Лабораторное занятие 6

1. Модели нечеткого вывода

В основе моделей нечеткого вывода лежат правила, основанные на импликации

R_1: ЕСЛИ ($x_1 = A_1$) ТО ($y_1 = B_1$) (1)

R_2: ЕСЛИ ($x_2 = A_2$) ТО ($y_2 = B_2$)

…

R_n: ЕСЛИ ($x_n = A_n$) ТО ($y_m = B_m$),

где $A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_m$ - нечеткие множества.

На вход модели подаются четкие или нечеткие входные переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, на выходе имеем четкие $y_1, y_2, ..., y_m$. Условия в системе правил могут быть простыми и сложными.

Рассмотрим типовую структуру нечеткой модели системы с двумя входами и одним выходом.

Предположим, что на вход подаются четкие значения x_1 и x_2.

Следует решить задачи

1. Определение степени принадлежности переменных x_1, x_2 нечетким входным множествам (фаззификация).
2. Определение степени удовлетворения условий правил.
3. Определение нечеткого заключения y на основе степени удовлетворения условий правил.
4. Определение четкого заключения y (дефаззификация).

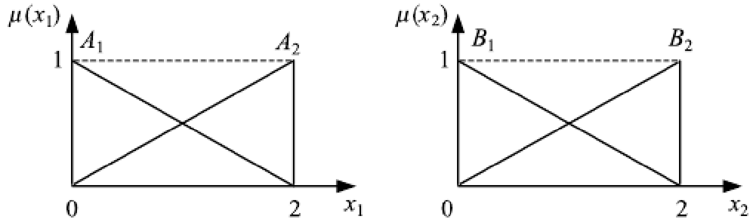
Пусть нечеткие условия для x_1 : A_1, A_2, для x_2 : B_1, B_2.

Нечеткую модель вывода можно представить схематически в виде блоков

Решим последовательно эти задачи.

Фаззификация

Пусть, например, A_1 - нечеткое множество «Малый (в пределах от 0 до 2)», A_2 - нечеткое множество «Большой (в пределах от 0 до 2)».



A_1 = малый (примерно 0), A_2 = большой (примерно 2), $X_1 : 0 \leqslant x_1 \leqslant 2$
B_1 = малый (примерно 0), B_2 = большой (примерно 2), $X_2 : 0 \leqslant x_2 \leqslant 2$

Вычисленные и представленные на выходе блока фаззификации степени принадлежности $\mu_{Ai}(x_1^*)$, $\mu_{Bj}(x_2^*)$ дают информацию о том, в какой степени числовые значения x_1^*, x_2^* принадлежат конкретным нечетким множествам.

Функцию принадлежности множеств A_1 и B_1 можно задать в виде

$\mu_{A1}(x_1) = 1 - 0.5 * x_1$

$\mu_{B1}(x_2) = 1 - 0.5 * x_2$

Функцию принадлежности множеств A_2 и B_2 можно задать в виде

$\mu_{A2}(x_1) = 0.5 * x_1$

$\mu_{B2}(x_2) = 0.5 * x_2$

В процессе фаззификации четкий входной вектор X^* преобразуется в вектор М степеней принадлежности, которые, в свою очередь, являются входными данными для блока вывода

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{фаззификация}} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu_{A_1}(x_1^*) \\ \mu_{A_2}(x_1^*) \\ \mu_{B_1}(x_2^*) \\ \mu_{B_2}(x_2^*) \end{bmatrix}.$$

Вывод

В блоке вывода содержатся правила вида (1).

Блок вывода на основе степеней принадлежности $\mu_{Ai}(x_1)$, $\mu_{Bj}(x_2)$ входных значений определяет результирующую функцию принадлежности $\mu_{res}(y)$ выходного значения модели. Операция вывода включает в себя следующие шаги:

1) вычисление степеней выполнения условий отдельных правил,

2) определение модифицированных (активизированных) функций принадлежности заключений отдельных правил,
3) определение результирующей функции принадлежности вывода из всех правил, входящих в базу.

Решение первой задачи «вычисление степеней выполнения условий отдельных правил»

Если условие правила R имеет простой вид, например,

Если x=A,

то для четкого $x = x^*$ степень $\mu_R(x^*)$ выполнения условия равна степени принадлежности значения x^* множеству A.

В случае сложного условия, состоящего из двух простых подусловий, связанных логическим союзом И (конъюнктивное условие), что соответствует выражению

ЕСЛИ $(x_1 = A_1)$ И $(x_2 = B_2)$,

степень выполнения условия для числовых значений аргументов $x_1 = x_1^*$ и $x_2 = x_2^*$ определяется как степень принадлежности нечеткому отношению R:

$$\mu_R(x_1^*,x_2^*)=\mu_{A1\cap B2}(x_1^*,x_2^*)=T(\mu_{A1}(x_1^*),\mu_{B2}(x_2^*)),$$

где A_1, B_2 — нечеткие множества, T — один из операторов t-нормы, например, алгебраическое произведение (PROD) или min.

Если сложное условие состоит из двух простых подусловий, связанных логическим союзом ИЛИ (альтернативное условие)

ЕСЛИ $(x_1 = A1)$ ИЛИ $(x_2 = B2)$,

то для заданных значений аргументов $x_1 = x_1*$ и $x_2 = x_2*$ степень выполнения условия вычисляется как степень принадлежности отношению R:

$$\mu_R(x_1^*,x_2^*)=\mu_{A1\cup B2}(x_1^*,x_2^*)=S(\mu_{A1}(x_1^*),\mu_{B2}(x_2^*)),$$

где S — один из операторов s-нормы (или t-конормы), например, MAX.

Вычисление степени выполнения сложных условий, являющихся комбинацией простых, иногда называют **агрегированием.**

Определение модифицированных (активизированных) функций принадлежности заключений отдельных правил

основано на степени выполнения их условий. Данная операция, которая может быть названа выводом на правилах, выполняется с использованием операторов нечеткой импликации и правила GMP.

