

# Théorème de Thalès

## A. Triangles semblables

### C.1

- ① Sachant que les angles d'un triangle sont supplémentaires, on en déduit l'égalité :

- Dans le triangle  $ABC$  :

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180$$

$$34 + \widehat{BCA} + 90 = 180$$

$$\widehat{BCA} + 124 = 180$$

$$\widehat{BCA} = 180 - 124$$

$$\widehat{BCA} = 56^\circ$$

- Dans le triangle  $DEF$  :

$$\widehat{DEF} + \widehat{EFD} + \widehat{FDE} = 180$$

$$56 + 90 + \widehat{FDE} = 180$$

$$146 + \widehat{FDE} = 180$$

$$\widehat{FDE} = 180 - 146$$

$$\widehat{FDE} = 34^\circ$$

Les deux triangles  $DEF$  et  $ABC$  ont deux angles deux à deux de même mesure :

$$\widehat{DFE} = \widehat{BAC} = 90^\circ ; \quad \widehat{EDF} = \widehat{ABC} = 34^\circ$$

On en déduit que les triangles  $DEF$  et  $ABC$  sont semblables.

- ② Voici le tableau complété :

	Côtés homologues		
Dans le triangle $ABC$	$[AB]$	$[BC]$	$[AC]$
Dans le triangle $DEF$	$[DF]$	$[DC]$	$[EF]$

### C.2

- Dans le triangle  $ADE$ , par supplémentarité des angles, on a :

$$\widehat{ADE} + \widehat{DEA} + \widehat{EAD} = 180 \quad \left| \quad \widehat{DEA} = 180 - 139 \right.$$

$$107 + \widehat{DEA} + 32 = 180 \quad \left| \quad \widehat{DEA} = 41^\circ \right.$$

$$\widehat{DEA} + 139 = 180$$

- Dans le triangle  $ABC$ , par supplémentarité des angles, on a :

$$\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = 180 \quad \left| \quad \widehat{ACB} = 180 - 73 \right.$$

$$32 + \widehat{ACB} + 41 = 180 \quad \left| \quad \widehat{ACB} = 107^\circ \right.$$

$$\widehat{ACB} + 73 = 180$$

Les triangles  $ABC$  et  $ADE$  sont semblables, car les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre.

### C.3

- Les angles  $\widehat{EAF}$  et  $\widehat{CAB}$  sont opposés par le sommet : ils sont donc de mesures égales.
- Les droites  $(CB)$  et  $(EF)$  sont parallèles et sont coupées par la sécante  $(CF)$ .  
Les angles  $\widehat{CBA}$  et  $\widehat{AEF}$  sont des angles alterne-internes. On en déduit que les angles  $\widehat{CBA}$  et  $\widehat{AEF}$  sont des angles de mesures égales.
- Les droites  $(CB)$  et  $(EF)$  sont parallèles et sont coupées

par la sécante  $(BE)$ .

Les angles  $\widehat{AEF}$  et  $\widehat{ABC}$  sont des angles alterne-internes.

On en déduit que les angles  $\widehat{AEF}$  et  $\widehat{ABC}$  sont de mesures égales.

Les triangles  $AEF$  et  $ABC$  sont semblables, car les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre.

### C.4

- ① Voici le tableau de proportionnalité :

Le côté	le plus long	"moyen"	le plus court
Dans le triangle $ABC$	4	3	2
Dans le triangle $DEF$	5	3,75	2,5

- ② Déterminons les coefficients de chacune de ces colonnes :

- $\frac{AB}{DE} = \frac{4}{5} = 0,8$

- $\frac{AC}{DF} = \frac{3}{3,75} = 0,8$

- $\frac{BC}{EF} = \frac{2}{2,5} = 0,8$

Chaque colonne possède le même coefficient de proportionnalité : ce tableau est un tableau de proportionnalité.

- ③ Ces deux triangles sont semblables.

