

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

В.П. РАДИН, О.В. НОВИКОВА, А.В. ЩУГОРЕВ

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

Учебное пособие по курсу
«Динамика машин»
для студентов, обучающихся по направлению
«Прикладная механика»

Под редакцией В.П. Радина

Москва
Издательство МЭИ
2018

УДК 531
ББК 22.213
Р-153

*Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»
в качестве учебного издания.*

Подготовлено на кафедре робототехники, мехатроники, динамики
и прочности машин

Рецензенты – В.П. Чирков, д.т.н., профессор кафедры РМДПМ НИУ
«МЭИ».

Под редакцией к.т.н. профессора кафедры РМДПМ В.П.Радина

Радин В.П.

Р – 153 Вынужденные колебания упругих систем: учебное пособие /
В.П. Радин, О.В. Новикова, А.В. Щугорев. – М.: Издательство
МЭИ, 2018. – 48 с.

В учебном пособии изложены методы решения задач вынужденных колебаний механических систем с распределенными упругими и инерционными характеристиками. Методы иллюстрируются подробным решением задач с элементами исследовательского характера. Решаются задачи, аналогичные тем, которые включены в курсовой проект по дисциплине "Динамика машин".

Пособие предназначено для студентов IV курса института энергомашиностроения и механики, обучающихся по направлению "Прикладная механика" и изучающих дисциплину "Динамика машин" на 8-м семестре обучения.

© Национальный исследовательский университет «МЭИ», 2018

Содержание

Предисловие.....	4
1. Вынужденные колебания.....	5
2. Установившиеся колебания при действии периодических сил.....	5
3. Метод разложения по формам собственных колебаний.....	11
4. Метод разложения по собственным формам в задачах о неустановившихся колебаниях.....	20
5. Установившиеся вынужденные колебания в системах с демпфированием.....	23
5.1. Применение метода разложения по формам собственных колебаний.....	25
5.2. Спектр собственных колебаний системы.....	29
6. Постановка задачи для примера из курсовой работы.....	41
Контрольные вопросы по курсу.....	44
Примеры экзаменационных и тестовых задач	46
Список рекомендованной литературы.....	47

Предисловие

Динамические расчеты машин и конструкций являются одними из наиболее трудоемких в вычислительном отношении мероприятий по обеспечению необходимого уровня показателей механической надежности. Как и статические расчеты на прочность динамические расчеты сложных механических систем проводятся с использованием современных вычислительных комплексов, в подавляющем большинстве случаев основанных на методе конечных элементов. Для того, чтобы освоить подобного рода комплексы и успешно применять их в своей инженерной деятельности специалисты по динамике и прочности машин должны хорошо знать теоретические и практические основы определения реакций машин и конструкций на различные динамические воздействия. Данное пособие посвящено наиболее часто встречающимся в инженерной практике расчетам установившихся вынужденных колебаний систем без учета и с учетом рассеяния энергии. Проиллюстрирована численная реализация наиболее распространенных методов решения задач на установившиеся вынужденные колебания с использованием популярной вычислительной системы Matlab.

Учебным планом дисциплины "Динамика машин" в 7 и 8 семестрах предусмотрен курсовой проект, цель которого состоит в освоении и закреплении методов решения основных задач динамического расчета механических систем, а именно определение характеристик собственных колебаний достаточно сложных стержневых систем и анализ установившихся вынужденных колебаний при гармонических силовых и кинематических воздействиях. В данном пособии приведен пример динамического расчета достаточно сложной механической системы с определением спектра собственных колебаний и с исследованием реакции системы на установившееся внешнее воздействие с применением метода разложения решения по формам собственных колебаний. Приведены программы вычислений для интерпретатора вычислительной системы Matlab, а также результаты вычислений по этим программам амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик для обобщенных координат.

1. Вынужденные колебания упругих систем

Операторное уравнение вынужденных колебаний любой упругой системы можно записать в виде

$$\mathbf{C}\mathbf{u} + \mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{p}(x, t), \quad (1)$$

если в динамической системе не учитывается рассеяние энергии, или

$$\mathbf{C}\mathbf{u} + \mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{p}(x, t) \quad (2)$$

с учетом рассеяния энергии. В уравнениях (1), (2) $\mathbf{u}(x, t)$ – перемещение точек системы (может быть скалярной, векторной или даже тензорной величиной) \mathbf{A} – инерционный оператор, \mathbf{C} – квазиупругий оператор, \mathbf{B} – диссипативный оператор, вид которого определяется выбранной моделью диссипации энергии в системе, $\mathbf{p}(x, t)$ – внешняя динамическая нагрузка, которая определяет силовое, кинематическое или смешанное возбуждение колебаний. В отличие от параметрической нагрузки в данном случае $\mathbf{p}(x, t)$ называется прямое воздействие и входит в правую часть уравнения вынужденных колебаний.

2. Установившиеся колебания при действии периодических сил

Если линейная механическая система находится под действием периодического по времени внешнего воздействия, то его можно разложить в ряд Фурье и определить реакцию системы на каждую гармоническую составляющую, а далее применить принцип суперпозиции. Таким образом, при определении установившихся колебаний системы рассматривается уравнение с правой частью $\mathbf{p}_0(x) \cos \theta t$, где $\mathbf{p}_0(x)$ – амплитудное значение нагрузки; θ – частота внешнего воздействия. Начальные условия при этом игнорируются и для системы без демпфирования, уравнение для которой примет вид

$$\mathbf{C}\mathbf{u} + \mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{p}_0(x) \cos \theta t, \quad (3)$$

решение ищется в виде

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_0(x) \cos \theta t \quad (4)$$

Амплитудная функция $\mathbf{u}_0(x)$ перемещений определяется из решения краевой задачи

$$\mathbf{C}\mathbf{u}_0 - \theta^2 \mathbf{A}\mathbf{u}_0 = \mathbf{p}_0(x). \quad (5)$$

Если частота внешнего воздействия θ не совпадает ни с одной из собственных частот собственных колебаний ω_k , то оператор $\mathbf{C} - \theta^2 \mathbf{A}$ обратим, т.е. существует ограниченный обратный оператор $(\mathbf{C} - \theta^2 \mathbf{A})^{-1}$. Тогда амплитудная функция перемещений упругой системы определяется как

$$\mathbf{u}_0(x) = (\mathbf{C} - \theta^2 \mathbf{A})^{-1} \mathbf{p}_0(x). \quad (6)$$

Если $\theta = \omega_k$, то уравнение (5) неразрешимо. Исключение составляет случай, когда функция $\mathbf{p}_0(x)$ ортогональна собственным формам, соответствующим частоте ω_k . Условие $\theta = \omega_k$ есть условие резонанса при действии периодической силы

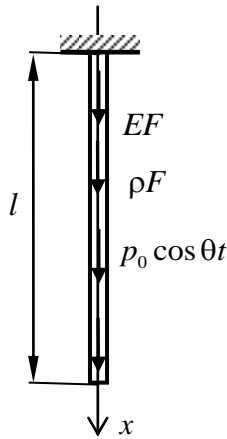


Рис. 1

Рассмотрим пример, иллюстрирующий решение задачи об установившихся вынужденных колебаниях путем **непосредственного интегрирования** уравнения (5). Пусть прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения жесткостью EF и погонной массой ρF , зашпеленный на одном конце, находится под действием продольной распределенной нагрузки $p_0 \cos \theta t$. Требуется определить установившуюся реакцию системы на периодическое воздействие без учета демпфирования.

Уравнение вынужденных колебаний (3) в данном случае переписывается как

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p_0 \cos \theta t = 0. \quad (7)$$

Граничные условия для данной системы запишутся следующим образом

$$x = 0, \quad u = 0; \quad x = l, \quad EF \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (7) ищем в виде (4). После подстановки выражения (4) в уравнение (7) и условия (8) получим краевую задачу: обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} + \beta^2 u_0 = -\frac{p_0}{EF}, \quad \beta^2 = \frac{\rho \theta^2}{E}. \quad (9)$$

и граничные условия

$$x=0, \quad u_0=0; \quad x=l, \quad \frac{du_0}{dx}=0. \quad (10)$$

Общее решение уравнения (9) запишется следующим образом:

$$u_0(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x - \frac{P_0}{\beta^2 EF}.$$

Из граничных условий (10) для постоянных интегрирования C_1 и C_2 получим

$$C_1 = \frac{q_0}{\beta^2 EF}; \quad C_2 = C_1 \operatorname{tg} \beta l.$$

Таким образом, для амплитудной функции $u_0(x)$ продольных перемещений имеем следующее выражение

$$u_0(x) = \frac{P_0}{\beta^2 EF} (\cos \beta x + \operatorname{tg} \beta l \cdot \sin \beta x - 1) \quad (11)$$

Особенности функции $u_0(x)$, рассматриваемой как функция частоты θ , имеют место при $\cos \beta l = 0$, т.е. когда параметры β совпадают с частотными параметрами собственных продольных колебаний закрепленного на одном конце стержня

$$\beta_k = \frac{\pi(2k-1)}{2l}, \quad k=1,2,3\dots$$

Другими словами, функция $u_0(x)$ неопределена при наступлении резонанса, когда частота вынуждающих сил θ совпадает с собственными частотами ω_k стержня

$$\theta = \omega_k = \frac{\pi(2k-1)}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad k=1,2,3\dots$$

При $\beta \rightarrow 0$ или, что то же самое, $\theta \rightarrow 0$ получим квазистатическое отклонение сечений стержня от положения равновесия. Выражение (11) при $\beta \rightarrow 0$ превращается в неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Раскроем её.

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\cos \beta x - 1 + \operatorname{tg} \beta l \cdot \sin \beta x}{\beta^2} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(-2 \cdot \frac{x}{2} \frac{\sin \frac{\beta x}{2}}{\frac{\beta x}{2}} \right) \left(\frac{x}{2} \frac{\sin \frac{\beta x}{2}}{\frac{\beta x}{2}} - l \frac{\operatorname{tg} \beta l}{\beta l} \right) = x \left(l - \frac{x}{2} \right)$$

Таким образом, при $\beta \rightarrow 0$ $u_0(x) = u_{\text{ст}}(x) = \frac{p_0 x}{EF} \left(l - \frac{1}{2} x \right)$. То же самое получим из решения статической задачи.

$$EF \frac{d^2 u_{\text{ст}}}{dx^2} = -q_0, \quad u_{0\text{ст}}(x) = -\frac{p_0 x^2}{2EF} + C_1 x + C_2, \quad C_1 = \frac{p_0 l}{EF}, \quad C_2 = 0.$$

На рис. 2 при изменении параметра $\tilde{\theta} = \beta l$ на отрезке $[0; 10]$ построена амплитудно-частотная характеристика системы. По оси ординат отложено отношение амплитуды перемещения концевое сечения ($x = l$) к статическому перемещению того же сечения

$$\tilde{u}(\beta l) = \frac{u_0(l)}{u_{\text{ст}}(l)} = 2 \cdot \frac{\cos \beta l + \operatorname{tg} \beta l \cdot \sin \beta l - 1}{(\beta l)^2}.$$

Штриховыми вертикальными линиями (асимптоты) отмечены резонансы при значениях θ равных

$$\tilde{\omega}_k = (\beta l)_k = \frac{\pi(2k-1)}{2}, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

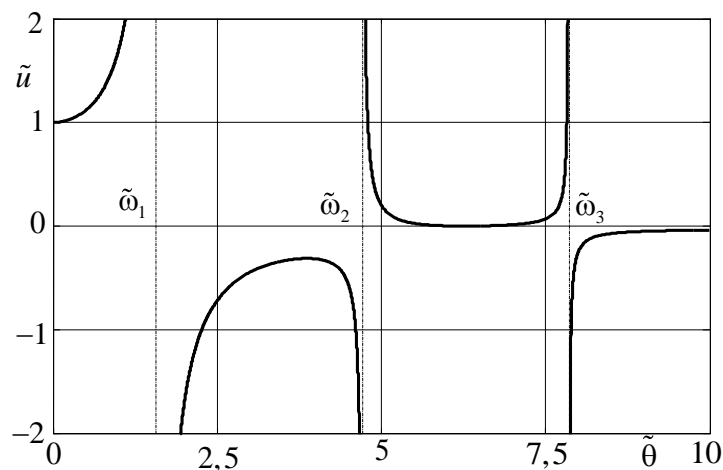


Рис. 2 Амплитудно-частотная характеристика

Теперь рассмотрим изгибные колебания шарнирно опертого стержня при действии нагрузки $p_0 \cos \theta t$, где $p_0 = \text{const}$ (рис. 3). Уравнение изгибных колебаний стержня запишется следующим образом