Отступление: одним из правил вывода классической четкой логики является правило Modus Ponens, в рамках которого процесс рассуждений имеет вид:

Факт	$x = A,$
Импликация	ЕСЛИ $(x = A)$ ТО $(y = B),$
Заключение	$y = B.$

В нечетком моделировании и управлении применяются приближенные рассуждения, позволяющие использовать в условиях и заключениях правил нечеткие формулировки. Приближенное рассуждение, основанное на тавтологии типа **Обобщенный (generalized) Modus Ponens (GMP),** имеет вид:

Факт	$x = A^*,$
Импликация	ЕСЛИ $(x = A)$ ТО $(y = B),$
Заключение	$y = B^*.$

Здесь A^* и B^* могут, например, иметь вид A^* = более чем A, B^* = более или менее B и т.п. Приведем пример рассуждения, на основе GMP:

Факт	маршрут поездки очень протяженный,
Импликация	ЕСЛИ (маршрут поездки протяженный) ТО (время в пути длительное),
Заключение	время в пути очень длительное.

Пусть вывод следует осуществлять в соответствии с правилом:

ЕСЛИ (x = A) ТО (y = B),

где функции принадлежности $\mu_A(x)$, $\mu_B(y)$ показаны на рисунке, а входное значение четкое $x^* = 6.5$.

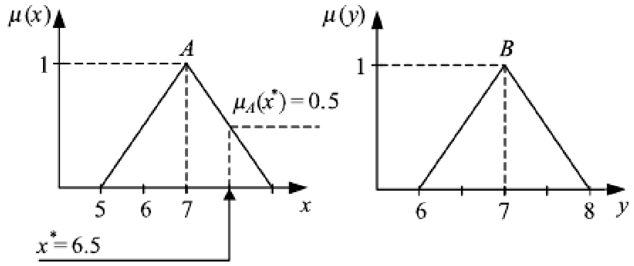
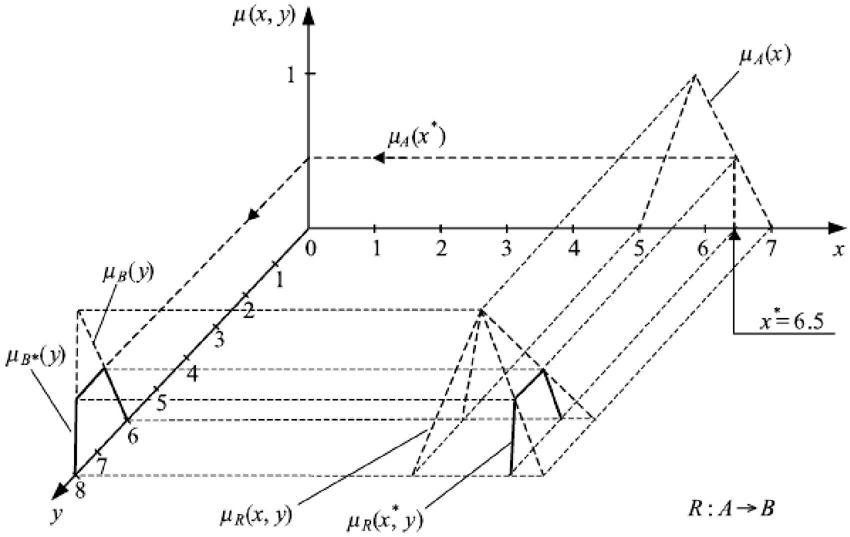


Рис. 5.12. Функции принадлежности нечетких множеств A и B для правила (5.10)



Как видно из рисунка, степень выполнения условия правила равна 0.5. Используя импликацию Мамдани, можно определить активизированную функцию принадлежности импликации A → B, которая представляет собой некоторое нечеткое отношение R:

$$\mu_R(x,y)=\mathrm{MIN}(\mu_A(x),\mu_B(y)),$$

R: A → B.

Соответствующая данному отношению поверхность изображена на рисунке выше.

Для заданного входного значения $x = x^*$ можно перейти к двумерной функции принадлежности импликации $\mu_R(x^*,y)$ — данная функция представляет собой специальный срез полой трехмерной функции $\mu_R(x,y)$. Проекция функции $\mu_R(x^*,y)$ на плоскость $\{\mu,y\}$, обозначаемая $\mu_{B^*}(y)$, является результатом вывода для данного правила.

Функцию принадлежности $\mu_{B^*}(y)$ иногда называют **модифицированной** или **активизированной функцией принадлежности заключения**, а нечеткое множество B* — модифицированным нечетким значением заключения B. Для того чтобы найти модифицированную (активизированную) функцию принадлежности $\mu_{B^*}(y)$ заключения, нет необходимости определять трехмерную функцию принадлежности $\mu_R(x,y)$

импликации — есть более простой способ, который и используется с этой целью на практике. Как видно из рисунка, функции $\mu_R(x^*,y)$ и $\mu_{B*}(y)$ совпадают и, в случае использования импликации Мамдани, могут быть получены простым усечением функции принадлежности заключения $\mu_B(y)$ до уровня степени выполнения $\mu_A(x^*)$ условия правила. Фактически, операция вывода на основе импликации Мамдани выполняется в соответствии с рисунком.

Применение других операторов импликации приводит к получению других модификаций функции принадлежности заключения. На рисунке показан вывод с использованием оператора PROD.

