Лабораторное занятие 5
Нечеткие отношения. Операции над нечеткими отношениями

Прямое (декартово) произведение нечетких множеств

Пусть $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, …, $\tilde{A}_n$ - нечеткие подмножества универсальных множеств X_1, X_2, …, X_n соответственно. **Прямое (декартово) произведение** $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \ldots \times \tilde{A}_n$ является нечетким подмножеством множества $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), \ldots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)),$$ для всех $x \in X$.

Понятие нечеткого отношения

До этого в качестве области определения операций над нечеткими множествами рассматривалось одномерное пространство, например, множество студентов и понятия «Успевающий студент» и «Способный студент»:

X — множество студентов:

$$X = \{s_1, s_2, \ldots, s_5\}.$$

A_1 — подмножество способных студентов:

$$A_1 = \{(s_1, 0), (s_2, 0.3), (s_3, 0.7), (s_4, 1), (s_5, 1)\}.$$

A_2 — подмножество успевающих студентов:

$$A_2 = \{(s_1, 0.5), (s_2, 0.8), (s_3, 1), (s_4, 1), (s_5, 0.7)\}.$$

Требуется определить множество способных и успевающих студентов

$$A_1 \wedge A_2 = \{(s_i, \mathrm{MIN}(\mu_{A_1}(s_i), \mu_{A_2}(s_i))\} = \\ = \{(s_1, 0), (s_2, 0.3), (s_3, 0.7), (s_4, 1), (s_5, 0.7)\}.$$

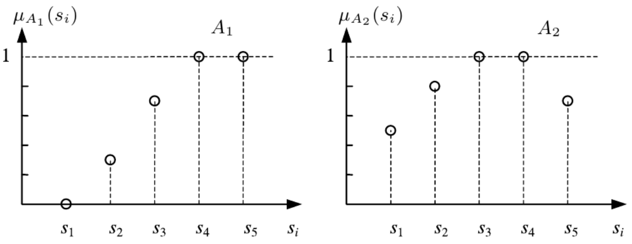


Рис. 4.18. Функции принадлежности подмножеств A_1 (способные студенты) и A_2 (успевающие студенты)

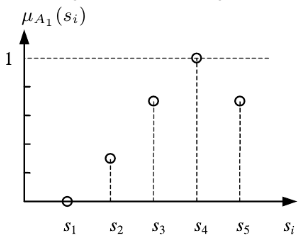


Рис. 4.19. Функция принадлежности множества $A_1 \wedge A_2$

Помимо одномерных, существуют многомерные области определения, являющиеся декартовым произведением X некоторого числа составляющих их областей $X_1,...,X_n$.

Пример

X1 — множество граждан, X1 = {c1,c2,...,c5}.

X2 — множество банков, X2 = {b1,b2,...,b5}.

Классическое (двухместное или бинарное) отношение — одно из важнейших понятий математической логики — является свойством пар объектов и описывает определенную взаимосвязь, имеющую место между объектами.

Например, можно задать отношение на множестве X = X1 × X2: гражданин имеет вклад в банке. Оно может быть таким

R = {(c1,b2), (c3,b4), (c4,b1), (c5,b3)}.

или заданным в виде матрицы

R	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
b_1	0	0	0	1	0
b_2	1	0	0	0	0
b_3	0	0	0	0	1
b_4	0	0	1	0	0
b_5	0	0	0	0	0

Здесь область определения отношения – это подмножество декартова произведения двух множеств.

Отношение в этом примере является дискретным.

