Applications et Algorithmes
Première année de master informatique

Maximiser le profit d'expériences à mettre dans une fusée

Calcul du front pareto

Membres du projet :

Florian Vanhems

Axel Thavisouk

11 mai 2018

1 Complexité du calcul du front pareto en nombres de comparaisons

Soit un ensemble P_i contenant les optimums de Pareto lorsque l'algorithme n'a ajouté que i expériences au front.

Soit l'équation de complexité de notre algorithme (en nombre de comparaisons) en fonction du nombre d'expériences :

$$C(n) = C_{tri}(\text{expériences}) + \sum_{i=1}^{n}(4 \times |P_i|)$$

Essayons de borner la cardinalité de l'ensemble P_i empiriquement.

1.1 Borne inférieure du cardinal de P_i

Considérons les expériences suivantes :
- expérience 1 : (15, 98)
- expérience 2 : (65, 40)
- expérience 3 : (81, 23)
- expérience 4 : (83, 7)

Le front Pareto de cet ensemble d'expérience est :

$$(0, 0), (15, 98), (80, 138), (161, 161), (244, 168)$$

On peut remarquer que chaque expérience, lors de son insertion, n'a contribué qu'à l'ajout d'un seul optimum dans le front pareto.
- (0,0) : point original
- (15,98) : expérience 1
- (80,138) : expériences 1, 2
- (161,161) : expériences 1, 2, 3
- (244,168) : expériences 1, 2, 3, 4

De plus, on peut se convaincre que chaque expérience supplémentaire ajoutera toujours au moins un optimum de Pareto au front (celui comprenant toutes les expériences, maximisant le profit).

Donc, $\inf(|P_i|) = i$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
C(n) &\geq C_{tri}(\text{expériences}) + \sum_{i=1}^{n}(4 \times i) \\
&\geq C_{tri}(\text{expériences}) + 4\sum_{i=1}^{n} i \\
&\geq C_{tri}(\text{expériences}) + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&\geq C_{tri}(\text{expériences}) + 2 \times (n^2 + n) \\
&= o(n^2)
\end{aligned}$$

1.2 Borne supérieure du cardinal de P_i

Considérons les expériences suivantes :
— expérience 1 : (17,6)
— expérience 2 : (43,24)
— expérience 3 : (71,35)
— expérience 4 : (90,45)

Le front Pareto de cet ensemble d'expérience est :
(0,0), (17,6), (43,24), (60,30), (71,35), (88,41), (90,45), (107,51), (114,59), (131,65), (133,69), (150,75), (161,80), (178,86), (204,104), (221,110)
soit en tout 16 optimums, composés de l'intégralité des sous-ensembles d'expériences.

Le cardinal de l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble de n éléments est 2^n ; ici on a 16 (2^4) éléments dans le front pareto : on peut faire l'hypothèse qu'à chaque itération, le cardinal de P_i est le double du cardinal de P_{i-1}.

De plus on a :

$$P_0 = 1 = 2^0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
P_i &= 2 \times ... \times 2 \times P_0 \\
&= 2^i \times P_0 \\
&= 2^i
\end{aligned}$$

Donc $\sup(|P_i|) = 2^i$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
C(n) &\leq C_{tri}(\text{expériences}) + \sum_{i=1}^{n}(4 \times 2^i) \\
&\leq C_{tri}(\text{expériences}) + \sum_{i=1}^{n} 2^{i+2} \\
&\leq C_{tri}(\text{expériences}) + 2^{n+3} \\
&= O(2^n)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$C(n) = o(n^2)$$
$$C(n) = O(2^n)$$

C'est pas ouf. Regardons son comportement en pratique.

