Лабораторное занятие 10

Во многих высших учебных заведениях для оценки знаний студентов применяется балльно-рейтинговая система, основанная на порядковых шкалах и последующем переводе баллов из одной шкалы в другую. Примером является 50-ти балльная порядковая шкала с последующим переводом в 4-х балльную порядковую шкалу. Как правило, для определения среднего балла студента используется средняя арифметическая, что объясняется относительной простотой получения данной характеристики. Однако широкое использование среднего балла как универсального параметра не оправдано, потому что имеет значительные ограничения:

– на среднее арифметическое чрезмерно влияют значения в выборке, которые слишком малы или слишком велики, поэтому среднее арифметическое не будет объективной характеристикой оцениваемого субъекта;

– в порядковых шкалах при допустимых преобразованиях (к которым относятся все строго возрастающие преобразования) средние арифметические дают противоречивые результаты. Например, если рассмотреть две порядковые шкалы, между которыми установлено соответствие (таблица 1), то средний балл, полученный на этих шкалах с помощью средней арифметической, будет противоречивым.

Соответствие между двумя порядковыми шкалами

50 балльная шкала	1-24	25-34	35-44	45-50
4 балльная шкала	2	3	4	5

По 50-ти балльной шкале лучше будет студент 2, а по 4-х балльной – студент 1 (см. таблицу 2).

Расчет средних арифметических в разных порядковых шкалах

Студент	Шкала	Баллы				Средние арифметические
Студент 1	50-я шкала	25	25	45	50	36,25
	4-я шкала	3	3	5	5	4,00
Студент 2	50-я шкала	34	40	42	40	39,00
	4-я шкала	3	4	4	4	3,75

Кроме того, отметка не всегда является объективным способом оценивания знаний и способностей студента. Оценивая студента с помощью отметок, преподаватели, по сути, пытаются охарактеризовать его способности к обучению, трудолюбие, проявленный интерес к предмету. При этом относя его к одному из классов (которые в дальнейшем будем называть состояниями студента) «Неудовлетворительно», «Удовлетворительно», «Хорошо», «Отлично». Отметка, полученная студентом, в каждый момент времени лишь в той или иной мере соответствует этим понятиям. Отметки студента зависят от очень многих факторов, не обязательно связанных с его знаниями, в том числе и таких как: не выспался, не доучил, переволновался и т.д. Преподаватели тоже не всегда могут объективно оценивать знания, могут колебаться в выборе той или иной отметки, могут в силу разных причин по разному относиться к самому студенту (студент много пропускает, но на аттестации показывает хорошие результаты и т.д.), может не быть четко сформулированных критериев, по которым ставятся отметки. Это позволяет говорить о том, что на отметки студента влияют различные внешние и внутренние факторы, искажающие представление об истинном состоянии знаний студента. Способный обучающийся, в силу обстоятельств, мог пропустить занятия и получить плохую отметку. Но это не помешает ему оставаться потенциально способным и вернуться в свой стационарный статус.

Целью данной работы является установление соответствия между состояниями студента и временными рядами отметок, им полученных, с последующим прогнозированием этих состояний.

1. Разработка алгоритма для оценки знаний студента.

Состояния студентов обозначим следующим образом:

– $\tilde{S}_1 =$ «Неудовлетворительно»,

– $\tilde{S}_2 =$ «Удовлетворительно»,

– $\tilde{S}_3 =$ «Хорошо»,

– $\tilde{S}_4 =$ «Отлично».

Оцениваемое понятие «знания студента» можно представить, как лингвистическую переменную

$$\left(X, \tilde{S}, U, G, M\right), \qquad (1)$$

где X – название переменной – «знания студента», $\tilde{S} = \left(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3, \tilde{S}_4\right)$ – терм-множество нечетких переменных (состояний студентов), U – универсальное множество, в качестве которого в дальнейшем будем рассматривать порядковую 50-ти балльную шкалу, G – синтаксическое правило, M – семантическое правило, определяющие функции принадлежности для каждого терма.

