Trigonométrie

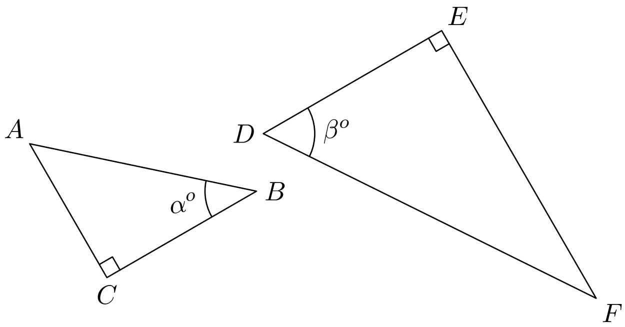
A. *Rapports trigonométriques*

C.1 Voici l'expression des rapports trigonométriques demandés :

(a) $\cos\widehat{CAB} = \dfrac{AC}{AB}$ (b) $\sin\widehat{PNM} = \dfrac{MP}{NM}$

(c) $\tan\widehat{TSR} = \dfrac{TR}{ST}$

C.2



(1) (b) $\sin\alpha = \dfrac{AC}{AB}$

(2) (b) $\tan\beta = \dfrac{EF}{ED}$

B. *Calculer une longueur*

C.3

- Dans le triangle ABC rectangle en B, on a le rapport trigonométrique suivant :

  $$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$$

  $$\cos(52) = \frac{4}{AC}$$

  D'après le produit en croix, on a :

  $$AC\times\cos(52) = 4$$

  $$AC = \frac{4}{\cos(52)}$$

  $$AC \approx 6{,}5\,cm$$

- Dans le triangle DEF rectangle en F, on a le rapport trigonométrique suivant :

  $$\cos\widehat{EDF} = \frac{DF}{DE}$$

  $$\cos(37) = \frac{DF}{5}$$

  D'après le produit en croix, on a :

  $$DF = 5\times\cos(37)$$

  $$DF \approx 3{,}993\,cm$$

  $$DF \approx 4{,}0\,cm$$

C.4

- Le triangle ABC est rectangle en A.
  On a le rapport trigonométrique :

  $$\sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC}$$

  Par application numérique :

  $$\sin 62^o = \frac{AC}{5}$$

  On en déduit :

  $$AC = \sin 62^o\times 5 \approx 4{,}414 \approx 4{,}4\,cm$$

- Le triangle DEF est rectangle en E.
  On a le rapport trigonométrique :

  $$\cos\widehat{F} = \frac{EF}{DF}$$

  Par application numérique :

  $$\cos 30^o = \frac{EF}{5}$$

  A l'aide d'un produit en croix, on a :

  $$EF = \cos 30^o\times 5 \approx 4{,}3301 \approx 4{,}3\,cm$$

- Le triangle IGH est rectangle en H. On a le rapport trigonométrique :

  $$\tan\hat{I} = \frac{GH}{IH}$$

  $$\tan 50^o = \frac{3}{IH}$$

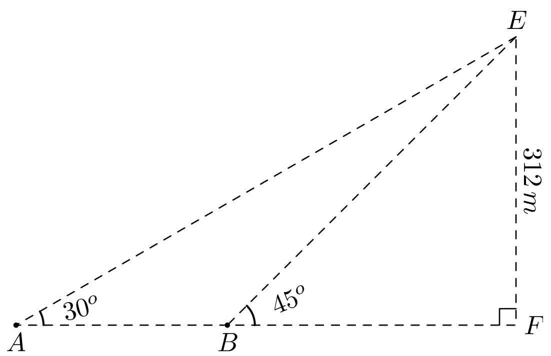
  Le produit en croix donne :

  $$IH\times\tan 50^o = 3$$

  On obtient la formule :

  $$IH = \frac{3}{\tan 50^o} \approx 2{,}517 \approx 2{,}5\,cm$$

C.5



Calculons la distance AF. Dans le triangle AEF rectangle en F, on a le rapport trigonométrique suivant :

$$\tan\widehat{FAE} = \frac{EF}{AF}$$

$$\tan(30) = \frac{312}{AF}$$

Le produit en croix permet d'écrire :

