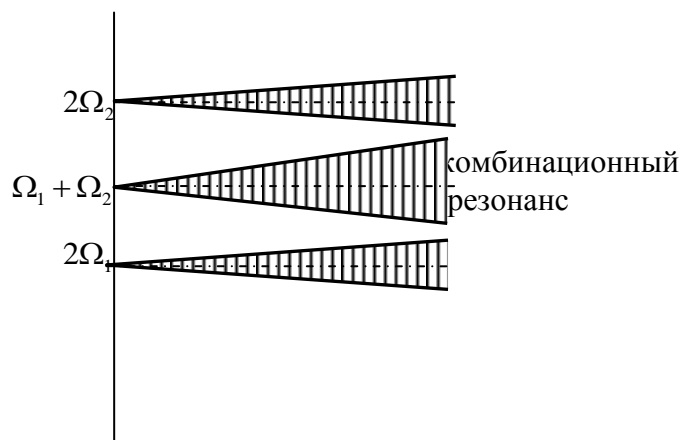
Особенности параметрических систем с распределенными параметрами: Мультипликаторов оказывается много.

Может оказаться, что слияние мультипликаторов будет происходить не в точках ± 1



Слияние мультипликаторов в точках, отличных от $\rho \pm 1$ называется комбинационным резонансом

Если рассмотреть два члена ряда, то приходим по существу к системе с двумя степенями свободы. Главные области неустойчивости могут выглядеть так



$\theta = 2\Omega_1$ – параметрический резонанс по первой форме (главная область)

Чаще всего комбинационный резонанс наступает на сумме (разности) частот $\Omega_1 \pm \Omega_2$. В гамильтоновых системах — \oplus , в негамильтоновых системах возможен и плюс и минус. Часто оказывается, главная область комбинационного резонанса является более широкой, чем области резонансов по формам колебаний. Можно рассмотреть плоскость Айнса – Стретта.

18.6. Общий случай параметрической упругой системы

Запишем уравнение движения в операторной форме

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial t} + Cu + \alpha B_0 u + \beta \Phi(t) B_t u = 0, \quad (*)$$

где u – вектор перемещений;

A – инерционный оператор;

D – диссипативный оператор;

C – упругий оператор;

α, β – некоторые постоянные, α – параметр нагрузки, не зависящей от времени, β – параметр нагрузки, зависящей от времени;

B_0, B_t – линейные дифференциальные операторы.

Для задачи Беляева

$$A = \rho F, \quad C = EI \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \quad B_0 = B_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \alpha = P_0, \quad \beta = P_t, \quad \Phi(t) = \cos \theta t$$

В случае внешнего трения $D = 2\varepsilon \rho F$.

Можно рассмотреть задачу о собственных колебаниях: $\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \varepsilon = 0$.

$$(C - \omega^2 A)\varphi = 0$$

φ – формы колебаний. Получим спектр собственных колебаний

$$\{\omega_j\}, \{\varphi_j(x)\}$$

Можно рассмотреть задачу устойчивости $\varepsilon = 0, \quad A = 0, \quad \beta = 0$. Получим $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ – спектр собственных значений, ψ_1, ψ_2, \dots – спектр собственных элементов. В некоторых частных случаях $\varphi_j = \psi_j$. Рассмотрим самый общий случай (*). Будем искать решение в виде ряда по собственным элементам задачи для ненагруженной системы без демпфирования

$$u(x, t) = \sum_k f_k(t) \varphi_k(x), \quad \omega_k^2 = \frac{(C\varphi_k, \varphi_k)}{(A\varphi_k, \varphi_k)}$$

Подставим ряд в уравнение и возьмем скалярное произведение результата подстановки по отношению к одному из собственных элементов задачи. Так как собственные элементы обладают свойствами ортогональности

$$(A\varphi_j, \varphi_k) = 0, \quad (C\varphi_j, \varphi_k) = 0, \quad j \neq k$$

То получим

$$\begin{aligned} & (A\varphi_j, \varphi_j) \ddot{f}_j + \sum_k (D\varphi_k, \varphi_j) \dot{f}_k + (C\varphi_j, \varphi_j) f_j + \\ & + \alpha \sum_k (B_0\varphi_k, \varphi_j) f_k + \beta \Phi(t) \sum_k (B_t\varphi_k, \varphi_j) f_k = 0 \end{aligned}$$

