

Дефаззификация

Под дефаззификацией нечеткого множества $B^*(y)$, являющегося результатом вывода, понимается операция нахождения четкого значения y^* , которое бы наиболее «рациональным» образом представляло это множество. Естественно, могут существовать различные критерии оценки «рациональности» значения y^* для представления нечеткого множества B^* . О количестве таких критериев можно судить по числу существующих методов дефаззификации, наиболее известными среди которых являются:

- метод среднего максимума (Middle of Maxima, MM),
- метод первого максимума (First of Maxima, FM),
- метод последнего максимума (Last of Maxima, LM),
- метод центра тяжести (Center of Gravity, CG),
- метод центра сумм (Center of Sums, CS),
- метод высот (Height, H).

Далее перечисленные методы будут рассмотрены более подробно.

В методе среднего максимума наиболее типичным представителем нечеткого множества B^* , полученного в результате вывода и задаваемого функцией принадлежности $\mu_{B^*}(y) = \mu_{\text{res}}(y)$, является значение y^* , имеющее максимальную степень принадлежности.

Следует отметить, что множество таких значений часто может содержать более одного элемента и даже бесконечное число элементов. Решением в данной ситуации будет представление результирующего множества средним значением, получаемым по формуле:

$$y^* = 0.5(y_1^* + y_2^*),$$

где y_1^*, y_2^* - границы.

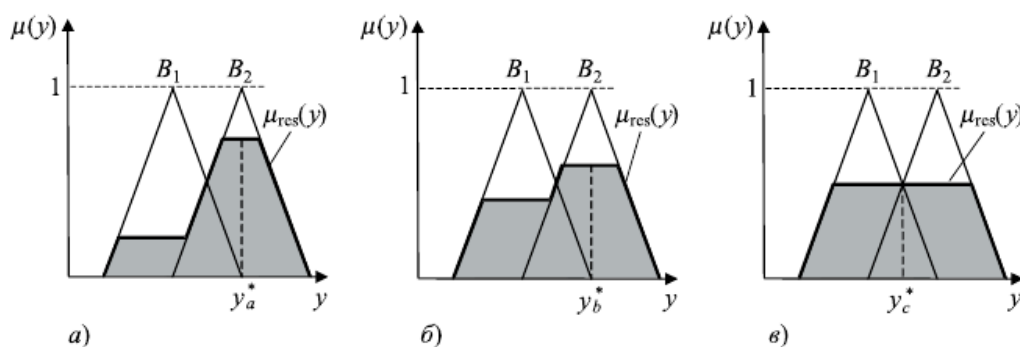


Рис. 5.29. Иллюстрация недостатков метода среднего максимума (ММ)

Достоинством данного метода является простота вычислений. Вместе с тем, простота вычислений достигается ценой определенных недостатков.

Недостаток метода состоит в том, что на результат дефаззификации влияет только нечеткое множество B_j , имеющее наибольшую степень активизации — множества, активизированные в меньшей степени, никакого влияния на результат не оказывают.

Опр.: Чувствительность метода дефаззификации и вытекающую из нее чувствительность нечеткой модели можно определить как существование отклика Δy^* выходного параметра модели на изменение степеней активизации нечетких множеств $B_j(y)$, соответствующих заключениям базы правил.

Опр.: Разрывность метода дефаззификации и вытекающая из нее разрывность нечеткой модели можно определить как возникновение на выходе модели скачкообразной реакции Δy^* на любое малое изменение степеней активизации нечетких множеств $B_j(y)$ в заключениях правил.

Метод первого максимума. В методе первого максимума (FM) в качестве четкого значения y^* , представляющего результирующее нечеткое множество-заключение, выбирается наименьшее значение y_1 , максимизирующее его функцию принадлежности $\mu_{\text{res}}(y)$.

