

# TP1 AMS302 - Modélisation et Simulation du transport de particules neutres

Morgane STEINS et Etienne PEILLON

Version préliminaire pour le 14/10/2019

Nous cherchons à résoudre l'équation du transport neutronique en 1D sur l'intervalle  $[0; 1]$  et pour tout  $\mu \in [1; 1]$

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \mu) + \Sigma_t \varphi(x, \mu) = \frac{\Sigma_s(x)}{2} \int_{-1}^1 \varphi(x, \mu') d\mu' + S(x, \mu) \quad (1)$$

## 1 Solveur Monte-Carlo

### 1.1 Préliminaires

Tout d'abord nous justifions la forme du libre parcours d'un neutron. Une surface efficace macroscopique  $\Sigma$  caractérise la probabilité d'interaction sur un petit intervalle  $\delta l$

$$P_{\text{interaction}}([x; x + \delta l]) = \Sigma \delta l$$

Lorsque l'on projette cette distance sur l'axe des abscisses, on fait apparaître le cosinus de l'angle entre le vecteur directeur du déplacement et  $\vec{x}$  qui est défini par  $\mu$  dans ce TP. D'où en 1D  $P_{\text{interaction}}(x) = \frac{\Sigma}{\mu} \delta l$

On peut voir le libre parcours du neutron de deux manières différentes. La première est de considérer qu'il s'agit d'une sorte comme un "temps" de survie et utiliser le fait que ce genre de phénomène se modélise avec une loi exponentielle. On peut aussi utiliser faire une démonstration plus physique. On découpe l'intervalle  $[0; 1]$  en  $N$  sous-intervalles de longueur  $dx$  et on considère partir du point 0. La probabilité d'interaction au point  $x = idx$  s'obtient en considérant qu'il y a une interaction dans l'intervalle  $i$  mais pas dans les précédents ce qui donne

$$P_{\text{interaction}}(x \in [idx; (i+1)dx]) = \frac{\Sigma}{\mu} (1 - \frac{\Sigma}{\mu} dx)^i$$

Le passage à la limite  $N \rightarrow \infty$  donne la densité de probabilité d'interagir au point  $x$  et pas avant, donc la densité de probabilité du libre parcours  $f : f(x) = \frac{\Sigma}{\mu} e^{-\frac{\Sigma}{\mu} x}$

On vérifie immédiatement que  $\int_0^\infty f(x) dx = 1$ .

Pour échantillonner une variable aléatoire selon une loi, on peut inverser sa fonction de répartition si elle est connue. La fonction de répartition  $F$  du libre parcours moyen s'écrit

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{\Sigma}{\mu} e^{-\frac{\Sigma}{\mu} t} dt = 1 - e^{-\frac{\Sigma}{\mu} x}$$

Pour l'inverser on résout  $y = F(x)$

$$y = 1 - e^{-\frac{\Sigma}{\mu} x} \iff x = \frac{\mu}{\Sigma} \log(1 - y) = F^{-1}(y)$$

Pour tirer une variable aléatoire selon la loi  $F$ , on tire  $y$  selon une loi uniforme sur  $[0; 1]$  et on calcule  $F^{-1}(y)$ .

La méthode Monte-Carlo consiste à simuler un grand nombre de trajectoires de neutrons et en déduire le flux neutronique par la loi des grands nombres.

## 1.2 Matériau purement absorbant

### 1.2.1 Source ponctuelle

On commence avec le cas particulièrement simple  $\Sigma_s = 0$ . Il n'y a pas de scattering, les neutrons émis par une source avec une direction  $\mu$  continuent simplement dans cette direction jusqu'à être absorbés.

Le cas le plus simple est celui d'une source ponctuelle en 0. L'équation devient

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \mu) + \Sigma_t \psi(x, \mu) = \delta_0(x) \quad (2)$$

avec pour condition aux limites un flux entrant nul, c'est à dire

$$\psi(0, \mu > 0) = \psi(1, \mu < 0) = 0$$

On note la solution de ce problème  $\psi$  car elle nous sera utile dans la suite pour des cas plus complexes. Il s'agit de la solution élémentaire.

