

Théorème de Thalès

A. Triangles semblables

C.1

1 Sachant que les angles d'un triangle sont supplémentaires, on en déduit l'égalité:

- Dans le triangle ABC :

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180$$

$$34 + \widehat{BCA} + 90 = 180$$

$$\widehat{BCA} + 124 = 180$$

$$\widehat{BCA} = 180 - 124$$

$$\widehat{BCA} = 56^\circ$$

- Dans le triangle DEF :

$$\widehat{DEF} + \widehat{EFD} + \widehat{FDE} = 180$$

$$56 + 90 + \widehat{FDE} = 180$$

$$146 + \widehat{FDE} = 180$$

$$\widehat{FDE} = 180 - 146$$

$$\widehat{FDE} = 34^\circ$$

Les deux triangles DEF et ABC ont deux angles deux à deux de même mesure :

$$\widehat{DFE} = \widehat{BAC} = 90^\circ ; \quad \widehat{EDF} = \widehat{ABC} = 34^\circ$$

On en déduit que les triangles DEF et ABC sont semblables.

2 Voici le tableau complété :

	Côtés homologues		
Dans le triangle ABC	[AB]	[BC]	[AC]
Dans le triangle DEF	[DF]	[DC]	[EF]

C.2

• Dans le triangle ADE , par supplémentarité des angles, on a :

$$\widehat{ADE} + \widehat{DEA} + \widehat{EAD} = 180 \quad | \quad \widehat{DEA} = 180 - 139$$

$$107 + \widehat{DEA} + 32 = 180 \quad | \quad \widehat{DEA} = 41^\circ$$

$$\widehat{DEA} + 139 = 180$$

• Dans le triangle ABC , par supplémentarité des angles, on a :

$$\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = 180 \quad | \quad \widehat{ACB} = 180 - 73$$

$$32 + \widehat{ACB} + 41 = 180 \quad | \quad \widehat{ACB} = 107^\circ$$

$$\widehat{ACB} + 73 = 180$$

Les triangles ABC et ADE sont semblables, car les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre.

C.3

• Les angles \widehat{EAF} et \widehat{CAB} sont opposés par le sommet : ils sont donc de mesures égales.

• Les droites (CB) et (EF) sont parallèles et sont coupées par la sécante (CF) .

Les angles \widehat{CBA} et \widehat{AEF} sont des angles alterne-internes. On en déduit que les angles \widehat{CBA} et \widehat{AEF} sont des angles de mesures égales.

• Les droites (CB) et (EF) sont parallèles et sont coupées

par la sécante (BE) .

Les angles \widehat{AEF} et \widehat{ABC} sont des angles alterne-internes.

On en déduit que les angles \widehat{AEF} et \widehat{ABC} sont de mesures égales.

Les triangles AEF et ABC sont semblables, car les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre.

C.4

1 Voici le tableau de proportionnalité :

Le côté	le plus long	"moyen"	le plus court
Dans le triangle ABC	4	3	2
Dans le triangle DEF	5	3,75	2,5

2 Déterminons les coefficients de chacune de ces colonnes :

$$\bullet \frac{AB}{DE} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\bullet \frac{AC}{DF} = \frac{3}{3,75} = 0,8$$

$$\bullet \frac{BC}{EF} = \frac{2}{2,5} = 0,8$$

Chaque colonne possède le même coefficient de proportionnalité : ce tableau est un tableau de proportionnalité.

3 Ces deux triangles sont semblables.

B. Théorème de Thalès

C.5 Voici la rédaction attendue :

1 Les points K, G, J et les points K, H, I sont alignés. Les droites (GH) et (JI) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{KG}{KJ} = \frac{KH}{KI} = \frac{GH}{JI}$$

2 Les points Z, X, V et les points Z, Y, W sont alignés. Les droites (VW) et (YX) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{ZX}{ZV} = \frac{ZY}{ZW} = \frac{YX}{VW}$$

C.6 On a : $K \in [TM] ; L \in [TN] ; (KL) \parallel (MN)$

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{TK}{TM} = \frac{TL}{TN} = \frac{KL}{MN}$$