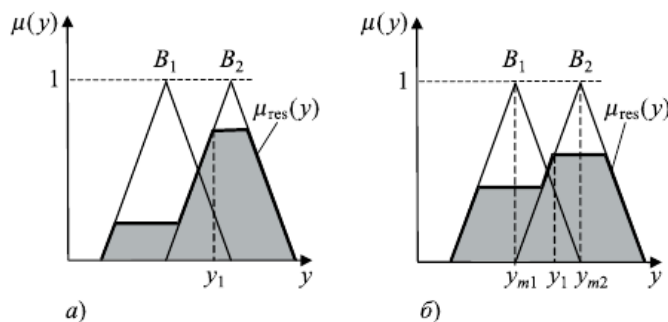


Рис. 5.30. Дефаззификация с использованием метода первого максимума (FM), $y^* = y_1$

Достоинства метода FM:

- низкая стоимость вычислений,
- большая (по сравнению с методом MM) чувствительность к изменениям степени активизации заключений базы правил

Недостатки метода FM:

- неоднородность,
- учет в процессе дефаззификации только множества B_j с наибольшей степенью активизации.

Метод последнего максимума. Метод последнего максимума (LM) в качестве четкого значения y^* для представления результирующего нечеткого множества-заключения выбирает наибольшее значение y_2 , соответствующее максимуму функции принадлежности $\mu_{\text{res}}(y)$.

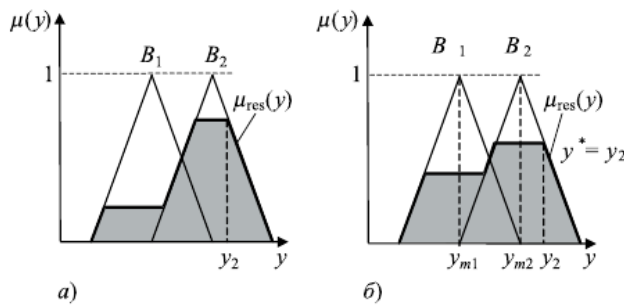


Рис. 5.31. Дефаззификация с использованием метода последнего максимума (LM), $y^* = y_2$

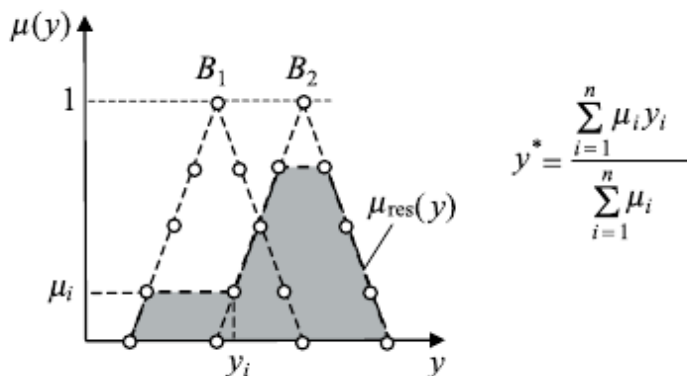
Метод центра тяжести.

Метод центра тяжести (CG) предполагает, что в качестве четкого значения y^* для представления результирующего нечеткого множества B^* , задаваемого функцией принадлежности $\mu_{res}(y) = \mu_{B^*}(y)$, должна выбираться координата y_c центра тяжести фигуры, ограниченной графиком этой функции

$$y^* = y_c = \frac{\int y \mu_{res}(y) dy}{\int \mu_{res}(y) dy}$$

Пределы интегрирования задаются областью определения Y результирующего нечеткого множества-вывода B^* .

В случае дискретных нечетких множеств выходное значение модели y^* вычисляется по формуле, приведенной на рисунке

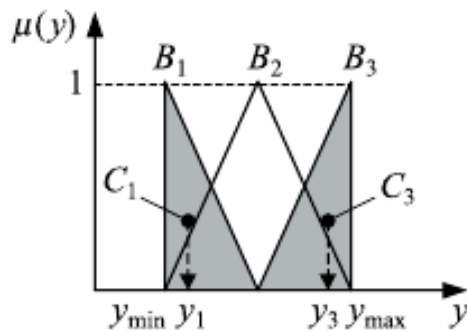


Достоинства метода CG

- В дефаззификации участвуют все активизированные функции принадлежности заключений (все активные правила), т. е. метод центра тяжести является «демократичным» и обеспечивает более высокую чувствительность нечеткой модели к изменению входных сигналов, чем методы FM, LM и MM.