Отношение может быть непрерывным

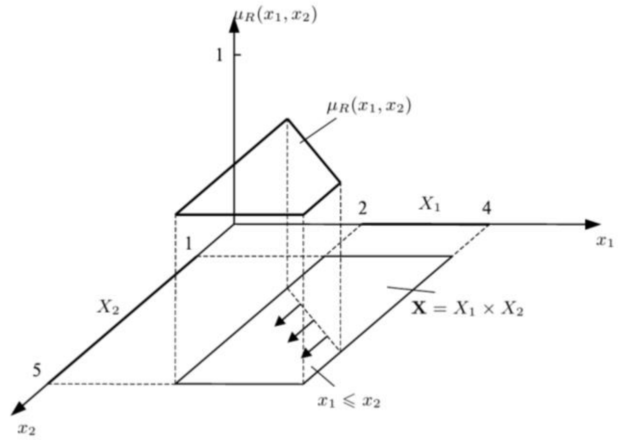
Пусть даны два множества вещественных чисел X1,X2:

X1 = {x1 :2≤ x1 ≤ 4},

X2 = {x2 :1≤ x2 ≤ 5}.

Отношение «меньше либо равно», или «≤», заданное на декартовом произведении X = X1 × X2:

R = {(x1,x2):x1 ≤ x2}. **СНАЧАЛА ИЗОБРАЗИТЬ НА ПЛОСКОСТИ!**



Опр. Классическим n-арным отношением R, заданным на области определения X = $X_1 \times ... \times X_n$, называется упорядоченное множество кортежей из n элементов, имеющее вид:

$$R = \{((x_1, x_2, ..., x_n), \mu_R(x_1, x_2, ..., x_n)) \mid (x_1, x_2, ..., x_n) \in X\},$$

где

$$\mu_R(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1, & если (x_1, x_2, ..., x_n) \in R, \\ 0, & иначе \end{cases}$$

представляет собой функцию принадлежности отношения R.

Функция принадлежности классического отношения отображает область определения X на дискретное множество $\{0,1\}$:

$$\mu_R : X_1 \times ... \times X_n \to \{0, 1\}$$

Нечеткое отношение отличается от классического тем, что в качестве области значений функции принадлежности, вместо дискретного множества $\{0,1\}$, содержащего два элемента, рассматривается непрерывный интервал [0, 1].

Опр. Нечетким n-арным отношением R, заданным на области определения X = $X_1 \times ... \times X_n$, называется упорядоченное множество кортежей из *n* элементов, имеющее вид

$$\tilde{R} = \{((x_1, x_2, ..., x_n), \mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, ..., x_n)) \mid (x_1, x_2, ..., x_n) \in X\},$$

где

$$\mu_{\tilde{R}} : X_1 \times ... \times X_n \to [0, 1]$$

представляет собой функцию принадлежности отношения $\tilde{R}$, которая отображает область определения X на непрерывный интервал [0,1].

Пример:

Пусть функция $y = x^2$ задает обычное четкое отношение R на множестве цифр, $X \times Y$, где $X = Y = \{0, 1, \ldots, 9\}$, т.е. $(0, 0) \in R$; $(1, 1) \in R$; $(2, 4) \in R$; $(3, 9) \in R$.

Требуется задать нечеткое отношение $\tilde{R}$, определяемое выражением «функция приблизительно равна квадрату аргумента».

Задание

Задать на декартовом множестве $\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\}$ отношение: «Число х немного меньше числа у».

Рассмотрим теперь случай, когда на четких множествах X_1 и X_2 заданы нечеткие множества $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$. Как в этом случае задать нечеткое отношение?

