Лабораторная работа на тему «Дискретная марковская цепь»

Рассмотрим дискретную марковскую цепь. Обозначим через S_1, S_2, S_3, …, S_n – события, образующие полную группу несовместных событий. Эти события характеризуют состояния системы, в которые она может переходить при последовательном проведении испытаний.

Пусть $p_{ij}(k)$ – переходные вероятности, k – номер испытания (номер шага). Вероятности $p_{ij}(k)$ представляют собой условные вероятности того, что система переходит в состояние S_j на k-м шаге, при условии, что перед этим (на (k-1)-ом шаге) она находилась в состоянии S_i, т.е. $p_{ij}(k)=P(S_j\ /\ S_i)$. Полный набор переходных вероятностей образует матрицу переходных вероятностей размерностью $n\times n$

$$P^{(k)}=[p_{ij}(k)].$$

Элементы этой матрицы должны удовлетворять следующим двум условиям:

$$0\le p_{ij}(k)\le 1\quad (i,j=\overline{1,n})\quad \text{и}\quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(k)=1.$$

Матрица переходных вероятностей, элементы которой удовлетворяют этим двум условиям, называется *стохастической.*

Если переходные вероятности p_{ij} не зависят от номера испытания (шага) k, то марковская цепь называется **однородной**, в противном случае цепь – **неоднородная.** Для неоднородной марковской цепи каждому дискретному времени перехода из состояния в состояние соответствует своя матрица переходных вероятностей $P^{(k)}=[p_{ij}(k)]$. Для однородной марковской цепи матрицу переходных вероятностей будем обозначать просто буквой $P=[p_{ij}]$.

Расчет марковской цепи

Полное вероятностное описание поведения системы достигается заданием, помимо матрицы вероятностей переходов за один шаг, еще и вектор-строки вероятностей начального состояния $P(0)=[p_1(0),p_2(0),\dots,p_n(0)]$.

Расчет дискретной марковской цепи состоит в том, чтобы найти вектор состояний на k-том шаге $P(k)=[p_1(k),p_2(k),\dots,p_n(k)]$ для любого k. Координаты этого вектора $p_j(k)\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ - вероятности состояний S_j системы на k-м шаге. Этот вектор при любом k обладает следующими свойствами: размерность вектора равна числу состояний и $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(k)=1$. Справедлива следующая формула

$$p_j(k)=\sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)\cdot p_{ij}.$$

Эта формула является рекуррентной, так как определение вероятностей после k-того перехода требует знания вероятностей после $(k$-1)-го перехода. Данная формула получается как результат матричного произведения элементов строки $p_i(k-1)$ на матрицу P с элементами p_{ij}. В связи с этим ее можно переписать для однородной марковской цепи в виде

$$P(k) = P(k-1) \cdot P \;\; (1) \qquad (1)$$

или

$$P(k) = P(0) \cdot P^k \qquad (2)$$

и для неоднородной в виде

$$P(k) = P(k-1) \cdot P^{(k)} \qquad (3)$$

или

$$P(k) = P(0) \cdot \prod_{r=1}^{k} P^{(r)}. \qquad (4)$$

<u>Пример.</u> Пусть некоторая система может находиться в одном из двух состояний. Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

В начальный момент времени система находилась в первом состоянии. Вычислить вероятности состояний системы после двух шагов.

Решение. Так как в начальный момент времени система находилась в первом состоянии, то значит $P(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица переходных вероятностей не зависит от шага, значит состояние системы после двух шагов найдем, например, по формуле (2)

$$P(2) = P(0) \cdot P^2.$$

Определим

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,3 & 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,7 \\ 0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,3 & 0,3 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,34 & 0,66 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix}.$$

Тогда $P(2) = P(0) \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,34 & 0,66 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,34 & 0,66 \end{pmatrix}$.