Следует сказать, что в каждый момент времени состояния студента непосредственно не наблюдаемы. Имеются лишь их оценки в виде отметок (баллов). Это могут быть отметки за аттестацию, контрольные работы в течение семестра и т.д. Обозначим отметки по одной дисциплине за определенный промежуток времени (например, семестр) как

$$X = \left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right), \qquad (2)$$

Совокупность отметок (2) представляет собой временной ряд, моменты времени $t = 1; 2; \ldots; n$ фиксированы. Далее полагаем, что x_j – это балл, выставленный по 50-ти балльной системе.

Как уже говорилось, баллы лишь приближенно могут характеризовать то или иное соответствие определенному состоянию студента $\tilde{S}_j$. Для построения функций принадлежности нечетких переменных $\tilde{S}_j$, разобьем дискретных интервал [0; 50] на 4 пересекающихся подынтервала и над каждым введем треугольную функцию принадлежности, как показано на рисунке 1. Параметры треугольной функции принадлежности можно определить экспертным путем [4].

В результате имеем временной ряд баллов, которые с определенными значениями функции принадлежности $\mu_{\tilde{S}_j}\left(x_t\right)$ характеризуют состояния знаний студентов (рисунок 2).

Подобного рода временной ряд можно отнести к нечетким временным рядам, который далее будем обозначать через $\tilde{X}$.

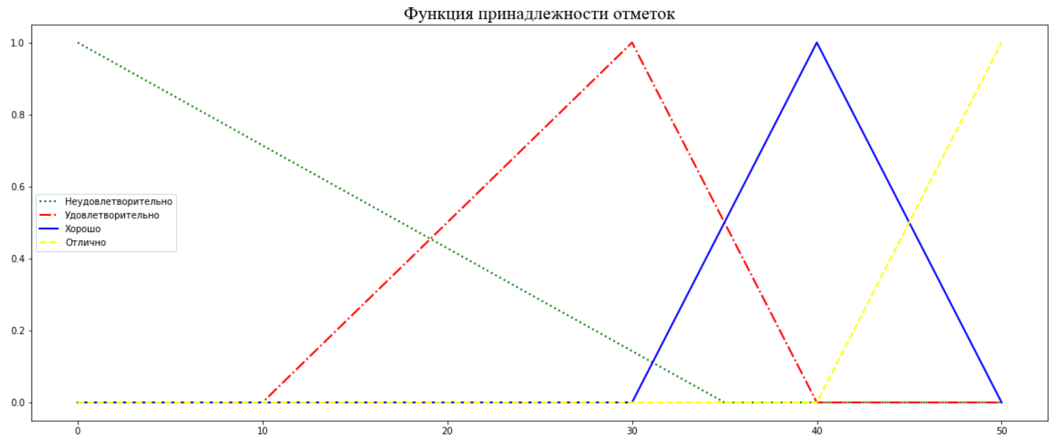

Рис. 1. Функции принадлежности отметок

Нечетким временным рядом (НВР) называют упорядоченную в равноотстоящие моменты времени последовательность наблюдений над некоторой системой с изменяющимися состояниями, если значение состояния в момент времени t может быть выражено с помощью нечеткой переменной $\tilde{X}$ [5].

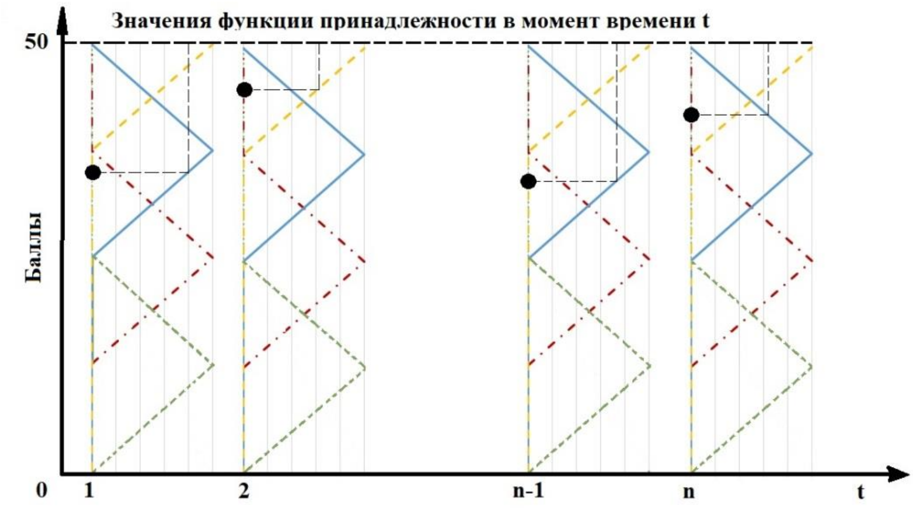

Рис. 2. Значение функции принадлежности в момент времени t

Определим состояние в момент времени t, при условии, что в этот момент времени наблюдается значение уровня временного ряда x_t, по формуле:

$$\tilde{S}_{j,t} : \mu_{\tilde{S}_j}(x_t) = \max_j \mu_{\tilde{S}_j}(x_t). \tag{3}$$

Тот факт, что, будучи в момент времени $t-1$ в состоянии $\tilde{S}_{i,t-1}$, в следующий момент времени t студент оказался в состоянии $\tilde{S}_{j,t}$ обозначим с помощью отношения импликации:

$$\tilde{S}_{i,t-1} \to \tilde{S}_{j,t}. \tag{4}$$

Таким образом, по формулам (3), (4) будет осуществлен переход от временного ряда баллов к последовательности импликаций состояний:

$$\tilde{S}_{i1,1} \to \tilde{S}_{i2,2} \to \tilde{S}_{i3,3} \to \ldots \to \tilde{S}_{ip,p}, \quad \left(i_p = \overline{1,4}\right). \tag{5}$$

Обозначим через k_{ij} частоту переходов из i-го состояния в j-е $\left(i, j = \overline{1,4}\right)$.

Поскольку состояний конечное число, и переход из одного состояния в другое происходит в дискретные моменты времени, то в предположении, что процесс перехода обладает свойством марковости, адекватным описанием динамики состояний будут дискретные марковские цепи [6]. В этом случае вероятности того, что студент будет в момент времени t находиться в состоянии $\tilde{S}_{j,t}, j=\overline{1,4}$, можно найти по формуле:

$$p^t = M^t p^{(t-1)}, t=1;2;...;n, \qquad (6)$$

где t – дискретное время; $p^t = \left(p_1^t; p_2^t; p_3^t; p_4^t\right)$ – вектор состояний студента, заданный вероятностями нахождения студента в соответствующем состоянии; M^t – стохастическая матрица 4×4 вероятностей переходов из состояний с элементами p_{ij}, где p_{ij} – вероятности перехода системы из состояния $\tilde{S}_{i,t-1},\left(i=\overline{1,4}\right)$ в состояние $\tilde{S}_{j,t},\left(j=\overline{1,4}\right)$. Начальное распределение p^0 – задано.

Вероятности $p_{ij} = \left(\tilde{S}_{i,t-1} \to \tilde{S}_{j,t}\right)$ могут меняться во времени, но на начальном этапе исследований примем их константами. В этом случае марковская цепь называется однородной.

Для работы с однородной марковской цепью необходимо задать стохастическую матрицу M.

$t-1/t$	S_1	S_2	$\ldots$	S_n
S_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}
S_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
S_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nn}

Элементы матрицы M предлагается находить по формулам:

$$\sum_{j=1}^{4} p\left(\tilde{S}_{i,t-1} \to \tilde{S}_{j,t}\right) = 1, i, j = \overline{1,4}, \qquad (7)$$

$$p_{ij} = p\left(\tilde{S}_{i,t-1} \to \tilde{S}_{j,t}\right) = \frac{k_{ij}\sum_{t=1}^{n}\mu_{\tilde{S}_j}\left(x_t\right)}{\sum_{j=1}^{4} k_{ij}\sum_{t=1}^{n}\mu_{\tilde{S}_j}\left(x_t\right)}, i, j = \overline{1,4}, \qquad (8)$$