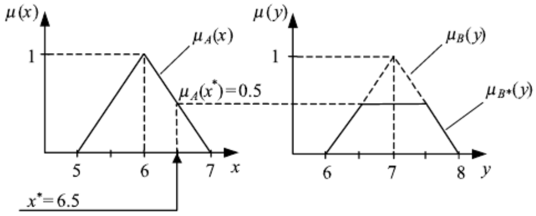


Рис. 5.14. Упрощенный метод вывода на основе правила с использованием оператора импликации Мамдани

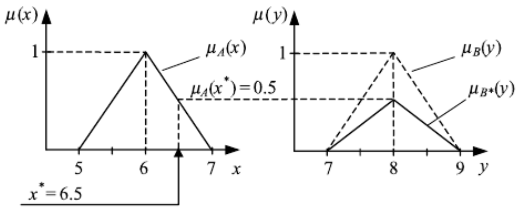


Рис. 5.15. Вывод с использованием оператор импликации PROD

Пример

Определение результирующей функции принадлежности вывода из базы правил

В результате вывода из *n* отдельных правил R_i, составляющих базу правил, будут найдены n **модифицированных** функций принадлежности заключений, на основе которых требуется получить одну результирующую функцию принадлежности вывода из всей базы правил.

Процесс определения общего вывода (заключения) иногда называют аккумуляцией (Knappe 1994). Для выполнения аккумуляции существует ряд методов, поскольку здесь можно применять множество различных операторов.

Далее будут представлены наиболее часто используемые методы аккумуляции. Рассмотрим пример.

Дана нечеткая модель с базой правил вида:

R1: ЕСЛИ (x = A1) ТО (y = B1),

R2: ЕСЛИ (x = A2) ТО (y = B2).

Функции принадлежности используемых в правилах нечетких множеств представлены на рис. Требуется определить результирующую функцию принадлежности $\mu_{res}(y)$ вывода из всей базы правил для входного значения
$x = x^* = 1.4$.

Все правила, входящие в базу, можно объединить в одно составное правило следующего вида:

$$R: \text{ЕСЛИ } (x = A_1) \text{ ТО } (y = B_1) \text{ ИЛИ ЕСЛИ } (x = A_2) \text{ ТО } (y = B_2).$$

Правило R состоит из двух простых правил R_1 и R_2, объединенных логической связкой ИЛИ, что можно представить так:

$$R = R1 \cup R2.$$

Каждое правило представляет собой нечеткое отношение двух аргументов (импликацию). Результирующее отношение R можно найти с использованием одной из s-норм, например, оператора MAX, а его функцию принадлежности $\mu_R(x,y)$ можно получить на основе функций принадлежности составляющих его отношений (импликаций) по формуле:

$$\mu_R(x,y) = MAX(\mu_{R1}(x,y),\mu_{R2}(x,y)).$$

Результирующую функцию принадлежности $\mu_{res}(y)$ вывода из всей базы правил для заданного входного значения $x = x*$ можно определить по формуле, задающей срез поверхности отношения при $x = x*$:

$$\mu_{res}(y)=\mu_R(x^*,y).$$

Будем называть данный метод **методом** 1. Последовательность его шагов представлена на рис.5.20, а–г. Результирующую функцию принадлежности $\mu_{res}(y)$ можно более точно представить в двумерной системе координат — см.

рис. 5.21.

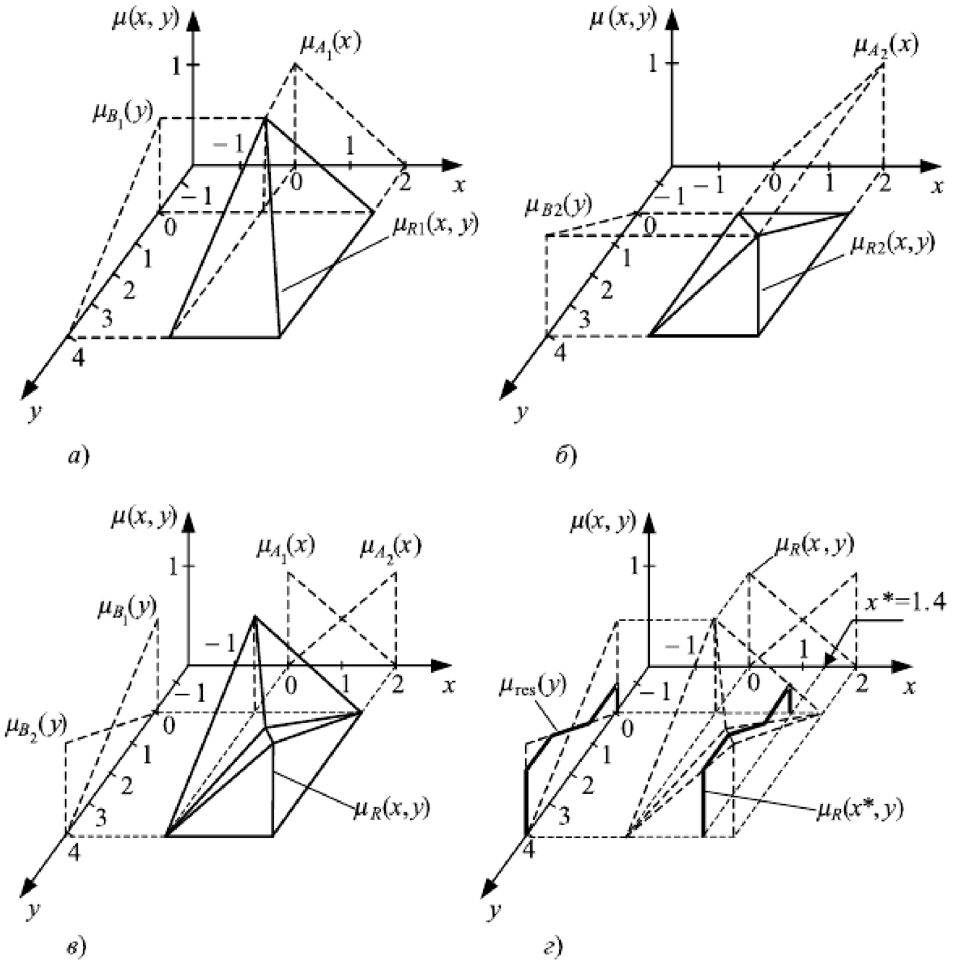


Рис. 5.20. Определение результирующей функции принадлежности $\mu_{\mathrm{res}}(y)$ вы вода из базы правил по срезу $\mu_R(x^*, y)$ результирующей функции принадле ности $\mu_R(x, y)$ отношения $R = R1 \cup R2$