Недостатки метода CG

- Высокая стоимость вычислений, связанная с интегрированием поверхностей нерегулярной формы, особенно в случае использования функций принадлежности, не состоящих из прямолинейных участков (например, гауссовых функций). Для интегрирования необходимо определить точки пересечения отдельных составляющих функций принадлежности $\mu_{B_j}(y)$, разбить поверхность на секторы и выполнять интегрирование в пределах каждого из секторов
- Сужение интервала дефаззификации является еще одним недостатком метода центра тяжести. При использовании классического варианта метода центра тяжести на выходе нечеткой модели (регулятора) невозможно получить минимальное ($y^* = y_{\min}$) или максимальное ($y^* = y_{\max}$) значение из допустимого диапазона, даже в случае максимальной активизации крайних нечетких множеств B_1 или B_3 , соответствующих заключениям правил.



a) $y_{1e} \neq y_{\min}, y_{3e} \neq y_{\max}$

Метод центра сумм.

В базе правил нечеткой модели могут часто встречаться правила, в заключении которых содержится одно и то же нечеткое множество, например

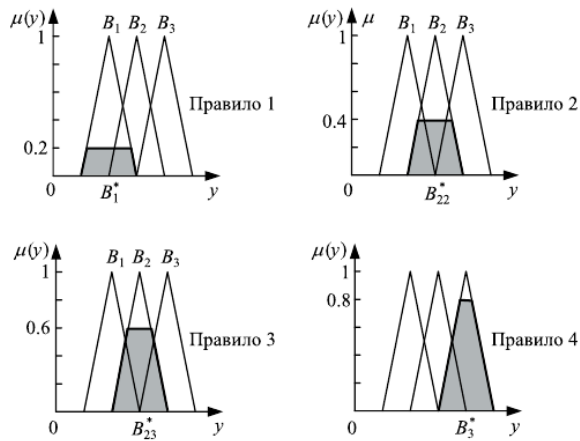
R_1 : Если $x_1 = \tilde{A}_{11}$ и $x_2 = \tilde{A}_{21}$ то $y = \tilde{B}_1$

R_2 : Если $x_1 = \tilde{A}_{12}$ и $x_2 = \tilde{A}_{22}$ то $y = \tilde{B}_2$

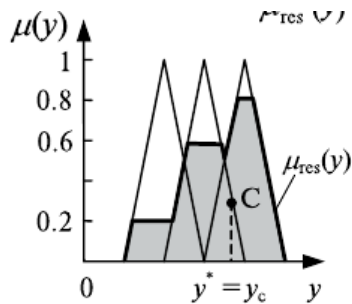
R_3 : Если $x_1 = \tilde{A}_{13}$ и $x_2 = \tilde{A}_{23}$ то $y = \tilde{B}_2$

R_4 : Если $x_1 = \tilde{A}_{14}$ и $x_2 = \tilde{A}_{24}$ то $y = \tilde{B}_3$

где



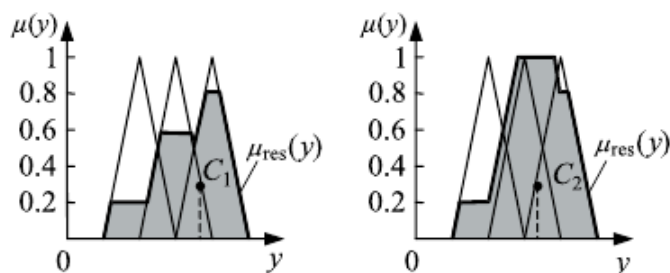
Если для нахождения $\mu_{res}(z)$ используется Мах, то на выходе получим