Pour trouver la solution plaçons nous à  $\mu > 0$  puisque pour  $\mu < 0$  les neutrons émis en 0 sortent immédiatement du domaine, le flux est nul en tout point. On multiplie l'équation par  $e^{\frac{\Sigma_t x}{\mu}}$  et on intègre entre 0 et  $x$

$$\begin{aligned} \int_0^x \left( \mu \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, \mu) + \Sigma_t \psi(t, \mu) \right) e^{\frac{\Sigma_t t}{\mu}} dt &= \int_0^x \delta_0(t) dt \\ \iff \mu \psi(x, \mu) e^{\frac{\Sigma_t x}{\mu}} &= \mu \psi(0, \mu) + 1 \\ \iff \psi(x, \mu) &= \frac{1}{\mu} e^{-\frac{\Sigma_t x}{\mu}} \end{aligned}$$

Pour simuler ce flux neutronique avec un solveur Monte-Carlo on commence par tirer une direction de départ  $\mu_0$  avec une loi uniforme  $\mathcal{U}[-1, 1]$ . Le point de départ est  $x_0 = 0$  puisque la seule source se trouve en ce point. Puis on tire la distance parcourue par ce neutron selon la loi du libre parcours établie précédemment. Le neutron finit sa trajectoire au point  $x_1$  avec toujours la direction  $\mu_0$ . Ceci donne alors une distributions de neutrons avec une densité  $f_\psi$  égale au libre parcours.

$$f_\psi(x_1) = \frac{\Sigma_t}{\mu} e^{-\frac{\Sigma_t}{\mu} x_1} = \Sigma_t \psi(x_1, \mu)$$

La probabilité pour un neutron de se trouver dans un intervalle  $[a, b]$  est donc donnée par l'intégrale de  $\varphi$  sur cet interval à un facteur  $\Sigma_t$  près. En prenant un intervalle de longueur  $dx$  négligeable devant 1 (la taille de notre intervalle d'étude) on obtient

$$\psi(x, \mu) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(x_1 \in [x - dx/2, x + dx/2] | \mu)}{\Sigma_t dx} \quad (3)$$

Pour approcher numériquement  $\psi$ , on commence par discrétiser l'intervalle  $[0, 1]$  en sous-intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$ , de longueur  $h$ . Puis on simule un grand nombre de particule Monte-Carlo, suivant le principe suivant :

1. toutes les particules Monte-carlo ont pour position initiale  $x = 0$ ,
2. pour chaque particule, on tire une distance de libre parcours suivant la loi  $f_\psi$  et on note la position d'arrivée de chaque particule,
3. on retient  $C_0^i$  égal au nombre de particule dans l'intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ ,
4. on relance les particules encore dans l'intervalle, puis on compte à nouveau le nombre de particule dans chaque intervalle, qu'on retiens dans  $C_1^i$  et ainsi de suite...

Finalement, la fréquence totale est  $freq^i = \frac{1}{N} \sum_n C_n^i$ . On peut ainsi approximer  $\psi(x_{i+1/2}, \mu)$  par  $\frac{1}{\Sigma th} freq^i$ .

Maintenant que nous avons un algorithme nous pouvons nous concentrer sur l'implémentation. Commençons par étudier l'allure de la solution  $\psi$  pour différentes valeurs de  $\mu$ . Plus  $\mu$

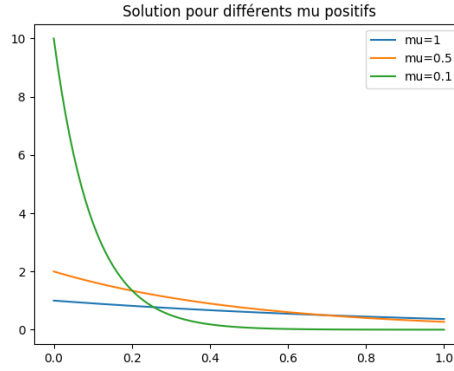


FIGURE 1 –  $\psi(x, \mu)$

se rapproche de 0 plus sa densité est centrée sur 0. La limite pour  $\mu = 0$  est le dirac en 0. En effet si le neutron part à la verticale il sera aussi absorbé à  $x = 0$ .