С помощью матрицы M можно, во-первых, прогнозировать состояния студента на следующем шаге. Во-вторых, можно определить предельные (финальные) вероятности состояний студента:

$$\bar{p}_j = \lim_{t\to\infty} p_j^t, j = \overline{1,4}, \qquad (9)$$

не зависящие от вектора начальных условий. Вектор $\bar{p} = \left(\bar{p}_1; \bar{p}_2; \bar{p}_3; \bar{p}_4\right)$ показывает вероятности установившихся (стационарных) состояний студента. Для нахождения вектора $\bar{p}$ используется векторно-матричное уравнение:

$$\bar{p}\times\left(M-E\right) = 0, \qquad (10)$$

где E – единичная матрица. Формула (10) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных равным количеству возможных состояний. Эта система является системой линейно-зависимых уравнений, т.к. одно из них является результатом линейных преобразований, выполненных над оставшимися уравнениями. Поэтому любое из них может быть исключено из дальнейшего рассмотрения, а оставшиеся уравнения дополнены нормировочным уравнением:

$$\sum_{j=1}^{4} \overline{p}_j = 1. \qquad (11)$$

С помощью предельных вероятностей можно определить итоговую оценку знаний студента:

$$S_0 = 2\overline{p}_1 + 3\overline{p}_2 + 4\overline{p}_3 + 5\overline{p}_4. \qquad (12)$$

Таким образом, алгоритм для оценки знаний студента следующий:

1. Необходимо определить терм-множества состояний студентов $\tilde{S}$.
2. На основе отметок студента за определенный период времени разбить этот период на пересекающиеся подинтервалы, число которых совпадает с числом состояний студента.
3. По формуле (3) от временного ряда оценок необходимо перейти к временному ряду состояний студента.
4. Составляется последовательность импликаций состояний (формула (5)) и определяется частота переходов k_{ij} из i -го состояния в j -е $\left(i, j = \overline{1,4}\right)$.
5. Элементы стохастической матрицы M определяются из условия (7) и по формуле (8).

Если $\sum_{j=1}^{4} k_{ij} = 0, \quad i = \overline{1,4}$, т.е. какие-то состояния не встречались в (5), то эту ситуацию будем считать ситуацией полной неопределенности и $p_{ij} = 0.25, i, j = \overline{1,4}$.

Для определения вероятностей стационарных состояний студента (9) решается векторно-матричное уравнение (10) с учетом условия (11).

6. Находится итоговая оценка знаний студента по формуле (12).

2. Пример применения алгоритма для оценки знаний студента.

В качестве примера работы предложенного алгоритма рассмотрим три временных ряда отметок успеваемости студента по 50-ти балльной шкале, за семестр (18 недель) (см. таблицу 3).

Успеваемость студентов

Студент	Баллы									Среднее
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	21	26	35	30	40	30	40	36	40	38,778
2	50	44	49	47	48	40	42	45	40	38,778
3	40	41	35	37	39	39	39	35	44	38,778

Продолжение табл. 3

Студент	Баллы									Среднее
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
1	46	45	38	39	48	47	49	38	50	38,778
2	40	36	41	30	37	24	34	21	30	38,778

3	36	38	44	37	41	38	40	44	31	38,778

Для студента 1 имеется тенденция к повышению баллов (см рис. 3)

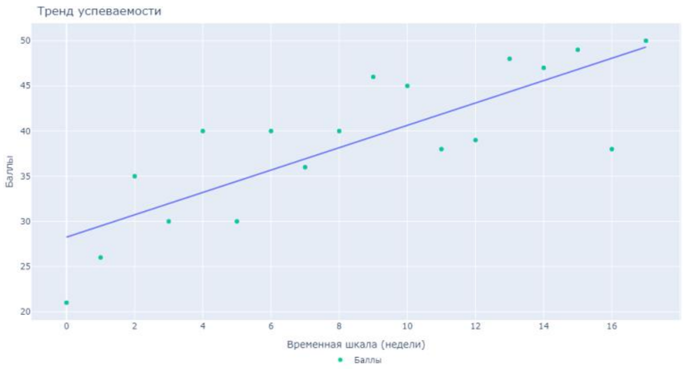

Рис. 3. Баллы и тренд успеваемости для студента 1

Для студента 2 характерно снижение среднего уровня оценок (см. рис. 4).