Но тогда наибольшее влияние на расположение центра тяжести C и, следовательно, на результат дефаззификации оказывает множество B_3 (правило R_4), степень активизации которого максимальна (0.8). Вместе с тем, множество B_2 активизируется двумя правилами (R_2 и R_3) и общая степень его активизации ($0.4+0.6=1.0$) выше, чем для B_3 . В некоторых случаях допустимо, что на результат дефаззификации y^* влияли все правила, активизирующие данное множество $B_j(y)$.

Учитывать данное влияние позволяет метод центра сумм (CS), который производит аккумуляцию множеств B_j соответствующих заключениям отдельных правил, по формуле (вместо максимума):

$$\mu_{res}(y) = \sum_{j=1}^m \mu_{B_j^*}(y)$$



а) $\mu_{res}(y) = \text{MAX}_{j=1, \dots, m} \mu_{B_j^*}(y)$ б) $\mu_{res}(y) = \sum_{j=1}^m \mu_{B_j^*}(y)$

В результате использования этого оператора мы получаем функцию принадлежности, показанную на рисунке выше, из которого видно, что применение оператора SUM существенно увеличивает значимость активизированного двумя правилами множества B_2 , что, в свою очередь, смещает центр тяжести C_2 ближе к модальному значению этого множества. В случае использования оператора MAX центр тяжести C_1 сильнее всего «притягивается» множеством B_3 . Формула для дефаззификации примет вид

$$y^* = \frac{\int y \sum_{j=1}^m \mu_{B_j^*}(y) dy}{\int \sum_{j=1}^m \mu_{B_j^*}(y) dy}, \quad \text{или} \quad y^* = \frac{\sum_{j=1}^m \int y \mu_{B_j^*}(y) dy}{\sum_{j=1}^m \int \mu_{B_j^*}(y) dy}.$$

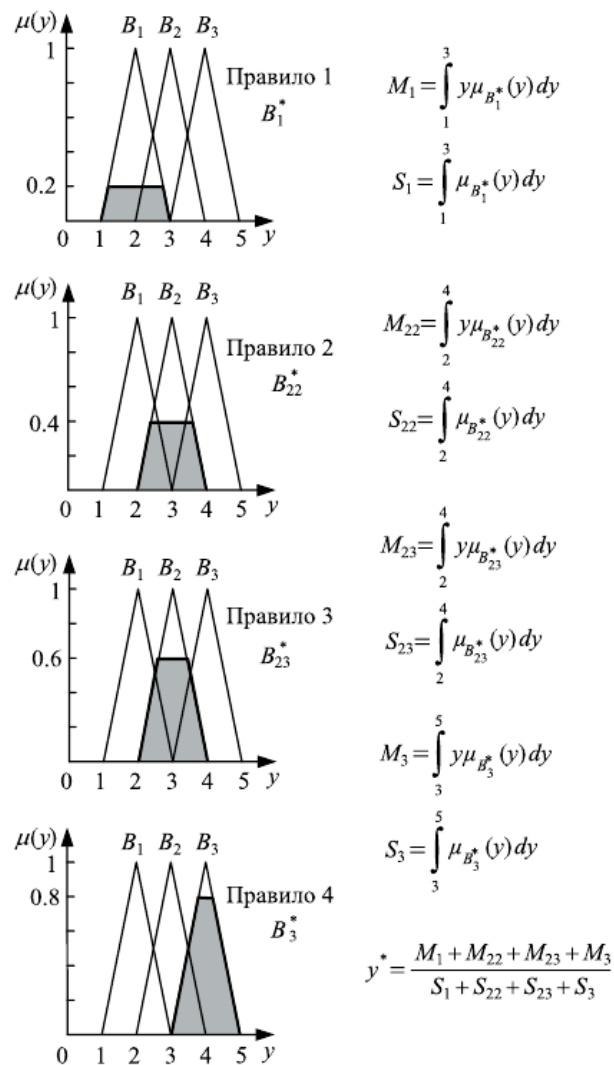


Рис. 5.43. Пример дефаззификации с использованием метода центра сумм (CS)