Разделим на $(A\varphi_j, \varphi_j)$

$$\ddot{f}_j + 2 \sum_k \varepsilon_{jk} \dot{f}_k + \omega_j^2 f_j - \alpha \sum_k m_{jk} f_k - \beta \Phi(t) \sum_k n_{jk} f_k = 0$$

где обозначено

$$2\varepsilon_{jk} = \frac{(D\varphi_k, \varphi_j)}{(A\varphi_j, \varphi_j)}, \quad m_{jk} = -\frac{(B_0\varphi_k, \varphi_j)}{(A\varphi_j, \varphi_j)}, \quad n_{jk} = -\frac{(B_t\varphi_k, \varphi_j)}{(A\varphi_j, \varphi_j)}$$

Разделение уравнений произойдет, если $[\varepsilon_{jk}], [m_{jk}], [n_{jk}]$ – диагональные матрицы

$$[\varepsilon_{jk}] = \text{diag} [\varepsilon_j], \text{ если } D = 2\varepsilon A \text{ или } D = \eta C.$$

Для определенности будем считать, что $B_0 = B_t \equiv B$. Если это не так, то часть, не соответствующую этому равенству, переводим из B_0 в C .

Вернемся к задаче об устойчивости $(C - \alpha B)\psi = 0$. $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ – собственные элементы. Для α_j справедлива формула Релея

$$\alpha_k = \frac{(C\psi_k, \psi_k)}{(B\psi_k, \psi_k)}, \quad m_{jk} = -\frac{(B\varphi_k, \varphi_j)}{(A\varphi_j, \varphi_j)}$$

Чтобы было разделение, необходимо $(B\varphi_k, \varphi_j) = 0 \quad k \neq j$. Это будет иметь место только в том случае, если $\varphi_k \equiv \psi_k$, так как для задачи устойчивости

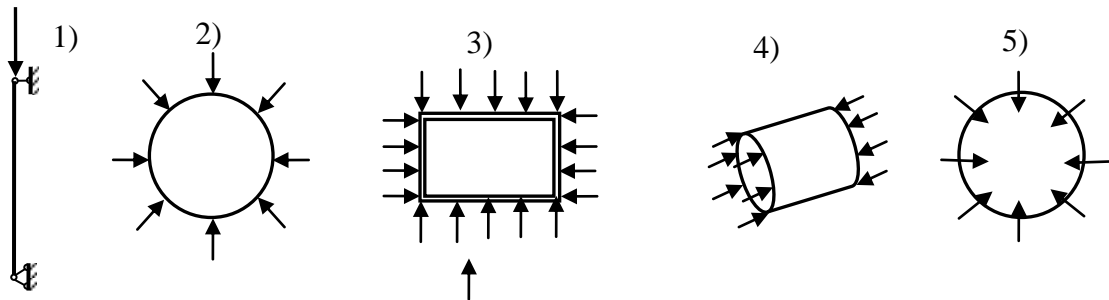
$$(C\psi_k, \psi_j) = 0, \quad (B\psi_k, \psi_j) = 0, \quad k \neq j.$$

Имеем так называемый особый случай. При этом имеет место разделение уравнений параметрических колебаний распределенной системы при применении метода разложения по собственным формам. В общем случае уравнения не разделяются и получается бесконечная система неразделяющихся уравнений.

В матричной форме (\mathbf{f} – вектор с компонентами f_k)

$$\ddot{\mathbf{f}} + 2[\varepsilon_{jk}]\dot{\mathbf{f}} + \text{diag}[\omega_j^2]\mathbf{f} - \alpha\mathbf{M}\mathbf{f} - \beta\Phi(t)\mathbf{N}\mathbf{f} = 0$$

В особом случае комбинационных резонансов, как правило, нет. Приведем несколько примеров, когда имеет место особый случай ($\varphi_k = \psi_k$)



- 1) Задача Беляева
- 2) Тонкое кольцо при действии радиальной нагрузки. Задача параметрическая для изгибных колебаний и простая – для осесимметрических колебаний.
- 3) Прямоугольная пластина с краевыми условиями Навье.
- 4) Продольная нагрузка на круговую цилиндрическую оболочку с краевыми условиями Навье.
- 5) Сферическая оболочка по действием равномерного давления.