Множество состояний цепи и возможных переходов часто удобно представлять в виде графа, т.е. схемой, образованной вершинами (соответствующими состояниям S_1, S_2, S_3, ..., S_n), соединенными между собой ориентированными дугами, соответствующие возможным переходам. Кроме того, иногда на графах состояний наряду со стрелками, связывающими соседние состояния, изображаются также обратные стрелки, которые возвращают систему в то же состояния. Переход из состояния в это же состояния на практике означает задержку системы в этом состоянии и при анализе случайных процессов, как правило, можно вполне обойтись без таких стрелок.

Пример. Цель (самолет) обстреливается из зенитной установки очередью из четырех снарядов с интервалом *t*. После каждого выстрела самолет может остаться невредимым (состояние 1), получить незначительные (состояние 2) или значительные (состояние 3) повреждения, а также может быть сбитым (состояние 4). Размеченный граф состояний представлен на рисунке 1 (цифрами на стрелках указаны вероятности соответствующих переходов после каждого выстрела). Необходимо определить вероятности всех состояний самолета после четырех выстрелов. Перед началом обстрела самолет находится в работоспособном состоянии, т.е. вектор начальных вероятностей состояний $P(0) = (1, 0, 0, 0)$.

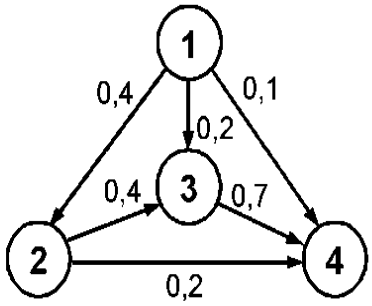


Рис. 1. Размеченный граф состояний самолета

Решение. По графу составим матрицу переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При этом, например, вероятность p_{11} на графе не указана, но ее можно вычислить как 1-(0,4+0,2+0,1)=0,3

После первого выстрела вектор вероятностей состояний самолета найдем, например, по формуле (1)

$$P(1) = P(0)\cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

После второго выстрела

$$P(2) = P(1)\cdot P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}28 & 0{,}28 & 0{,}35 \end{pmatrix}.$$

После третьего выстрела

$$P(3) = P(2) \cdot P = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}28 & 0{,}28 & 0{,}35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}027 & 0{,}148 & 0{,}214 & 0{,}611 \end{pmatrix}.$$

После четвертого выстрела

$$P(4) = P(3) \cdot P = \begin{pmatrix} 0{,}027 & 0{,}148 & 0{,}214 & 0{,}611 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}0081 & 0{,}07 & 0{,}1288 & 0{,}7931 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, после четвертого выстрела вероятности состояний: цель не повреждена - 0,0081, незначительные повреждения - 0,07, значительные повреждения - 0,1288, цель сбита - 0,7931.

Определение: **Эргодической цепью Маркова** называется цепь для которой состояние S_j может быть достигнуто за конечное число шагов из любого состояния S_i.

Если система является эргодической, то она является стохастически устойчивой, то есть всегда имеются предельные (финальные) вероятности состояний

$$\overline{p_j}(k) = \lim_{k \to \infty} p_j(k), \quad j = \overline{1,n},$$

не зависящие от вектора начальных условий. Режим функционирования системы, соответствующий вектору $\overline{P} = \left(\overline{p}_1,\ \overline{p}_2,\ \ldots,\ \overline{p}_n\right)$ называется *предельным* или *установившимся*. Для нахождения вектора $\overline{P}$ используется векторно-матричное уравнение

$$\overline{P} \times (P - E) = 0, \tag{5}$$

где E – единичная матрица. Эта формула представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных равным количеству возможных состояний. Эта система является системой зависимых уравнений, т.к. одно из них является результатом линейных преобразований, выполненных над оставшимися уравнениями. Поэтому любое из них может быть исключено из дальнейшего рассмотрения, а оставшиеся уравнения дополнены нормировочным уравнением $\sum_{j=1}^{n} \overline{p}_j = 1$.

