

**Выполнил:** Тимошинов Егор Борисович

**Группа:** 16

## Лабораторная работа 7

### Модель Мамдани (часть 1)

#### Цель работы

Изучение модели Мамдани как одного из основных методов нечеткого логического вывода, понимание этапов её работы (фаззификация, активация правил, агрегация, дефаззификация) и практическое применение для решения задачи определения самочувствия на основе количества выпитого кофе и времени отхода ко сну.

#### Теоретические сведения

##### Модель Мамдани

Модель Мамдани — один из наиболее распространенных методов нечеткого логического вывода, предложенный Эбрахимом Мамдани в 1975 году. Данная модель использует нечеткие множества как в посылках (антецедентах), так и в заключениях (консеквентах) правил.

Модель Мамдани состоит из следующих этапов:

1. **Фаззификация:** преобразование четких входных значений в степени принадлежности нечетким множествам.
2. **Активация правил:** вычисление степени выполнения условий каждого правила с использованием Т-нормы (обычно MIN).
3. **Ограничение выходных множеств:** применение степени активации к выходным нечетким множествам (усечение).
4. **Агрегация:** объединение выходных множеств всех правил с использованием Т-конормы (обычно MAX).
5. **Дефаззификация:** преобразование результирующего нечеткого множества в четкое выходное значение.

##### Математическое описание

Рассмотрим систему нечетких правил:

$$R_1 : \text{ЕСЛИ } (x_1 = A_1) \text{ И } (x_2 = B_1) \text{ ТО } (y = C_1)$$

$$R_2 : \text{ЕСЛИ } (x_1 = A_2) \text{ И } (x_2 = B_2) \text{ ТО } (y = C_2)$$

...

##### Этап 1: Фаззификация

Для четких входных значений  $x_1^*$  и  $x_2^*$  вычисляются степени принадлежности:

$$\mu_{A_i}(x_1^*), \quad \mu_{B_j}(x_2^*)$$

## Этап 2: Активация правил

Степень активации правила вычисляется как минимум (Т-норма MIN) степеней принадлежности условий:

$$h_i = \min(\mu_{A_i}(x_1^*), \mu_{B_j}(x_2^*))$$

## Этап 3: Ограничение выходных множеств

Выходное нечеткое множество каждого правила ограничивается значением степени активации:

$$\mu_{C_i^*}(y) = \min(h_i, \mu_{C_i}(y))$$

## Этап 4: Агрегация

Резльтирующее выходное множество получается объединением всех ограниченных множеств с использованием максимума (Т-конорма MAX):

$$\mu_{res}(y) = \max(\mu_{C_1^*}(y), \mu_{C_2^*}(y), \dots, \mu_{C_n^*}(y))$$

## Этап 5: Дефаззификация

Наиболее распространенный метод дефаззификации — метод центра тяжести (центроид):

$$y^* = \frac{\int y \cdot \mu_{res}(y) dy}{\int \mu_{res}(y) dy}$$

В дискретном случае:

$$y^* = \frac{\sum_i y_i \cdot \mu_{res}(y_i)}{\sum_i \mu_{res}(y_i)}$$

## Практическая часть

### Задание: Определение самочувствия на основе количества кофе и времени отхода ко сну

#### Постановка задачи:

Разработать модель Мамдани для определения вероятности хорошего самочувствия на следующий день на основе двух входных переменных:

- $x$  — количество выпитых чашек кофе в день (диапазон: 0–6 чашек)
- $y$  — время отхода ко сну (диапазон: 20:00–02:00, представлено как 20–26)

#### Выходная переменная:

- $z$  — вероятность хорошего самочувствия на следующий день (диапазон: 0–1)

#### Нечеткие множества входных переменных

Для переменной  $x$  (количество чашек кофе):

- $A_1$  — мало чашек кофе:

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 - 0.5x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

- $A_2$  — много чашек кофе:

$$\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 0.5x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0.5x, & x > 2 \end{cases}$$

Для переменной  $y$  (время отхода ко сну):

- $B_1$  — рано ложиться спать (до 22:00):

$$\mu_{B_1}(y) = \begin{cases} 1 - 0.5 \frac{y-20}{2}, & 20 \leq y \leq 22 \\ 0, & y > 22 \end{cases}$$