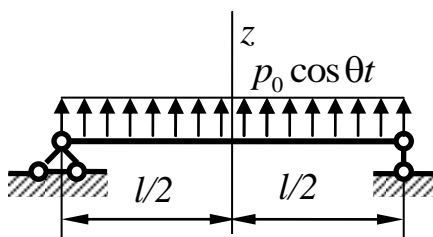


Рис. 3

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_0 \cos \theta t \quad (12)$$

Начало координат поместим в середине пролета стержня. Тогда граничные условия можно записать как

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm \frac{l}{2} \quad (13)$$

Установившиеся колебания, т.е. решение уравнения (12) ищем в виде

$$w(x, t) = w_0(x) \cos \theta t$$

Подстановка этого выражения в уравнение (12) дает обыкновенное дифференциальное уравнение относительно амплитудной функции $w_0(x)$

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} - \beta^4 w_0 = \frac{p_0}{EI}, \quad (14)$$

где введено обозначение

$$\beta^4 = \frac{\rho F \theta^2}{EI}.$$

Решение однородного уравнения (14) (т.е. когда правая часть уравнения равна нулю) ищем в виде

$$w_0(x) = C e^{rx}, \quad (15)$$

где C – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий, r – характеристические показатели. Подстановка выражения (15) в уравнение (14) дает характеристическое уравнение относительно показателей r

$$r^4 - \beta^4 = 0.$$

Его решение $r_{1,2} = \pm i\beta$, $r_{3,4} = \pm \beta$.

Несложно установить, что частное решение w_* неоднородного уравнения (14) будет следующим

$$w_* = -\frac{p_0}{EI\beta^4}$$

Таким образом,, для амплитудной функции $w_0(x)$ имеем

$$w_0(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \operatorname{ch} \beta x + C_4 \operatorname{sh} \beta x - \frac{P_0}{EI\beta^4}$$

Из условия симметрии решения относительно сечения при $x=0$ $C_2 = C_4 = 0$. Используя граничные условия (13) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных C_1 и C_3

$$\begin{cases} C_1 \cos \frac{\beta l}{2} + C_3 \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2} = \frac{P_0}{EI\beta^4}, \\ -C_1 \cos \frac{\beta l}{2} + C_3 \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2} = 0. \end{cases}$$

Отсюда получим

$$C_1 = \frac{P_0}{EI\beta^4} \frac{1}{2 \cos \frac{\beta l}{2}}, \quad C_3 = \frac{P_0}{EI\beta^4} \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2}},$$

а для амплитудных значений прогиба $w_0(x)$ имеем

$$w_0(x) = \frac{P_0}{EI\beta^4} \left(\frac{\cos \beta x}{2 \cos \frac{\beta l}{2}} + \frac{\operatorname{ch} \beta x}{2 \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2}} - 1 \right). \quad (16)$$

При $\beta \rightarrow 0$ имеет место неопределенность вида '0/0', но она легко раскрывается и предел конечен при любых x . В силу непрерывной зависимости решения от параметра β это решение стремится к решению уравнения

$$\frac{d^4 w_{\text{ст}}}{dx^4} = \frac{P_0}{EI} \Rightarrow w_{\text{ст}}(x)$$

Используя формулу (16), получим выражение для статического прогиба балки $w_{\text{ст}}$ при $x=0$ как предел, к которому стремится это выражение при $\theta \rightarrow 0$, и, соответственно, $\beta \rightarrow 0$. Обозначим для удобства бесконечно малую величину $\beta l / 2 = \alpha$ и представим тригонометрический и гипербо-

лический косинусы в виде рядов по их аргументов с точностью до четвертой степени.

$$\begin{aligned}
 w_0(0) = w_{\text{ст}}(0) &= \frac{p_0 l^4}{32EI} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha^4} \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\text{ch} \alpha} - 2 \right) = \\
 &= \frac{p_0 l^4}{32EI} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha^4} \left(\frac{\text{ch} \alpha + \cos \alpha - 2 \cdot \text{ch} \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \text{ch} \alpha} \right) = \\
 &= \frac{p_0 l^4}{32EI} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha^4} \left[1 + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - 2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} \right) \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} \right) \right] = \\
 &= \frac{p_0 l^4}{32EI} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha^4} \left[2 + \frac{\alpha^4}{12} - 2 \left(1 - \frac{\alpha^4}{4} + \frac{\alpha^4}{12} \right) \right] = \frac{5}{384} \frac{q_0 l^4}{EI}.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Таким образом, получили величину прогиба среднего сечения шарнирно опертого стержня, известного из решения статической задачи.

Из выражения (16) следует, что резонансные частоты внешнего воздействия определяются из условия обращения в нуль выражения

$$\cos \frac{\beta l}{2} = 0.$$

Отсюда имеем $\beta l / 2 = (k + 1/2) \pi$ или $\beta l = (2k + 1) \pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Соответственно резонансы реализуются на частотах, удовлетворяющих условию

$$\theta_k = \frac{(2k + 1)^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

При переходе к порядковой нумерации частот, т.е. $m = 2k + 1$ наглядным становится тот факт, что резонансы имеют место на собственных частотах, соответствующих лишь симметричным относительно среднего сечения формам

$$\theta_m = \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} = \omega_m \quad m = 1, 3, 5, 7, \dots \tag{18}$$

Далее это мы увидим и на графике соответствующей амплитудно-частотной зависимости.

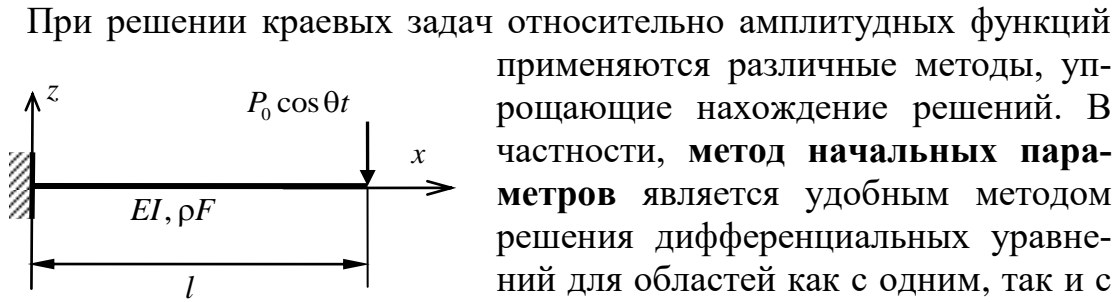


Рис. 4

При решении краевых задач относительно амплитудных функций применяются различные методы, упрощающие нахождение решений. В частности, **метод начальных параметров** является удобным методом решения дифференциальных уравнений для областей как с одним, так и с несколькими участками интегрирования.

Пусть, например, требуется методом начальных параметров построить решение задачи об установившихся вынужденных колебаниях консольного стержня с изгибной жесткостью EI и погонной массой ρF при действии на его свободном конце сосредоточенной силы $P(t) = P_0 \cos \theta t$ (рис. 4). Уравнение изгибных колебаний стержня относительно прогиба $w(x, t)$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

для заданной системы дополняются граничными условиями:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = P_0 \cos \theta t \quad \text{при} \quad x = l$$

Установившееся решение ищем в виде $w(x, t) = w_0(x) \cos \theta t$, где амплитудная функция $w_0(x)$ определяется из уравнения

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} - \beta^4 w_0 = 0, \quad \beta^4 = \frac{\rho F \theta^2}{EI}. \quad (20)$$

Граничные условия для амплитудной функции $w_0(x)$ будут следующими:

$$w_0 = \frac{dw_0}{dx} = 0, \quad \text{при} \quad x = 0; \quad \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 w_0}{dx^3} = \frac{P_0}{EI} \quad \text{при} \quad x = l$$

Фундаментальную систему решений Коши для уравнения (20) образуют функции Крылова

$$S_1(\beta x) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(\beta x) + \cos(\beta x)], \quad S_2(\beta x) = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(\beta x) + \sin(\beta x)],$$

$$S_3(\beta x) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(\beta x) - \cos(\beta x)], \quad S_4(\beta x) = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(\beta x) - \sin(\beta x)].$$

Запишем решение, соответствующее методу начальных параметров, с помощью функций Крылова

$$w_0(x) = w_0(0)S_1(\beta x) + \frac{dw_0(0)}{dx} \frac{1}{\beta} S_2(\beta x) + \frac{M_0}{EI} \frac{1}{\beta^2} S_3(\beta x) + \frac{Q_0}{EI} \frac{1}{\beta^3} S_4(\beta x).$$

Или с учетом граничных условий при $x = 0$

$$w_0(x) = \frac{M_0}{EI} \frac{1}{\beta^2} S_3(\beta x) + \frac{Q_0}{EI} \frac{1}{\beta^3} S_4(\beta x).$$

Здесь M_0 и Q_0 – изгибающий момент и поперечная сила в заделке при $x = 0$, которые определяются из граничных условий при $x = l$.

Удовлетворим граничным условиям при $x = l$, учитывая, что функции Крылова обладают следующим свойством

$$\begin{aligned} \frac{dS_1(\beta x)}{dx} &= \beta S_4(\beta x), & \frac{dS_2(\beta x)}{dx} &= \beta S_1(\beta x), \\ \frac{dS_3(\beta x)}{dx} &= \beta S_2(\beta x), & \frac{dS_4(\beta x)}{dx} &= \beta S_3(\beta x). \end{aligned}$$

Таким образом, относительно изгибающего момента и поперечной силы в нулевом сечении M_0 и Q_0 получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{M_0}{EI} S_1(\beta l) + \frac{Q_0}{EI} \frac{1}{\beta} S_2(\beta l) &= 0, \\ \frac{M_0}{EI} \beta S_4(\beta l) + \frac{Q_0}{EI} S_1(\beta l) &= \frac{P_0}{EI}, \end{aligned}$$

решение которой дает

$$M_0 = -\frac{P_0}{\beta} \frac{S_2(\beta l)}{S_1^2(\beta l) - S_2(\beta l)S_4(\beta l)}, \quad Q_0 = P_0 \frac{S_1(\beta l)}{S_1^2(\beta l) - S_2(\beta l)S_4(\beta l)}.$$

Для амплитудной функции получим следующее выражение

$$w_0(x) = \frac{P_0}{\beta^3 EI} \cdot \frac{[-S_2(\beta l)S_3(\beta x) + S_1(\beta l)S_4(\beta x)]}{[S_1^2(\beta l) - S_2(\beta l)S_4(\beta l)]}. \quad (21)$$

Эта функция имеет особенности при

$$S_1^2(\beta l) - S_2(\beta l)S_4(\beta l) = 0,$$

или

$$\frac{1}{4}(\operatorname{ch}\beta l + \cos\beta l)^2 - \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\beta l + \sin\beta l) \cdot \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\beta l - \sin\beta l) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch}\beta l \cos\beta l) = 0,$$

что соответствует частотному уравнению для консольной балки. Вычислим амплитуду перемещений сечения стержня при $x = l$

$$\begin{aligned} w_0(l) &= \frac{P_0}{\beta^3 EI} \cdot \frac{[-S_2(\beta l)S_3(\beta l) + S_1(\beta l)S_4(\beta l)]}{[S_1^2(\beta l) - S_2(\beta l)S_4(\beta l)]} = \\ &= \frac{P_0 l^3}{EI} \cdot \frac{1}{\kappa^3} \cdot \frac{\operatorname{sh}\kappa \cos \kappa - \operatorname{ch}\kappa \sin \kappa}{1 + \operatorname{ch}\kappa \cos \kappa}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь обозначено $\kappa = \beta l$. Проверим полученное выражение для $w_0(l)$. Устремим частоту вынуждающей силы к нулю. Тогда, если $\theta \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$, $\kappa = \beta l \rightarrow 0$, а выражение (21) в пределе должно дать статический прогиб балки при действии статической силы P_0 для сечения $x = l$

$$\begin{aligned} w_{\text{ст}}(l) &= \frac{P_0 l^3}{EI} \cdot \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{\kappa^3} \cdot \frac{\operatorname{sh}\kappa \cos \kappa - \operatorname{ch}\kappa \sin \kappa}{1 + \operatorname{ch}\kappa \cos \kappa} = \frac{P_0 l^3}{EI} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{\kappa^3} (\operatorname{sh}\kappa - \sin \kappa) = \\ &= \frac{P_0 l^3}{EI} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{\kappa^3} \left(\kappa + \frac{\kappa^3}{3!} + \frac{\kappa^5}{5!} \dots - \kappa + \frac{\kappa^3}{3!} - \frac{\kappa^5}{5!} \dots \right) = \frac{P_0 l^3}{3EI}. \end{aligned}$$

3. Метод разложения по формам собственных колебаний

Рассмотренный выше метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения применяется в том случае, когда после выделения временной составляющей для амплитудной функции получаем дифференциальное уравнение, удобное для дифференцирования. Значительно бо'льшую область применения имеет метод, связанный с представлением решения в виде ряда по формам собственных колебаний.