Например, для системы с тремя состояниями векторно-матричное уравнение будет иметь вид

$$\begin{pmatrix}\bar p_1 & \bar p_2 & \bar p_3\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right] = 0. \qquad (6)$$

Данное уравнение эквивалентно системе трех алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} (p_{11}-1)\bar p_1 + p_{21}\bar p_2 + p_{31}\bar p_3 = 0, \\ p_{12}\bar p_1 + (p_{22}-1)\bar p_2 + p_{32}\bar p_3 = 0, \\ p_{13}\bar p_1 + p_{23}\bar p_2 + (p_{33}-1)\bar p_3 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

В силу выше сказанного, любое из уравнений может быть исключено и заменено условием нормировки.

<u>Пример.</u> Некоторое техническое устройство может находиться в одном из трёх состояний: S_1 – работает; S_2 – осматривается; S_3 – ремонтируется. Начальное распределение вероятностей состояний равно $P(0) = \begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}$. Матрица условных вероятностей перехода имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Найти предельные (стационарные) вероятности состояний $\bar p_1$, $\bar p_2$, $\bar p_3$.

Решение. Запишем систему уравнений (2.7)

$$\begin{cases} (0{,}7-1)\bar p_1 + 0{,}5\bar p_2 + 0{,}6\bar p_3 = 0, \\ 0{,}1\bar p_1 + (0{,}2-1)\bar p_2 + 0{,}2\bar p_3 = 0, \\ 0{,}2\bar p_1 + 0{,}3\bar p_2 + (0{,}2-1)\bar p_3 = 0, \\ \bar p_1 + \bar p_2 + \bar p_3 = 1. \end{cases}$$

Исключим из рассмотрения первое уравнение. Получим

$$\begin{cases} 0{,}1\bar p_1 - 0{,}8\bar p_2 + 0{,}2\bar p_3 = 0, \\ 0{,}2\bar p_1 + 0{,}3\bar p_2 - 0{,}8\bar p_3 = 0, \\ \bar p_1 + \bar p_2 + \bar p_3 = 1. \end{cases}$$

Выразим $\bar p_1$ и $\bar p_2$ из первых двух уравнений через $\bar p_3$ и подставим в третье уравнение, получим $\bar p_3 = 0{,}213$; $\bar p_2 \approx 0{,}135$; $\bar p_1 \approx 0{,}652$.

1.1.1. Марковские процессы с доходами

Рассмотрим эргодический марковский процесс с конечным множеством состояний S_1, S_2, S_3, ..., S_n, которому соответствует матрица переходных вероятностей P размерностью $n \times n$. Каждому переходу из состояния S_i в состояние S_j поставим в соответствие некоторую оценку r_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$, которую в дальнейшем будем называть *доходом за один период из состояния S_i в состояние S_j.* Физическая размерность дохода может быть различной и необязательно выражаться в денежных единицах. В качестве дохода можно рассматривать математическое ожидание ущерба, темп наступления или скорость передвижения войск. Очевидно, что суммарный доход, получаемый от функционирования системы в течение некоторого временного периода, будет величиной случайной, зависящей от распределения вероятностей соответствующего марковского процесса.

Обозначим через $v_i(k)$ средний ожидаемый доход, получаемый после совершения системой k переходов, если процесс начался из состояния S_i. Доход за k переходов может быть получен как доход за один первый переход плюс доход за оставшиеся (k-1) переходов. Доход за один переход системы из состояния S_i обозначим через q_i и он будет равен

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} r_{ij} \,. \tag{8}$$

Ожидаемый доход за оставшиеся (k-1) переходов зависит от того, в каком состоянии оказалась система после первого шага. Пусть это будет состояние S_j. Тогда средний доход за оставшиеся (k-1) переходов будет равен $v_i(k-1)$. Так как система из состояния S_i могла попасть в любое состояние S_j. с соответствующей вероятностью p_{ij} , то средний доход за оставшиеся (k-1) переходов определится выражением

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} v_j(k-1), \quad k = 1,2,3\ldots .$$

Тогда полный ожидаемый доход за k переходов будет равен

$$v_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} r_{ij} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij} v_j(k-1), \quad (i = \overline{1,n}), \quad k = 1,2\ldots$$