## B. Théorème de Thalès

### C.5

Voici la rédaction attendue :

- ① Les points  $K, G, J$  et les points  $K, H, I$  sont alignés. Les droites  $(GH)$  et  $(JI)$  sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{KG}{KJ} = \frac{KH}{KI} = \frac{GH}{JI}$$

- ② Les points  $Z, X, V$  et les points  $Z, Y, W$  sont alignés. Les droites  $(VW)$  et  $(YX)$  sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{ZX}{ZV} = \frac{ZY}{ZW} = \frac{YX}{VW}$$

### C.6

On a :  $K \in [TM]$  ;  $L \in [TN]$  ;  $(KL) \parallel (MN)$

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{TK}{TM} = \frac{TL}{TN} = \frac{KL}{MN}$$

Une application numérique nous donne :

$$\frac{5}{12,5} = \frac{6,5}{TN} = \frac{KL}{MN}$$

Le produit en croix nous donne :

$$5 \times TN = 12,5 \times 6,5$$

$$TN = \frac{12,5 \times 6,5}{5} = 16,25 \text{ cm}$$

### C.7

- ① Dans le triangle  $ABC$ , on a les propriétés suivantes :

$$M \in [AB] ; N \in [AC] ; (MN) \parallel (BC)$$

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités suivantes :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Utilisons l'égalité suivante :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Par application numérique, on a :

$$\frac{\frac{6}{5}}{\frac{6}{5} + \frac{4}{2}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{12}{10} + \frac{25}{10}}$$

$$\frac{\frac{6}{5}}{\frac{37}{10}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{37}{10}}$$

A l'aide du produit en croix, on a :

$$\frac{6}{5} \times AC = \frac{4}{5} \times \frac{37}{10}$$

$$\frac{6}{5} \times AC = \frac{148}{50}$$

$$\frac{6}{5} \times AC = \frac{2 \times 74}{2 \times 25}$$

$$AC = \frac{74}{\frac{6}{5} \times \frac{25}{2}}$$

$$AC = \frac{74}{25} \times \frac{5}{6}$$

$$AC = \frac{2 \times 37}{5 \times 5} \times \frac{5 \times 1}{2 \times 3}$$

$$AC = \frac{37}{5} \times \frac{1}{3}$$

$$AC = \frac{37}{15}$$

- 2 Dans le triangle  $DEF$ , on a les propriétés suivantes :

$$R \in [DE] ; S \in [DF] ; (RS) \parallel (EF)$$

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités suivantes :

$$\frac{DR}{DE} = \frac{DS}{DF} = \frac{RS}{EF}$$

Utilisons l'égalité suivante :

$$\frac{DR}{DE} = \frac{RS}{EF}$$

Par application numérique, on a :

$$\frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{2} + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{12}{5}}{EF}$$

$$\frac{\frac{9}{2}}{\frac{27}{6} + \frac{8}{6}} = \frac{\frac{12}{5}}{EF}$$

$$\frac{\frac{9}{2}}{\frac{35}{6}} = \frac{\frac{12}{5}}{EF}$$

En utilisant le produit en croix, on obtient :

$$\frac{9}{2} \times EF = \frac{35}{6} \times \frac{12}{5}$$

$$\frac{9}{2} \times EF = \frac{5 \times 7}{6 \times 1} \times \frac{6 \times 1}{5 \times 1}$$

$$\frac{9}{2} \times EF = \frac{7}{1} \times \frac{2}{1}$$

$$\frac{9}{2} \times EF = 14$$

$$EF = \frac{14}{\frac{9}{2}}$$

$$EF = 14 \times \frac{2}{9}$$

$$EF = \frac{28}{9}$$

**C.8** Les points  $C, A, N$  sont alignés.

Les points  $B, A, M$  sont alignés.