- $B_2$  — поздно ложиться спать (после 22:00):

$$\mu_{B_2}(y) = \begin{cases} 0.5 \frac{y-20}{2}, & 20 \leq y \leq 22 \\ 0.5 \frac{y-20}{2}, & y > 22 \end{cases}$$

**Нечеткие множества выходной переменной**

Для переменной  $z$  (вероятность хорошего самочувствия):

- $C_1$  — чувствовать себя хорошо (трапециевидная функция с максимумом на  $[0.4, 0.6]$ )
- $C_2$  — чувствовать себя нормально (трапециевидная функция с максимумом на  $[0.4, 0.6]$ )
- $C_3$  — чувствовать себя плохо (убывающая функция с максимумом при  $z = 0$ )

**Система правил**

1.  $R_1$ : ЕСЛИ  $x = A_1$  (мало кофе) И  $y = B_1$  (рано) ТО  $z = C_1$  (хорошо)
2.  $R_2$ : ЕСЛИ  $x = A_1$  (мало кофе) И  $y = B_2$  (поздно) ТО  $z = C_2$  (нормально)
3.  $R_3$ : ЕСЛИ  $x = A_2$  (много кофе) И  $y = B_1$  (рано) ТО  $z = C_2$  (нормально)
4.  $R_4$ : ЕСЛИ  $x = A_2$  (много кофе) И  $y = B_2$  (поздно) ТО  $z = C_3$  (плохо)

**Решение**

Рассмотрим пример: выпито  $x^* = 1.5$  чашек кофе, отход ко сну в  $y^* = 21.5$  (21:30).

**Шаг 1: Фаззификация**

Вычисляем степени принадлежности входных значений:

- $\mu_{A_1}(1.5) = 1 - 0.5 \cdot 1.5 = 0.25$
- $\mu_{A_2}(1.5) = 0.5 \cdot 1.5 = 0.75$
- $\mu_{B_1}(21.5) = 1 - 0.5 \cdot \frac{21.5-20}{2} = 0.625$
- $\mu_{B_2}(21.5) = 0.5 \cdot \frac{21.5-20}{2} = 0.375$

**Шаг 2: Активация правил (MIN для условий)**

| Правило | Условие       | Степень активации $h_i$           |
|---------|---------------|-----------------------------------|
| $R_1$   | $A_1$ И $B_1$ | $h_1 = \min(0.25, 0.625) = 0.25$  |
| $R_2$   | $A_1$ И $B_2$ | $h_2 = \min(0.25, 0.375) = 0.25$  |
| $R_3$   | $A_2$ И $B_1$ | $h_3 = \min(0.75, 0.625) = 0.625$ |
| $R_4$   | $A_2$ И $B_2$ | $h_4 = \min(0.75, 0.375) = 0.375$ |

**Шаг 3: Ограничение выходных множеств**

Для каждого правила ограничиваем выходное множество значением степени активации:

- $\mu_{C_1^*}(z) = \min(0.25, \mu_{C_1}(z))$  для правила  $R_1$
- $\mu_{C_2^*}(z) = \min(0.25, \mu_{C_2}(z))$  для правила  $R_2$
- $\mu_{C_2^*}(z) = \min(0.625, \mu_{C_2}(z))$  для правила  $R_3$
- $\mu_{C_3^*}(z) = \min(0.375, \mu_{C_3}(z))$  для правила  $R_4$

**Шаг 4: Агрегация (МАХ для объединения)**

Результирующая функция принадлежности:

$$\mu_{res}(z) = \max(\min(0.25, \mu_{C_1}(z)), \min(0.25, \mu_{C_2}(z)), \min(0.625, \mu_{C_2}(z)), \min(0.375, \mu_{C_3}(z)))$$

**Шаг 5: Дефаззификация**

Используя метод центра тяжести (центроид), получаем четкое выходное значение  $z^*$ .