Для установившихся колебаний амплитудная функция $u_0(x)$ представляется в виде ряда

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \varphi_k(x), \quad (23)$$

где q_k – коэффициенты ряда, выполняющие роль обобщенных координат, $\varphi_k(x)$ – собственные формы колебаний рассматриваемой системы, соответствующие собственным частотам ω_k . Характеристики собственных колебаний $\varphi_k(x)$ и ω_k суть решения однородной краевой задачи

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}_k - \omega_k^2 \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_k = 0.$$

Напомним, что собственные формы колебаний обладают свойствами ортогональности и входят в формулу Релея, связывающую квадраты собственных частот и собственные формы.

$$(\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_k) = 0, \quad (\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_k) = 0 \quad j \neq k, \quad \omega_k^2 = \frac{(\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k)}{(\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k)}. \quad (24)$$

После подстановки ряда (23) в уравнение (5) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k (\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}_k - \theta^2 \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_k) = \mathbf{p}_0(x)$$

Умножим скалярно левую и правую части этого уравнения на собственную форму $\boldsymbol{\varphi}_j(x)$ (процедура метода Бубнова-Галеркина) и с учетом ортогональности свойств (22) получим

$$q_k (\omega_k^2 - \theta^2) = P_k.$$

Правые части этих соотношений есть обобщенные силы, определяемые по формуле

$$P_k = \frac{(\mathbf{p}_0, \boldsymbol{\varphi}_k)}{(\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k)}, \quad (25)$$

Обобщенные силы определяют обобщенные координаты q_k и, соответственно, амплитудную функцию $\mathbf{u}_0(x)$

$$q_k = \frac{P_k}{\omega_k^2 - \theta^2}, \quad \mathbf{u}_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\omega_k^2 - \theta^2} \boldsymbol{\varphi}_k(x). \quad (26)$$

Таким образом, для решения задачи об установившихся вынужденных колебаниях необходимо определить спектр собственных колебаний системы и вычислить обобщенные силы.

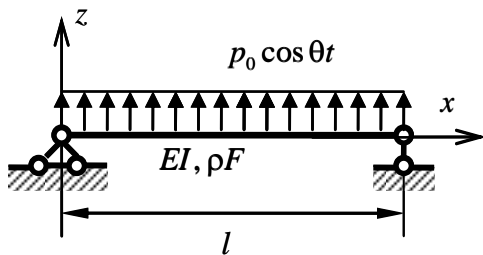


Рис. 5

Применим изложенный метод для отыскания динамической реакции при установившихся изгибных колебаниях шарнирно опертой балки. Пусть на балку длиной l изгибной жесткостью EI и погонной массой ρF действует постоянная по длине распределенная нагрузка, изменяющаяся по гармониче-

ческому закону $p_0 \cos \theta t$ (рис.5). Уравнение вынужденных колебаний относительно прогиба $w(x, t)$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_0 \cos \theta t \quad (27)$$

Как обычно, для установившихся колебаний решение уравнения (27) ищем в виде гармонической реакции с той же частотой и фазой

$$w(x, t) = w_0(x) \cos \theta t. \quad (28)$$

Подставляя (28) в уравнение (27), для определения амплитудной функции $w_0(x)$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} - \beta^4 w_0 = \frac{p_0}{EI}, \quad \beta^4 = \frac{\rho F \theta^2}{EI}$$

с граничными условиями

$$w_0 = \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0 \text{ при } x = 0, l$$

Решение задачи о собственных колебаниях системы, представляющей собой шарнирно опертую балку постоянного поперечного сечения, дает бесконечную последовательность собственных форм и частот

$$\{\varphi_k(x)\} = \left\{ \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \{\omega_k\} = \left\{ \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \right\}_{k=1}^{\infty} \quad (29)$$

Представим амплитудную функцию $w_0(x)$ в виде ряда по формам собственных колебаний

$$w_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \left(\frac{k\pi x}{l} \right) \quad (30)$$

Коэффициенты разложения (обобщенные координаты) определяются по формуле (26), где обобщенные силы определяются согласно (25)

$$P_k = \frac{(p_0, \varphi_k)}{(A\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{\int_0^l p_0 \sin \frac{k\pi x}{l} dx}{\int_0^l \rho F \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx} = \begin{cases} \frac{4p_0}{k\pi \rho F}, & k = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Как следствие симметрии относительно среднего сечения балки системы и нагрузки ряд (30) будет содержать члены, соответствующие только нечетным значениям индекса k .

Таким образом, для амплитудной функции $w_0(x)$ с учетом (26) имеем

$$w_0(x) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4p_0}{k\pi\rho F} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{\frac{k^4\pi^4}{l^4} \frac{EI}{\rho F} - \theta^2} = \frac{4p_0l^4}{\pi^5 EI} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_k^2}}. \quad (31)$$

Если в формуле (31) положить $\theta = 0$, то получим функцию прогиба балки $w_{\text{ст}}(x)$ при статическом действии нагрузки q_0 в виде ряда по собственным формам

$$w_{\text{ст}}(x) = \frac{4p_0l^4}{\pi^5 EI} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (32)$$

Вследствие быстрой сходимости рядов (31) и (32) при практических расчетах, исключая случай резонанса $\theta = \omega_k$, достаточно взять несколько членов. Например, для среднего сечения балки, при котором решение статической задачи дает формулу (17) метод разложения по собственным формам дает

$$w_{\text{ст}}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4p_0l^4}{\pi^5 EI} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \sin \frac{k\pi}{2} = \frac{5}{384} \frac{p_0l^4}{EI} \left\{ \frac{4 \cdot 384}{5\pi^5} \left(1 - \frac{1}{243} + \frac{1}{3125} - \dots \right) \right\}. \quad (33)$$

Сходимость ряда (33) проиллюстрирована на рис. 6, где в зависимости от числа членов ряда n построена сумма ряда (33), отнесенная к точному значению (17)

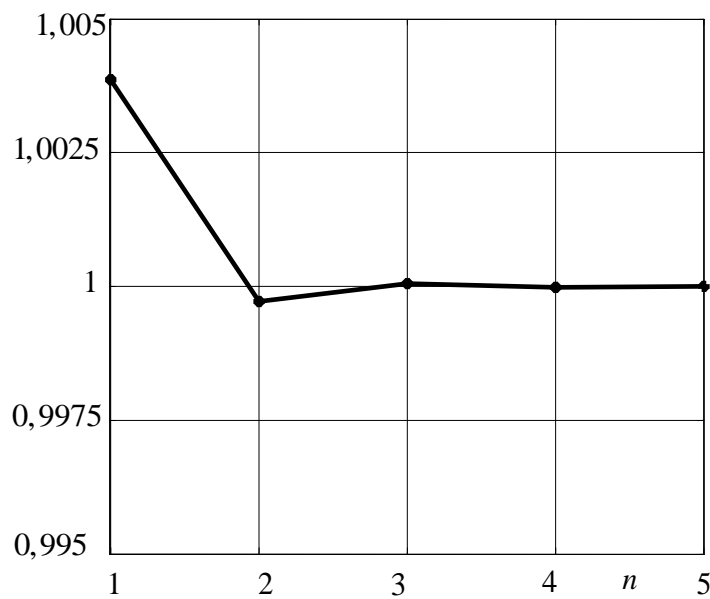


Рис. 6

На рис. 7 представлена амплитудно-частотная характеристика для среднего сечения при $x = l / 2$, построенная с использованием формулы (31) и с удержанием пяти членов ряда $n = 5$. Резонансы имеют место при совпадении частоты вынуждающей силы с собственными частотами, соответствующими симметричным относительно среднего сечения формам с нечетным значениям индекса k

$$\theta_k = \omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}, \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

На рисунке используются безразмерные частоты $\tilde{\omega}_k = k^2 \pi^2$ и $\tilde{\theta} = (\beta l)^2$ и логарифмическая шкала для амплитуды перемещений.

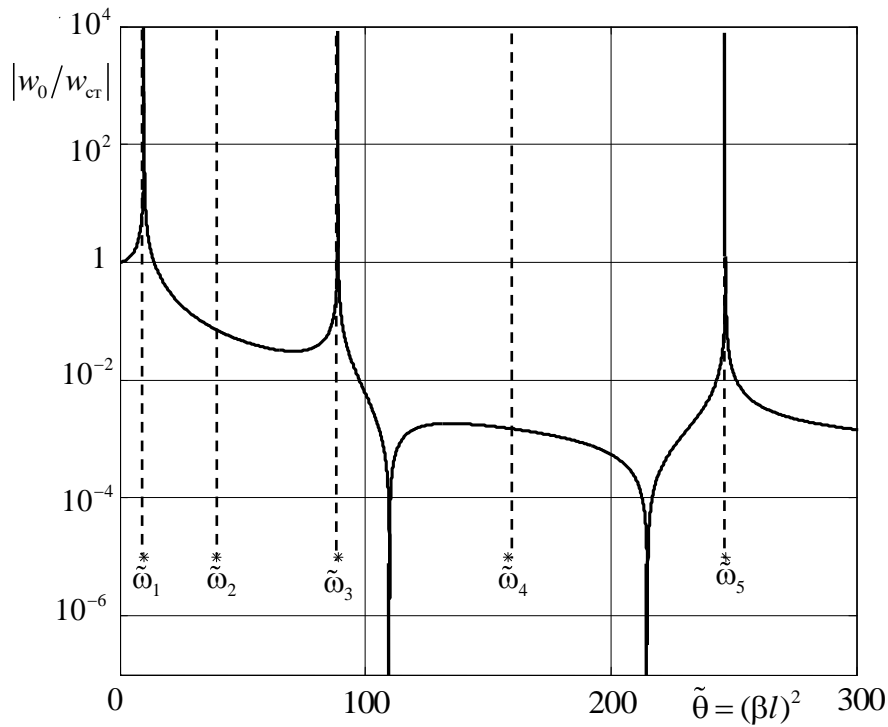


Рис. 7

Если к системе приложены сосредоточенные нагрузки, то в некоторых случаях эти нагрузки могут быть включены в уравнение вынужденных колебаний с помощью дельта-функции Дирака $\delta(x)$. Например, в выше рассмотренной задаче, схема которой представлена на рис. 4, вместо уравнения (19) можно записать

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P_0 \delta(x-l) \cos \theta t. \quad (34)$$

Граничные условия при этом будут следующими:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при} \quad x = l$$

Как и ранее установившееся решение, ищем в виде $w(x, t) = w_0(x) \cos \theta t$, где амплитудная функция $w_0(x)$ определяется из уравнения

$$EI \frac{d^4 w_0}{dx^4} - \theta^2 \rho F w_0 = P_0 \delta(x-l), \quad (35)$$

Представим амплитудную функцию в виде ряда по формам собственных колебаний по формуле (23)

где формы консольной балки определяются из однородного уравнения (19)

$$\varphi_k(x) = S_4(\alpha_k x) - \frac{S_2(\alpha_k l)}{S_1(\alpha_k l)} \cdot S_3(\alpha_k x),$$

а α_k – частотные параметры – корни уравнения $1 + \operatorname{ch} \alpha l \cos \alpha l = 0$.