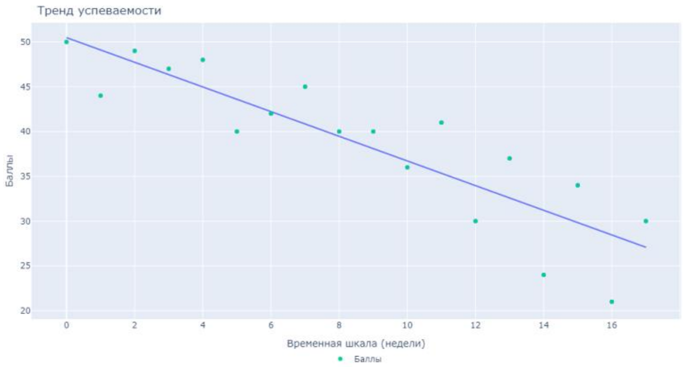

Рис. 4. Баллы и тренд успеваемости для студента 2

Студент 3 во время семестра учился равномерно с небольшими отклонениями (см. рис. 5).

У всех студентов при этом средний бал одинаковый – 38,778.

С помощью предложенного алгоритма найдем итоговую оценку знаний первого студента.

В соответствии с первым и вторым этапом алгоритма разобьём шкалу от 0 до 50 на четыре отрезка по количеству состояний студента, как показано на рис. 1.

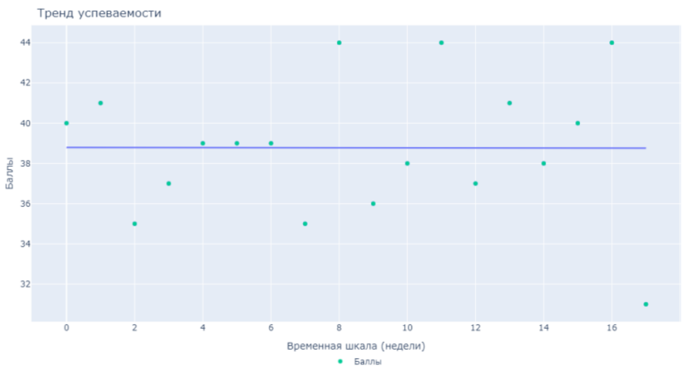

Рис. 5. Баллы и тренд успеваемости для студента 3

Временной ряд баллов у студента 1 примет вид:

X = (21; 26; 36; 30; 40; 30; 40; 36; 40; 46; 44; 38; 39; 48; 47; 49; 38; 50).

Функции принадлежности состояний:

$$\mu_{\tilde{S}_1} = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{35}, & x \le 35, \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{S}_2} = \begin{cases} \dfrac{x}{20} - \dfrac{1}{2}, & 10 \le x \le 30, \\ 4 - \dfrac{x}{10}, & 30 < x \le 40 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{S}_3} = \begin{cases} \dfrac{x}{10} - 3, & 30 \le x \le 40, \\ 5 - \dfrac{x}{10}, & 40 < x \le 50 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{S}_4} = \begin{cases} \dfrac{x}{10} - 4, & 40 \le x \le 50, \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

По формуле (3) перейдем от временного ряда баллов к временному ряду состояний первого студента,

t	x_t	$\mu_{\tilde{S}_1}(x_t)$	$\mu_{\tilde{S}_2}(x_t)$	$\mu_{\tilde{S}_3}(x_t)$	$\mu_{\tilde{S}_4}(x_t)$
1	21	0,4	0,55	0	0
2	26	0,25	0,8	0	0
3	36	0	0,4	0,6	0
4	30	0,14	1	0	0
5	40	0	0	1	0
6	30	0,142857	1	0	0
7	40	0	0	1	0
8	36	0	0,4	0,6	0
9	40	0	0	1	0
10	46	0	0	0,4	0,6
11	44	0	0	0,6	0,4
12	38	0	0,2	0,8	0
13	39	0	0,1	0,9	0
14	48	0	0	0,2	0,8
15	47	0	0	0,3	0,7
16	49	0	0	0,1	0,9
17	38	0	0,2	0,8	0

18	50	0	0	0	1
Сумма		1,34	5,2	8,3	4,4

*Красным выделены максимальные значения функций принадлежности

получим:

$$\tilde{S} = \left(\tilde{S}_{2,1}, \tilde{S}_{2,2}, \tilde{S}_{3,3}, \tilde{S}_{2,4}, \tilde{S}_{3,5}, \tilde{S}_{2,6}, \tilde{S}_{3,7}, \tilde{S}_{3,8}, \tilde{S}_{3,9}, \tilde{S}_{4,10}, \tilde{S}_{3,11}, \tilde{S}_{3,12},\right.$$
$$\left.\tilde{S}_{3,13}, \tilde{S}_{4,14}, \tilde{S}_{4,15}, \tilde{S}_{4,16}, \tilde{S}_{3,17}, \tilde{S}_{4,18}\right)$$

