Fonctions affines et linéaires

A. *Fonctions linéaires*

C.1

(1) Étudions, pour chaque colonne dont les valeurs sont non-nulles, le quotient de la valeur de la seconde ligne par celle de la première ligne :

x	-1	0	3	4	6
$f(x)$	-3	0	9	12	18
	$\dfrac{-3}{-1}=3$	$\times$	$\dfrac{9}{3}=3$	$\dfrac{12}{4}=3$	$\dfrac{18}{6}=3$

On en déduit que ce tableau est un tableau proportionnalité dont le coefficient de proportionnalité est 3.

(2) L'expression de la fonction f est : $f(x)=3x$

C.2

(1) Voici les tableaux de valeurs complétés :

x	-4	-2	0	1	3
$f(x)$	-1	$-\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{4}$

x	-1	$-\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$	1
$g(x)$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{3}{4}$	0	$-\dfrac{3}{4}$	$-\dfrac{3}{2}$

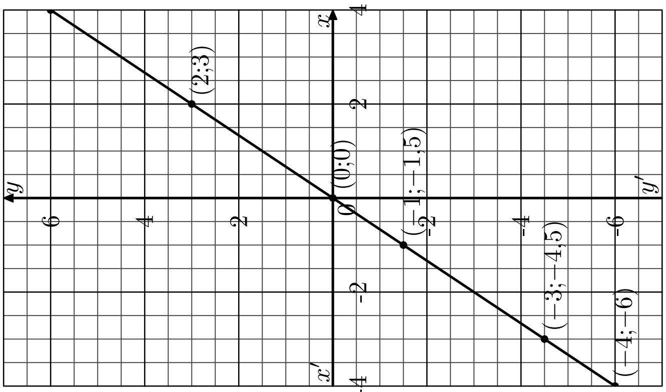
(2)
- Pour la fonction f, le tableau de valeurs est un tableau de proportionnalité dont le coefficient de proportionnalité vaut $\dfrac{1}{4}$.
- Pour la fonction g, le tableau de valeurs est un tableau de proportionnalité dont le coefficient de proportionnalité vaut $-\dfrac{3}{2}$.

C.3

(1) Voici le tableau de valeurs complété :

x	-4	-3	-1	0	2	4
$f(x)$	-6	$-4{,}5$	$-1{,}5$	0	3	6

(2) (b) Voici la courbe représentative de la fonction f :



(c) La courbe représentative de la fonction f est une droite passant par l'origine.

B. *Fonctions affines*

C.4

(1) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-3	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1

(2) La troisième colonne ne traduit pas une situation de proportionnalité, car la valeur 0 devrait être associée à 0 et pas $-0{,}5$.

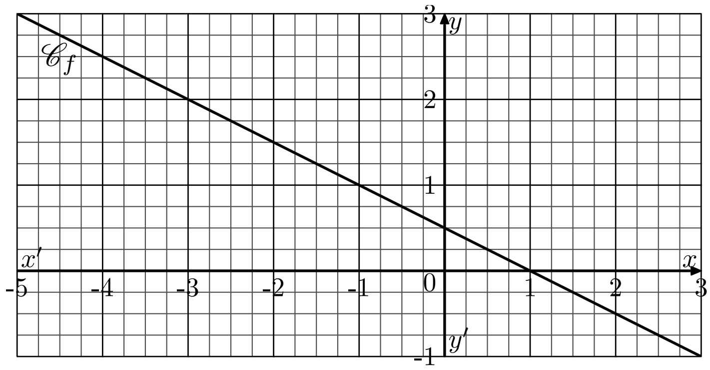
C.5

(1) (a) Voici le tableau de valeurs de la fonction f :

x	-4	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	$2{,}5$	2	1	$0{,}5$	0	$-0{,}5$

(b) La valeur associée à 0 n'est pas 0 : ce tableau n'admet pas de coefficient de proportionnalité.
Ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

(2) (a) Voici la représentation de la fonction f :



(b) Voici la phrase complétée :
"*la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est une droite qui ne passe pas par l'origine du repère*"

(3) (a) Compléter le tableau ci-dessous :

$\ell.1$	x	-4	-3	-1	0	1	2
$\ell.2$	$x-(-4)$	0	1	3	4	5	6
$\ell.3$	$f(x)$	$2{,}5$	2	1	$0{,}5$	0	$-0{,}5$
$\ell.4$	$f(x)-2{,}5$	0	$-0{,}5$	$-1{,}5$	-2	$-2{,}5$	-3

(b) On remarque que les lignes $\ell.2$ et $\ell.4$ sont proportionnelles dont le coefficient de proportionnalité est $-0{,}5$.

C. *Equation d'une droite*

C.6

(1) La représentation graphique des trois fonctions f, g et h est une droite passant par l'origine : ces fonctions sont des fonctions linéaires.

(2) Déterminons les coefficients directeurs de ces trois fonctions linéaires :
- La fonction f admet le tableau de valeurs suivant :

x	1
$f(x)$	2

Le coefficient de proportionnalité de ce tableau de valeurs est 2.

La fonction linéaire f a pour coefficient directeur le nombre 2.