В случае дискретных функций принадлежности результат дефаззификации y^* вычисляется по формуле:

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^l y_i \sum_{j=1}^m \mu_{B_j^*}(y_i)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \mu_{B_j^*}(y_i)},$$

где l — число элементов дискретной области определения Y ,
 m — число правил нечеткой модели.

Метод высот.

Метод высот (Н) является упрощенным дискретным вариантом метода центра сумм (CS). Каждое нечеткое множество $B_j(y)$ на выходе модели здесь заменяется одноэлементным множеством, совпадающим с модальным значением $y_j = m_j$ этого множества. Поэтому данный метод называют также методом одноэлементных множеств.

В результате вывода одноэлементные множества в каждом правиле активизируются так же, как и другие типы нечетких множеств.

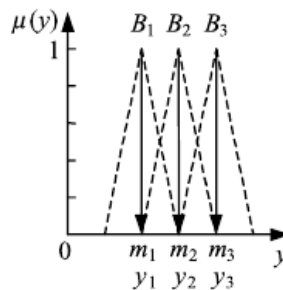


Рис. 5.45. Замена нечетких множеств B_j одноэлементными множествами (синглетами)

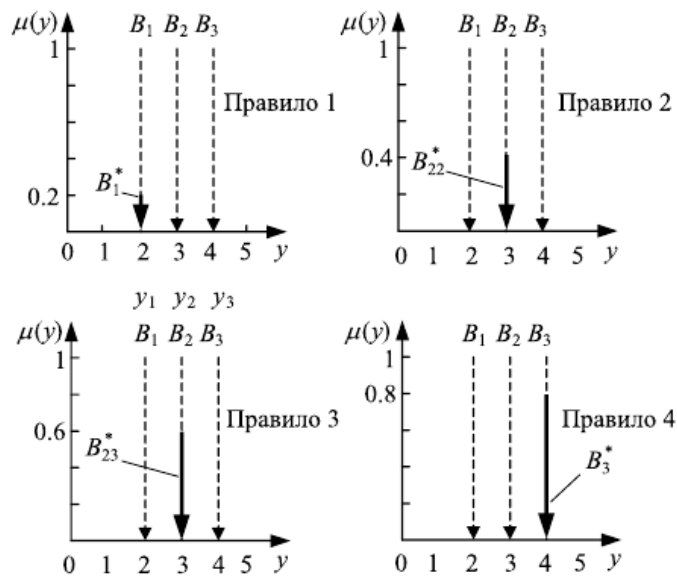
$$y^* = \frac{\sum_{j=1}^m y_j \mu_{B_j^*}(y)}{\sum_{j=1}^m \mu_{B_j^*}(y)}, \quad (5.48)$$

где m — число правил.

Достоинства метода высот

- Значительное уменьшение стоимости вычислений по сравнению с методами CG и CS.
- Ширина носителей выходных множеств B_j не влияет на результат дефаззификации y^* .
- Вид функций принадлежности $\mu_{B_j}(y)$ не влияет на дефаззификацию. (Для некоторых задач это может быть недостатком.)
- Непрерывность.
- Чувствительность

Пример



$$y^* = \frac{y_1 \mu_{B_1^*} + y_2 (\mu_{B_{22}^*} + \mu_{B_{23}^*}) + y_3 \mu_{B_3^*}}{\mu_{B_1^*} + \mu_{B_{22}^*} + \mu_{B_{23}^*} + \mu_{B_3^*}} = 3.667$$

Задание

Рассчитать для примера сложения двух чисел (из лабораторного занятия) всеми способами дефаззифицированные значения выходной переменной (используем вариант \max)