Il s'agit maintenant de comparer ses densités théoriques aux résultats de notre simulation. Une question pratique se pose : quelle valeur donner à  $dx$  ? En effet ce paramètre n'est en rien déterminé par le problème physique ou la méthode Monte-Carlo. Empiriquement, s'il est trop grand l'approximation de l'intégrale est fausse et s'il est trop petit il n'y aura aucune trajectoire qui mène à l'intervalle  $[x - dx/2; x + dx/2]$ . Nous voulons limiter le nombre d'intervalles de calcul pour représenter les solutions de manière visible et feront ici 25 intervalles.

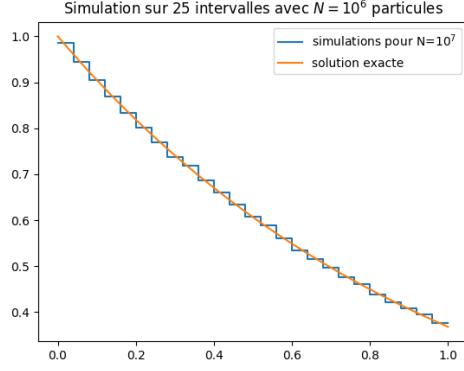
Enfin, il faut une estimation de la fiabilité de nos résultats. Pour ce faire, on va procéder par intervalle de fluctuation à 95%. L'intervalle de fluctuation à 95% donne l'intervalle de valeurs dans lequel 95% de nos mesures doivent être, en postulant que la théorie (notre code est juste) est vrai.

Pour ce faire on prend un point  $x$  et l'intervalle  $[x - dx/2; x + dx/2]$  centré sur ce point sur laquelle on approxime la solution par sa valeur en  $x$ . On peut considérer la variable aléatoire de Bernoulli de probabilité  $p$  : suis-je dans l'intervalle ou non ? On a  $p = dx\tilde{\varphi}(x)$ . Après  $N$  tirages de particules

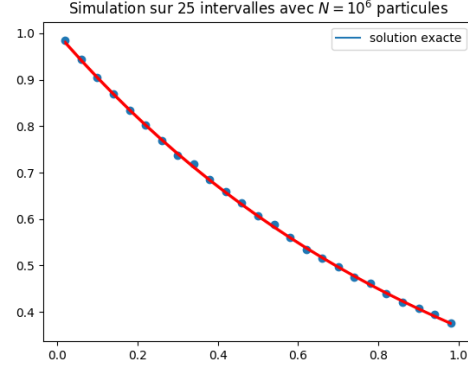
La variance de notre résultat est donné par l'estimateur  $Var_i \frac{freq^i(1-freq^i)}{N}$ . Par ailleurs, on connaît la solution exacte de notre problème, donc on va centrer l'intervalle autour de la solution exacte. Cela nous donne un intervalle de confiance de la forme :

$$I_c^i = [\psi - 1.96\sqrt{Var_i}, \psi + 1.96\sqrt{Var_i}].$$

On a représenté sur la figure (2a) l'allure de la solution par simulation Monte-Carlo. Elle est constante par morceaux pour chaque intervalle d'approximation où la valeur moyenne est assimilée à l'intégrale.



(a) Solution et simulations pour  $\mu = 1$

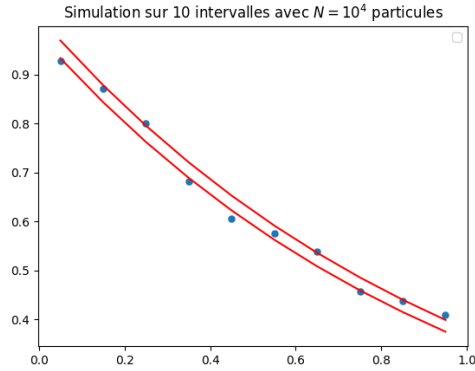


(b) Intervalle de confiance  $N = 10^6$

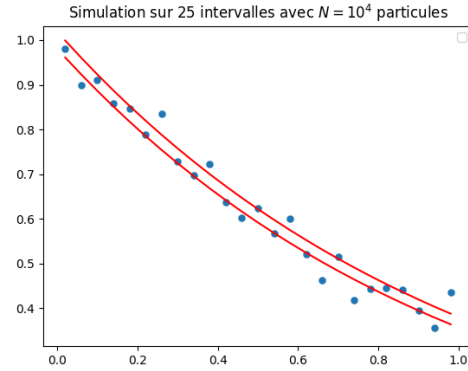
FIGURE 2 – Etude de la simulation de  $\psi(x, \mu = 1)$