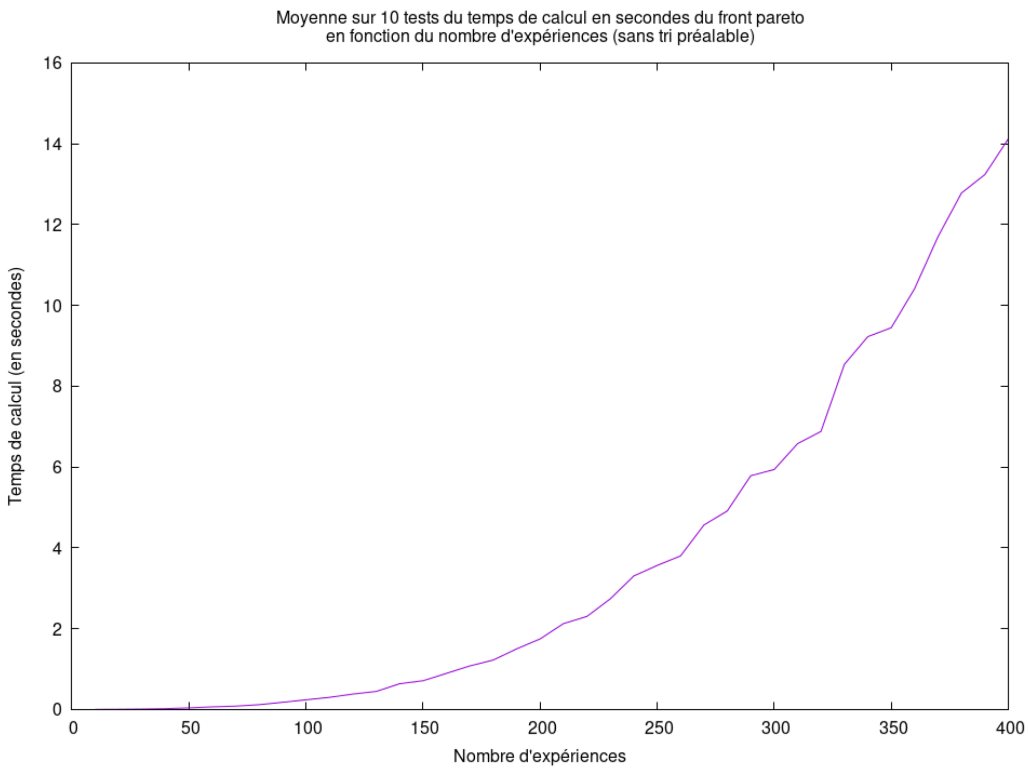
2 Méthode expérimentale

On génère un nombre n d'expériences, dont le poids et le profit qu'elles engendrent sont tous deux un nombre aléatoire entre 1 et 100.

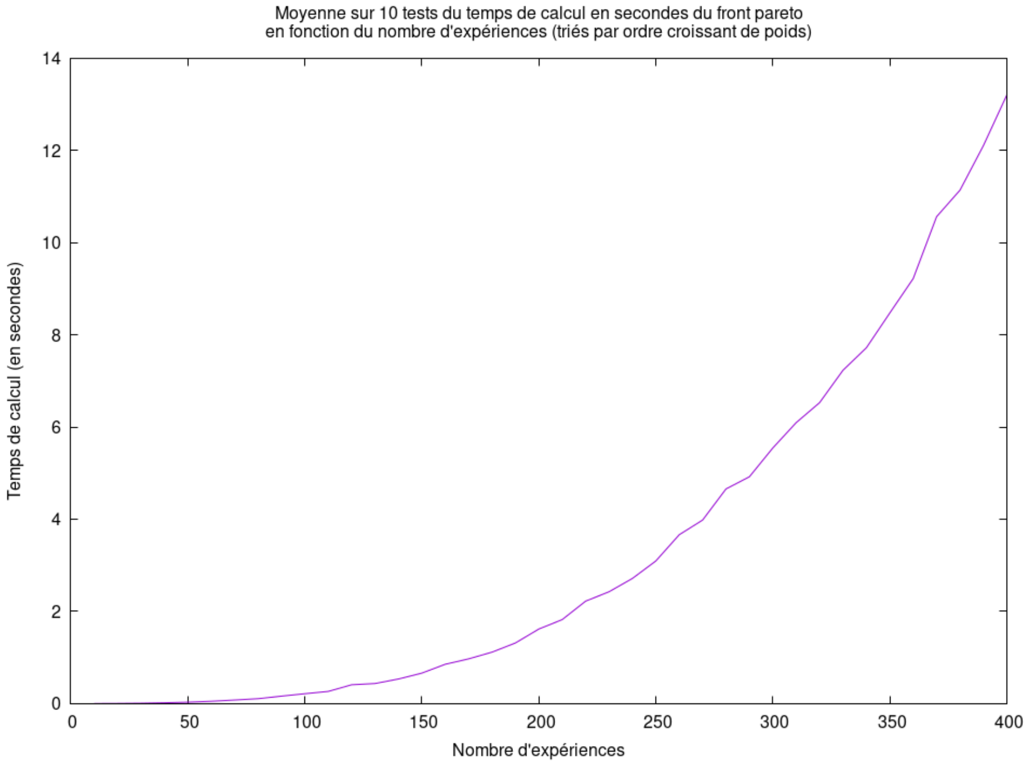
On procède ensuite à un tri facultatif de ces expériences selon leur poids, leur profit, ou leur rentabilité (ratio profit/poids) ; on lance 5 fois chaque test pour produire un temps moyen d'éxecution.