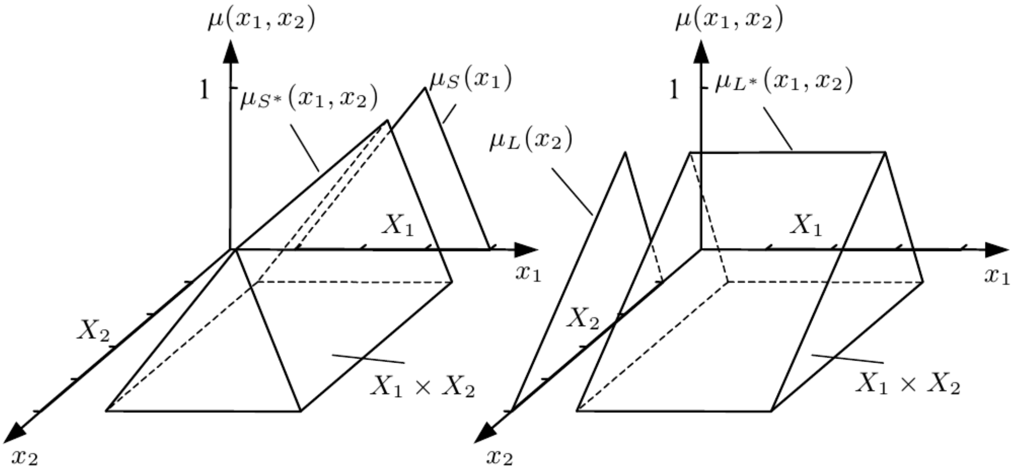
Опр.: Цилиндрическими продолжениями проекций нечетких множеств $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ на $X_1 \times X_2$ называются соответственно нечеткие отношения $\tilde{A}_{1Ц}(x_1, x_2)$ и $\tilde{A}_{2Ц}(x_1, x_2)$, функции принадлежности которых имеют вид

$\mu_{\tilde{A}_{1Ц}}(x_1, x_2) = \mu_{\tilde{A}_1}(x_1)$ для всех $x_2 \in X_2$

и

$\mu_{\tilde{A}_{2Ц}}(x_1, x_2) = \mu_{\tilde{A}_2}(x_2)$ для всех $x_1 \in X_1$

Графическая иллюстрация понятия цилиндрического отношения показана на рисунках.



Пример:

$$\tilde{A}_1 = \{1/0;2/0.5;3/1;4/0\}, \quad \tilde{A}_2 = \left\{2/0;3/1;4/\frac{2}{3};5/\frac{1}{3};6/0\right\}, \quad X_1 = \{1;2;3;4\},$$

$X_2 = \{2;3;4;5;6\}$

Цилиндрическое продолжение $\tilde{A}_1$ на $X_1 \times X_2$ имеет вид, показанный в таблице

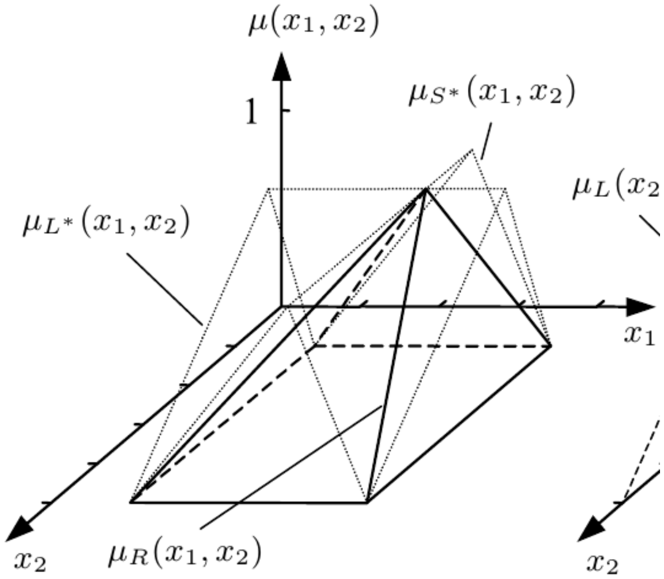
Цилиндрическое продолжение $\tilde{A}_1$ на $X_1 \times X_2$

	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0
2	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
3	1	1	1	1	1
4	0	0	0	0	0

Цилиндрическое продолжение проекции $\tilde{A}_2$ **на** $X_1 \times X_2$.

