Notion de fonction

A. Introduction

C.1

1. La température atteinte au bout de 3 minutes est d'environ 70^o.
2. La température au bout de la deuxième minute est 50^o et au bout de la septième minute est 140^o.
   Ainsi, entre la deuxième et la septième minute, la température a augmenté de 90^o.
3. La première fois que la température de 150^o est atteinte au bout de 8 minutes.

C.2

1. a. Au cours de l'exécution du programme, les variables seront affectées des valeurs :

```
x ← 5
Etape 1 ← 30
Etape 2 ← 40
Résultat ← 20
```

   Ainsi, le message à la fin de l'exécution du programme est "*J'obtiens finalement* 20"

   b. En choisissant le nombre 7 pour nombre de départ, voici les valeurs affectées à chacune des variables :

```
x ← 7
Etape 1 ← 42
Etape 2 ← 52
Résultat ← 26
```

2. Voici le tableau de valeurs :

Valeur du nombre choisi	5	7	1	4	8	10
Valeur retournée par l'algorithme	20	26	8	17	29	35

3. En choisissant le nombre x comme nombre de départ, voici les différentes affectations de variable lors de l'exécution de l'algorithme :

```
Etape 1 ← 6× x
Etape 2 ← 6× x+10
Résultat ← (6× x+10)÷2
```

   L'expression obtenue peut se simplifie par :
   $(6x+10)\div 2 = 3x+5$

C.3

1. a. Avec le grossiste A, le prix d'une commande de 9 paquets coûte :
   $48\times 9 = 432$ €.

   b. Avec le grossiste B, le prix d'une commande de 9 paquets coûte :
   $45+42\times 9 = 423$ €.
2. a. Pour la commande de n paquets, le grossiste A facturera :
   $p_A(n) = 48\times n$

   b. Avec le grossiste B, l'achat de n paquets vaudra :
   $p_B(n) = 42\times n+45$.

B. Image et antécédent

C.4

1. L'image $f(x)$ s'exprime en fonction de x par :
   $f(x) = 3\times x^2$
2. Voici le tableau complété :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	12	3	0	3	12

C.5 On a les deux tableaux de valeurs suivants :

x	-2	1	4
$f(x)$	-5	1	7

x	-1	0	2
$g(x)$	6	3	3

C.6

1. Voici les étapes successives de transformation du nombre x choisi :
   $x \rightsquigarrow x+1 \rightsquigarrow (x+1)^2 \rightsquigarrow (x+1)^2-x^2$
   Ainsi, la fonction f admet pour expression :
   $f(x) = (x+1)^2-x^2$
2. On a les transformations algébriques suivantes :
   $f(x) = (x+1)^2-x^2 = (x^2+2x+1)-x^2 = 2x+1$
3. Déterminons les images demandées :
   - $f(-1) = 2\times(-1)+1 = -2+1 = -1$
   - $f(0) = 2\times 0+1 = 0+1 = 1$
   - $f(1) = 2\times 1+1 = 2+1 = 3$
   - $f(2) = 2\times 2+1 = 4+1 = 5$

   Voici le tableau complété :

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	1	3	5

C.7

1. On a les images suivantes par la fonction f :
   - $f(-3) = 3\times(-3)-4 = -9-4 = -13$
   - $f(-1) = 3\times(-1)-4 = -3-4 = -7$
   - $f(2{,}5) = 3\times 2{,}5-4 = 3{,}5$
   - $f(10) = 3\times 10-4 = 26$
2. - Les antécédents du nombre 5 par la fonction f sont les solutions de l'équation :
     $3x-4 = 5$
     $3x = 9$
     $x = 3$
   - Les antécédents du nombre -10 par la fonction f sont les solutions de l'équation :
     $3x-4 = -10$
     $3x = -6$
     $x = -2$

C.8

1. En notant x le nombre de départ, voici les différentes transformations par le programme de calcul :
   $x \rightsquigarrow x+5 \rightsquigarrow 3\times(x+5) \rightsquigarrow 3\times(x+5)-2$
   Ainsi, l'image $f(x)$ admet pour expression :
   $f(x) = 3(x+5)-2$

2 a L'image du nombre 3 a pour valeur :
$f(4)=3\times\big(4+5\big)-2=3\times9-2=27-2=25$

b Soit x un antécédent du nombre 3 alors x est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} f(x)&=4\\ 3\big(x+5\big)-2&=4\\ 3\big(x+5\big)&=4+2\\ 3\big(x+5\big)&=6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+5&=\frac{6}{3}\\ x+5&=2\\ x&=2-5\\ x&=-3 \end{aligned}$$

Le nombre 4 admet pour unique antécédent le nombre -3.