$$AF\times\tan(30) = 312$$

$$AF = \frac{312}{\tan(30)} \approx 540{,}399 \approx 540{,}4\,m$$

Calculons la distance BF. Dans le triangle BEF rectangle en F, on a le rapport trigonométrique suivant :

$$\tan\widehat{FBE} = \frac{EF}{BF}$$
$$\tan(45) = \frac{312}{BF}$$

Le produit en croix permet d'écrire :

$$BF \times \tan(45) = 312$$
$$BF = \frac{312}{\tan(45)} = 312$$

Les points A, B, F sont alignés ; on en déduit :

$AB = AF - BF \approx 540{,}4 - 312 \approx 228{,}4 \approx 228\,m$

C. *Calculer un angle*

C.6

- Dans le triangle ABC rectangle en C, on a le rapport trigonométrique suivante :
$$\cos\widehat{CBA} = \frac{BC}{AB}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{3}{4{,}5}$$
La rapport trigonométrique réciproque donne :
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4{,}5}\right)$$
$$\alpha \approx 48{,}189 \approx 48{,}2^o$$
- Dans le triangle DEF rectangle en E, on a le rapport trigonométrique suivante :
$$\cos\widehat{FDE} = \frac{DE}{DF}$$
$$\cos(\beta) = \frac{4}{5}$$
La rapport trigonométrique réciproque donne :
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$\beta \approx 36{,}869 \approx 36{,}9^o$$

C.7

- Le triangle ABC est rectangle en C. On a le rapport trigonométrique :
$$\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$
$$\sin(\alpha) = \frac{3}{4{,}5}$$
Les rapports trigonométriques réciproques donnent :
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{4{,}5}\right)$$
$$\alpha \approx 41{,}8103$$
$$\alpha \approx 41{,}8^o$$
- Le triangle DEF est rectangle en E. On a le rapport trigonométrique :
$$\tan\widehat{EDF} = \frac{EF}{DE}$$
$$\tan(\beta) = \frac{6}{4}$$
Les rapports trigonométriques réciproques donnent :
$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{6}{4}\right)$$
$$\beta \approx 56{,}3099$$
$$\beta \approx 56{,}3^o$$

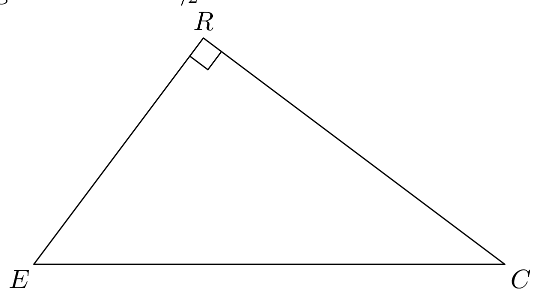
C.8

- Dans le triangle ABC rectangle en B, on a le rapport trigonométrique :
$$\tan\widehat{BCA} = \frac{BA}{BC}$$
$$\tan\widehat{BCA} = \frac{BA}{BC}$$
$$\tan\widehat{BCA} = \frac{6}{3{,}2}$$
On a le rapport trigonométrique réciproque :
$$\widehat{BCA} = \tan^{-1}\left(\frac{6}{3{,}2}\right)$$
$$\widehat{BCA} \approx 61{,}927$$
$$\widehat{BCA} \approx 61{,}9^o$$
- Par la supplémentarité de la somme des angles dans un triangle, on a :
$$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180$$
$$90 + 61{,}9 + \widehat{CAB} = 180$$
$$151{,}9 + \widehat{CAB} = 180$$
$$\widehat{CAB} = 180 - 151{,}9$$
$$\widehat{CAB} = 28{,}1^o$$