Les droites  $(BC)$  et  $(MN)$  sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité suivante :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Par application numérique, on obtient :

$$\frac{5}{1,5} = \frac{AN}{2}$$

Le produit en croix permet d'obtenir :

$$AN \times 1,5 = 5 \times 2$$

$$AN = \frac{5 \times 2}{1,5}$$

$$AN = \frac{10}{1,5} = \frac{100}{15} = \frac{20}{3}$$

**C.9**

- 1 a Les points  $O, M, D$  sont alignés et les points  $O, A, C$  sont alignés.

Les droites  $(AM)$  et  $(CD)$  sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OM}{OD} = \frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CD}$$

- b Les points  $O, M, B$  sont alignés et les points  $O, A, N$

sont alignés.

Les droites  $(BN)$  et  $(AM)$  sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{OB}{OM} = \frac{ON}{OA} = \frac{BN}{AM}$$

- 2 ● Calcul de  $OB$  :

D'après la question 1 a, on a :  $\frac{OB}{OM} = \frac{ON}{OA}$ .

Ce qui donne :

$$OB = \frac{ON}{OA} \times OM = \frac{5}{4} \times 3 = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ cm}$$

- Calcul de  $AM$  :

D'après la question 1 b, on a :

$$\frac{AM}{CD} = \frac{OA}{OC}$$

Ce qui donne :  $AM = \frac{OA}{OC} \times CD = \frac{4}{6} \times 3 = 2 \text{ cm}$

- Calcul de  $BN$  :

D'après la question 1 b, on a :

$$\frac{ON}{OA} = \frac{BN}{AM}$$

Ce qui donne :  $BN = \frac{ON}{OA} \times AM = \frac{5}{4} \times 2 = \frac{5}{2} \text{ cm}$

## C. Réciproque

C.10 On a les quotients :

$$\frac{PR}{PT} = \frac{2}{2,5} = 0,8 ; \quad \frac{PQ}{PS} = \frac{3}{3 + 0,75} = \frac{3}{3,75} = 0,8$$

Les points  $P, Q, S$  et les points  $P, R, S$  sont alignés dans le même ordre.

On a l'égalité des quotients :  $\frac{PQ}{PS} = \frac{PR}{PT}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que :  $(QR) \parallel (ST)$

C.11 Les points  $P, Z, F$  et les points  $Q, Z, G$  sont alignés dans le même ordre.

On a les valeurs suivantes des quotients :

$$\frac{ZP}{ZF} = \frac{5,5}{3} = \frac{11}{6} ; \quad \frac{ZQ}{ZG} = \frac{3,3}{1,8} = \frac{33}{18} = \frac{11}{6}$$

Ainsi, on a l'égalité suivante :  $\frac{ZP}{ZF} = \frac{ZQ}{ZG}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que les droites  $(PQ)$  et  $(GF)$  sont parallèles.

## D. Problèmes

C.12

- 1 Pour montrer que le carré de la plus grande longueur est égale à la somme des carrés des deux autres longueurs, on calcule séparément ces deux valeurs :

●  $CE^2 = 10,4^2 = 108,16$

●  $DE^2 + CD^2 = 4^2 + 9,6^2 = 16 + 92,16 = 108,16$

On remarque l'égalité suivante :

$$CE^2 = DE^2 + CD^2.$$

Si un triangle vérifie la propriété de Pythagore alors ce triangle est rectangle.

On en déduit que le triangle  $CDE$  est rectangle en  $D$ .

- 2 On a  $(AB) \perp (BD)$  et  $(DE) \perp (BD)$

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.