Графики входных нечетких множеств, процесса активации правил и результата агрегации представлены на следующих рисунках:

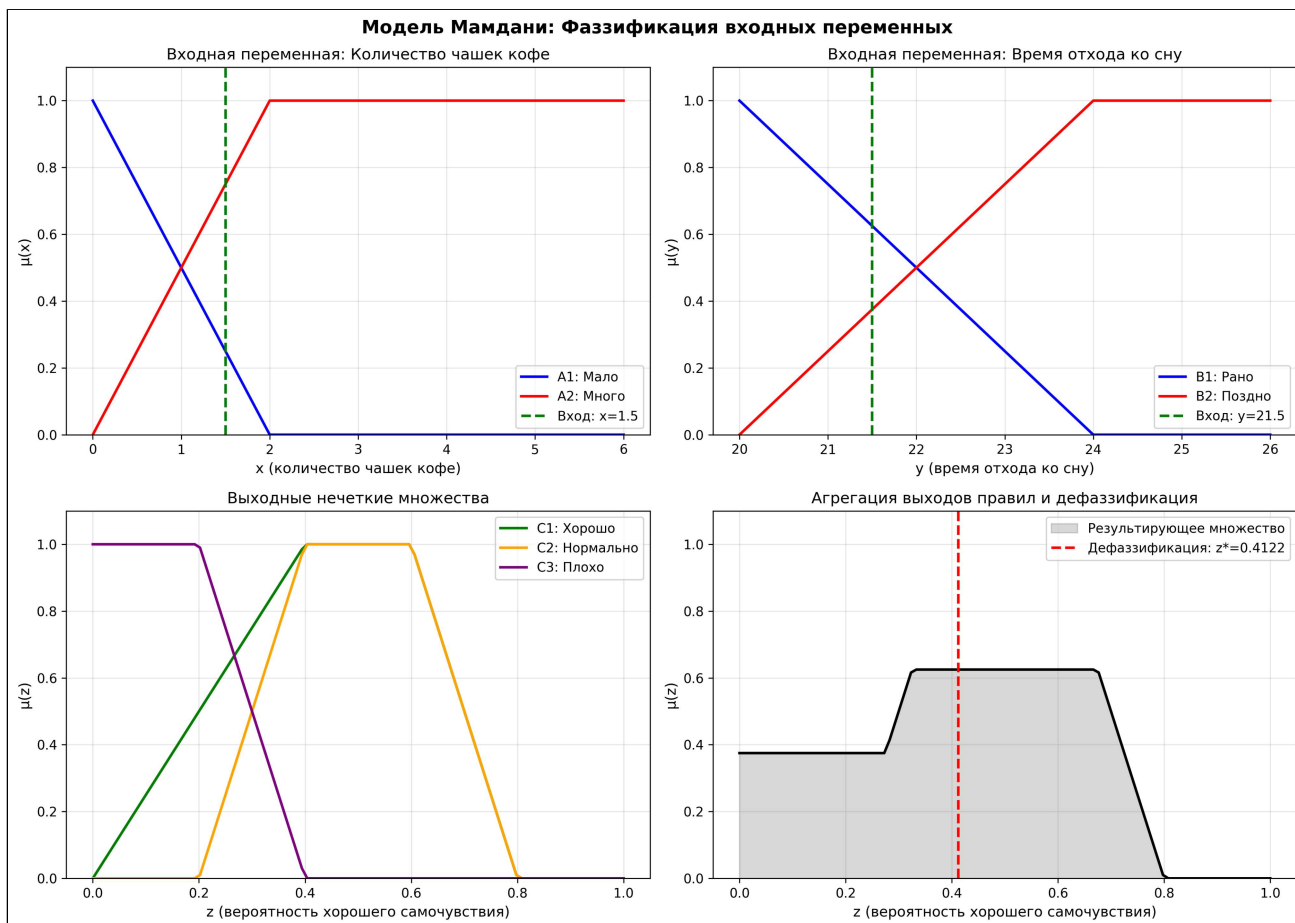


Рисунок 1. Фаззификация входных переменных и выходные нечеткие множества

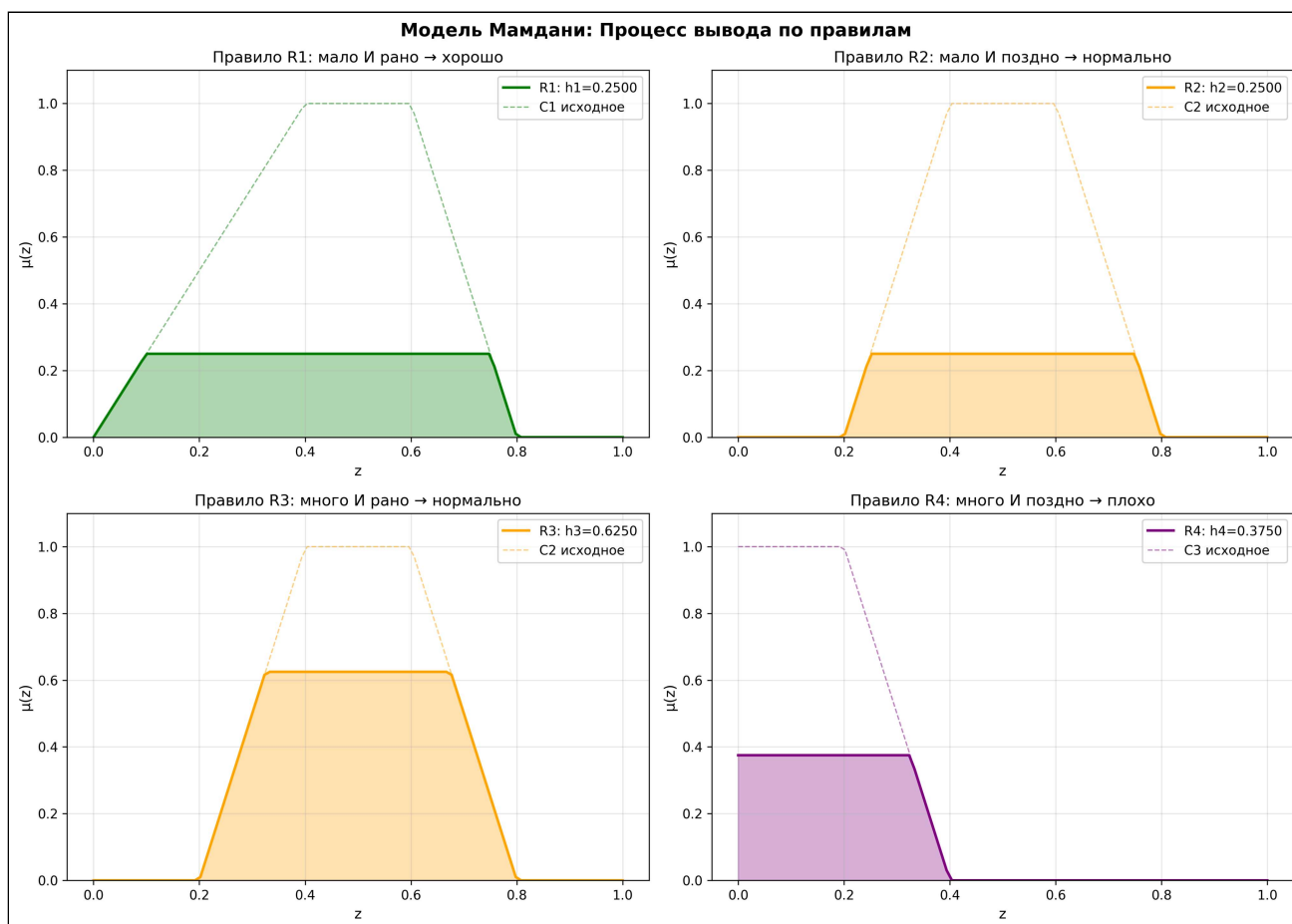


Рисунок 2. Процесс активации правил модели Мамдани

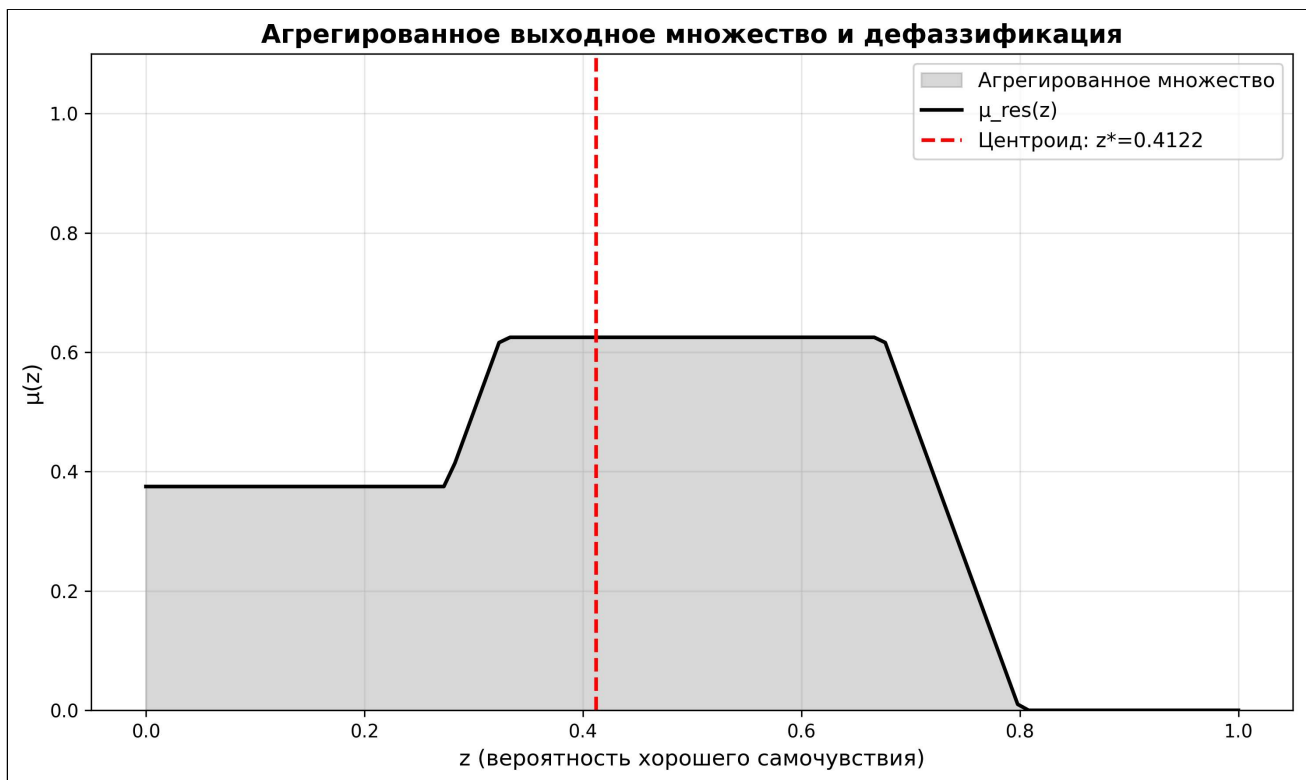


Рисунок 3. Агрегированное выходное множество и результат дефаззификации

### Анализ результатов:

Модель Мамдани позволяет учесть все правила одновременно и получить результирующее нечеткое множество, которое отражает комбинированное влияние всех условий. Дефаззификация преобразует это нечеткое множество в конкретное числовое значение вероятности хорошего самочувствия.