Pour la représentation des intervalles de confiance, on remarque que pour  $N = 10^6$  simulations il est invisible sur la figure puisque de largeur évoluant en l'inverse de  $\sqrt{N}$ , il est ici de largeur de l'ordre de  $10^{-3}$ . Les points donnent toutefois l'impression d'être compris dedans ou très proches. Nous avons tracé l'intervalle de confiance à 95% pour une gaussienne puisque par théorème central limite la moyenne empirique que nous calculons tend vers l'espérance.

Il est intéressant de regarder à  $N$  fixé comment évolue la précision de notre simulation en fonction du nombre d'intervalles.



(a) 10 intervalles



(b) 25 intervalles

FIGURE 3 – Etude de la simulation de  $\psi(x, \mu = 1)$

Sur la figure (3) on remarque que pour 25 intervalles les points sont beaucoup plus loin de l'intervalle de confiance. En effet pour un même nombre de tirages il y a plus d'intervalles donc moins de particules par intervalle. Ceci montre que si on veut une estimation plus précise spatialement (i.e. réduire la taille des intervalles), il faut augmenter le nombre de tirages.

### 1.2.2 Source uniforme

On s'intéresse ensuite au cas d'une source  $S$  uniforme et unitaire sur tout l'intervalle  $[0, 1]$ . Comme on écrit  $S(x) = \int_0^1 S(t)\delta_x(t)dt$  on peut réutiliser l'étude faite avec une source ponctuelle. Cette source peut maintenant être située en tout point de l'intervalle d'étude. Par

translation on obtient la solution de l'équation pour une source ponctuelle en  $x_0$  pour  $\mu > 0$

$$\psi_{x_0}(x, \mu) = 1_{(x > x_0)} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{\Sigma_t(x-x_0)}{\mu}} \quad (4)$$

Par symétrie on trouve la solution pour  $\mu < 0$  en changeant simplement l'indicatrice  $1_{(x < x_0)}$ .

Par linéarité la solution de notre equation pour  $S = 1$  s'écrit

$$\varphi(x, \mu) = \int_0^1 \psi_{x_0}(x, \mu) dx_0$$

Dans notre démarche Monte-Carlo nous tirons maintenant  $x_0$  le point de départ selon la loi de probabilité induite par la source. Comme la source est constante on tire  $x_0$  selon une loi uniforme  $\mathcal{U}[0, 1]$ . On tire  $\mu_0$  comme précédemment. Pour connaître la densité  $f_{\mu_0}(x_1)$  on utilise la formule de Bayes sur les densités conditionnelles

$$f(x_1|\mu_0) = \int_0^1 f_{\psi}(x_1|x_0, \mu_0) f_{\mu_0}(x_0) dx_0$$

$f_{\psi}(x_1|x_0, \mu_0)$  est donnée par la solution (4) qui est le libre parcours depuis  $x_0$  à  $\Sigma_t$  près et  $f_{\mu_0}(x_0)$  par la densité de la source, ici 1. On obtient la densité  $f(x_1)$

$$f(x_1|\mu_0) = \Sigma_t \int_0^1 \psi_{x_0}(x, \mu) dx = \Sigma_t \varphi(x, \mu)$$

Pour obtenir la densité de neutrons totale en un point  $x$  indépendamment de leur direction  $\mu$ , il faut considérer les probabilités conditionnelles selon  $\mu$  également. Comme le tirage de  $\mu$  est uniforme entre  $-1$  et  $1$ , sa densité est  $\frac{1}{2}$ . On intègre sur  $\mu$  pour obtenir la densité moyenne  $\tilde{\varphi}(x) = \int_{-1}^1 \varphi(x, \mu) d\mu$ . On a alors

$$f(x_1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x_1|\mu_0) d\mu_0 = \frac{\Sigma_t}{2} \int_{-1}^1 \varphi(x_1, \mu) d\mu = \frac{\Sigma_t}{2} \tilde{\varphi}(x)$$