После подстановки разложения (23) в уравнение (35), умножения на $\varphi_j(x)$ и интегрирования от 0 до l

$$q_k \left[\int_0^l EI \frac{d^4 \varphi_k(x)}{dx^4} \varphi_k(x) dx - \theta^2 \int_0^l \rho F \varphi_k^2(x) dx \right] = \int_0^l P_0 \delta(x-l) \varphi_k(x) dx,$$

с учетом формулы Релея для обобщенных координат получим

$$q_k (\omega_k^2 - \theta^2) = \frac{P_0 \varphi_k(l)}{\int_0^l \rho F \varphi_k^2(x) dx}$$

Итак, для амплитудной функции вместо выражения (21) имеем ряд

$$w_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\omega_k^2 - \theta^2)} \frac{P_0 \varphi_k(l) \varphi_k(x)}{\int_0^l \rho F \varphi_k^2(x) dx}$$

4. Метод разложения по собственным формам в задачах о неустановившихся колебаниях

При постановке задачи о неустановившихся колебаниях механических систем с распределенными параметрами кроме уравнения движения и граничных условий необходимо иметь начальные условия – перемещения точек системы и их скорости в некоторый начальный момент времени

$$u|_{t=0} = v_0(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v_1(x) \quad (36)$$

В разложении перемещения в ряд по формам собственных колебаний коэффициенты разложения (обобщенные координаты) $q_k(t)$ будут функциями времени

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \varphi_k(x) \quad (37)$$

Подставим разложение (37) в уравнение вынужденных колебаний

$$\sum_{k=1}^{\infty} (q_k C \varphi_k - \ddot{q}_k A \varphi_k) = p(x, t).$$

После применения к этому уравнению процедуры метода Бубнова-Галеркина для обобщенных координат получим разделяющиеся обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \frac{(p(x, t), \varphi_k)}{(A \varphi_k, \varphi_k)}$$

или, если ввести обобщенные силы

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = P_k(t); \quad P_k(t) = \frac{(p(x, t), \varphi_k)}{(A \varphi_k, \varphi_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Необходимо также преобразовать и начальные условия. Для этого подставим разложение (37) в условия (36) и скалярно умножим каждое выражение на формы $\varphi_j(x)$ с весом оператора A

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} q_k(0) \varphi_k(x) &= v_0(x) | \cdot \varphi_j \quad \text{с весом } A \\ \sum_{k=1}^{\infty} \dot{q}_k(0) \varphi_k(x) &= v_1(x) | \cdot \varphi_j \quad \text{с весом } A \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$q_k(0) = \frac{(v_0, A \varphi_k)}{(A \varphi_k, \varphi_k)}, \quad \dot{q}_k(0) = \frac{(v_1, A \varphi_k)}{(A \varphi_k, \varphi_k)}$$

Пусть, например, начальные условия нулевые

$$\begin{aligned} u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \\ \text{и} \quad p(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0 \end{aligned}$$

Тогда с использованием интеграла Дюамеля имеем

$$q_k(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k(t - \tau) P_k(\tau) d\tau$$

и реакция системы на нестационарное воздействие определится выражением

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k(t - \tau) P_k(\tau) d\tau, \quad \text{при } t > 0$$

Рассмотрим реакцию шарнирно опертой балки на внезапное приложение равномерно распределенной нагрузки. В этом случае правую часть уравнения

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, t)$$

можно записать в виде

$$p(x, t) = \begin{cases} p_0, & \text{при } t > 0 \\ 0, & \text{при } t \leq 0 \end{cases}$$

Граничные условия $w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ при $x = 0, l$ дополняются нулевыми начальными условиями

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t \leq 0$$

Обобщенные силы определяются соотношениями

$$P_k(t) = \frac{(p, A\varphi_k)}{(A\varphi_k, \varphi_k)} = \begin{cases} \frac{4p_0}{k\pi\rho F}, & k - \text{нечетное} \\ 0, & k - \text{четное} \end{cases} \quad t > 0,$$

$$P_k(t) = 0 \quad \text{при } t \leq 0$$

Перемещения в балке после приложения нагрузки можно записать в виде

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k} \sin \frac{k\pi x}{l} \int_0^t \sin \omega_k(t - \tau) P_k(\tau) d\tau$$

С учетом того, что обобщенные силы в данной задаче являются постоянными, то после вычисления интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin \omega_k (t - \tau) P_k (\tau) d\tau &= \frac{4q_0}{k\pi\rho F} \int_0^t \sin \omega_k (t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{4q_0}{k\pi\rho F} \frac{1}{\omega_k} \cos \omega_k (t - \tau) \Big|_0^t = \frac{4q_0}{k\pi\rho F \omega_k} (1 - \cos \omega_k t) \end{aligned}$$

выражение для прогиба $w(x, t)$ можно переписать в виде

$$w(x, t) = \frac{4p_0 l^4}{\pi^5 EI} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^5} \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot (1 - \cos \omega_k t) = \frac{4q_0 l^4}{\pi^5 EI} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^5} \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot 2 \sin^2 \frac{\omega_k t}{2}$$

Сравнивая это выражение со статической задачей об изгибе шарнирно опертой балки при действии равномерно распределенной нагрузки интенсивностью p_0

$$w_{\text{ст}}(x) = \frac{4q_0 l^4}{\pi^5 EI} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

приходим к выводу, что в системе без демпфирования максимальные динамические перемещения всех сечений в два раза больше, чем прогибы при статическом действии нагрузки)

$$\max_t |w(x, t)| = 2w_{\text{ст}}(x).$$

5. Установившиеся вынужденные колебания в системах с демпфированием

Здесь и далее для простоты изложения будем придерживаться скалярного представления операторов и переменных. Пусть диссипация энергии учитывается по схеме внешнего трения с коэффициентом ε

$$Cu + A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\varepsilon A \frac{\partial u}{\partial t} = p_0(x) \cos \theta t \quad (38)$$

Вследствие наличия трения между нагрузкой $p(x, t)$ и перемещением $u(x, t)$ возникает сдвиг фаз. Поэтому решение следует искать в виде

$$u(x, t) = v_R(x) \cos \theta t + v_I(x) \sin \theta t \quad (39)$$

или

$$u(x, t) = u_0(x) \cos[\theta t - \gamma(x)]. \quad (40)$$

Отметим характерную особенность фазы $-\gamma(x)$, точнее разности фаз между колебаниями и вынуждающей силы при изменении частоты последней. Эта разность всегда отрицательна, т.е. колебания системы "запаздывают" относительно внешней силы. В дорезонансной области с уменьшением частоты $\theta \rightarrow 0$ фаза стремится к нулю $\gamma \rightarrow 0$, а в зарезонансной области $\gamma \rightarrow \pi$. Изменение фазы от нуля до π происходит в узкой области частот, близких к ω_k . Через значение $\pi/2$ разность фаз проходит при $\theta = \omega_k$.

Связь между амплитудными функциями и фазой в выражениях (39) и (40) дается формулами

$$u_0 = \sqrt{v_R^2 + v_I^2}, \quad \gamma(x) = \operatorname{arctg} \frac{v_I}{v_R}.$$

Здесь, в силу отмеченного выше свойства сдвига фаз, при положительных значениях аргумента функции arctg понимается главное значение, т.е. $0 \leq \gamma \leq \pi/2$, а при отрицательных берутся значения из интервала $\pi/2 \leq \gamma \leq \pi$. Это необходимо учитывать при составлении программ решения задач на компьютере.

Подставляя выражение (39) для $u(x, t)$ и приравнивая коэффициенты при $\cos \theta t$ и $\sin \theta t$ имеем

$$\begin{cases} \cos \theta t & \left\{ (C - \theta^2 A) v_R + 2\varepsilon \theta A v_I = p_0 \right. \\ \sin \theta t & \left\{ (C - \theta^2 A) v_I - 2\varepsilon \theta A v_R = 0 \right. \end{cases} \quad (41)$$

Получили систему дифференциальных уравнений для определения v_R и v_I . Порядок уравнений удвоился. Аналогичная ситуация имеет место и при учете рассеяния энергии по схеме Фойхта, так называемого внутреннего трения с коэффициентом η . В этом случае уравнение вынужденных колебаний записывается следующим образом

$$C \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) u + A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p_0(x) \cos \theta t.$$

Можно сохранить порядок уравнений, если применить комплексную форму записи решения. Для этого представим нагрузку в виде

$$p_0(x)\cos\theta t \Rightarrow p_0(x)\exp(i\theta t),$$

и введем комплекснозначную функцию (амплитуду)

$$V(x) = v_R(x) + iv_I(x), \quad u_0(x) = |V(x)|, \quad \gamma(x) = \arg V.$$

Будем искать функцию $\tilde{u}(x, t) = V(x)\exp(i\theta t)$, а искомая реакция системы на воздействие $p_0(x)\cos\theta t$ определится как $u(x, t) = \operatorname{Re}[\tilde{u}(x, t)]$. Тогда вместо системы (41) будем иметь одно уравнение относительно $V(x)$

$$(C - \theta^2 A + 2i\varepsilon\theta A)V = p_0(x) \quad (42)$$

5.1. Применение метода разложения по формам собственных колебаний

В случае применения метода разложения по формам собственных колебаний соответствующей системы без демпфирования $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ также удобно применение комплексного варианта записи уравнения вынужденных колебаний и вместо разложений амплитудных коэффициентов $v_R(x)$ и $v_I(x)$

$$v_R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{(R)} \varphi_k(x), \quad v_I(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{(I)} \varphi_k(x)$$

рассмотреть разложение комплекснозначной функции $V(x)$

$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \varphi_k(x), \quad q_k = q_k^{(R)} + iq_k^{(I)}$$

Основные соотношения расчета установившихся вынужденных колебаний систем с демпфированием приведены в таблице 1.

Таблица 1

Внешнее трение	Внутреннее трение Фойхта
$(\omega_k^2 - \theta^2 + 2i\varepsilon\theta)q_k = P_k$	$[\omega_k^2(1 + i\eta\theta) - \theta^2]q_k = P_k$
$P_k = \frac{(p_0, \varphi_k)}{(A\varphi_k, \varphi_k)}$	
$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k \varphi_k(x)}{\omega_k^2 - \theta^2 + 2i\varepsilon\theta}$	$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k \varphi_k(x)}{(1 + i\eta\theta)\omega_k^2 - \theta^2}$
$q_k^{(R)} = \frac{(\omega_k^2 - \theta^2)P_k}{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2}$	$q_k^{(R)} = \frac{(\omega_k^2 - \theta^2)P_k}{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + \eta^2\theta^2\omega_k^4}$
$q_k^{(I)} = -\frac{2\varepsilon\theta P_k}{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2}$	$q_k^{(I)} = -\frac{\eta\theta\omega_k^2 P_k}{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + \eta^2\theta^2\omega_k^4}$
$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k \varphi_k(x) \cos(\theta t - \gamma_k)}{\sqrt{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2}}$	$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k \varphi_k(x) \cos(\theta t - \gamma_k)}{\sqrt{(\omega_k^2 - \theta^2)^2 + \eta^2\theta^2\omega_k^4}}$
$\gamma_k = \arctg \frac{q_k^{(I)}}{q_k^{(R)}} = \arctg \left(-\frac{2\varepsilon\theta}{\omega_k^2 - \theta^2} \right)$	$\gamma_k = \arctg \frac{q_k^{(I)}}{q_k^{(R)}} = \arctg \left(-\frac{\eta\theta\omega_k^2}{\omega_k^2 - \theta^2} \right)$

Амплитуды колебаний в диссипативных системах при любых значениях частоты вынуждающей силы θ ограничены.