- La fonction g admet le tableau de valeurs suivant :

x	1
$g(x)$	$-1{,}5$

Le coefficient de proportionnalité de ce tableau de valeurs est $-1{,}5$

La fonction linéaire g a pour coefficient directeur le nombre $-1{,}5$.

- La fonction h admet le tableau de valeurs suivant :

x	3
$h(x)$	2

Le coefficient de proportionnalité de ce tableau de valeurs est $\dfrac{2}{3}$

La fonction linéaire h a pour coefficient directeur le nombre $\dfrac{2}{3}$.

C.7

1 a Le point A a pour coordonnées $(3\,;-3)$

b
- L'image du nombre 3 par la fonction f a pour valeur -3 car :
  $f(3)=-0{,}2\times3-2{,}4=-0{,}6-2{,}4=-3$
  Ainsi, la représentation de la fonction f passe par le point $A(3\,;-3)$.
- La représentation de la fonction g passe par le point A :
  $g(3)=-1{,}5\times3+1{,}5=-4{,}5+1{,}5=-3$

c Le point B a pour coordonnées $(-2\,;-2)$.

d La droite (d_1) passe par le point A ; ainsi, de la fonction f et de la fonction g, déterminons la fonction dont l'image de -2 est -2 :
- $f(-2)=-0{,}2\times(-2)-2{,}4=0{,}4-2{,}4=-2$
- $g(-2)=-1{,}5\times(-2)+1{,}5=3+1{,}5=4{,}5$

Ainsi, la droite (d_1) a pour représentation la fonction affine f.

2 a Le point C a pour coordonnées $(-2\,;1)$.

b Parmi les fonctions affines proposées, seule la fonction j a sa représentation qui passe par le point $C(-2\,;1)$:
$j(-2)=-0{,}5\times(-2)=1$

3 a Le point D a pour coordonnées $(2{,}5\,;2)$.

Les deux fonctions dont les représentations passent par les points D sont h et k car :
- $h(2{,}5)=0{,}8\times2{,}5=2$
- $k(2{,}5)=2\times2{,}5-3=5-3=2$

b La droite (d_4) passe par l'origine : (d_4) est la représentation d'une fonction linéaire. On en déduit que la droite (d_4) est la représentation de la fonction h.

C.8 L'écriture algébrique de la fonction affine f est de la forme :

$f(x)=a\cdot x+b$.

où $\begin{cases} a \text{ est le coefficient directeur de la droite} \\ b \text{ est l'ordonnée à l'origine} \end{cases}$

Première méthode :

Le coefficient directeur a est donné par la formule :

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-3}{3-(-1)}=\frac{1}{4}$$

Le point $A(-1\,;3)$ appartenant la droite représentative de la fonction f, ses coordonnées vérifient son équation :

$$f(-1)=3 \qquad \frac{1}{4}\times(-1)+b=3$$

$$-\frac{1}{4}+b=3 \qquad b=3+\frac{1}{4} \qquad b=\frac{13}{4}$$

La fonction f a pour écriture algébrique :

$$f(x)=\frac{1}{4}\cdot x+\frac{13}{4}$$

Seconde méthode :

Les points A et B appartenant à la droite représentative de la fonction f, on en déduit que les deux égalités :

$f(-1)=3 \quad ; \quad f(3)=4$

qui se traduisent en utilisant l'expression de f par :

$$a\times(-1)+b=3 \qquad -a+b=3$$

$$a\times3+b=4 \qquad 3a+b=4$$

Ainsi, les nombres a et b doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} -a+b=3 \\ 3a+b=4 \end{cases}$$

Par soustraction de la première ligne par la seconde ligne, on obtient :

$$-a-3a=3-4$$
$$-4a=-1$$
$$a=\frac{-1}{-4}$$
$$a=\frac{1}{4}$$

En utilisant ce résultat dans la première ligne, on obtient :

$$-a+b=3$$
$$-\frac{1}{4}+b=3$$
$$b=3+\frac{1}{4}$$
$$b=\frac{13}{4}$$

La fonction f a pour expression algébrique :

$$f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$$

C.9

1 Une droite est la représentative graphique d'une fonction affine. Soit f la fonction affine associée à la droite $\mathscr{D}$ ayant pour expression algébrique :

$f(x)=ax+b$

Le coefficient directeur “a” est donné par la formule :

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-2{,}5}{5-2}=-\frac{1{,}5}{3}=-0{,}5$$

L'ordonnée à l'origine b est déterminée en utilisant le fait que $A\in\mathscr{C}_f$; ainsi, les coordonnées du point A doivent vérifier :

$$
\begin{aligned}
f(2) &= 2{,}5 \\
-0{,}5\times 2 + b &= 2{,}5 \\
-1 + b &= 2{,}5 \\
b &= 2{,}5 + 1 \\
b &= 3{,}5
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'expression complète de la fonction f est :

$f(x) = -0{,}5x + 3{,}5$

2. On a :

$f(101) = -0{,}5\times 101 + 3{,}5 = -50{,}5 + 3{,}5 = -47$

Les coordonnées du point C sont vérifiées par la fonction f ; on en déduit que le point C appartient à la représentation graphique de la fonction f. Or, cette fonction a pour représentation la droite (AB) : les points A, B et C ne sont pas alignés.