C.9

1 • Voici les différentes étapes du programme de calcul A :

$$\left.\begin{array}{ccc} x & \rightsquigarrow & x+3 \\ x & \rightsquigarrow & x-3 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \quad (x+3)(x-3)$$

La fonction f admet pour expression :
$f(x)=(x+3)(x-3)$

• Voici les différentes étapes du programme de calcul B :

$$\left.\begin{array}{ccc} x & \rightsquigarrow & x^2 \\ x & \rightsquigarrow & 2x \end{array}\right\} \rightsquigarrow \quad x^2+2x \quad \rightsquigarrow \quad x^2+2x-4$$

La fonction g admet pour expression :
$g(x)=x^2+2x-4$

2 Notons x le nombre donnant le même nombre par ces deux programmes de calculs. L'image du nombre x par les fonctions f et g ont la même valeur :

$$\begin{aligned} f(x)&=g(x)\\ \big(x+3\big)\big(x-3\big)&=x^2+2x-4\\ x^2-3^2&=x^2+2x-4\\ x^2-9&=x^2+2x-4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^2-9-x^2-2x&=-4\\ -2x-9&=-4\\ -2x-9+9&=-4+9\\ -2x&=5\\ x&=-\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Les nombres retournés par ces deux programmes de calculs sont égaux si on choisit le nombre $-\dfrac{5}{2}$ comme nombre d'entrées.

C.10 Voici les phrases complétées :

1 L'image du nombre -2 par la fonction f est 6.

2 Le nombre 0 est l'image de 6 par la fonction f.

3 Un antécédent du nombre 1 par la fonction f est 0.

4 Le nombre 7 est un antécédent de -2 par f.

C.11

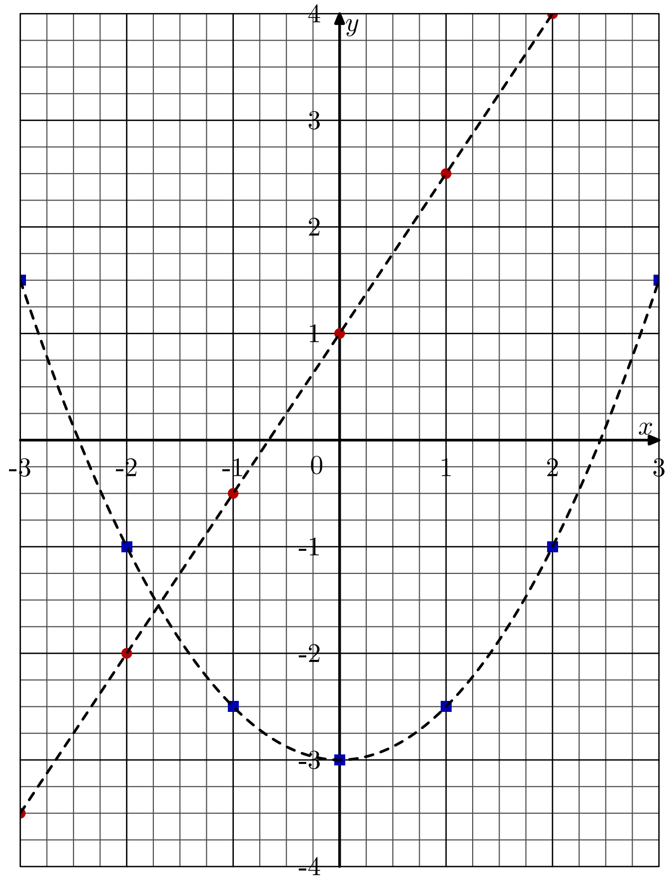
1 La colonne `C` permet d'affirmer que l'image de -1 par la fonction f a pour valeur -7.

2 La colonne `G` permet d'affirmer que 3 est un antécédent du nombre 5 par la fonction f.

C. *Représentation graphique*

C.12

1 Voici le repère demandé :



2 a Voici le tableau de valeurs associé à la fonction f :

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-3{,}5$	-2	$-0{,}5$	1	$2{,}5$	4

3 a Voici le tableau de valeurs associé à la fonction g :

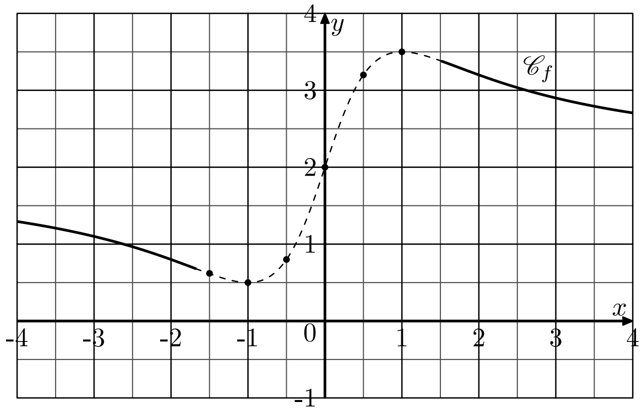
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	$1{,}5$	-1	$-2{,}5$	-3	$-2{,}5$	-1	$1{,}5$

C.13

1 Voici le tableau complété :

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1
$f(x)$	$0{,}62$	$0{,}5$	$0{,}8$	2	$3{,}2$	$3{,}5$