Пусть в системе, изображенной на рис. 5, имеется внешнее трение. Тогда уравнение вынужденных колебаний вместо вида (27) можно записать в виде

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \theta^2 w + 2\varepsilon \rho F \frac{\partial w}{\partial t} = p_0 \cos \theta t \quad (43)$$

или с учетом замены правой части на комплексное воздействие

$$EI \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} + 2\rho F \varepsilon \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = p_0 \exp(i\theta t) \quad (44)$$

Физический смысл имеет $w(x, t) = \text{Re}[\tilde{w}(x, t)]$. Решение уравнения (44) ищем в виде $\tilde{w}(x, t) = V(x) \exp(i\theta t)$. После подстановки получим

$$EI \frac{d^4 V}{dx^4} - \rho F \theta^2 V + 2i\varepsilon \theta \rho F V = p_0$$

Представим решение этого уравнения в виде ряда по формам собственных колебаний

$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

После подстановки в уравнение умножаем на $\sin \frac{j\pi x}{l}$ и интегрируем по длине балки

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \left[EI \frac{k^4 \pi^4}{l^4} - \rho F \theta^2 + 2i\varepsilon \theta \rho F \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = q_0 \cdot \sin \frac{j\pi x}{l} \text{ и } \int_0^l \dots dx$$

С учетом ортогональности после интегрирования получим

$$q_k \left(EI \frac{k^4 \pi^4}{l^4} - \rho F \theta^2 + 2i\varepsilon \theta \rho F \right) \frac{l}{2} = \begin{cases} \frac{2q_0 l}{k\pi}, & k = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Отсюда

$$q_k = \frac{4q_0}{k\pi\rho F} \frac{1}{\omega_k^2 - \theta^2 + 2i\varepsilon\theta} = q_k^{(R)} + iq_k^{(I)}.$$

Таким образом, амплитудная функция $V(x)$ определится по формуле

$$V(x) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4q_0}{k\pi\rho F} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{\omega_k^2 - \theta^2 + 2i\varepsilon\theta}$$

а частное решение уравнения (44) комплекснозначная функция $\tilde{w}(x, t)$

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, t) &= V(x) \exp(i\theta t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} q_k \sin \frac{k\pi x}{l} (\cos \theta t + i \sin \theta t) = \\ &= \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(q_k^{(R)} + iq_k^{(I)} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} (\cos \theta t + i \sin \theta t) \end{aligned}$$

Решение уравнения (43) дается выделением действительной части от $\tilde{w}(x, t)$

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \operatorname{Re}[\tilde{w}(x, t)] = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(q_k^{(R)} \cos \theta t - q_k^{(I)} \sin \theta t \right) \sin \frac{k\pi x}{l} = \\ &= \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \sqrt{\left(q_k^{(R)} \right)^2 + \left(q_k^{(I)} \right)^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos(\theta t - \gamma_k) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} |q_k| \sin \frac{k\pi x}{l} \cos(\theta t - \gamma_k) \end{aligned}$$

где модули обобщенных координат и соответствующие сдвиги фаз определяются формулами

$$|q_k| = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_k^2 - \theta^2 \right)^2 + 4\varepsilon^2 \theta^2}}, \quad \gamma_k = \operatorname{arctg} \frac{q_k^{(I)}}{q_k^{(R)}} = \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon \theta}{\omega_k^2 - \theta^2}$$

И окончательно для установившегося режима колебаний системы с внешним рассеянием энергии можно записать

$$w(x, t) = \frac{4q_0}{\rho F} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l} \cos(\theta t - \gamma_k)}{\sqrt{\left(\omega_k^2 - \theta^2 \right)^2 + 4\varepsilon^2 \theta^2}}.$$

Теперь рассмотрим несколько более сложную задачу, в которой также нужно найти установившуюся реакцию на гармоническое воздействие с применением метода разложения по формам собственных колебаний. Для численного расчета применим системы инженерных и научных расчетов Matlab.

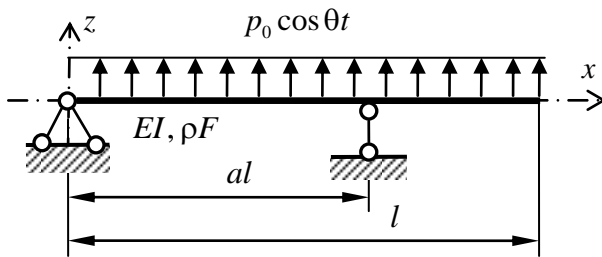


Рис. 8

Система представляет собой балку с прямолинейной осью длиной l и жесткостью EI на двух шарнирных опорах (рис. 8). Одна из шарнирных опор связана с крайним левым сечением балки. Вторая опора расположена на некотором расстоянии al , $(0 \leq a \leq 1)$ от первой опоры.

Для численных расчетов принять $a = 0,5$. На балку, как и в предыдущем примере, действует распределенная гармоническая нагрузка с постоянной по длине интенсивностью $p_0 \cos \theta t$.

С помощью параметров

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\omega_0}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta}{\omega_0}, \quad \tilde{p}_0 = \frac{p_0}{\omega_0^2 \rho F l}$$

перепишем уравнение (43) в безразмерном виде

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \xi^4} + 2\tilde{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tau^2} = \tilde{p}_0 \exp(i\tilde{\theta}\tau),$$

Подразумевая в дальнейшем использование метода разложения по формам собственных колебаний, исследуем спектр собственных колебаний системы.

5.2. Спектр собственных колебаний системы

Рассмотрим собственные колебания рассматриваемой системы (рис. 9)

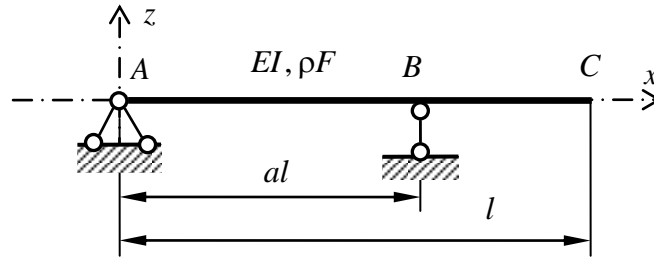


Рис. 9

Решение уравнения собственных колебаний

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

представим в виде

$$w(x, t) = \varphi(x) \exp(i\omega t).$$

Тогда для форм колебаний $\varphi(x)$ получим уравнение

$$EI \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - \rho F \omega^2 \varphi = 0, \quad (45)$$

или в безразмерном виде

$$\frac{d^4 \varphi}{d\xi^4} - \beta^4 \varphi = 0, \quad \text{где} \quad \beta^4 = \frac{m\omega^2 l^4}{EI}$$

С учетом граничных условий при $\xi = 0$, $\varphi_1 = \frac{d^2\varphi_1}{d\xi^2} = 0$ решение уравнения (45) для двух участков интегрирования запишем следующим образом:

$$\varphi_1(\xi) = C_1 \sin \beta \xi + C_2 \operatorname{sh} \beta \xi, \quad 0 \leq \xi \leq a,$$

$$\varphi_2(\xi) = C_3 \sin \beta \xi + C_4 \cos \beta \xi + C_5 \operatorname{sh} \beta \xi + C_6 \operatorname{ch} \beta \xi, \quad a < \xi \leq 1.$$

Система уравнений для определения постоянных $\mathbf{C} = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_6]^T$ в этих выражениях составляется с использованием условий стыковки решений при $\xi = a$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{d\xi} = \frac{d\varphi_2}{d\xi}, \quad \frac{d^2\varphi_1}{d\xi^2} = \frac{d^2\varphi_2}{d\xi^2}$$

и граничных условий на правом конце балки при $\xi = 1$

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\xi^2} = \frac{d^3\varphi_2}{d\xi^3} = 0.$$

Систему уравнений для определения компонент вектора \mathbf{C} можно записать как $\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{0}$, где матрица \mathbf{A} определяется выражением

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin \beta a & \operatorname{sh} \beta a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \beta a & \cos \beta a & \operatorname{sh} \beta a & \operatorname{ch} \beta a \\ \cos \beta a & \operatorname{ch} \beta a & -\cos \beta a & \sin \beta a & -\operatorname{ch} \beta a & -\operatorname{sh} \beta a \\ -\sin \beta a & \operatorname{sh} \beta a & \sin \beta a & \cos \beta a & -\operatorname{sh} \beta a & -\operatorname{ch} \beta a \\ 0 & 0 & -\sin \beta & -\cos \beta & \operatorname{sh} \beta & \operatorname{ch} \beta \\ 0 & 0 & -\cos \beta & \sin \beta & \operatorname{ch} \beta & \operatorname{sh} \beta \end{bmatrix}.$$

Условие нетривиальности решения для постоянных дает трансцендентное уравнение для определения параметров β_k

$$F(\beta, a) = \det \mathbf{A} = 0. \quad (46)$$

После определения корней этого уравнения β_k собственные частоты системы определяются как

$$\omega_k = \frac{\beta_k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

На рис. 10 представлена зависимость частотных параметров β_k от безразмерного расстояния между опорами балки a . Любопытно, что представленные кривые немонотонны с наличием такого количества максимумов, каков номер частотного параметра. При $a \rightarrow 0$ β_k стремятся к корням частотного уравнения $1 + \operatorname{ch} \beta \cos \beta = 0$ для защемленного на одном конце стержня. Например, $\beta_1 \rightarrow 1,875$. При $a \rightarrow 1$ частотные параметры $\beta_k \rightarrow k\pi$, что соответствует шарнирно опертой балке.

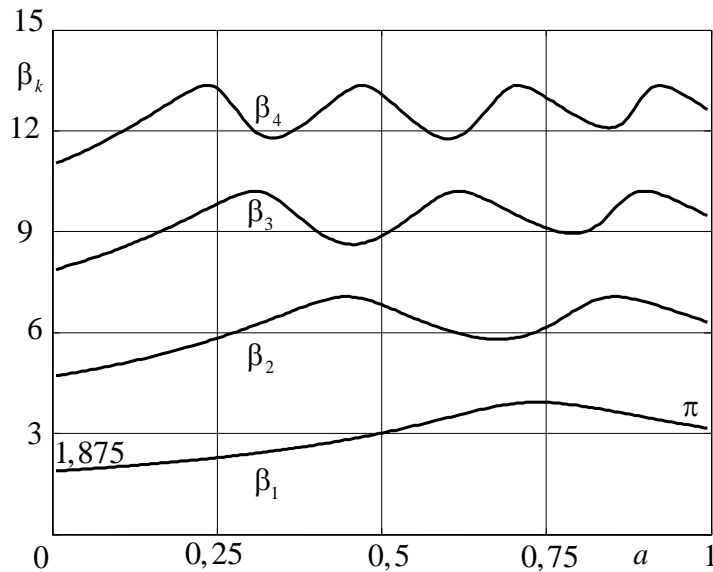


Рис. 10

Для построения форм собственных колебаний с точностью до некоторого множителя определим постоянные $\mathbf{C} = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_6]^T$. При каждом β_k ($k = 1, 2, \dots$), т.е. для каждой собственной частоты положим $C_1^{(k)} = 1$. остальные константы определим из системы неоднородных линейных уравнений

$$\mathbf{C}^{(k)}(2:6) = [\mathbf{A}^{(k)}(2:6, 2:6)]^{-1} [-\mathbf{A}^{(k)}(2:6, 1)].$$

Здесь, как и в системе научно-технических вычислений Matlab, $\mathbf{C}^{(k)}(2:6)$ – вектор с пятью элементами $\mathbf{C}^{(k)}(2:6) = [C_2^{(k)} \ C_3^{(k)} \ \dots \ C_6^{(k)}]^T$, $\mathbf{A}^{(k)}(2:6, 2:6)$ – матрица, которая получается из матрицы \mathbf{A} вычеркиванием первой строки и первого столбца. Возможны и другие варианты

определения постоянных интегрирования C_1, C_2, \dots, C_6 . В данной программе $C_6 = 1$

Таким образом, на двух участках интегрирования уравнения собственных колебаний стержня имеем

$$\varphi_1^{(k)}(\xi) = C_1^{(k)} \sin \beta_k \xi + C_2^{(k)} \operatorname{sh} \beta_k \xi, \quad 0 \leq \xi \leq a,$$

$$\varphi_2^{(k)}(\xi) = C_3^{(k)} \sin \beta_k \xi + C_4^{(k)} \cos \beta_k \xi + C_5^{(k)} \operatorname{sh} \beta_k \xi + C_6^{(k)} \operatorname{ch} \beta_k \xi, \quad a < \xi \leq 1,$$

а k -я форма колебаний, соответствующая собственной частоте ω_k определится как

$$\varphi_k(\xi) = \begin{cases} \varphi_1^{(k)}(\xi), & 0 \leq \xi \leq a, \\ \varphi_2^{(k)}(\xi), & a < \xi \leq 1. \end{cases} \quad (47)$$

На рис. 11 для значения $a = 0,5$ построены первые четыре формы колебаний. Как обычно, усложнение формы колебаний с увеличением номера k проявляется в увеличении числа узловых сечений.