On en déduit :  $(AB) \parallel (DE)$

- 3 Les points  $B, C, D$  et les points  $A, C, E$  sont alignés. Les droites  $(AB)$  et  $(DE)$  sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE}$$

Utilisons l'égalité :

$$\frac{CB}{CD} = \frac{AB}{DE}$$

Par application numérique, on a :

$$\frac{12}{9,6} = \frac{AB}{4}$$

Le produit en croix donne :

$$12 \times 4 = 9,6 \times AB$$

$$AB = \frac{12 \times 4}{9,6}$$

$$AB = 5 \text{ cm}$$

C.13

- 1 ● On a les valeurs des rapports :

$$\frac{BM}{BC} = \frac{2,4}{3,6} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \quad \left| \quad \frac{BN}{BA} = \frac{2,6}{3,9} = \frac{26}{39} = \frac{2}{3} \right.$$

Ainsi, on a :  $\frac{BM}{BC} = \frac{BN}{BA}$

De plus, les points  $B, M, C$  et les points  $B, N, A$  sont alignés dans le même ordre.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que les droites  $(AC)$  et  $(MN)$  sont parallèles.

- On a :  $(AC) \parallel (MN)$  ;  $(AC) \perp (BC)$

Si deux droites sont parallèles entre elles et si une troisième droite est parallèle à l'une alors elle est parallèle à l'autre.

On en déduit :  $(BC) \perp (MN)$

On en déduit que le triangle  $BMN$  est rectangle en  $M$ .

- 2 a Le triangle  $BMN$  est rectangle en  $M$ .

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$BN^2 = BM^2 + MN^2$$

$$2,6^2 = 2,4^2 + MN^2$$

$$6,76 = 5,76 + MN^2$$

$$MN^2 = 6,76 - 5,76$$

$$MN^2 = 1$$

$$MN = 1 \text{ cm}$$

- b Dans le triangle  $MNB$  rectangle en  $M$ , on a la relation trigonométrique :

$$\cos \widehat{MNB} = \frac{NM}{NB}$$

$$\widehat{MNB} = \cos^{-1} \left( \frac{1}{2,6} \right)$$

$$\cos \widehat{MNB} = \frac{1}{2,6}$$

$$\widehat{MNB} \approx \cos^{-1} \left( \frac{1}{2,6} \right)$$

$$\widehat{MNB} \approx 67,38$$

$$\widehat{MNB} \approx 67^\circ$$

C.14

- 1 Dans le triangle  $BCD$  rectangle en  $C$  et d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$

$$BD^2 = 1,5^2 + 2^2$$

$$BD^2 = 2,25 + 4$$

$$BD^2 = 6,25$$

$$BD = \sqrt{6,25}$$

$$BD = 2,5 \text{ km}$$

- ② Par la nature des triangles  $BCD$  et  $DEF$ , on en déduit :  
 $(EC) \perp (BC)$  ;  $(EC) \perp (EF)$

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors ces deux droites sont parallèles entre elles.

On en déduit :  $(BC) \parallel (EF)$

- ③ Les points  $D$ ,  $B$ ,  $F$  et les points  $C$ ,  $D$ ,  $E$  sont alignés dans le même ordre.

Les droites  $(BC)$  et  $(EF)$  sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on en déduit l'égalité des rapports :

$$\frac{DB}{DF} = \frac{DC}{DE} = \frac{BC}{FE}$$

$$\frac{2,5}{DF} = \frac{2}{5} = \frac{1,5}{FE}$$

Utilisons le rapport :

$$\frac{2,5}{DF} = \frac{2}{5}$$

A l'aide du produit en croix :

$$2,5 \times 5 = 2 \times DF$$

$$DF = \frac{12,5}{2}$$

$$DF = 6,25 \text{ km}$$

- ④ On en déduit la longueur totale du parcours :

$$AB + BD + DF + FG = 7 + 2,5 + 6,25 + 3,5 = 19,25 \text{ km}$$

- ⑤ À la vitesse de  $16 \text{ km/h}$ , on parcourt  $16 \text{ km}$  en  $3600 \text{ secondes}$ .