Nous sommes donc capable d'approximer  $\varphi$  mais aussi  $\tilde{\varphi}$  par méthode Monte-Carlo

$$\varphi(x, \mu_0) = \frac{\mathbb{P}(x_1 \in [x - dx/2, x + dx/2]|\mu_0)}{\Sigma_t dx} \quad \tilde{\varphi}(x) = \frac{\mathbb{P}(x_1 \in [x - dx/2, x + dx/2])}{2\Sigma_t dx} \quad (5)$$

Comme pour le cas de la source ponctuelle on regarde d'abord l'allure de la solution en fonction de  $\mu > 0$  (figure (4a)). Pour  $\mu < 0$  le cas est symétrique par rapport au centre de l'intervalle.

La solution est toujours nulle en  $x = 0$  comme imposé par la condition de flux entrant nul. La limite quand  $\mu \rightarrow 0$  est un flux constant égal à 1 sur tout l'intervalle et nul en 0. Encore une fois la situation est symétrique et  $\mu < 0$ .

On regarde ensuite les résultats de la simulation Monte-Carlo et encore une fois l'intervalle de confiance (4b). Comme l'intervalle de confiance fait apparaître l'estimation de  $\varphi(x, \mu)$ , quand cette valeur est petite l'intervalle de confiance l'est également. C'est ce qu'on remarque sur cette figure : pour  $x$  proche de 1 l'intervalle de confiance est plus large et la variance des points plus grande.

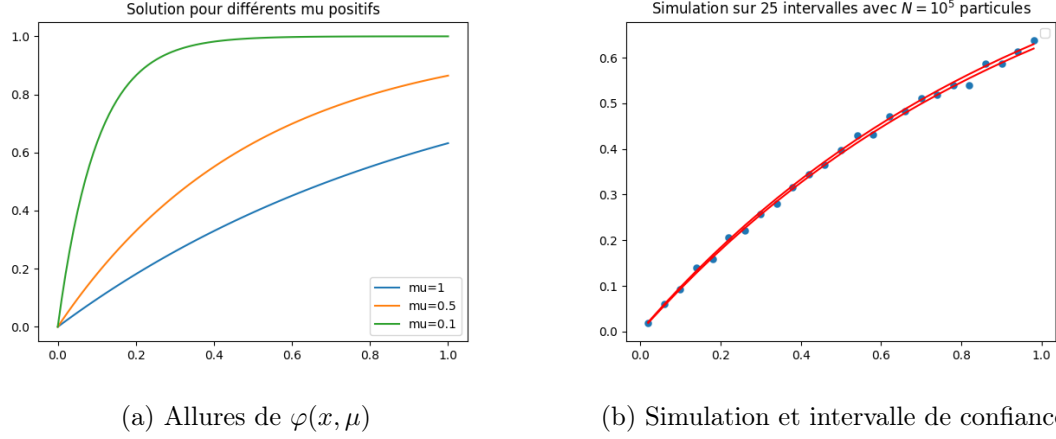


FIGURE 4 – Etude de la simulation de  $\psi(x, \mu = 1)$

### 1.2.3 Matériau non homogène avec source ponctuelle

On peut se pose la question de ce qui se passe dans le cas d'un matériau où  $\Sigma_t$  est une fonction de  $x$ . On se place dans le cas d'une source homogène avec un matériau de  $\Sigma_t$

$$\Sigma_t(x) = \begin{cases} 1 & x \in S_1 = [0; 0.3], \\ 3 & x \in S_2 = [0.3; 0.7], \\ 1 & x \in S_3 = [0.7; 1], \end{cases}$$

et une source ponctuelle en 0.