	2	3	4	5	6
1	0	1	2/3	1/3	0
2	0	1	2/3	1/3	0
3	0	1	2/3	1/3	0
4	0	1	2/3	1/3	0

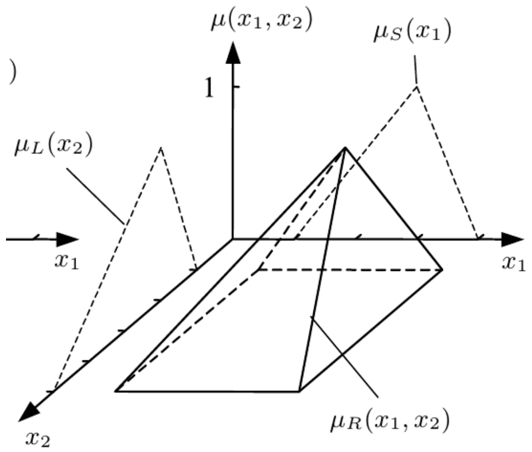
Пример 2: Нарисовать рисунок в случае, если эти два множества непрерывные (заданы треугольной функцией принадлежности).



Далее, например, можно определить отношения «И» и «ИЛИ» на этих двух множествах с помощью цилиндрических продолжений.

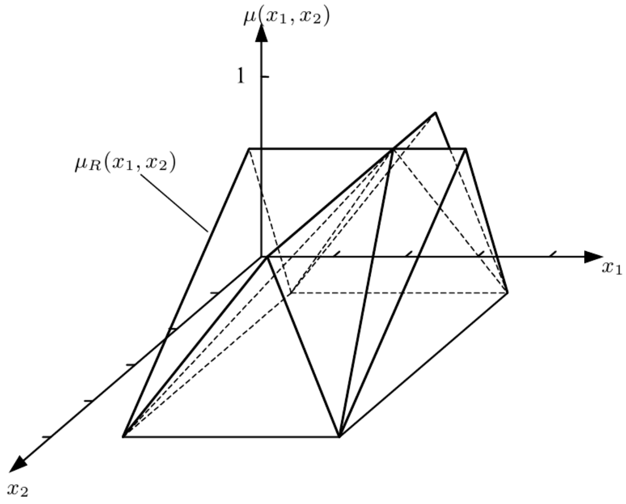
Функция принадлежности для отношения «И» может быть задана как

$$\mu_R(x_1, x_2) = MIN\left(\mu_{\tilde{A}_{1Ц}}(x_1, x_2), \mu_{\tilde{A}_{2Ц}}(x_1, x_2)\right), \quad (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$$



Функция принадлежности для отношения «ИЛИ» может быть задана как

$$\mu_R(x_1, x_2) = MAX\left(\mu_{\tilde{A}_{1Ц}}(x_1, x_2), \mu_{\tilde{A}_{2Ц}}(x_1, x_2)\right), \quad (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$$



Задание: Найти отношения двух нечетких множеств: ***Пить много кофе в день (чашек)*** **И** ***поздно ложиться*** в случае задания их в дискретном виде и непрерывном.

Операции над отношениями. Операция композиции отношений.

Над самими нечеткими отношениями также можно производить операции.

Наиболее употребляемыми являются операции объединения и пересечения. Будем рассматривать два нечетких отношения $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$, у которых одна и та же область определения $X_1 \times X_2$.

Объединение этих отношений обозначается $\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$. Функция принадлежности объединения определяется выражением

$$\mu_{\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2}(x_1, x_2) = \max\left(\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, x_2), \mu_{\tilde{R}_2}(x_1, x_2)\right) = \mu_{\tilde{R}_1}(x_1, x_2) \vee \mu_{\tilde{R}_2}(x_1, x_2).$$

Пример:

Пусть отношения $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ заданы таблицами 1 и 2 соответственно

Тогда объединение этих отношений представлено таблицей 3.

Таблица 1

$\tilde{R}_1$			
	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0	0,8
x_2	1	0,7	0

Таблица 2

$\tilde{R}_2$			
	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,9	1
x_2	0,3	0,4	0,5

Таблица 3

$\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$			
	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,9	1
x_2	1	0,7	0,5

Пересечение двух отношение $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ обозначается $\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$. Функция принадлежности пересечения определяется выражением

$$\mu_{\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2}(x, y) = \min\left(\mu_{\tilde{R}_1}(x, y), \mu_{\tilde{R}_2}(x, y)\right) = \mu_{\tilde{R}_1}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(x, y)$$

Так для приведенного примера пересечение отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ иллюстрируется таблицей 4.