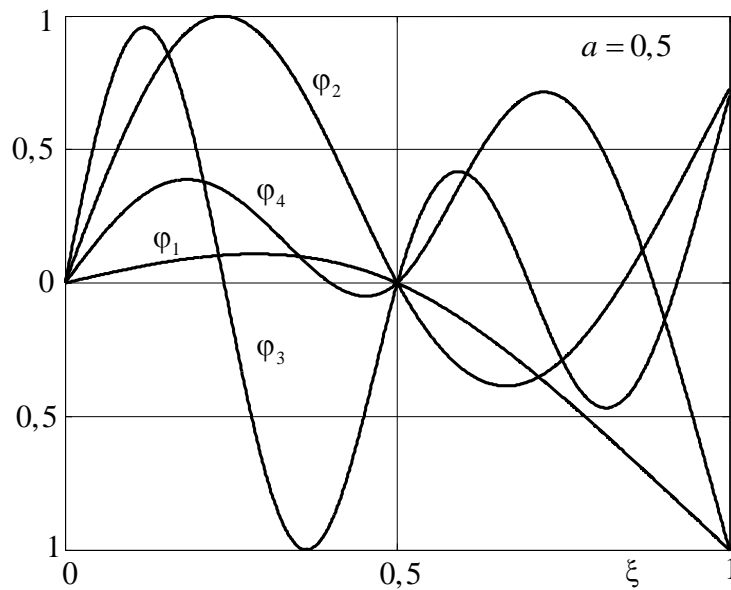


Рис. 11

Для определения частотных параметров β_k составим файл-функцию f_beta , которая определяет матрицу \mathbf{A} , входящей в частотное уравнение (46)


```

function y=f_beta(x,a)
A=[sin(x*a) sinh(x*a) 0 0 0 0;
   0 0 sin(x*a) cos(x*a) sinh(x*a) cosh(x*a);
   cos(x*a) cosh(x*a) -cos(x*a) sin(x*a) -cosh(x*a) -sinh(x*a);
   -sin(x*a) sinh(x*a) sin(x*a) cos(x*a) -sinh(x*a) -cosh(x*a);
   0 0 -sin(x) -cos(x) sinh(x) cosh(x);
   0 0 -cos(x) sin(x) cosh(x) sinh(x)];
y=det(A);

```

Затем составим файл-функцию `f_bet_n`, которая определяет n корней частотного уравнения с помощью функции `fzero` с начальным приближением $j\pi$

```

function y=f_bet_n(n,a)
y=zeros(n,1);
for j=1:n
    y(j)=fzero('f_beta',j*pi,[],a);
end

```

В основной script-программе задаем параметры системы (a – параметр длины), число n (число членов ряда в разложении решения по собственным формам), задаем параметр демпфирования

```

a=0.5;
n=8;
eps=0.01;

```

Затем определяется вектор частотных параметров `bet` размерностью n

```
bet=f_bet_n(n,a);
```

Далее составляются файлы-функции для собственных форм колебаний и их четвертых производных на основании формулы (47). В этих программах сначала для каждой собственной частоты определяются константы C . При этом $C(6)=1$ задается равной 1. Остальные определяются из системы алгебраических уравнений.

Формы собственных колебаний

```

function y=f_form(bet,x,a)
n=length(bet);
m=length(x);
y=zeros(n,m);

for j=1:n
    C=zeros(6,1);
    C(6)=1;
    A=[sin(bet(j)*a) sinh(bet(j)*a) 0 0 0 0;
       0 0 sin(bet(j)*a) cos(bet(j)*a) sinh(bet(j)*a) cosh(bet(j)*a);
       cos(bet(j)*a) cosh(bet(j)*a) -cos(bet(j)*a) sin(bet(j)*a) -
cosh(bet(j)*a) ...
       -sinh(bet(j)*a);
       -sin(bet(j)*a) sinh(bet(j)*a) sin(bet(j)*a) cos(bet(j)*a) -
sinh(bet(j)*a) ...
       -cosh(bet(j)*a);

```

```

0 0 -sin(bet(j)) -cos(bet(j)) sinh(bet(j)) cosh(bet(j));
0 0 -cos(bet(j)) sin(bet(j)) cosh(bet(j)) sinh(bet(j))];

C(1:5)=A(1:5,1:5)^-1*(-A(1:5,6));

for k=1:m
    if x(k)<a
        y(j,k)=C(1)*sin(bet(j)*x(k))+C(2)*sinh(bet(j)*x(k));
    else
        y(j,k)=C(3)*sin(bet(j)*x(k))+C(4)*cos(bet(j)*x(k))+C(5)*...
            sinh(bet(j)*x(k))+C(6)*cosh(bet(j)*x(k));
    end
end
end

```

Четвертые производные от собственных форм

```

function y=f_form_4pr(bet,x,a)
n=length(bet);
m=length(x);
y=zeros(n,m);

for j=1:n
    C=zeros(6,1);
    C(6)=1;
    A=[sin(bet(j)*a) sinh(bet(j)*a) 0 0 0 0;
        0 0 sin(bet(j)*a) cos(bet(j)*a) sinh(bet(j)*a) cosh(bet(j)*a);
        cos(bet(j)*a) cosh(bet(j)*a) -cos(bet(j)*a) sin(bet(j)*a) -
cosh(bet(j)*a) ...
        -sinh(bet(j)*a);
        -sin(bet(j)*a) sinh(bet(j)*a) sin(bet(j)*a) cos(bet(j)*a) -
sinh(bet(j)*a) ...
        -cosh(bet(j)*a);
        0 0 -sin(bet(j)) -cos(bet(j)) sinh(bet(j)) cosh(bet(j));
        0 0 -cos(bet(j)) sin(bet(j)) cosh(bet(j)) sinh(bet(j))];

    C(1:5)=A(1:5,1:5)^-1*(-A(1:5,6));

    for k=1:m
        if x(k)<a

y(j,k)=bet(j)^4*(C(1)*sin(bet(j)*x(k))+C(2)*sinh(bet(j)*x(k)));
            else

y(j,k)=bet(j)^4*(C(3)*sin(bet(j)*x(k))+C(4)*cos(bet(j)*x(k))+...
                C(5)*sinh(bet(j)*x(k))+C(6)*cosh(bet(j)*x(k)));
            end
        end
    end
end

```

Представим решение $w(\xi, \tau)$ этого уравнения в виде ряда по формам собственных колебаний

$$\tilde{w}(\xi, \tau) = \mathbf{q}^T \cdot \boldsymbol{\varphi}(\xi) \exp(i\theta\tau), \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}(\xi) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\beta_1\xi) \\ \varphi_2(\beta_2\xi) \\ \dots \\ \varphi_n(\beta_n\xi) \end{bmatrix},$$

где \mathbf{q} – вектор обобщенных координат, $\boldsymbol{\varphi}(\xi)$ – вектор форм собственных колебаний, β_k – параметры, определяемые для заданной системы из частотного уравнения (2), n – число удерживаемых членов ряда.

В скалярной форме разложение имеет вид

$$\tilde{w}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k(\beta_k \xi) \exp(i\theta\tau).$$

Применим к уравнению вынужденных колебаний процедуру метода Бубнова-Галеркина. Для этого подставим в уравнение разложение прогиба в ряд. Затем поочередно умножим полученное уравнение на каждую собственную форму $\varphi_k(\beta_k \xi)$ ($k=1, 2, \dots, n$) и проинтегрируем полученные выражения по ξ от 0 до 1. В результате придем к уравнениям относительно обобщенных координат q_k . Матричную форму этих уравнений можно записать в виде

$$(\mathbf{C} + 2i\varepsilon\theta\mathbf{A} - \theta^2\mathbf{A})\mathbf{q} = \mathbf{Q}.$$

Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{C} размерностью $n \times n$ и вектор обобщенных сил \mathbf{Q} вычисляются по формулам

$$\mathbf{A} = \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi, \quad \mathbf{C} = \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \left(\frac{d^4 \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^4} \right)^T d\xi, \quad \mathbf{Q} = \int_0^1 q(\xi) \boldsymbol{\varphi}(\xi) d\xi$$

Для определения этих матриц \mathbf{A}, \mathbf{C} и вектора \mathbf{Q} составим файлы-функции, учитывая что условия ортогональности

```
function y=f_A(bet,a)
dx=0.001;
x=0:dx:1;
y=diag(dx*trapz((f_form(bet,x,a)') .^2));
```

```
function y=f_C(bet,a)
dx=0.001;
x=0:dx:1;
y=diag(dx*trapz(f_form_4pr(bet,x,a)' .* f_form(bet,x,
```

для вектора \mathbf{Q}

```
function y=f_Qq(bet)
    dx=0.005;
    x=0:dx:1;
    for k=1:length(x)
        Q(:,k)=f_q(x(k))*f_form(bet,x(k));
    end
    y=dx*trapz(Q,2);
```

Если нагрузка постоянная, то

```
function y=f_q(x)
y=1;
```

После вычисления матриц \mathbf{A}, \mathbf{D} и вектора \mathbf{Q} комплексные обобщенные координаты определяются как

$$\mathbf{q} = (\mathbf{C} + 2i\varepsilon\theta\mathbf{A} - \theta^2\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{Q}.$$

После вычисления компонент вектора обобщенных координат \mathbf{q} амплитудные значения перемещений в некотором сечении с координатой ξ определяются как

$$w(\xi, \tau) = \operatorname{Re}[\tilde{w}(\xi, \tau)] = \sum_{k=1}^n \operatorname{abs}(q_k) \varphi_k(\xi) \cos(\tilde{\theta}\tau - \gamma_k).$$

$$\gamma_k = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} q_k}{\operatorname{Re} q_k}\right)$$

Построим амплитудно-частотные характеристики для обобщенных координат $\operatorname{abs}[q_k(\tilde{\theta})] = |q_k(\tilde{\theta})|$ и фазо-частотные характеристики $\gamma_k(\tilde{\theta})$, варьируя частоту внешнего воздействия $\tilde{\theta}$ при параметре внешнего демпфирования $\tilde{\varepsilon} = 1$.