или

$$v_i(k) = q_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ij} v_j(k-1), \quad (i = \overline{1,n}), \quad k = 1,2\ldots \tag{9}$$

Учитывая эргодичность марковского процесса, ожидаемый доход $v_i(k)$ при больших k можно вычислять по формуле $v_i(k) = kg$, где

$$g = \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i q_i \,, \tag{10}$$

а $\overline{p}_i$ - финальные вероятности марковского процесса. Величина g это средний ожидаемый доход системы за один переход в предположении, что эта система осуществляет достаточно большое число переходов.

Суммарный доход системы за один переход непредельного режима определяется соотношением

$$G(k) = \sum_{i=1}^{n} v_i(k) p_i(k), \tag{11}$$

где $p_i(k)$ – вероятности состояний системы после k-го перехода.

Пример. Пусть некоторая система может находиться в одном из трех состояний S_1, S_2, S_3. Известна матрица переходных вероятностей

$$P=\begin{pmatrix}0{,}66 & 0{,}24 & 0{,}1\\ 0{,}33 & 0{,}47 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3\end{pmatrix},$$

вектор предельных вероятностей $\overline{p}=(0{,}51;\ 0{,}32;\ 0{,}17)$ и дана матрица доходов

$$R=\begin{pmatrix}158 & 40 & 0\\ 80 & 78 & 0\\ 96 & 50 & 0\end{pmatrix}.$$

Определить динамику изменения доходов за пять переходов.

Решение: По формуле (8) определяем средний доход за один период

$$q_1=158\cdot 0{,}66+40\cdot 0{,}24+0\cdot 0{,}1=113{,}9;$$
$$q_2=80\cdot 0{,}33+78\cdot 0{,}47+0\cdot 0{,}2=63{,}1;$$
$$q_3=96\cdot 0{,}4+50\cdot 0{,}3+0\cdot 0{,}3=53{,}4.$$

По формуле (9) определяем полный ожидаемый доход на каждом переходе. Результаты расчетов сведены в таблицу

$v_i(k)$	k					
	0	1	2	3	4	5
$v_1(k)$	0	113,9	209,6	299,5	387,6	475
$v_2(k)$	0	63,1	141	225,3	311,8	399
$v_3(k)$	0	53,4	133,9	219,7	306,7	394

Из анализа данных этой таблицы следует, что если система в начальный момент времени находится в состоянии S_1, то через пять переходов полный ожидаемы доход будет равен 475; если в начальный момент времени система находится в состоянии S_2 – 399; и в состоянии S_3 – 394. Это значит, что доход системы будет максимальным, если в начале каждого перехода система будет находиться в состоянии S_1.

По формуле (10) найдем средний ожидаемый доход системы за один переход

$$g=0{,}51\cdot 113{,}9+0{,}32\cdot 63{,}1+0{,}17\cdot 53{,}4\approx 87.$$

Вычислим также суммарный доход системы за один переход стационарного режима

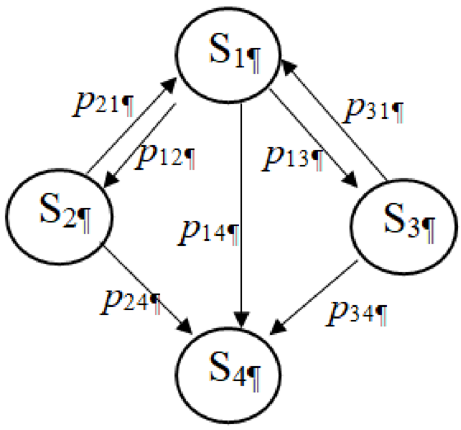
$$G(5)=475\cdot 0{,}51+399\cdot 0{,}32+394\cdot 0{,}17=437.$$

Задания к лабораторной работе

Задание 1

Рассматривается следующий процесс: система представляет собой техническое устройство (ТУ), которое осматривается в определенные моменты времени (например, каждый день), и ее состояние регистрируется в отчетной ведомости. Каждый осмотр с регистрацией представляет собой «шаг» процесса. Возможные состояния ТУ следующие:

S_1 – полностью исправно;
S_2 – частично неисправно, требует наладки;
S_3 – обнаружена серьезная неисправность, требует ремонта;
S_4 – признано непригодным, списано.