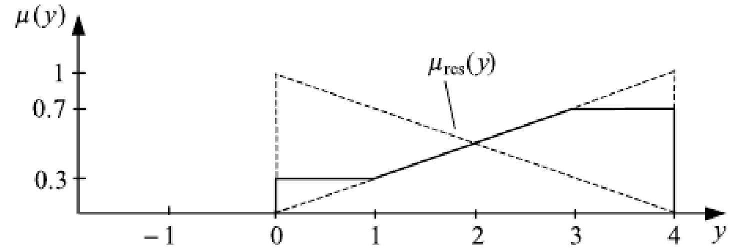


Рис. 5.21. Результирующая функция принадлежности $\mu_{\mathrm{res}}(y)$ вывода из базы правил, полученная на основе метода 1

Метод 2 (упрощенный) для получения $\mu_{res}(y)$ вывода из базы правил, включает в себя следующие шаги: вначале определяются модифицированные функции принадлежности $\mu_{Bi*}(y)$ заключений отдельных правил, а затем, используя одну из s-норм (например, оператор MAX) находится результирующая функция $\mu_{res}(y)$:

$$\mu_{res}(y) = MAX(\mu_{B1}*(y), \mu_{B2}*(y)).$$

Метод 2 чаще всего применяется на практике, поскольку является более простым.

Пример определения функции $\mu_{res}(y)$ на основе данного метода представлен на рисунке.

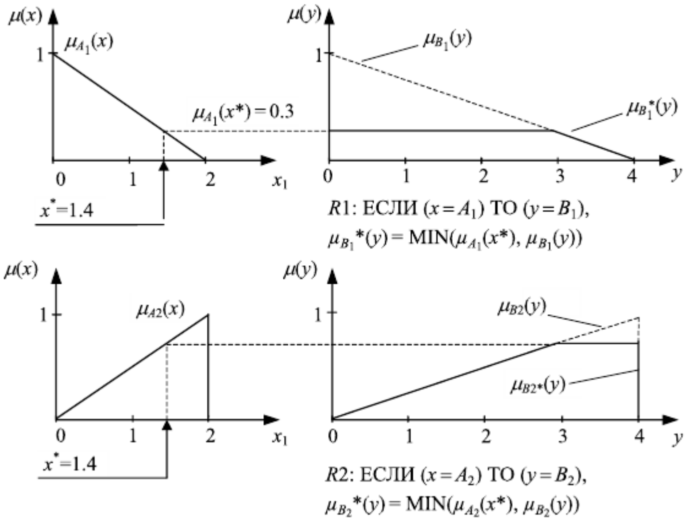
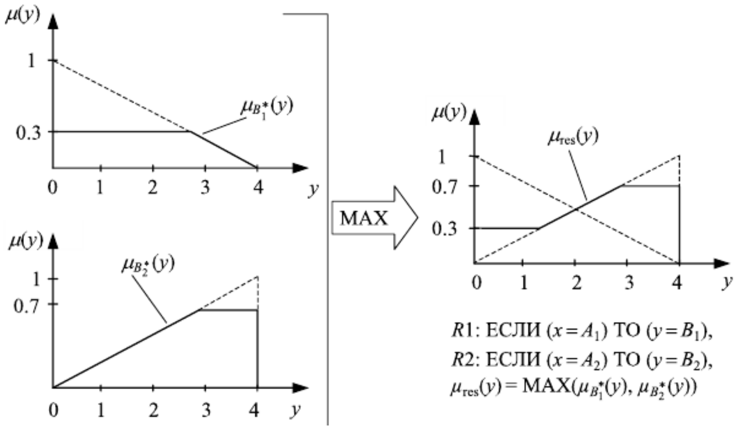


Рис. 5.22. Определение модифицированных функций принадлежности $\mu_{res}(y)$ заключений отдельных правил на основе упрощенного метода (вывод на правилах)



Если модифицированные функции принадлежности $\mu_{Bi}*(y)$ заключений отдельных правил определяются с использованием оператора MIN, а для их аккумуляции с целью получения результирующей функции принадлежности $\mu_{res}(y)$ применяется оператор MAX, то в целом данная операция называется **максиминным выводом (MAX-MIN inference).**

В случае если функции $\mu_{Bi}*(y)$ определяются с помощью оператора PROD, а функция $\mu_{res}(y)$ — с помощью оператора MAX, то операция называется **максимультипликативным выводом (MAX-PROD inference).** При использовании других t-норм и s-норм будем получать другие типы процедуры вывода.

Пример:

Пусть для переменной x имеется два нечетких множества:

$\tilde{A}_1 =$ "малое число в пределах от 0 до 4"

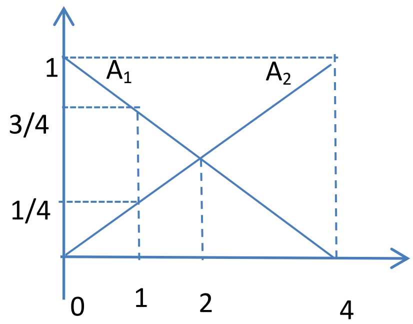
$\tilde{A}_2 =$ "большое число в пределах от 0 до 4"

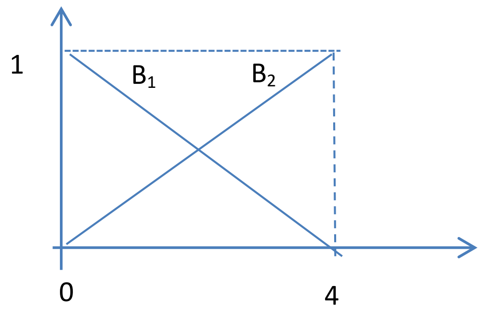
Для переменной у имеется два нечетких множества:

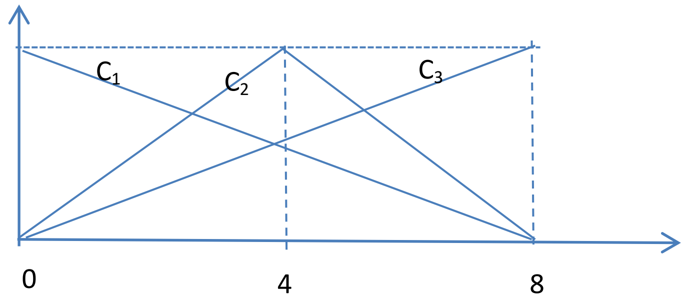
$\tilde{B}_1 =$ "малое число в пределах от 0 до 4"

$\tilde{B}_2 =$ "большое число в пределах от 0 до 4"

$$\mu_{\tilde{A}_1}(x) = 1 - \frac{x}{4},\ \mu_{\tilde{A}_2}(x) = \frac{x}{4},\ \mu_{\tilde{B}_1}(y) = 1 - \frac{y}{4},\ \mu_{\tilde{B}_2}(y) = \frac{y}{4}$$







Переменные x и y принимают нечеткие значения

Число z является суммой чисел x и y и может принимать нечеткие значения из множеств

$\tilde{C}_1 =$ "малое число в пределах от 0 до 8"

$\tilde{C}_2 =$ "среднее число в пределах от 0 до 8"

$\tilde{C}_3 =$ "большое число в пределах от 0 до 8"

$$\mu_{\tilde{C}_1}(z) = 1 - \frac{z}{8},\ \mu_{\tilde{C}_2}(z) = \begin{cases} \frac{z}{4}, 0 \le z < 4, \\ 2 - \frac{z}{4}, 4 \le z < 8,, \\ 0, \textit{иначе} \end{cases}\ \mu_{\tilde{C}_3}(z) = \frac{z}{8}$$

База правил z=x+y

R_1 : Если $x = \tilde{A}_1$ и $y = \tilde{B}_1$ то $z = \tilde{C}_1$

R_2 : Если $x = \tilde{A}_1$ и $y = \tilde{B}_2$ то $z = \tilde{C}_2$

R_3 : Если $x = \tilde{A}_2$ и $y = \tilde{B}_1$ то $z = \tilde{C}_2$

R_4 : Если $x = \tilde{A}_2$ и $y = \tilde{B}_2$ то $z = \tilde{C}_3$

Правила R_2 и R_3 можно объединить.

Тогда

R_1 : Если $x = \tilde{A}_1$ и $y = \tilde{B}_1$ то $z = \tilde{C}_1$

R_2 : Если $x = \tilde{A}_1$ и $y = \tilde{B}_2$ или $x = \tilde{A}_2$ и $y = \tilde{B}_1$ то $z = \tilde{C}_2$

R_3 : Если $x = \tilde{A}_2$ и $y = \tilde{B}_2$ то $z = \tilde{C}_3$

Пусть на вход подаются значения переменных x=1, y=3

1 этап. Фаззификация

$\mu_{\tilde{A}_1}(x=1) = 3/4$, $\mu_{\tilde{A}_2}(x=1) = 1/4$, $\mu_{\tilde{B}_1}(y=3) = 1/4$, $\mu_{\tilde{B}_2}(y=3) = 3/4$

2 этап.

вычисление степеней выполнения отдельных правил (точнее, их условий)

$\mu_{\tilde{A}_1 \cap \tilde{B}_1}(x,y) = \min\{3/4;1/4\} = 1/4$

$\mu_{\tilde{A}_1 \cap \tilde{B}_2}(x,y) = \min\{3/4;3/4\} = 3/4$

$\mu_{\tilde{A}_2 \cap \tilde{B}_1}(x,y) = \min\{1/4;1/4\} = 1/4$

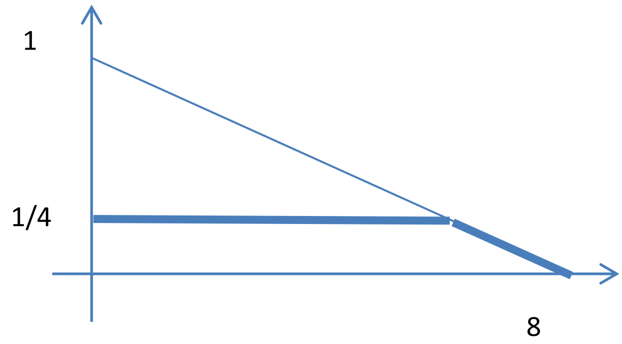
$\mu_{\tilde{A}_2 \cap \tilde{B}_2}(x,y) = \min\{1/4;3/4\} = 1/4$

$\mu_{\tilde{A}_1 \cap \tilde{B}_2 \cup \tilde{A}_2 \cap \tilde{B}_1}(x,y) = \max\{3/4;1/4\} = 3/4$

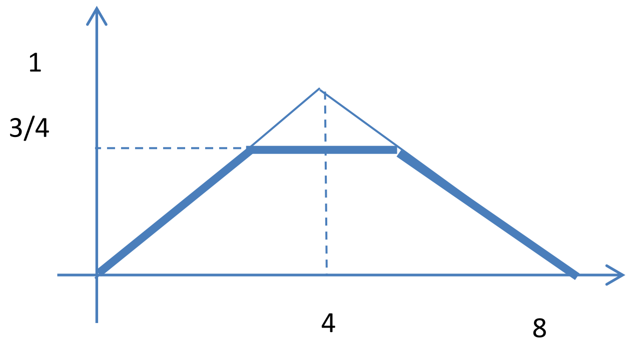
Определение модифицированных функций принадлежности заключений отдельных правил