On commence par résoudre le cette équation sur  $[0; 0.3]$  avec  $\mu > 0$  puisque il n'y a pas de source autre qu'en 0. La solution est donnée par le calcul de la partie précédente

$$\varphi_1(x, \mu) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} \quad \forall x \in [0; 0.3] \quad (\text{S1})$$

Pour l'intervalle  $[0.3; 0.7]$  on peut considérer une source ponctuelle en  $x = 0.3$

$$S_2(x, \mu) = \varphi_1(0.3, \mu) \delta_{0.3}(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{0.3}{\mu}} \delta_{0.3}(x)$$

On résout le problème exactement de la même façon et on obtient

$$\varphi_2(x, \mu) = S_2(0.3, \mu) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{3(x-0.3)}{\mu}} = \frac{1}{\mu^2} e^{-\frac{0.3}{\mu}} e^{-\frac{3(x-0.3)}{\mu}} \quad (\text{S2})$$

Le même raisonnement donne

$$\varphi_3(x, \mu) = \frac{1}{\mu^3} e^{-\frac{0.3}{\mu}} e^{-\frac{3(0.7-0.3)}{\mu}} e^{-\frac{x-0.7}{\mu}} \quad (\text{S3})$$

## 1.3 Matériau diffusant

### 1.3.1 Calcul de l'estimateur de $\varphi$

Nous abandonnons maintenant l'hypothèse d'un matériau purement absorbant et considérons les collisions ( $\Sigma_s \neq 0$ ). Nous utilisons la suite des flux  $n$  fois collisionnés  $\varphi^n$  et les

différences entre deux itérations  $\epsilon^n = \varphi^n - \varphi^{n-1}$  avec  $\epsilon^0 = \varphi^0$ . Les flux collisionnés vérifient le système

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \varphi^0}{\partial x}(x, \mu) + \Sigma_t \varphi^0(x, \mu) = S(x, \mu) \\ \mu \frac{\partial \varphi^n}{\partial x}(x, \mu) + \Sigma_t \varphi^n(x, \mu) = S(x, \mu) + \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \varphi^{n-1}(x, \mu') d\mu' \end{cases} \quad \forall n \geq 1 \quad (6)$$

et les  $\epsilon^n$  le même système sans source.

Pour simplifier l'étude on considère ici que l'absorption est négligeable, i.e.  $\Sigma_t = \Sigma_s$  et  $\Sigma_a = 0$ .

Nous n'allons ici considérer que le flux moyenné en  $\mu$ , fonction uniquement de l'espace  $\tilde{\varphi}(x)$ . Le flux non collisionné  $\tilde{\varphi}^0$  est donné par la partie précédente équation (5).

Nous cherchons maintenant à estimer  $\tilde{\varphi}^1$ , c'est à dire trouver la densité de probabilité d'un point  $x_2$  après une collision et 2 libres parcours.  $\epsilon^1$  est solution de

$$\mu \frac{\partial \epsilon^1}{\partial x}(x, \mu) + \Sigma_t \epsilon^1(x, \mu) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \varphi^0(x, \mu') d\mu' = \frac{\Sigma_s}{2} \tilde{\varphi}^0(x)$$

On utilise encore une fois le fait que  $\tilde{\varphi}^0(x) = \int_0^1 \tilde{\varphi}^0(t) \delta_x(t) dt$  pour obtenir par linéarité

$$\epsilon^1(x, \mu) = \Sigma_s \int_0^1 \tilde{\varphi}^0(x_1, \mu) \psi_{x_1}(x, \mu) dx_1 \quad (7)$$

Pour mieux différencier les densités, on ajoute les indices  $x$  et  $\mu$  pour indiquer sur quelle variable porte la densité  $f$ .

On utilise la formule de Bayes avec les densités qui donne (en notant  $f(0 \rightarrow 1)$  la densité de probabilité de continuer entre l'état 0 et l'état 1)

$$\begin{aligned} \tilde{f}_x(x_2) &= f(0 \rightarrow 1) \int_{-1}^1 f_\mu(\mu_1) \int_0^1 f_x(x_2|x_1, \mu_1) \tilde{f}_x(x_1) dx_1 d\mu_1 \\ &= \frac{\Sigma_s}{\Sigma_t} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \int_0^1 f_\psi(x_2|x_1, \mu_1) \times \frac{\Sigma_t}{2} \tilde{\varphi}^0(x_1) dx_1 d\mu_1 \\ &= \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \int_0^1 \Sigma_t \psi_{x_1}(x_2, \mu_1) \tilde{\varphi}^0(x_1) dx_1 d\mu_1 \\ &= \frac{\Sigma_t}{2} \int_{-1}^1 \epsilon^1(x_2, \mu_1) \quad \text{par l'équation (7)} \\ &= \Sigma_t \tilde{\epsilon}^1(x_2) \end{aligned}$$