Таблица 4

$\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$			
	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0	0,8
x_2	0,3	0,4	0

В нечетких моделях также применяется операция, противоположная цилиндрическому продолжению. Она называется проекцией отношения.

Проекция бинарного нечеткого отношения на множество *X₁* есть нечеткое подмножество $\widetilde{R}_{X_1}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{R}_{X1}}(x_1) = \max_{x_2} \mu_{\widetilde{R}}(x_1, x_2), \quad \forall x_1 \in X_1, .$$

Проекция бинарного нечеткого отношения на множество X_2 есть нечеткое подмножество $\widetilde{R}_{X_2}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{R}_{X_2}}(x_2) = \max_{x_1} \mu_{\widetilde{R}}(x_1, x_2), \quad \forall x_2 \in X_2, \text{ при } j = 1,..,n.$$

Проекция бинарного нечеткого отношения есть обычное нечеткое множество.

Большое значение в нечетком (fuzzy) логическом выводе имеет **операция композиции двух нечетких отношений**. Пусть $\widetilde{R}_1$ - нечеткое отношение $\widetilde{R}_1 : (X \times Y) \to [0, 1]$ и $\widetilde{R}_2$-нечеткое отношение $\widetilde{R}_2 : (Y \times Z) \to [0, 1]$. Тогда нечеткое отношение между X и Z, обозначаемое $\widetilde{R}_1 \bullet \widetilde{R}_2$, определенное следующим выражением

$$\mu_{\widetilde{R}_1 \bullet \widetilde{R}_2}(x, z) = \max_y \left[\min(\mu_{\widetilde{R}_1}(x, y), \mu_{\widetilde{R}_2}(y, z))\right]$$

называется **(max-min)-композицией** отношений $\widetilde{R}_1$ и $\widetilde{R}_2$.

Пример:

Пусть два отношения $\widetilde{R}_1$и $\widetilde{R}_2$, заданы соответственно в таблицах 5 и 6.

Таблица 5

$\widetilde{R}_1$			
	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,7	0,4
x_2	1	0,5	0

Таблица 6

$\widetilde{R}_2$				
	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0	0,9
y_3	0,1	1	0	0,5

Тогда их композиция $\widetilde{R}_1 \bullet \widetilde{R}_2$ представлена в таблице 7.

Таблица 7

$\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2$				
	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,3	0,6	0,1	0,7
x_2	0,9	0,5	1	0,5

Если таблицы отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ двумерные (матрицы) или одномерные (вектора), то вычисление элементов таблицы композиции этих отношений можно производить по правилам перемножения матриц, заменяя операции умножения и сложения на соответствующие операции пересечения ($\wedge$) и объединения ($\vee$). Так в примере вычисление первого элемента таблицы композиции производится следующим образом

$$\mu_{\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2}(x_1, z_1) = [\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_1) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y_1, z_1)] \vee [\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_2) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y_2, z_1)] \vee$$
$$[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_3) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y_3, z_1)] =$$
$$= (0{,}1 \wedge 0{,}9) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}3) \vee (0{,}4 \wedge 0{,}1) = 0{,}1 \vee 0{,}3 \vee 0{,}1 = 0{,}3$$

Задание.

Рассмотрим типичную ситуацию, связанную с консалтингом в области выбора профессии для последующего обучения и получения соответствующей специальности. С этой целью построим нечеткую модель, основанную на двух бинарных нечетких отношениях R_1 и R_2. Первое из этих нечетких отношений строится на двух базисных множествах X и Y, а второе на двух базисных множествах Y и Z. Здесь X описывает множество специальностей, по которым проводится набор на обучение, Y множество психо-физиологических характеристик, а Z множество кандидатов на обучение. В интересуемом нас контексте нечеткое отношение R_1 содержательно описывает психофизиологическое профилирование специальностей, а R_2 психофизиологическое профилирование кандидатов на обучение.