с использованием импликации Мамдани и метода 2

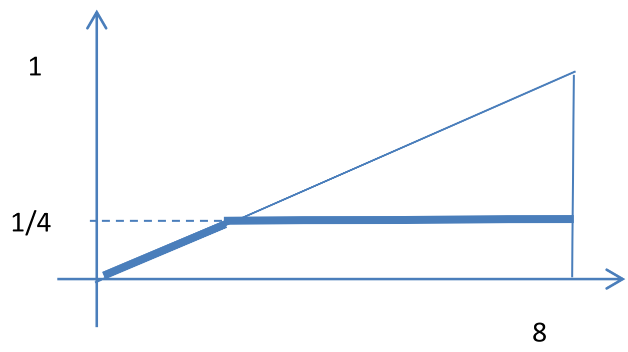
$R_1 : \mu_{C_1^*}(z) = \min\{1/4; \mu_{\tilde{C}_1}(z)\}$



$$R_2 : \mu_{C_2^*}(z) = \min\{3/4; \mu_{\tilde{C}_2}(z)\}$$

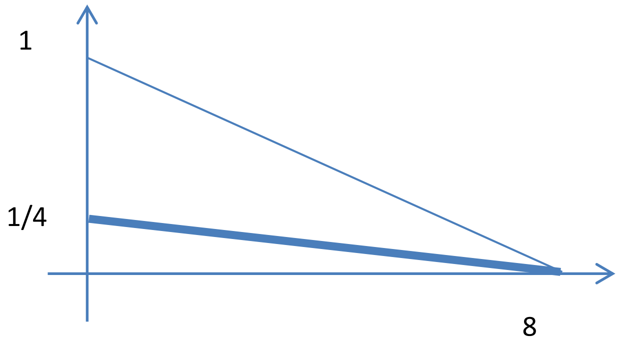


$$R_3 : \mu_{C_3^*}(z) = \min\{1/4; \mu_{\tilde{C}_3}(z)\}$$

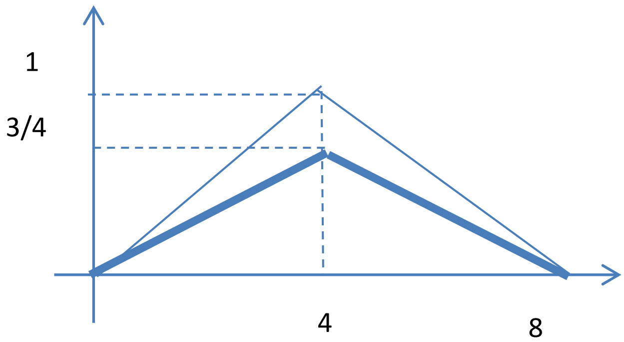


С использованием импликации PROD

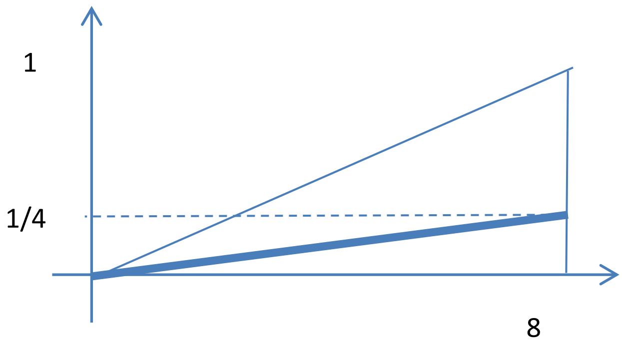
$$R_1 : \mu_{C_1^*}(x, y) = 1/4 \cdot \mu_{\tilde{C}_1}(z)$$



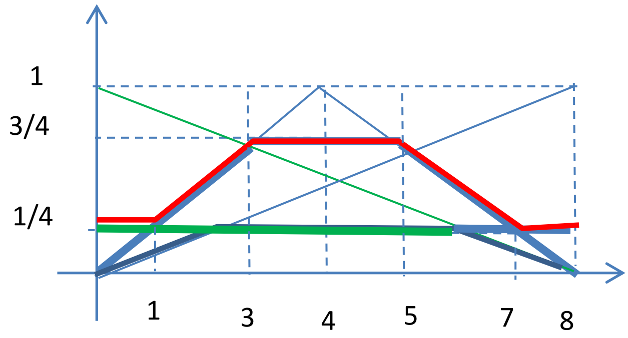
$$R_2 : \mu_{C_2^*}(z) = 3/4 \cdot \mu_{\tilde{C}_2}(z)$$



$$R_3 : \mu_{C_3^*}(z) = 1/4 \cdot \mu_{\tilde{C}_3}(z)$$



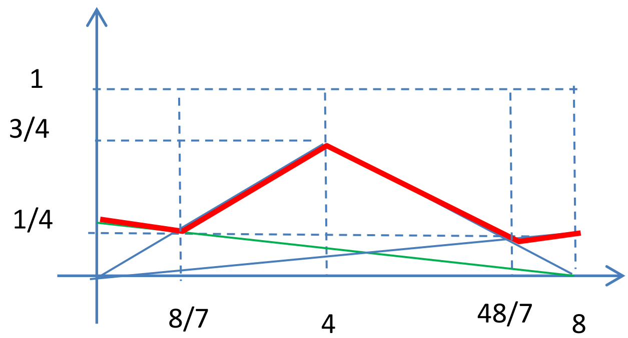
Определение результирующей функции принадлежности вывода из базы правил (maxmin)



Выделена красным цветом

$$\mu_{res} = \begin{cases} 1/4, & z \le 1, \\ z/8, & 1 \le z \le 3, \\ 3/4, & 3 \le z \le 5, \\ 2 - z/8, & 5 \le z \le 7, \\ 1/4, & z \ge 7, \end{cases}$$

Определение результирующей функции принадлежности вывода из базы правил (maxprod)



$$\mu_{res} = \begin{cases} 1/4 - z/32, & z \le 8/7, \\ 3/4 * z/4, & 8/7 \le z \le 4, \\ 3/4 * (2 - z/4), & 4 \le z \le 48/7, \\ 1/4 * z/8, & 48/7 \le z \le 8, \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

2.Дискретизация нечетких множеств

На практике исходные непрерывные нечеткие множества дискретизируют. Чем меньше интервал разбиения, тем более точный будет вывод.