Например, то, что в момент времени $t = 1$ наблюдалось состояние $\tilde{S}_{2,1}$, определили по формуле (3) следующим образом:

$$\tilde{S}_{2,1} : \max_j \mu_{\tilde{S}_j}(21) = \max\left\{\mu_{\tilde{S}_1}(21), \mu_{\tilde{S}_2}(21), \mu_{\tilde{S}_3}(21), \mu_{\tilde{S}_4}(21)\right\} =$$
$$= \max\{0.4; 0.55; 0; 0\} = 0.55$$

Следовательно, x_1=21 в большей мере соответствует состоянию $\tilde{S}_2$.

Последовательность импликаций состояний знаний первого студента будет следующей:

$$\tilde{S}_2 \to \tilde{S}_2 \to \tilde{S}_3 \to \tilde{S}_2 \to \tilde{S}_3 \to \tilde{S}_2 \to \tilde{S}_3 \to \tilde{S}_3 \to \tilde{S}_3 \to \tilde{S}_4$$
$$\to \tilde{S}_3 \to \tilde{S}_3 \to \tilde{S}_3 \to \tilde{S}_4 \to \tilde{S}_4 \to \tilde{S}_4 \to \tilde{S}_3 \to \tilde{S}_4 \quad (13)$$

Посчитаем частоты переходов k_{ij} и запишем их в таблицу 4.

Частоты переходов

	$\tilde{S}_1$	$\tilde{S}_2$	$\tilde{S}_3$	$\tilde{S}_4$
$\tilde{S}_1$	0	0	0	0
$\tilde{S}_2$	0	1	3	0
$\tilde{S}_3$	0	2	4	3
$\tilde{S}_4$	0	0	2	2

В соответствии с условием (7) и формулой (8) определим элементы стохастической матрицы:

$$M = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & P_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}.$$

Например, поскольку из состояния $\tilde{S}_1$ никуда перейти нельзя (так как этого состояния вообще не было), то все $p_{1j} = 0.25$.

Т.к. из состояния $\tilde{S}_2$ можно перейти в состояния $\tilde{S}_2$, $\tilde{S}_3$, то

$$p_{22} = \frac{k_{22}\sum_{t=1}^{18}\mu_{\tilde{S}_2}(x_t)}{\sum_{j=1}^{4}k_{2j}\sum_{t=1}^{18}\mu_{\tilde{S}_j}(x_t)} = \frac{1\cdot 5.2}{0\cdot 1.34+1\cdot 5.2+3\cdot 8.3+0\cdot 4.4} = 0.17$$

Аналогично находим остальные элементы матрицы M:

M	$\tilde{S}_1$	$\tilde{S}_2$	$\tilde{S}_3$	$\tilde{S}_4$
$\tilde{S}_1$	0,25	0,25	0,25	0,25
$\tilde{S}_2$	0	0,17	0,83	0
$\tilde{S}_3$	0	0,18	0,58	0,23
$\tilde{S}_4$	0	0	0,65	0,35

.

Для определения вероятностей стационарных состояний студента $\tilde{S}_1$, $\tilde{S}_2$, $\tilde{S}_3$ и $\tilde{S}_4$ (9) необходимо составить и решить векторно-матричное уравнение (10) с учетом (11).

Задание:

для оставшихся двух студентов определить матрицу переходных вероятностей и решить векторно-матричное уравнение (10)-(11)

II вариант расчета

При определении нечеткого состояния в момент времени t и, ограничиваясь каждый раз, только одним состоянием, теряется много информации. Поэтому предлагается другой способ определения вероятностей перехода из состояния в состояние в стохастической матрице:

В каждый момент времени t-1 система могла находиться в нескольких нечетких состояниях с разными значениями функции принадлежности, в момент времени t система может оказаться также в нескольких нечетких состояниях. То есть может произойти сразу несколько событий с разными степенями принадлежности, показывающими, что система перешла из одного нечеткого состояния в другое. Эти нечеткие события можно формализовать с помощью нечетких отношений импликации

$$(\tilde{S}_i^{t-1} \to \tilde{S}_j^t)|\mu_{ij}$$

$$\mu_{ij} = \min(\mu_{\tilde{S}_i^{t-1}}; \mu_{\tilde{S}_j^t})$$

Если рассматривать весь временной промежуток, то одни и те же нечеткие импликации могли повторяться с определенной частой.