Пусть X={X_l, X_2, X_3, X_4, X_5}, Y={Y_I, $У_2$, $У_3$, $У_4$, $У_5$, $У_6$, $У_7$} и Z={Z_I, Z_2, Z_3, Z_4}. Элементы универсумов имеют следующий содержательный смысл:

X_1 - "менеджер", X_2 - "программист", X_3 - "водитель", X_4 - "секретарь-референт", X5 - "переводчик";

Y_1 - "быстрота и гибкость мышления", Y_2 - "умение быстро принимать решения", Y_3 - "устойчивость и концентрация внимания", Y_4 - "зрительная память", Y_5 - "быстрота реакции", Y_6 - "двигательная память", Y_7 - "физическая выносливость", (Y8 - "координация движений", Y_9 - "эмоционально-волевая устойчивость",Y10 - "ответственность";)

ZI -"Петров", Z2 - "Иванов", Z3 - "Сидоров", Z4 - "Васильева", Z5 - “Григорьева" .

Таблица 4.4. *Нечеткое отношение $\mathcal{S}$ профилирования специальностей обучения*

	Быстрота и гибкость мышления	**Умение быстро принимать решения**	**Устойчивость и концентрация внимания**	**Зрительная память**	**Быстрота реакции**
Менеджер	0.9	0.9	0.8	0.4	0.5
Программист	0.8	0.5	0.9	0.3	0.1
Водитель	0.3	0.9	0.6	0.5	0.9
Секретарь	0.5	0.4	0.5	0.5	0.2
Переводчик	0.7	0.8	0.8	0.2	0.6
	Двигательная память	**Физическая выносливость**	**Координация движений**	**Эмоционально-волевая устойчивость**	**Ответственность**
Менеджер	0.3	0.6	0.2	0.9	0.8
Программист	0.2	0.2	0.2	0.5	0.5
Водитель	0.8	0.9	0.8	0.6	0.3
Секретарь	0.2	0.3	0.3	0.9	0.8
Переводчик	0.2	0.2	0.3	0.3	0.2

Таблица 4.5. *Нечеткое отношение $\mathcal{T}$ профилирования кандидатов на обучение*

	Петров	**Иванов**	**Сидоров**	**Васильева**	**Григорьева**
Быстрота и гибкость мышления	0.9	0.8	0.7	0.9	1
Умение быстро принимать решения	0.6	0.4	0.8	0.5	0.6
Устойчивость и концентрация внимания	0.5	0.2	0.3	0.8	0.7
Зрительная память	0.5	0.9	0.5	0.8	0.4

	Петров	Иванов	Сидоров	Васильева	Григорьева
Быстрота реакции	1	0.6	0.5	0.7	0.4
Двигательная память	0.4	0.5	1	0.7	0.8
Физическая выносливость	0.5	0.8	0.9	0.5	0.4
Координация движений	0.5	0.6	0.7	0.6	0.5
Эмоционально-волевая устойчивость	0.8	1	0.2	0.5	0.6
Ответственность	0.3	0.5	0.9	0.6	0.8

Найти композицию отношений.

Отношение импликации

Импликацией называется вид отношения, имеющего форму правила, используемого при рассуждениях. Различают классическую и нечеткую импликации.

Классическая импликация выражается с помощью соотношения

ЕСЛИ p ТО q.

Сокращенная ее форма имеет вид:

$$p \to q,$$

где p — утверждение, называемое антецедентом (условием),

q — утверждение, называемое консеквентом (заключением, результатом).

Таблица истинности для отношения импликации

p	q	p→q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Как легко убедиться, функция принадлежности классической импликации может быть вычислена по формуле

$$\mu_{p\to q} = \mathrm{MAX}(1 - \mu_p, \mu_q).$$

ПРОВЕРИТЬ!