2 Voici la représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$:



C.14

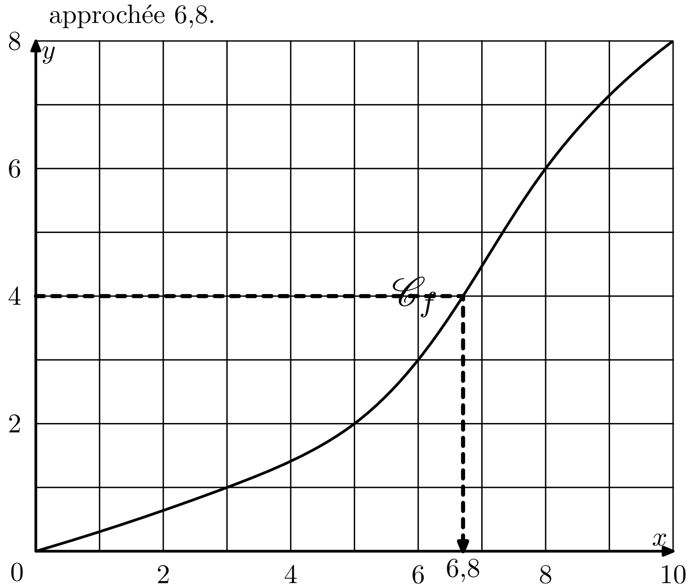
1 a On a le tableau de valeurs suivantes :

x	0	3	6	8	10
$f(x)$	0	1	3	6	8

(b) D'après le tableau de valeurs, on a : $f(8) = 6$
On en déduit que le nombre 6 admet la valeur 8 pour antécédent par la fonction f.

(2) Le point $(5\,;2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.
On en déduit que le nombre 5 est un antécédent de 2 par la fonction f.

(3) Graphiquement, l'antécédent du nombre 4 a pour valeur approchée 6,8.



C.15

(1) (a) Les coordonnées des deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant la valeur 2 pour ordonnée sont :
$(-2\,;2)$; $(-1\,;2)$.

(b) De la question précédente, on en déduit que le nombre 2 admet deux antécédents par la fonction f qui sont :
-2 ; -1.

(2) (a) Le nombre 1 admet quatre antécédents par la fonction f, car la droite horizontale passant par le 1 des ordonnées intercepte la courbe en quatre points dont les coordonnées sont :
$(-2{,}5\,;1)$; $(-0{,}5\,;1)$; $(2\,;1)$; $(2{,}5\,;1)$

(b) Ainsi, les antécédents du nombre 1 par la fonction f sont les nombres :
$-2{,}5$; $-0{,}5$; 2 ; $2{,}5$.

(3) Les antécédents du nombre -1 par la fonction f sont :
0,5 ; 1

C.16

(1)
- f admet un unique antécédent du nombre 3 qui est -3 :
$f(-3) = 3$
- Il existe un unique antécédent du nombre 2,5 par f :
$f(-2) = 2{,}5$
-2 est l'unique antécédent par la fonction f du nombre 2,5.
- L'unique antécédent du nombre 0 par la fonction f est 3 :
$f(3) = 0$
- La fonction f n'admet pas d'antécédent du nombre $-1{,}5$.

(2) (a) La fonction g admet un unique antécédent du nombre $-1{,}5$; ce nombre est -3 :
$g(-3) = -1{,}5$

(b) Le nombre 2 admet trois antécédents par la fonction g :
-1 ; 1 ; 3

(c) Le nombre 1 admet deux antécédents par la fonction g :
$g(-1{,}5) = 1$; $g(2) = 1$

C.17

(1) Déterminons les images demandées par la fonction f :
- Le point de coordonnées $(-4\,;-1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$; on en déduit que l'image du nombre -4 est -1 :
$f(-4) = -1$
- On a $(0\,;1) \in \mathscr{C}_f$. On en déduit l'image du nombre 0 est 1 :
$f(0) = 1$
- On a $(3\,;2) \in \mathscr{C}_f$. Ainsi, l'image du nombre 3 par la fonction f est le nombre 2 :
$f(3) = 2$

(2) (a) La courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point possédant la valeur 3 pour abscisse : ses coordonnées sont $\left(\dfrac{3}{2}\,;3\right)$.
On en déduit que la fonction f admet un unique antécédent 3 par la fonction f.

(b) Les deux points de coordonnées $(-4\,;-1)$ et $(-2\,;-1)$ sont les seuls points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant -1 pour ordonnées : la fonction f admet pour antécédents de -1 les deux nombres -4 et -2.

(c) On remarque que la droite horizontale passant par le "2" intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ en trois points : la fonction f admet trois antécédents du nombre 2.

(3) La courbe $\mathscr{C}_f$ intercepte l'axe des abscisses en deux points dont les abscisses ont pour valeurs approchées :
$-4{,}7$; $-0{,}6$