Comme  $\tilde{\epsilon}^1 = \tilde{\varphi}^1 - \tilde{\varphi}^0$ , on peut directement calculer  $\tilde{\varphi}^1$  dès qu'on a tiré les trajectoires. On itère pour tout  $n$  et le calcul est identique puisque il s'agit d'un processus Markovien, l'état  $n$  ne dépend que de l'état  $n-1$ . On a

$$\tilde{\varphi}^n = \tilde{\epsilon}^n + \tilde{\varphi}^{n-1} = \sum_{k=1}^n \tilde{\epsilon}^k + \tilde{\varphi}^0$$

On peut donc calculer tous les flux collisionnés. Comme la solution de l'équation de transport neutronique est donnée par la limite des flux quand  $n \rightarrow \infty$  on a

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\epsilon}^k + \tilde{\varphi}^0$$

Dans la pratique on détermine un critère d'arrêt à  $n = m$  dès que deux contributions sont "suffisamment proches", i.e. dès que  $\tilde{\epsilon}^m < \eta$  où  $\eta$  est un paramètre fixé à l'avance qui caractérise la précision de notre simulation.

En intégrant sur un petit intervalle autour de  $x$  on obtient une formule explicite pour calculer  $\tilde{\varphi}$  avec une simulation Monte-Carlo

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{\mathbb{P}(x_{k+1} \in [x; x + dx])}{\Sigma_t dx} \quad (8)$$

L'indice  $k + 1$  vient du fait que l'on note  $x_k$  la position de départ de l'itération  $k$  et  $x_{k+1}$  sa position d'arrivée.

### 1.3.2 Résultats

Contrairement aux cas précédents on ne connaît pas la solution analytique, mais on sait que la solution doit être symétrique par rapport à  $x = 1/2$ . Il serait possible de tester que notre code fonctionne bien en prenant une solution manufacturée. Il faut alors déterminer la source à l'origine de ce flux neutronique puis tirer les particules de départ selon la densité de cette source et enfin comparer les résultats. Nous avons cependant manqué de temps pour ce rapport préliminaire pour mettre en oeuvre cette méthode.

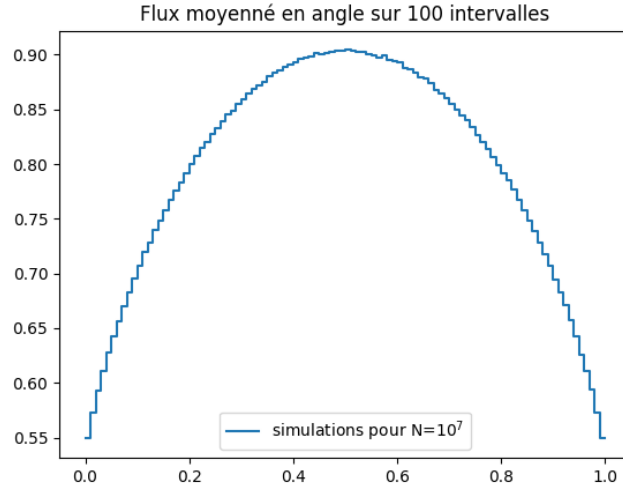


FIGURE 5 – Simulation de  $\varphi(x, \mu)$  pour  $N = 10^7$  tirages

La figure (5) montre la simulation pour  $N = 10^7$  tirages et 100 intervalles. Elle est bien symétrique et régulière (sans sursaut lié à un point aberrant).

## Conclusion préliminaire

Nous avons mis en oeuvre la méthode Monte-Carlo et testé sur les cas où nous connaissons une solution analytique qu'elle donne les bons résultats. Nous souhaiterions également vérifier dans le cas avec diffusion que notre solveur donne des résultats corrects, ce que nous ferons ultérieurement.

Il aurait aussi été intéressant de regarder l'impact de  $\mu$  sur la précision de la méthode : comme la largeur de l'intervalle de confiance dépend de la valeur de  $\varphi$ , on s'attend à ce que faire diminuer  $\mu$  modifie la précision de la méthode.