Введем понятие **нечеткого составного события** $\tilde{A}_{ij}$ – это событие, которое отображает все однородные переходы $\tilde{S}_i \to \tilde{S}_j$ на заданном промежутке временного ряда, но с различными значениями функций принадлежности:

$$\tilde{A}_{ij} = \{(\tilde{x}_i^{t_1-1} \to \tilde{x}_j^{t_1})|\mu_{ij}^1;\ (\tilde{x}_i^{t_2-1} \to \tilde{x}_j^{t_2})|\mu_{ij}^2; \dots;\ (\tilde{x}_i^{t_k-1} \to \tilde{x}_j^{t_k})|\mu_{ij}^k\}.$$

А также понятие **нечеткого элементарного случайного события:**

Нечетким элементарным случайным событием $\tilde{A}^{э}_{ij} = (\tilde{S}^{t-1}_i \to \tilde{S}^{t}_j)|\mu_{ij}$ будем называть случайное событие перехода системы из нечеткого состояния $\tilde{S}_i$ в нечеткое состояние $\tilde{S}_j$ в момент времени t со степенью уверенности μ_{ij}.

Тогда по Лотфи Заде вероятность нечеткого события $\tilde{A}_{ij}$ определяется по формуле:

$$P(\tilde{A}_{ij}) = \sum_k p(\tilde{A}^{э\mu^k}_{ij})\mu^k_{ij}$$

где $p\left(\tilde{A}^{э\mu^k}_{ij}\right)$ можно оценить с помощью частости

$$p\left(\tilde{A}^{э\mu^k}_{ij}\right) = \frac{K^{\mu^k}_{ij}}{K_i},$$

где $K^{\mu^k}_{ij}$ – частота импликации с функцией принадлежности μ^k_{ij}, а $K_i = \sum_k \sum_j K^k_{ij}$ - количество элементарных нечетких событий (исходов), соответствующих импликациям из фиксированного $\tilde{S}_i$ в $\tilde{S}_j$, j=1,…,s, где s – число состояний

В результате получаем матрицу

$$\begin{bmatrix} P(\tilde{A}_{11}) & \dots & P(\tilde{A}_{1s}) \\ \dots & \dots & \dots \\ P(\tilde{A}_{s1}) & \dots & P(\tilde{A}_{ss}) \end{bmatrix},$$

нормируя ее по строкам, получим стохастическую матрицу вероятностей случайных нечетких событий – переходов из нечеткого состояния $\tilde{S}_i$ в нечеткое состояние $\tilde{S}_j$.

В дальнейшем, эту матрицу можно использовать либо для предсказания состояний системы в некоторый момент времени, либо для вычисления стационарных состояний системы или так называемых статусов системы.

Пример: рассмотрим пример, связанный с оценкой статуса студентов

Составим матрицы для каждого шага *t*=1,…,18, элементами которых являются функции принадлежности импликаций

$$(\tilde{S}^{t-1}_i \to \tilde{S}^{t}_j)|\mu_{ij}$$

Например,

Для t=2

μ_{ij}	$\tilde{S}_1$	$\tilde{S}_2$	$\tilde{S}_3$	$\tilde{S}_4$
$\tilde{S}_1$	min(0.4;0.25)=0,25	min(0.4; 0.8)=0,4	0	0
$\tilde{S}_2$	min(0.55; 0.25)=0,25	0,55	0	0
$\tilde{S}_3$	0	0	0	0
$\tilde{S}_4$	0	0	0	0

Для шага t=3

μ_{ij}	$\tilde{S}_1$	$\tilde{S}_2$	$\tilde{S}_3$	$\tilde{S}_4$
$\tilde{S}_1$	0	0,25	0,25	0