Основная программа вычислений в системе Matlab

scriptfile amp_chast.m

```
clear

a=0.5;
n=4;
eps=1;

bet=f_bet_n(n,a);

A=f_A(bet,a);
C=f_C(bet,a);
Q=f_Qq(bet,a);
```

```

om=sqrt(eig(C,A));

qst=C^-1*Q;

b=1;%Сечение колебания которого рассматриваем
wstb=abs(qst'*f_form(bet,b,a));

theta0=0;
thetaf=200;
N=2001;
dtheta=(thetaf-theta0)/(N-1);

f=zeros(n,N);
ff=zeros(n,N);
gamma=zeros(n,N);
theta=zeros(1,N);

for k=1:N
    theta(k)=theta0+(k-1)*dtheta;
    D=C+(2i*eps*theta(k)-theta(k)^2)*A;
    f(:,k)=D^-1*Q;
    ff(:,k)=abs(f(:,k));
    ff(:,k)=ff(:,k)/wstb;
end

for m=1:n
    for k=1:N
        theta(k)=theta0+(k-1)*dtheta;
        if theta(k)<=om(m)
            gamma(m,k)=-atan(imag(f(m,k)/real(f(m,k)))));
        else
            gamma(m,k)=-atan(imag(f(m,k)/real(f(m,k))))+pi;
        end
    end
end

figure(1)
semilogy(theta,ff,'Color','black','LineWidth',1.5)
hold on;grid on
plot(om,[0.001,0.001,0.001,0.001],'*','Color','black')
for j=1:n
    plot([om(j) om(j)],[10^-3 10^2],'Color','black')
end

title('Зависимость обобщенных координат от частоты при
\chi=1','Fontname',...
'Times New Roman','fontsize', 12)
ylabel('f_k','Fontname','Times New Roman','fontsize', 14,...
'FontAngle','italic')
xlabel('\theta','Fontname','Times New Roman','fontsize', 14)
text(om(1)+3,1.5*10^-3,'\omega_1','fontsize', 14,...
'Fontname','Times New Roman')
text(om(2)+2,1.5*10^-3,'\omega_2','fontsize', 14,...
'Fontname','Times New Roman')
text(om(3)+2,1.5*10^-3,'\omega_3','fontsize', 14,...
'Fontname','Times New Roman')
text(om(4)+2,1.5*10^-3,'\omega_4','fontsize', 14,...
'Fontname','Times New Roman')

```

```

[f1 t1]=max(ff(1,:));
[f2 t2]=max(ff(2,:));
[f3 t3]=max(ff(3,:));
[f4 t4]=max(ff(4,:));

text(theta(t1),f1+2,'|q_1|','fontsize', 14,'Fontname','Times New
Roman',...
'FontAngle','italic')
text(theta(t2),f2+2,'|q_2|','fontsize', 14,'Fontname','Times New
Roman',...
'FontAngle','italic')
text(theta(t3),f3+5,'|q_3|','fontsize', 14,'Fontname','Times New
Roman',...
'FontAngle','italic')
text(theta(t4),f4+0.1,'|q_4|','fontsize', 14,'Fontname','Times New
Roman',...
'FontAngle','italic')

figure(2)
plot(theta,gamma,'Color','black','LineWidth',1.5)
hold on; grid on
title('Фазо-частотные характеристики при \xi=1','Fontname',...
'Times New Roman','fontsize', 12)
plot([theta(1) theta(end)],[pi/2
pi/2],':','Color','black','LineWidth',1.5)
plot([theta(1) theta(end)],[pi pi],':','Color','black','LineWidth',1.5)
for j=1:n
    plot([om(j) om(j)],[0 3.5],'Color','black')
end
ylabel('\gamma_k','Fontname','Times New Roman','fontsize', 14)
xlabel('\theta','Fontname','Times New Roman','fontsize', 14)

text(om(1)+2,0.2,'\omega_1','fontsize', 14,'Fontname','Times New Roman')
text(om(2)+2,0.2,'\omega_2','fontsize', 14,'Fontname','Times New Roman')
text(om(3)+2,0.2,'\omega_3','fontsize', 14,'Fontname','Times New Roman')
text(om(4)+2,0.2,'\omega_4','fontsize', 14,'Fontname','Times New Roman')
plot(om,[0.1,0.1,0.1,0.1], '*', 'Color','black')
text(om(1)+2,1.8,'\gamma_1','fontsize', 14,'Fontname','Times New Roman')
text(om(2)+2,1.8,'\gamma_2','fontsize', 14,'Fontname','Times New Roman')
text(om(3)+2,1.8,'\gamma_3','fontsize', 14,'Fontname','Times New Roman')
text(om(4)+2,1.8,'\gamma_4','fontsize', 14,'Fontname','Times New Roman')

text(190,pi+0.1,'\pi','fontsize', 14,'Fontname','Times New Roman')
text(185,pi/2+0.1,'\pi/2','fontsize', 14,'Fontname','Times New Roman')

```

На рис. 12 построены амплитудно частотные характеристики для модулей обобщенных координат $|q_k(\tilde{\theta})|$, $k = 1, 2, 3, 4$. На рис. 13 изображены фазочастотные характеристики $|\gamma_k(\tilde{\theta})|$, $k = 1, 2, 3, 4$.

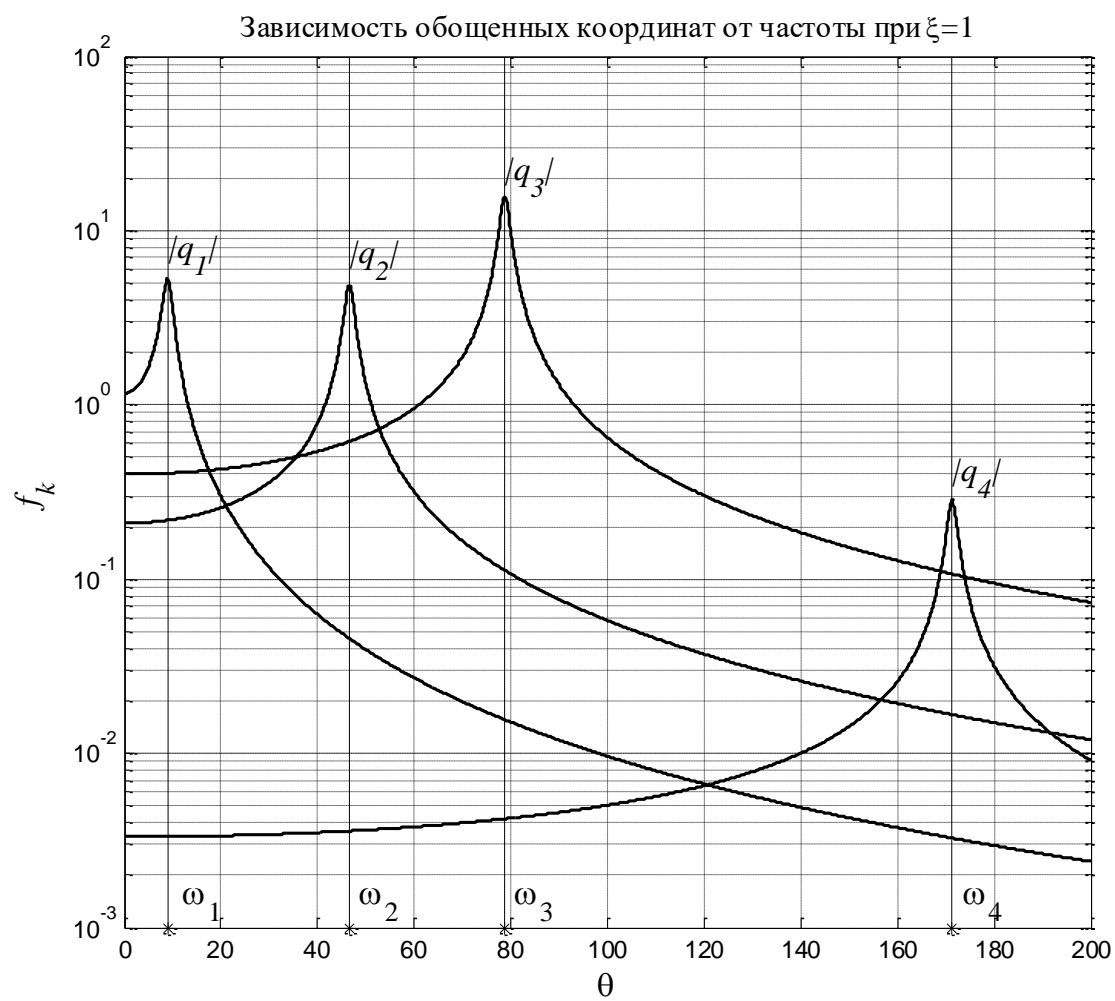


Рис. 12

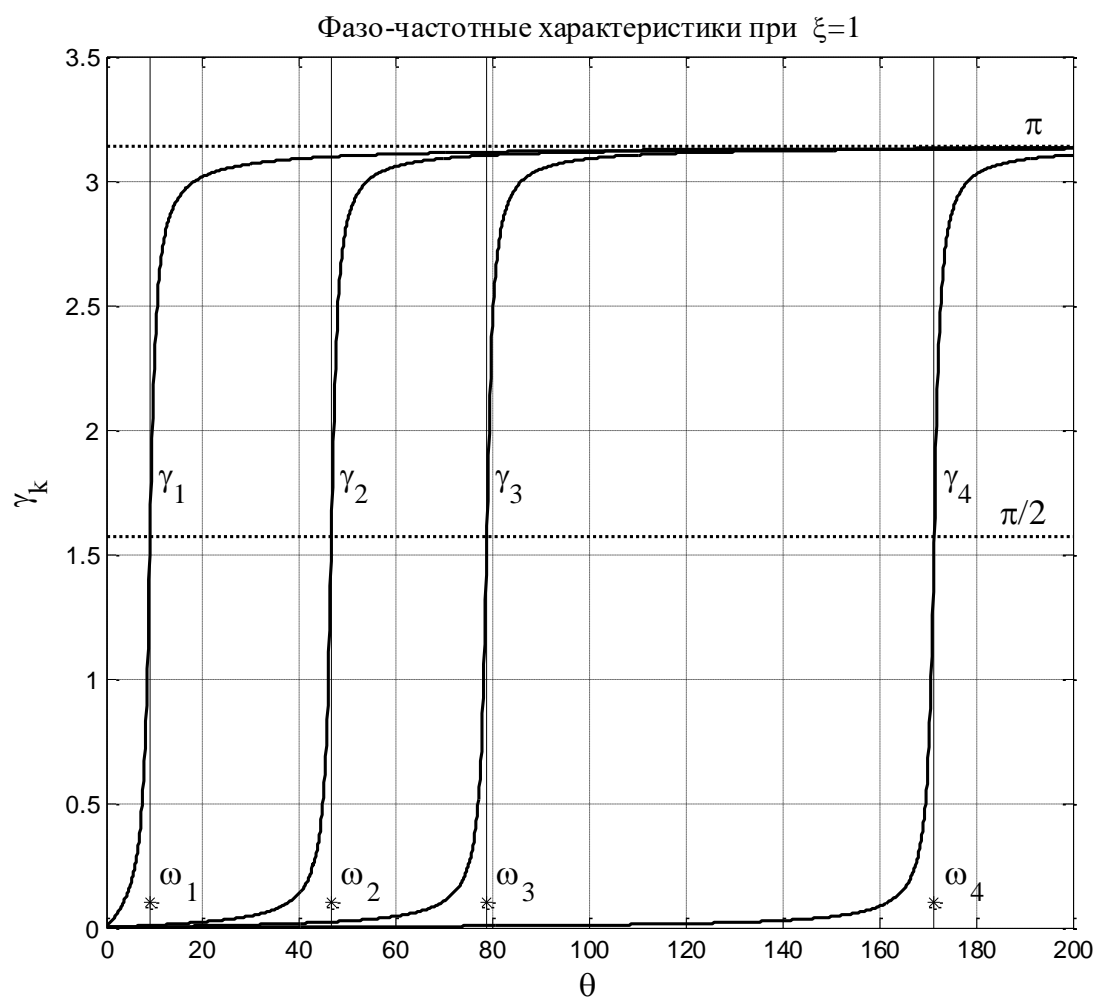


Рис. 13

6. Постановка задачи для примера из курсовой работы

Для заданной расчетной схемы (рис. 14) некоторой механической системы и вида внешнего гармонического воздействия с использованием системы инженерных и научных расчетов Matlab провести исследование установившихся вынужденных колебаний, а именно:

1. Определить низшие (не менее 4-х) собственные частоты и соответствующие им собственные формы.
2. Согласно методу разложения решения по формам собственных колебаний определить матричное уравнение относительно обобщенных координат и вектор обобщенных сил.
3. Определить и построить зависимость обобщенных координат от частоты внешнего воздействия.
4. Для характерного сечения системы при выбранных значениях характеристик внутреннего и внешнего трения построить амплитудно-частотную характеристику.