Une application numérique nous donne :

$$\frac{5}{12,5} = \frac{6,5}{TN} = \frac{KL}{MN}$$

Le produit en croix nous donne :

$$5 \times TN = 12,5 \times 6,5$$

$$TN = \frac{12,5 \times 6,5}{5} = 16,25 \text{ cm}$$

C.7

1 Dans le triangle ABC , on a les propriétés suivantes :

$$M \in [AB] ; N \in [AC] ; (MN) \parallel (BC)$$

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités suivantes :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Utilisons l'égalité suivante :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Par application numérique, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\frac{6}{5}}{\frac{6}{5} + \frac{5}{2}} &= \frac{\frac{4}{5}}{AC} \\ \frac{6}{12} + \frac{25}{10} &= \frac{4}{AC} \\ \frac{37}{10} &= \frac{4}{AC} \\ AC &= \frac{4}{\frac{37}{10}}\end{aligned}$$

A l'aide du produit en croix, on a :

$$\begin{aligned}6 \times AC &= 4 \times \frac{37}{10} \\ \frac{6}{5} \times AC &= \frac{148}{50} \\ \frac{6}{5} \times AC &= \frac{2 \times 74}{2 \times 25} \\ AC &= \frac{74}{\frac{25}{6}} \\ AC &= \frac{74}{\frac{25}{6}} \times \frac{5}{5} \\ AC &= \frac{2 \times 37}{5 \times 5} \times \frac{5 \times 1}{2 \times 3} \\ AC &= \frac{37}{5 \times 3} \\ AC &= \frac{37}{15}\end{aligned}$$

(2) Dans le triangle DEF , on a les propriétés suivantes :

$$R \in [DE] \quad ; \quad S \in [DF] \quad ; \quad (RS) \parallel (EF)$$

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités suivantes :

$$\frac{DR}{DE} = \frac{DS}{DF} = \frac{RS}{EF}$$

Utilisons l'égalité suivante :

$$\frac{DR}{DE} = \frac{RS}{EF}$$

Par application numérique, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{2} + \frac{4}{3}} &= \frac{\frac{12}{5}}{EF} \\ \frac{9}{27} + \frac{8}{6} &= \frac{12}{EF} \\ \frac{2}{35} &= \frac{12}{EF}\end{aligned}$$

En utilisant le produit en croix, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{9}{2} \times EF &= \frac{35}{6} \times \frac{12}{5} \\ \frac{9}{2} \times EF &= \frac{5 \times 7}{6 \times 1} \times \frac{6 \times 1}{5 \times 1} \\ \frac{9}{2} \times EF &= \frac{7}{1} \times \frac{2}{1} \\ \frac{9}{2} \times EF &= 14 \\ EF &= \frac{14}{\frac{9}{2}} \\ EF &= 14 \times \frac{2}{9} \\ EF &= \frac{28}{9}\end{aligned}$$

C.8 Les points C, A, N sont alignés.

Les points B, A, M sont alignés.

Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité suivante :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Par application numérique, on obtient :

$$\frac{5}{1,5} = \frac{AN}{2}$$

Le produit en croix permet d'obtenir :

$$AN \times 1,5 = 5 \times 2$$

$$AN = \frac{5 \times 2}{1,5}$$

$$AN = \frac{10}{1,5} = \frac{100}{15} = \frac{20}{3}$$

C.9

1 a) Les points O, M, D sont alignés et les points O, A, C sont alignés.

Les droites (AM) et (CD) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OM}{OD} = \frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CD}$$

b) Les points O, M, B sont alignés et les points O, A, N

sont alignés.

Les droites (BN) et (AM) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{OB}{OM} = \frac{ON}{OA} = \frac{BN}{AM}$$

2 ● Calcul de OB :

D'après la question 1 a, on a: $\frac{OB}{OM} = \frac{ON}{OA}$.

Ce qui donne:

$$OB = \frac{ON}{OA} \times OM = \frac{5}{4} \times 3 = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ cm}$$

● Calcul de AM :

D'après la question 1 b, on a:

$$\frac{AM}{CD} = \frac{OA}{OC}$$

Ce qui donne: $AM = \frac{OA}{OC} \times CD = \frac{4}{6} \times 3 = 2 \text{ cm}$

● Calcul de BN :

D'après la question 1 b, on a:

$$\frac{ON}{OA} = \frac{BN}{AM}$$

Ce qui donne: $BN = \frac{ON}{OA} \times AM = \frac{5}{4} \times 2 = \frac{5}{2} \text{ cm}$

C. Réciproque

C.10 On a les quotients:

$$\frac{PR}{PT} = \frac{2}{2,5} = 0,8 \quad ; \quad \frac{PQ}{PS} = \frac{3}{3+0,75} = \frac{3}{3,75} = 0,8$$

Les points P, Q, S et les points P, R, T sont alignés dans le même ordre.