$\tilde{S}_2$	0	0,4	0,6	0
$\tilde{S}_3$	0	0	0	0
$\tilde{S}_4$	0	0	0	0

Для шага t=4

μij	$\tilde{S}_1$	$\tilde{S}_2$	$\tilde{S}_3$	$\tilde{S}_4$
$\tilde{S}_1$	0	0	0	0
$\tilde{S}_2$	0,14	0,4	0	0
$\tilde{S}_3$	0,14	0,6	0	0
$\tilde{S}_4$	0	0	0	0

Для шага t=5

μij	$\tilde{S}_1$	$\tilde{S}_2$	$\tilde{S}_3$	$\tilde{S}_4$
$\tilde{S}_1$	0	0	0,14	0
$\tilde{S}_2$	0	0	1	0
$\tilde{S}_3$	0	0	0	0
$\tilde{S}_4$	0	0	0	0

и т.д.

Составим все нечеткие составные события

$\tilde{A}_{11} = \{S_1 \to S_1 / 0.25\}$ $\tilde{A}_{12} = \{S_1 \to S_2 / 0.4; 0.25\}$ $\tilde{A}_{13} = \{S_1 \to S_3 / 0.25; 0.14; 0.14\}$
$\tilde{A}_{14} = \{S_1 \to S_4 / 0\}$

$\tilde{A}_{21} = \{S_2 \to S_1 / 0.25; 0.14\}$ $\tilde{A}_{22} = \{S_2 \to S_2 / 0.55; 0.4; 0.4; 0.1\}$ $\tilde{A}_{23} = \{S_2 \to S_3 / 1; 1; 0.2; 0.1\}$
$\tilde{A}_{24} = \{S_2 \to S_4 / 0.1\}$

$\tilde{A}_{31} = \{S_3 \to S_1 / 0.14; 0.14\}$ $\tilde{A}_{32} = \{S_3 \to S_2 / 0.6; 1; 0.4; 0.2; 0.1; 0.1\}$
$\tilde{A}_{33} = \{S_3 \to S_3 / 0.6; 0.4; 0.4; 0.6;0.8;0.2;0.2;0.1;0.1\}$ $\tilde{A}_{34} = \{S_3 \to S_4 / 0.6;0.4;0.8;0.2;0.3\}$

$\tilde{A}_{41} = \{S_4 \to S_1 / 0\}$ $\tilde{A}_{42} = \{S_4 \to S_2 / 0.2; 0.2\}$ $\tilde{A}_{43} = \{S_4 \to S_3 / 0.6;0.4;0.3;0.1;0.8\}$
$\tilde{A}_{44} = \{S_4 \to S_4 / 0.4;0.7;0.7\}$

Тогда

K_1=6, K_2=11,K_3=22, K_4=10

$$p\left(\tilde{A}_{11}^{э0.25}\right) = \frac{K_{11}^{0.25}}{K_1} = \frac{1}{6}$$

$p\left(\tilde{A}_{12}^{э0.4}\right) = \frac{K_{12}^{0.4}}{K_1} = \frac{1}{6}$ и т.д.

Тогда

$$P\left(\tilde{A}_{11}\right) = \frac{1}{6} \cdot 0{,}25 = 0{,}042$$

$$P\left(\tilde{A}_{12}\right) = \frac{1 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}25}{6} = 0{,}108$$

$$P\left(\tilde{A}_{13}\right) = \frac{1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}14}{6} = 0{,}088$$

$$P\left(\tilde{A}_{14}\right) = 0$$

Аналогично рассчитываем другие вероятности, результаты запишем в таблицу

	$\tilde{S}_1$	$\tilde{S}_2$	$\tilde{S}_3$	$\tilde{S}_4$
$\tilde{S}_1$	0,042	0,108	0,088	0
$\tilde{S}_2$	0,035	0,132	0,209	0,009
$\tilde{S}_3$	0,013	0,109	0,155	0,105
$\tilde{S}_4$	0	0,040	0,200	0,164

Пронормировав по строкам, получаем стохастическую матрицу

	$\tilde{S}_1$	$\tilde{S}_2$	$\tilde{S}_3$	$\tilde{S}_4$
$\tilde{S}_1$	0,175	0,455	0,371	0
$\tilde{S}_2$	0,092	0,342	0,542	0,024
$\tilde{S}_3$	0,033	0,286	0,406	0,274
$\tilde{S}_4$	0	0,099	0,495	0,405