В данном примере наибольшую активацию получило правило  $R_3$  ( $h_3 = 0.625$ ), что соответствует ситуации "много кофе и рано спать", приводящей к "нормальному" самочувствию. Это объясняется тем, что хотя выпито не очень много кофе (1.5 чашки соответствует больше "много", чем "мало"), но и легли спать не очень поздно, что компенсирует влияние кофеина.

## Особенности модели Мамдани

Модель Мамдани имеет следующие характеристики:

- **Интерпретируемость:** выходные нечеткие множества имеют четкий семантический смысл, что делает модель понятной для экспертов.
- **Гибкость:** возможность использования различных Т-норм и Т-конорм для операций И и ИЛИ.
- **Вычислительная эффективность:** алгоритм является достаточно простым для реализации.
- **Применимость:** модель хорошо подходит для задач, где важна экспертная интерпретация результатов.

## Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы:

1. Изучена модель Мамдани как метод нечеткого логического вывода.
2. Реализованы все этапы модели Мамдани: фаззификация, активация правил, ограничение выходных множеств, агрегация и дефаззификация.
3. Применена модель Мамдани для решения практической задачи определения самочувствия на основе количества выпитого кофе и времени отхода ко сну.
4. Продемонстрировано, что модель Мамдани позволяет учитывать все правила одновременно и получать интерпретируемые результаты.

Модель Мамдани является эффективным инструментом для решения задач нечеткого вывода, особенно когда требуется сохранить семантику нечетких множеств в выходных результатах и обеспечить понятность модели для экспертов.