On a l'égalité des quotients: $\frac{PQ}{PS} = \frac{PR}{PT}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que: $(QR) \parallel (ST)$

C.11 Les points P, Z, F et les points Q, G sont alignés dans le même ordre.

On a les valeurs suivantes des quotients:

$$\frac{ZP}{ZF} = \frac{5,5}{3} = \frac{11}{6} \quad ; \quad \frac{ZQ}{ZG} = \frac{3,3}{1,8} = \frac{33}{18} = \frac{11}{6}$$

Ainsi, on a l'égalité suivante: $\frac{ZP}{ZF} = \frac{ZQ}{ZG}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que les droites (PQ) et (GF) sont parallèles.

D. Problèmes

C.12

1 Pour montrer que le carré de la plus grande longueur est égale à la somme des carrés des deux autres longueurs, on calcule séparément ces deux valeurs:

$$CE^2 = 10,4^2 = 108,16$$

$$DE^2 + CD^2 = 4^2 + 9,6^2 = 16 + 92,16 = 108,16$$

On remarque l'égalité suivante:

$$CE^2 = DE^2 + CD^2.$$

Si un triangle vérifie la propriété de Pythagore alors ce triangle est rectangle.

On en déduit que le triangle CDE est rectangle en D .

2 On a $(AB) \perp (BD)$ et $(DE) \perp (BD)$

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.

On en déduit: $(AB) \parallel (DE)$

3 Les points B, C, D et les points A, C, E sont alignés. Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a:

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE}$$

Utilisons l'égalité:

$$\frac{CB}{CD} = \frac{AB}{DE}$$

Par application numérique, on a:

$$\frac{12}{9,6} = \frac{AB}{4}$$

Le produit en croix donne:

$$12 \times 4 = 9,6 \times AB$$

$$AB = \frac{12 \times 4}{9,6}$$

$$AB = 5 \text{ cm}$$

C.13

1 ● On a les valeurs des rapports:

$$\frac{BM}{BC} = \frac{2,4}{3,6} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{BN}{BA} = \frac{2,6}{3,9} = \frac{26}{39} = \frac{2}{3}$$

Ainsi, on a: $\frac{BM}{BC} = \frac{BN}{BA}$

De plus, les points B, M, C et les points B, N, A sont alignés dans le même ordre.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que les droites (AC) et (MN) sont parallèles.

● On a: $(AC) \parallel (MN)$; $(AC) \perp (BC)$

Si deux droites sont parallèles entre elles et si une troisième droite est parallèle à l'une alors elle est parallèle à l'autre.

On en déduit: $(BC) \perp (MN)$

On en déduit que le triangle BMN est rectangle en M .

2 a Le triangle BMN est rectangle ne M .

D'après le théorème de Thalès, on a:

$$BN^2 = BM^2 + MN^2$$

$$2,6^2 = 2,4^2 + MN^2$$

$$6,76 = 5,76 + MN^2$$

$$MN^2 = 6,76 - 5,76$$

$$MN^2 = 1$$

$$MN = 1 \text{ cm}$$

b Dans le triangle MNB rectangle en M , on a la relation trigonométrique:

$$\cos \widehat{MNB} = \frac{NM}{NB}$$

$$\widehat{MNB} = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2,6} \right)$$

$$\cos \widehat{MNB} = \frac{1}{2,6}$$

$$\widehat{MNB} \approx \cos^{-1} \left(\frac{1}{2,6} \right)$$

$$\widehat{MNB} \approx 67,38$$

$$\widehat{MNB} \approx 67^\circ$$

C.14

1 Dans le triangle BCD rectangle en C et d'après le théorème de Pythagore, on a:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$

$$BD^2 = 1,5^2 + 2^2$$

$$BD^2 = 2,25 + 4$$

$$BD^2 = 6,25$$

$$BD = \sqrt{6,25}$$

$$BD = 2,5 \text{ km}$$

- (2) Par la nature des triangles BCD et DEF , on en déduit :
 $(EC) \perp (BC)$; $(EC) \perp (EF)$

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors ces deux droites sont parallèles entre elles.

On en déduit : $(BC) \parallel (EF)$

- (3) Les points D, B, F et les points C, D, E sont alignés dans le même ordre.