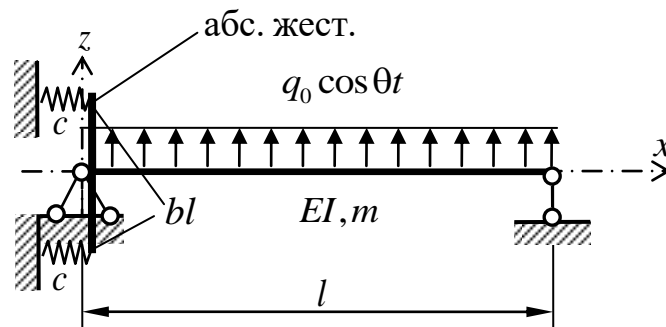


Рис. 14 Расчетная схема

Система представляет собой балку с прямолинейной осью длиной l и жесткостью EI на шарнирных опорах. Левая шарнирная опора имеет устройство с упругим сопротивлением повороту крайнего сечения, $c = \frac{\alpha EI}{l^3}$, где b, α – заданные числа.

Рассмотрим собственные колебания системы (рис. 15).

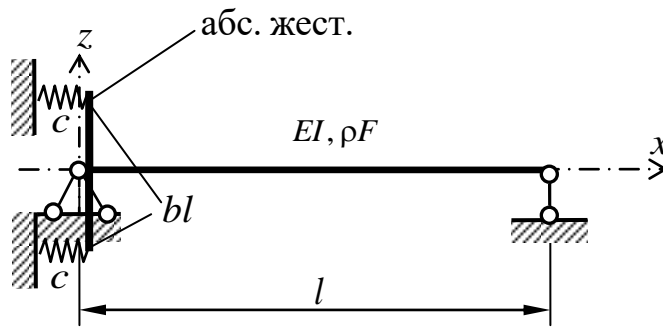


Рис. 15

Решение уравнения собственных изгибных колебаний

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

представим в виде

$$w(x, t) = \varphi(x) \exp(i\omega t).$$

Тогда для форм колебаний $\varphi(x)$ получим уравнение

$$EI \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - \rho F \omega^2 \varphi = 0,$$

или в безразмерном виде

$$\frac{d^4 \varphi}{d\xi^4} - \beta^4 \varphi = 0, \quad \text{где} \quad \beta^4 = \frac{m\omega^2 l^4}{EI}$$

Решение уравнения представим в виде

$$\varphi(\xi) = C_1 \sin \beta \xi + C_2 \cos \beta \xi + C_3 \operatorname{sh} \beta \xi + C_4 \operatorname{ch} \beta \xi$$

Запишем граничные условия при $\xi = 0$

$$\varphi = 0, \quad \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = 2\alpha b^2 \frac{d\varphi}{d\xi}$$

и граничные условия при $\xi = 1$

$$\varphi = 0, \quad \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = 0$$

Составим систему уравнений для определения постоянных интегрирования $\mathbf{C} = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_4]^T$

$$1. C_2 + C_4 = 0$$

$$2. -\beta^2 C_2 + \beta^2 C_4 = 2\alpha b^2 \beta (C_1 + C_3)$$

$$3. C_1 \sin \beta + C_2 \cos \beta + C_3 \operatorname{sh} \beta + C_4 \operatorname{ch} \beta = 0$$

$$4. -C_1 \sin \beta - C_2 \cos \beta + C_3 \operatorname{sh} \beta + C_4 \operatorname{ch} \beta = 0$$

Систему уравнений для определения компонент вектора \mathbf{C} можно записать как $\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{0}$, где матрица \mathbf{A} определяется выражением

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2\alpha b^2 & -\beta & -2\alpha b^2 & \beta \\ \sin \beta & \cos \beta & \operatorname{sh} \beta & \operatorname{ch} \beta \\ -\sin \beta & -\cos \beta & \operatorname{sh} \beta & \operatorname{ch} \beta \end{bmatrix}$$

Условие нетривиальности решения для постоянных дает трансцендентное уравнение для определения параметров β_k

$$F(\beta, a) = \det \mathbf{A} = 0.$$

После определения корней этого уравнения β_k собственные частоты системы определяются как

$$\omega_k = \frac{\beta_k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}.$$

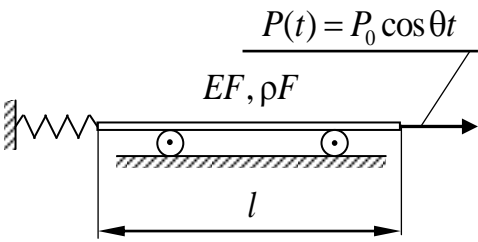
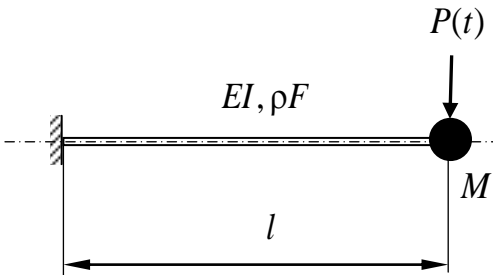
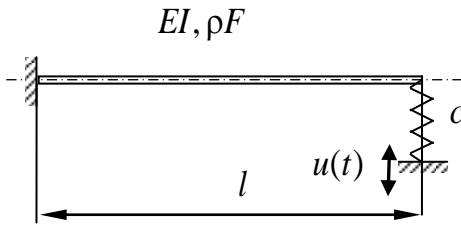
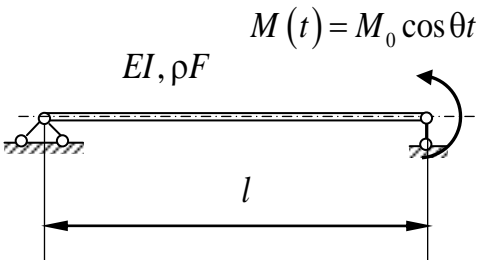
Выполнение следующих пунктов задания (2-4) выполняется аналогично примеру, рассмотренному в главе 5.2.

Контрольные вопросы

1. Чем отличается математическая модель описания динамического поведения системы с распределенными параметрами от модели системы с конечным числом степеней свободы?
2. Сформулируйте вариационный принцип Гамильтона – Остроградского и как с его помощью можно получить уравнения колебаний и естественные граничные условия.
3. Как используется принцип Даламбера для получения уравнений динамики?
4. В чем состоят поправки Релея для продольных и изгибных колебаний стержней?
5. Какие предположения о деформировании стержня предложил С.П. Тимошенко для уточненной теории изгибных колебаний стержней?
6. Дайте определение основным свойствам упругого и инерционного операторов.
7. Какими свойствами обладают собственные частоты и собственные формы колебаний распределенных систем?
8. Чем отличается энергетическое пространство упругого оператора от области его определения?
9. Какие наиболее популярные в инженерной практике энергетические методы определения характеристик собственных колебаний существуют и в чем они заключаются?
10. Какую оценку для основной собственной частоты дает формула Релея?
11. Каким образом можно свести распределенную систему к системе с конечным числом степеней свободы?
12. В каких случаях можно получить точные значения для собственных частот и точные выражения для форм собственных колебаний?
13. Что такое балочные функции, и какими свойствами они обладают?
14. В чем состоит метод начальных параметров, и какими преимуществами он обладает?
15. Суть методов динамических податливостей и жесткостей.
16. Как влияет учет деформаций поперечного сдвига на величину собственных частот при изгибных колебаниях стержня?
17. В каком случае при колебаниях прямоугольных пластин с граничными условиями Навье могут быть кратные частоты?
18. По какому закону распределяются собственные частоты в пластинах?
19. С помощью каких специальных функций определяются формы собственных колебаний круговых пластин?
20. Сформулируйте гипотезы, которые принимаются в классической теории колебаний пластин.

21. В чем заключается особенность плотности распределения собственных частот у оболочек?
22. Какими свойствами обладают продольные и поперечные волны в неограниченной изотропной упругой среде?
23. Что такое дисперсионное уравнение, и какие характеристики волн оно связывает?
24. Как связаны между собой фазовая и групповая скорости?
25. При каких колебаниях в стержнях имеет место аномальная дисперсия?
26. Каковы причины рассеяния энергии при колебаниях упругих систем?
27. Каковы характеристики рассеяния энергии?
28. Как влияют различные виды диссипации энергии на частоты свободных колебаний?
29. В каком случае при гармоническом воздействии на систему без демпфирования решение уравнения колебаний не существует?
30. Каковы методы расчета вынужденных колебаний распределенных систем?
31. Что нужно знать о системе для применения метода обобщенных координат?
32. Какими преимуществами обладает метод разложения по формам собственных колебаний в задачах о вынужденных колебаниях?
33. Какие осложнения имеют место в задачах о вынужденных колебаниях в системах с демпфированием?
34. Что такое критические скорости вращения вала и как они определяются?
35. Какое влияние оказывают гироскопические силы на собственные частоты изгибных колебаний вала и на критические скорости вращения?
36. Какие постановки задачи возможны при расчете механических систем на подвижную нагрузку?
37. Как определяется полная производная по времени в задаче о действии подвижной инерционной нагрузки на балку?
38. Основные допущения элементарной теории удара?
39. Особенности теории удара С.П. Тимошенко.
40. Чем отличается расчет механических систем на вынужденные колебания от расчета при параметрических колебаниях?

Примеры экзаменационных и тестовых задач

	<p>Получить закон движения точки приложения силы $P(t) = P_0 \cos \theta t$ для стержня с упруго закрепленным левым сечением. Жесткость пружины $c = \frac{EF}{l}$, где EF – жесткость сечений стержня на растяжение (сжатие), плотность материала стержня – ρ.</p>
	<p>Методом начальных параметров построить решение задачи об установившихся вынужденных изгибных колебаниях консольного стержня с изгибной жесткостью EI и погонной массой ρF, несущего на свободном конце сосредоточенную массу $M = \rho Fl$, при силовом воздействии $P(t) = P_0 \cos \theta t$.</p>
	<p>Найти решение задачи об установившихся вынужденных изгибных колебаниях стержня, левый конец которого жестко зашпелен, а правый с помощью пружины жесткостью $c = \frac{EI}{l^3}$ связан с основанием, колеблющемся по закону $u(t) = f \cos \theta t$.</p>
	<p>Методом разложения по собственным формам построить решение задачи об установившихся вынужденных колебаниях стержня с изгибной жесткостью EI и погонной массой ρF при воздействии на правой опоре момента $M(t) = M_0 \cos \theta t$.</p>

Список рекомендованной литературы

а) основная литература:

1. Электронный конспект лекций по курсу "Динамика машин" – М.: МЭИ, 2012.
2. Вибрации в технике. Т.1. Колебания линейных систем. / Под ред. В.В.Болотина. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: "Высшая школа", 1980. - 408 с.
4. Светлицкий В.А. Задачи и примеры по теории колебаний. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1994. 308 с.

б) дополнительная литература:

1. Потемкин В.Г. Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x: В 2-х т. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. –366 с.
2. Радин В.П., Стрельникова Н.Л. Решение задач механики материалов и конструкций в системе MathCAD. М.: Издательство МЭИ, 2000. 64 с.
3. Воронцов А.Н., Трифонов О.В. Вычислительные методы в механике материалов и конструкций. М.: Издательство МЭИ, 2001. 80 с.

Учебное издание

Радин Владимир Павлович
Новикова Ольга Валерьевна
Щугорев Алексей Владимирович

**РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ВЫНУЖДЕННЫЕ
КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ**

Редактор издательства
Компьютерная верстка

Темплан издания МЭИ 2018

Печать офсетная Формат 60х84/16

Изд. № Заказ

Подписано в печать

Физ. печ. л. 3,0 Тираж 150

Оригинал-макет подготовлен в РИО НИУ «МЭИ».

111250, Москва, Красноказарменная, д.14

Отпечатано в типографии НИУ «МЭИ».

111250, Москва, Красноказарменная, д.13