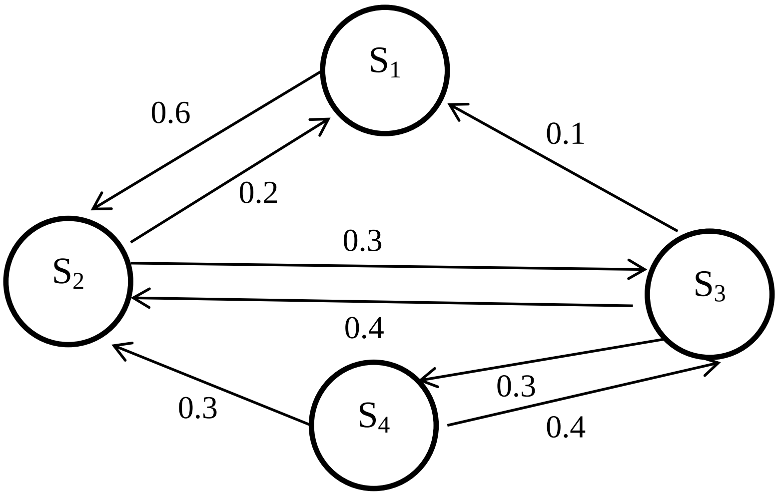


Допустим, что как наладка, так и ремонт продолжаются менее суток и после их выполнения ТУ возвращается в состояние S_1 (полностью исправно) или списывается. Граф состояний ТУ имеет вид, изображенный на рисунке. Известно, что в начальный момент ТУ полностью исправно.
Определить вероятностей состояний ТУ для первых трех суток(k=1, 2, 3), если переходные вероятности заданы в таблице для каждого варианта.

№ варианта	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{21}	p_{24}	p_{31}	p_{34}
1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3
2	0,2	0,1	0,1	0,3	0,4	0,3	0,5
3	0,3	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1
4	0,1	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,3
5	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3
6	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1	0,3	0,1
7	0,1	0,1	0,3	0,2	0,5	0,1	0,2
8	0,3	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3
9	0,2	0,3	0,2	0,4	0,3	0,4	0,2
10	0,1	0,2	0,3	0,2	0,4	0,2	0,3

Задание 2

Рассмотрим состояния банка S_1, S_2, S_3, S_4, характеризующиеся соответственно процентными ставками 3%, 3,5%, 4% и 4,2%, которые устанавливаются в **начале каждого месяца** и фиксированы на всем его протяжении. Наблюдения за работой банка в предшествующий период показал, что переходные вероятности состояний в течение квартала изменяются пренебрежимо мало и, следовательно, их можно считать постоянными. Определить вероятности состояния банка в конце квартал, если в конце предшествующего квартала процентная ставка составляла 4%, а размеченный граф состояний банка имеет следующий вид:



Задание 3

Пусть некоторая система может находиться в одном из двух состояний S_1, S_2. Известна матрица переходных вероятностей, вектор предельных вероятностей и матрица доходов. Определить динамику изменения доходов за три перехода.

№ варианта	$\overline{p}$	P	R
1	$\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}9 & 3\\ 3 & -7\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8 & 2\\ 1 & -8\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7 & 1\\ 0 & -10\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}7 & 0{,}3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6 & 10\\ 3 & 7\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}9 & 5\\ 5 & 7\end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7 & 6\\ 0 & 5\end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6 & 5\\ 5 & 4\end{pmatrix}$

9	$\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0,1 & 0,9\\ 0,9 & 0,1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix}0,25 & 0,75\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0,51 & 0,49\\ 0,39 & 0,61\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$