Нечеткая импликация

Нечеткая импликация представляет собой отношение R, простейшая форма которого выражается в виде:

ЕСЛИ (x = A) ТО (y = B),

где (x = A) — условие (антецедент), а (y = B) — заключение (консеквент).

Здесь A и B — нечеткие множества, заданные своими функциями принадлежности $\mu_{A(x)}$, $\mu_{B(y)}$ и областями определения X, Y соответственно. Обозначение нечеткой импликации имеет вид:

$$A \to B.$$

Различие между классической и нечеткой импликацией состоит в том, что в случае классической импликации условие и заключение могут быть либо абсолютно истинными, либо абсолютно ложными, в то время как для нечеткой импликации допускается их частичная истинность, со значением, принадлежащим непрерывному интервалу [0,1]. Такой подход имеет ряд преимуществ, поскольку на практике редко встречаются ситуации, когда условия правил удовлетворяются полностью, и по этой причине нельзя полагать, что заключение абсолютно истинно.

Как и любое другое нечеткое отношение, нечеткая импликация задается функцией принадлежности $\mu_{A\to B}(x,y)$, область определения которой является декартовым произведением $X \times Y$ соответствующих областей условия и заключения.

Оператор импликации Мамдани основан на предположении, что степень истинности заключения $\mu_B(y)$ не может быть выше, чем степень выполнения условия $\mu_A(x)$:

$$\mu_{A\to B}(x,y)=MIN(\mu_A(x),\mu_B(y)).$$

Интуитивно такое предположение вполне понятно. Например, для правила

ЕСЛИ (состояние автомобиля = новый) ТО (расход топлива = малый)

вполне очевидно, что если автомобиль не является абсолютно новым, то расход топлива у него не может быть таким же низким, как у абсолютно нового автомобиля. В дополнение к оператору Мамдани, в нечетком управлении также используется оператор алгебраического произведения

PROD: $\mu_{A\to B}(x,y)=\mu_A(x) *\cdot\ \mu_B(y)$.

Помимо представленных выше операторов нечеткой импликации, исследовано также множество других операторов, результаты применения которых зависят от конкретной задачи. Данные операторы приведены в таблице.

Согласно результатам исследований, оператором, имеющим наилучшие характеристики по определенному набору критериев, является оператор Лукасевича. Остальные операторы, приведенные в таблице, упорядочены по убыванию степени удовлетворения этим критериям.

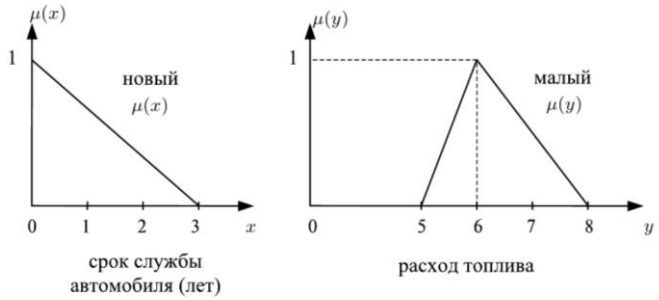
Операторы нечеткой импликации

импликация Лукасевича	$\text{MIN}(1,\, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y))$
импликация Клини—Динса	$\text{MAX}(1 - \mu_A(x),\, \mu_B(y))$
импликация Клини—Динса—Лукасевича	$1 - \mu_A(x) + \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$
импликация Гёделя	$\begin{cases} 1 & \text{для } \mu_A(x) \leqslant \mu_B(y) \\ \mu_B(y) & \text{в других случаях} \end{cases}$
импликация Ягера	$(\mu_A(x))^{\mu_B(y)}$
импликация Заде	$\text{MAX}(1 - \mu_A(x),\, \text{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(y)))$

Пример. Рассмотрим нечеткую импликацию:

ЕСЛИ (состояние автомобиля x = новый) ТО (расход топлива y = малый),

где нечеткие множества «новый» и «малый» заданы функциями принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(y)$, представленными на рисунке.



Функция принадлежности импликации представлена на рисунке.