Пример:
Дано

Таблица 5.4
Дискретное нечеткое множество A_1

x	0	0.4	0.8	1.0	1.4	1.8	2.0
$\mu_{A_1}(x)$	1.0	0.8	0.6	0.5	0.3	0.1	0

Таблица 5.5
Дискретное нечеткое множество A_2

x	0	0.4	0.8	1.0	1.4	1.8	2.0
$\mu_{A_1}(x)$	0	0.2	0.4	0.5	0.7	0.9	1.0

Таблица 5.6
Дискретное нечеткое множество B_1

y	0	0.8	1.6	2.0	2.8	3.6	4.0
$\mu_{B_1}(y)$	1.0	0.8	0.6	0.5	0.3	0.1	0

Таблица 5.7
Дискретное нечеткое множество B_2

y	0	0.8	1.6	2.0	2.8	3.6	4.0
$\mu_{B_2}(y)$	0	0.2	0.4	0.5	0.7	0.9	1.0

База правил

$R1:$ ЕСЛИ $(x = A_1)$ ТО $(y = B_1)$,
$R2:$ ЕСЛИ $(x = A_2)$ ТО $(y = B_2)$.

Используя максиминную процедуру вывода, найти результирующую функцию принадлежности $\mu_{res}(y)$ вывода из базы правил для входного сигнала $x = x^* = 1.4$.

Решение:

1 этап. ***Фаззификация***

$\mu_{\tilde{A}_1}(x = 1{,}4) = 0{,}3,\ \mu_{\tilde{A}_2}(x = 1{,}4) = 0{,}7.$

2 этап.

вычисление степеней выполнения отдельных правил (точнее, их условий)

$\mu_{\tilde{A}_1}(x) = 0{,}3$, $\mu_{\tilde{A}_2}(x) = 0{,}7$

Определение модифицированных функций принадлежности заключений отдельных правил

с использованием импликации Мамдани и метода 2

$R_1 : \mu_{B_1^*}(y) = \min\{\mu_{A_1}; \mu_{B_1}(y)\} = \min\{0.3; \mu_{B_1}(y)\}$

y	0	0.8	1.6	2.0	2.8	3.6	4.0

$\mu_{B_1^*}(y)$	min(0.3;1)=0.3	min(0.3;0.8)=0.3	0.3	0.3	0.3	0.1	0

$$R_2 : \mu_{B_2^*}(y) = \min\{\mu_{A_2}; \mu_{B_2}(y)\} = \min\{0.7; \mu_{B_2}(y)\}$$

y	0	0.8	1.6	2.0	2.8	3.6	4.0
$\mu_{B_2^*}(y)$	min(0.7;0)=0	min(0.7;0.2)=0.2	0.4	0.5	0.7	0.7	0.7

Результирующая функция принадлежности $\mu_{res}(y)$ вывода (заключения) из базы правил

y	0	0.8	1.6	2.0	2.8	3.6	4.0
$\mu_{res}(y)$	max(0.3;0)=0.3	max(0.3;0.2)=0.3	0.4	0.5	0.7	0.7	0.7

Задание: решить этот пример с использованием PROD и метода 2.

3.Случай, когда входной сигнал нечеткий

Случай, когда входная переменная представляет собой нечеткую переменную A^*, отличную от множества А, которое стоит в условии правила ЕСЛИ (х = А).

1 способ (более сложный):

Если в качестве входного значения х∗ выступает нечеткое множество А*, отличное от множества А в посылке правила:

ЕСЛИ (х = А) ТО (у = В),

то модифицированная (активизированная) функция принадлежности $\mu_{B^*}(y)$ заключения может быть определена на основе композиционного правила вывода Заде:

Определение. Пусть А* — нечеткое множество с областью определения X, и R — нечеткое отношение двух аргументов, заданное на области определения X×Y (*R* в нашем случае импликация $A \to B$). Результатом композиции А* и R (обозначается А*∘R) является нечеткое множество В* с областью определения Y и функцией принадлежности $\mu_{B^*}(y)$, имеющей вид:

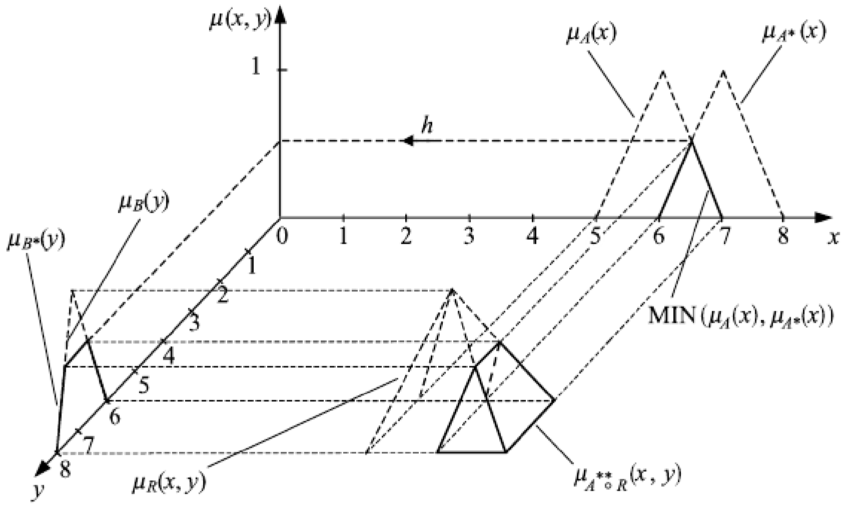
$$A^* \circ R = \mu_{B^*}(y) = \max\left(\min\left(\mu_{A^{**}}(x,y), \mu_R(x,y)\right)\right)$$

$$\text{или } A^* \circ (A \to B) = \max\left(\min\left(\mu_{A^{**}}(x,y), \mu_{A \to B}(x,y)\right)\right) \qquad (**)$$

где А** (х,у) — цилиндрическое продолжение множества А*(х) на область определения X×Y .