Les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on en déduit l'égalité des rapports :

$$\frac{DB}{DF} = \frac{DC}{DE} = \frac{BC}{FE}$$

$$\frac{2,5}{DF} = \frac{2}{5} = \frac{1,5}{FE}$$

Utilisons le rapport :

$$\frac{2,5}{DF} = \frac{2}{5}$$

A l'aide du produit en croix :

$$2,5 \times 5 = 2 \times DF$$

$$DF = \frac{12,5}{2}$$

$$DF = 6,25 \text{ km}$$

- (4) On en déduit la longueur totale du parcours :

$$AB + BD + DF + FG = 7 + 2,5 + 6,25 + 3,5 = 19,25 \text{ km}$$

- (5) À la vitesse de 16 km/h , on parcourt 16 km en 3600 secondes.

On a le tableau de proportionnalité :

	Durée	Distance
Moyenne	3600	16
Totalité	x	7

D'après le produit en croix :

$$3600 \times 7 = 16 \times x$$

$$x = \frac{25200}{16}$$

$$x = 1575$$

Ainsi, le parcours total durera 1575 secondes, ce qui se convertit en :

$$26\text{min } 15\text{s}$$

- C.15) Le triangle ABC étant rectangle en A , d'après le théorème de Pythagore, on a la relation :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 300^2 + 400^2$$

$$BC^2 = 90\,000^2 + 160\,000^2$$

$$BC^2 = 250\,000$$

$$BC = 500$$

Les points C, A, E et les points C, B, D sont alignés.

Les droites (AB) et (ED) sont parallèles entre elles.

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités de rapports suivants :

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE}$$

- Pour déterminer la longueur CD , utilisons l'égalité suivante :

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE}$$

Par application numérique, on a :

$$\frac{500}{CD} = \frac{400}{1000}$$

D'après le produit en croix, on a :

$$500 \times 1000 = CD \times 400$$

$$CD = \frac{500 \times 1000}{400}$$

$$CD = \frac{500 \times 1000}{400}$$

$$CD = 1250 \text{ m}$$

- Pour déterminer la longueur DE , utilisons l'égalité suivante :

$$\frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE}$$

Par application numérique, on a :

$$\frac{400}{1000} = \frac{300}{DE}$$

D'après le produit en croix, on a :

$$400 \times DE = 1000 \times 300$$

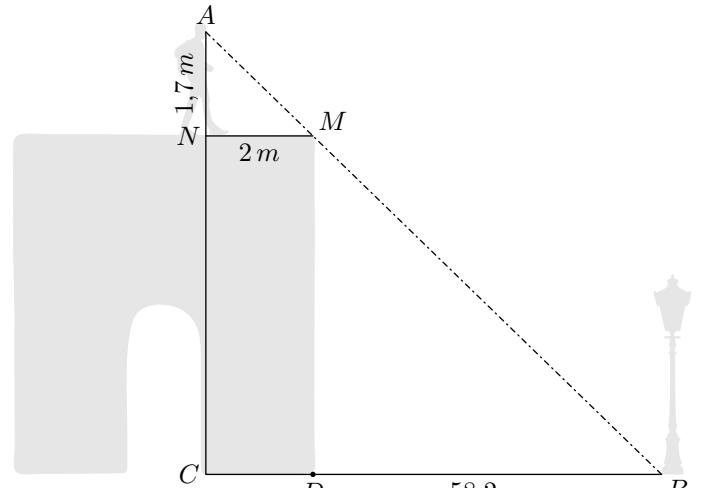
$$DE = \frac{1000 \times 300}{400}$$

$$DE = 750 \text{ m}$$

Ainsi, cette course a une longueur de :

$$AB + BC + CD + DE = 300 + 500 + 1250 + 750 = 2800 \text{ m}$$

C.16) Voici une représentation schématisant la situation :



En notant x la hauteur de l'arc de triomphe, on a les longueurs :

$$AN = 1,7 \text{ ; } AC = 1,7 + x \text{ ; } MN = 2 \text{ ; } CB = 60,2$$

Le toit du monument et le sol étant horizontal, ils sont tous les deux parallèles.

Les points A, N, C et les points A, M, B sont alignés.

D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des rapports des longueurs :

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{CB}$$

$$\frac{1,7}{1,7+x} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{60,2}$$

Utilisons le quotient :

$$\frac{1,7}{1,7+x} = \frac{2}{60,2}$$

D'après le produit en croix :

$$1,7 \times 60,2 = (1,7 + x) \times 2$$

$$102,34 = 3,4 + 2x$$

$$102,34 - 3,4 = 2x$$

$$2x = 98,94$$

$$x = \frac{98,94}{2}$$

$$x = 49,47 \text{ m}$$