On a le tableau de proportionnalité :

	Durée	Distance
Moyenne	3600	16
Totalité	$x$	7

D'après le produit en croix :

$$3600 \times 7 = 16 \times x$$

$$x = \frac{25200}{16}$$

$$x = 1575$$

Ainsi, le parcours total durera  $1575 \text{ secondes}$ , ce qui se convertit en :

$$26 \text{ min } 15 \text{ s}$$

- C.15** Le triangle  $ABC$  étant rectangle en  $A$ , d'après le théorème de Pythagore, on a la relation :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 300^2 + 400^2$$

$$BC^2 = 90\,000^2 + 160\,000^2$$

$$BC^2 = 250\,000$$

$$BC = 500$$

Les points  $C$ ,  $A$ ,  $E$  et les points  $C$ ,  $B$ ,  $D$  sont alignés.

Les droites  $(AB)$  et  $(ED)$  sont parallèles entre elles.

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités de rapports suivants :

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE}$$

- Pour déterminer la longueur  $CD$ , utilisons l'égalité suivante :

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE}$$

Par application numérique, on a :

$$\frac{500}{CD} = \frac{400}{1000}$$

D'après le produit en croix, on a :

$$500 \times 1000 = CD \times 400$$

$$CD = \frac{500 \times 1000}{400}$$

$$CD = \frac{500 \times 1000}{400}$$

$$CD = 1250 \text{ m}$$

- Pour déterminer la longueur  $DE$ , utilisons l'égalité suivante :

$$\frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE}$$

Par application numérique, on a :

$$\frac{400}{1000} = \frac{300}{DE}$$

D'après le produit en croix, on a :

$$400 \times DE = 1000 \times 300$$

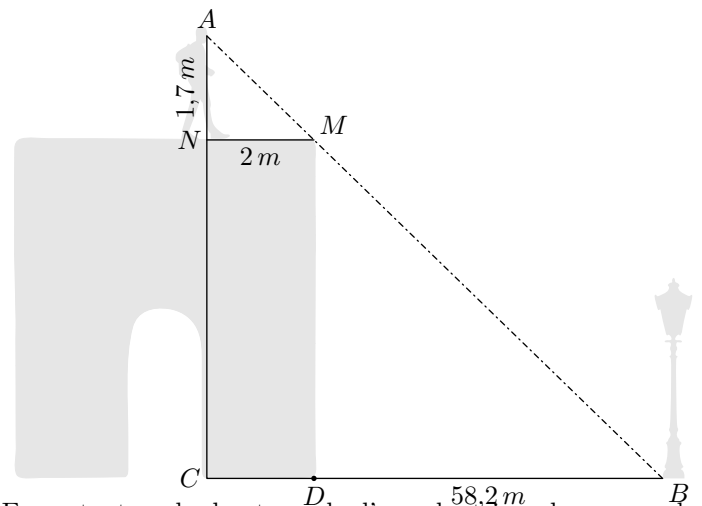
$$DE = \frac{1000 \times 300}{400}$$

$$DE = 750 \text{ m}$$

Ainsi, cette course a une longueur de :

$$AB + BC + CD + DE = 300 + 500 + 1250 + 750 = 2\,800 \text{ m}$$

- C.16** Voici une représentation schématisant la situation :



En notant  $x$  la hauteur de l'arc de triomphe, on a les longueurs :

$$AN = 1,7 \text{ ; } AC = 1,7 + x \text{ ; } MN = 2 \text{ ; } CB = 60,2$$

Le toit du monument et le sol étant horizontal, ils sont tous les deux parallèles.

Les points  $A$ ,  $N$ ,  $C$  et les points  $A$ ,  $M$ ,  $B$  sont alignés.

D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des rapports des longueurs :

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{1,7}{1,7 + x} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{60,2}$$

Utilisons le quotient :

$$\frac{1,7}{1,7+x} = \frac{2}{60,2}$$

D'après le produit en croix :

$$1,7 \times 60,2 = (1,7 + x) \times 2$$

$$102,34 = 3,4 + 2x$$

$$102,34 - 3,4 = 2x$$

$$2x = 98,94$$

$$x = \frac{98,94}{2}$$

$$x = 49,47 \text{ m}$$