С помощью max находится проекция пересечения А** (х,у) и R на Y. То есть последовательность шагов здесь: найти пересечение цилиндрического продолжения A* на X×Y с отношением R, а затем проекцию этого пересечения на Y.

Схема построения модифицированной функции принадлежности $\mu_{B*}(y)$ изображена на рисунке:



$h = \underset{x \in X}{\mathrm{MAX}}\ \mathrm{MIN}\,(\mu_A(x),\ \mu_{A*}(x))$

Пример:

Дискретная функция принадлежности множества-условия A

x	5	5.5	6	6.5	7
$\mu_A(x)$	0	0.5	1	0.5	0

Дискретная функция принадлежности множества-заключения B

y	6	6.5	7	7.5	8
$\mu_B(y)$	0	0.5	1	0.5	0

Правило R: Если x=A то Y=B.

Пусть x*=A*

x	5	5.5	6	6.5	7
μ_{A*}(x)	0	0.3	0.8	1	0.5

Определим R: X×Y->[0,1]

X/Y	**6**	**6.5**	**7**	**7.5**	**8**
5	0	0	0	0	0
5.5	0	0.5	0.5	0.5	0
6	0	0.5	1	0.5	0
6.5	0	0.5	0.5	0.5	0
7	0	0	0	0	0

Найдем композицию по формуле (**)

Цилиндрическое продолжение множества A* на X×Y

$$A^{**}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3\\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\end{pmatrix},$$

тогда

$$\min\left(\mu_{A^{**}}(x,y),\mu_R(x,y)\right)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}5 & 0\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

Теперь найдем проекцию на Y, для этого определяем максимум по каждому столбцу, получаем

$$\mu_{B^*}(y)=\left(6/0 \quad 6{,}5/0{,}5 \quad 7/0{,}8 \quad 7{,}5/0{,}5 \quad 8/0\right).$$

2 способ: Тот же результат может быть получен путем умножения нечеткого множества A* на R (где операция умножения заменяется на min, а сложения на max).

Пример:

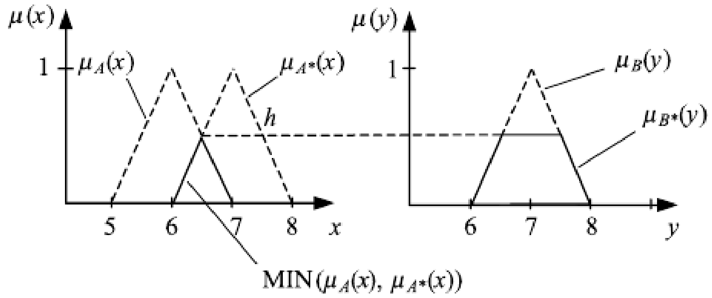
$$A^*\circ R=\left(0 \quad 0.3 \quad 0.8 \quad 1 \quad 0.5\right)\circ\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\left(0\; 0.5\; 0.8\; 0.5\; 0\right).$$

Получаем $\mu_{B^*}(y)=\left(6/0 \quad 6{,}5/0{,}5 \quad 7/0{,}8 \quad 7{,}5/0{,}5 \quad 8/0\right).$

3 способ (упрощенный): Проекция композиции A* ∘ R на область определения Y приводит к получению модифицированного нечеткого множества B*, которое соответствует заключению правила. Функция принадлежности $\mu_{B^*}(y)$ этого множества имеет вид

$$h=\max_{x\in X}\min\left(\mu_A(x),\mu_{A^*}(x)\right) \qquad (*)$$

и представляет собой функцию $\mu_B(y)$, высота которой ограничена значением h, выражающим степень выполнения условия (*). Это можно использовать для упрощенного метода вывода:



По 3-му способу (упрощенному):

$\max(\min(\mu_A(x), \mu_{A^*}(x))) = \max(0\ 0.3\ 0.8\ 0.5\ 0) = 0.8$.

Тогда $B^* = \{6/0; 6.5/0.5; 7/0.8; 7.5/0.5; 8/0\}$.

Замечание:

В случае, когда в обобщенном правиле Modus Ponens (GMP) используется для реализации «И» не min, а любая другая T-норма, правило (**) можно записать так

$$A^* \circ (A \to B) = \mu_{B^*}(y) = \max\left(T\left(\mu_{A^{**}}(x,y),\ \mu_{A\to B}(x,y)\right)\right).$$

Задание:

Пусть система содержит две входных переменных: x – число выпитых чашек кофе в день, y – время отхода ко сну. Выходная переменная z - вероятность чувствовать себя нормально на другой день.

Возможные значения переменной x: A_1-мало чашек кофе в день, A_2 – много чашек кофе в день.

Возможные значения переменной y: B_1- укладываться спать рано, B_2- укладываться спать поздно.

Выходные нечеткие множества (значения переменной z):

C_1 – чувствовать себя хорошо на следующий день, C_2 – чувствовать себя нормально на следующий день, C_3 – чувствовать себя плохо на следующий день.

Составить систему правил, для входов x=A* – выпить не очень много чашек за день, y=B* – лечь спать не очень поздно, определить, что будет на выходе системы. Воспользоваться максиминной процедурой вывода.