D. *Problèmes*

C.9

1. Figure à l'échelle ½



2. On a :
$RE^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25 \quad ; \quad RC^2 = 10^2 = 100$
$EC^2 = 12{,}5^2 = 156{,}25$
On remarque qu'on a : $RE^2 + RC^2 = EC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on a :
Le triangle REC est rectangle en R.
3. Dans le triangle REC rectangle en R, on a le rapport trigonométrique :
$$\tan\widehat{REC} = \frac{CR}{ER}$$
$$\tan\widehat{REC} = \frac{10}{7{,}5}$$
$$\tan\widehat{REC} = \frac{4}{3}$$
On en déduit :
$$\widehat{REC} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$
$$\widehat{REC} \approx 53^o$$
Puisque $\widehat{ERC} = 90^o$, et que la somme des angles dans un triangle vaut 180^o, on a alors :

$$\widehat{REC}+\widehat{ECR}+\widehat{CRE}=180$$
$$53+\widehat{ECR}+90=180$$
$$\widehat{RCE}=180-90-53$$
$$\widehat{RCE}=37^o$$

C.10

1 Le triangle ABC est rectangle en B. On a le rapport trigonométrique suivant :

$$\tan\widehat{BAC}=\frac{BC}{AB}$$
$$\tan(60)=\frac{BC}{4}$$

Le produit croix permet d'écrire :

$$4\times\tan(60)=BC$$
$$BC\approx 6{,}9282$$
$$BC\approx 6{,}9\,cm$$

2 Dans le triangle DBC rectangle en B, on a le rapport trigonométrique :

$$\sin\widehat{BDC}=\frac{BC}{DC}$$
$$\sin\alpha=\frac{6{,}9}{8{,}9}$$

Les rapports trigonométriques réciproques

$$\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{6{,}9}{8{,}9}\right)$$
$$\alpha\approx 50{,}8305$$
$$\alpha\approx 51^o$$

C.11

1 Dans le triangle IKJ rectangle en K, on a le rapport trigonométrique suivant :

$$\tan\widehat{KIJ}=\frac{KJ}{IK}$$

Par application numérique, on a :

$$\tan\widehat{KIJ}=\frac{2{,}4}{4}$$
$$\tan\widehat{KIJ}=\frac{3}{5}$$

2 Les angles $\widehat{KIJ}$ et $\widehat{LIM}$ sont des angles opposés par le sommet : ils sont donc égaux.

3 Dans le triangle MIL rectangle en M, on a le rapport trigonométrique suivant :

$$\tan\widehat{LIM}=\frac{LM}{IM}$$

4 D'après la question 2, les angles $\widehat{KIJ}$ et $\widehat{LIM}$ sont égaux. Ainsi, la tangente de leurs angles a même valeur :

$$\tan\widehat{LIM}=\tan\widehat{KIJ}=\frac{3}{5}$$

D'après la question 3, on a le rapport trigonométrique :

$$\tan\widehat{LIM}=\frac{LM}{IM}$$

Par application numérique, on a :

$$\frac{3}{5}=\frac{4{,}2}{IM}$$

D'après le produit en croix, on a :

$$3\times IM=5\times 4{,}2$$
$$IM=\frac{5\times 4{,}2}{3}$$
$$IM=7\,cm$$

5 On a d'après la question 4, le rapport trigonométrique :

$$\tan\widehat{LIM}=\frac{3}{5}$$

D'après les rapports trigonométriques réciproques

$$\widehat{LIM}=\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$\widehat{LIM}\approx 30{,}9637$$
$$\widehat{LIM}\approx 31^o$$

C.12 On résout cet exercice en deux étapes :

- Dans le triangle BCD rectangle en D, on a le rapport trigonométrique :

$$\cos(\widehat{BCD})=\frac{CD}{BC}$$

On en déduit :

$$\cos(30^o)=\frac{3}{BC}$$
$$\cos(30^o)\times BC=3$$
$$BC=\frac{3}{\cos(30^o)}$$
$$BC\approx 3{,}4641$$
$$BC\approx 3{,}46\,cm$$

- Dans le triangle ABC rectangle en B, on a le rapport trigonométrique :

$$\tan(\widehat{ACB})=\frac{AB}{BC}$$

On en déduit :

$$\tan(\alpha^o)=\frac{2}{3{,}46}$$
$$\alpha^o=\tan^{-1}\left(\frac{2}{3{,}46}\right)$$
$$\alpha\approx 30{,}029$$
$$\alpha\approx 30^o$$