3 Résultats expérimentaux

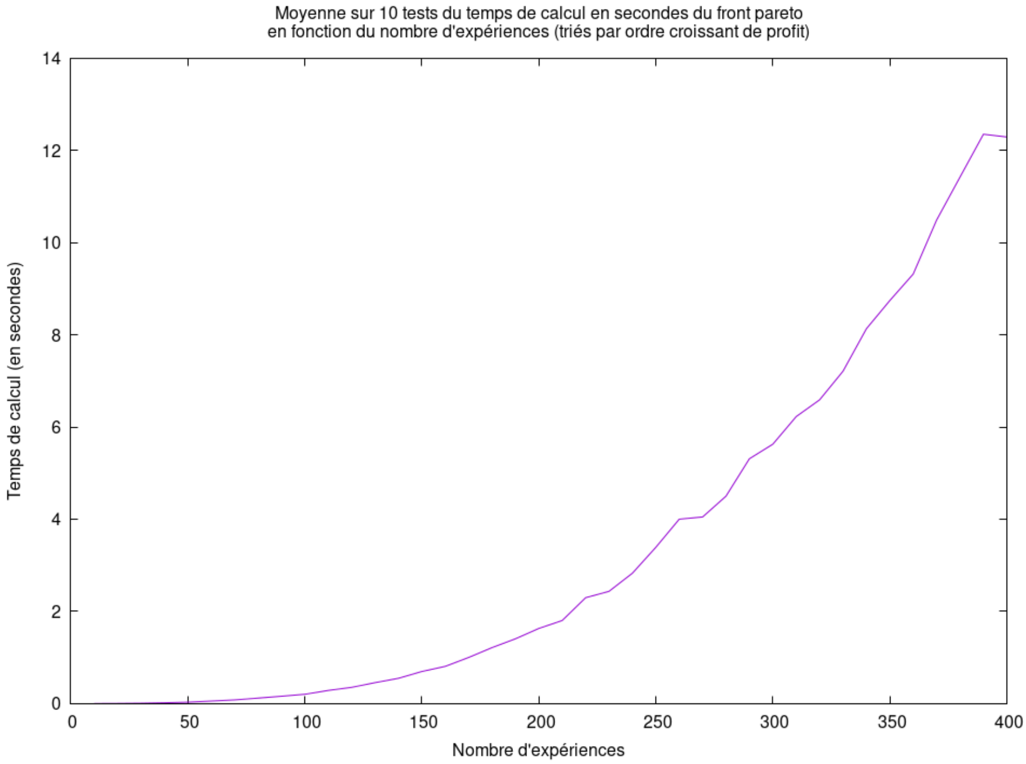
3.1 Sans tri



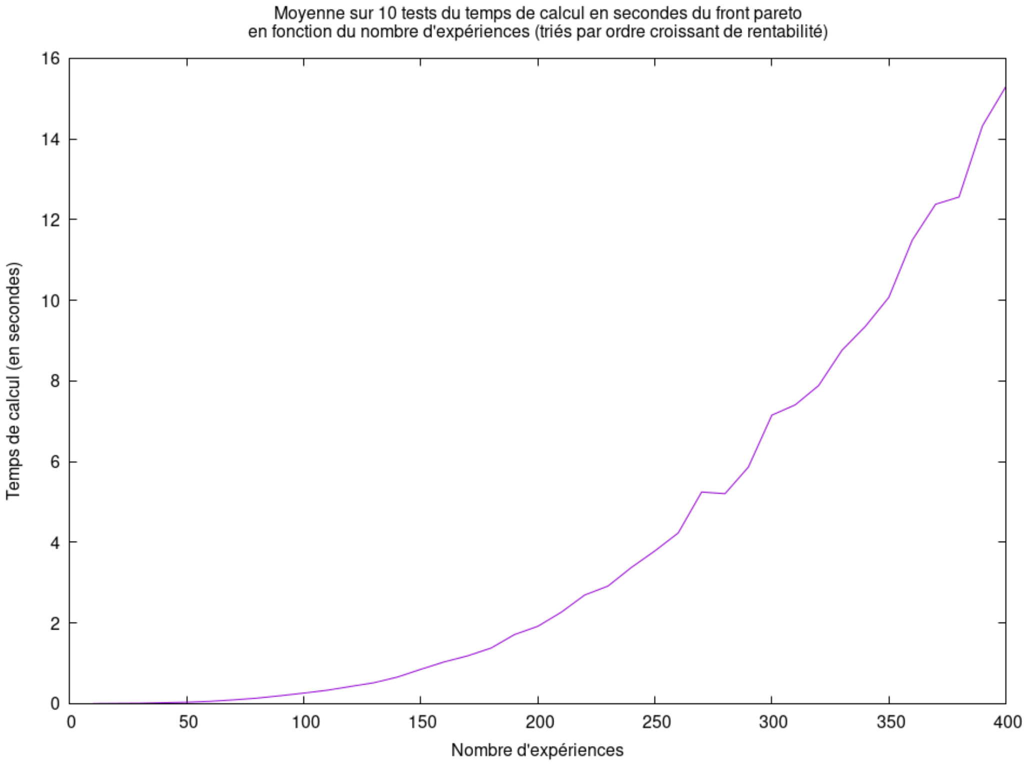
3.2 Tri par poids



3.3 Tri par profit



3.4 Tri par rentabilité



4 Conclusion

Trier préalablement les expériences ne semble pas influencer significativement le temps de calcul du front pareto. Dommage !