

Выполнил: Тимошинов Егор Борисович

Группа: 16

Лабораторная работа 5

Нечеткие отношения. Операции над нечеткими отношениями

Цель работы

Изучение понятий нечетких отношений, операций над ними и их применения для решения практических задач.

Теоретические сведения

Прямое (декартово) произведение нечетких множеств

Пусть $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ - нечеткие подмножества универсальных множеств X_1, X_2, \dots, X_n соответственно. Прямое (декартово) произведение $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n$ является нечетким подмножеством множества $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)), \text{ для всех } x \in X.$$

Понятие нечеткого отношения

Классическим n -арным отношением R , заданным на области определения $X = X_1 \times \dots \times X_n$, называется упорядоченное множество кортежей из n элементов, имеющее вид:

$$R = \{((x_1, x_2, \dots, x_n), \mu_R(x_1, x_2, \dots, x_n)) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X\},$$

где $\mu_R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представляет собой функцию принадлежности отношения R .

Практическая часть

Задание 1

Задача: Задать на декартовом множестве $\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\}$ отношение: «Число x немного меньше числа y ».

Решение:

Нечеткое отношение "Число x немного меньше числа y " задается функцией принадлежности $\mu_R(x, y)$, которая определяет степень, с которой пара (x, y) принадлежит данному отношению.

Для отношения "х немного меньше у" функция принадлежности определяется следующим образом:

- Если $x \geq y$, то $\mu_R(x, y) = 0$ (х не может быть немного меньше у, если х больше или равен у)
- Если $x < y$, то степень принадлежности зависит от разности $(y - x)$:
 - Если $y - x = 1$, то $\mu_R(x, y) = 1.0$ (х немного меньше у)
 - Если $y - x = 2$, то $\mu_R(x, y) = 0.7$ (х меньше у, но не совсем "немного")
 - Если $y - x = 3$, то $\mu_R(x, y) = 0.4$
 - Если $y - x \geq 4$, то $\mu_R(x, y) = 0.1$

Матрица нечеткого отношения представлена в таблице 1:

R	y = 0	y = 1	y = 2	y = 3	y = 4
x = 0	0.0	1.0	0.7	0.4	0.1
x = 1	0.0	0.0	1.0	0.7	0.4
x = 2	0.0	0.0	0.0	1.0	0.7
x = 3	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

Таблица 1. Матрица нечеткого отношения "Число x немного меньше числа у"

Графическое представление отношения показано на рисунке 1:

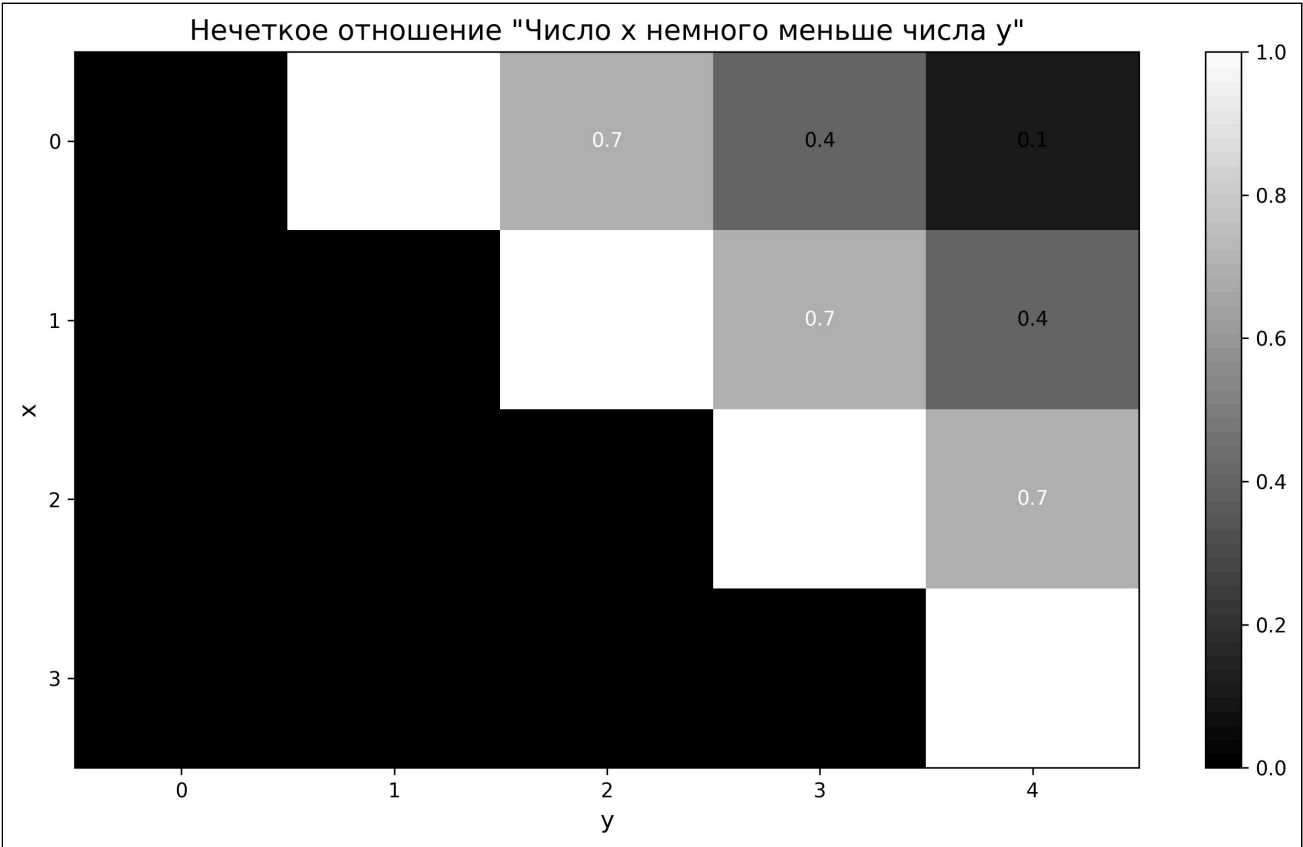


Рисунок 1. Визуализация нечеткого отношения "Число x немного меньше числа у"

Анализ результатов:

Из матрицы видно, что максимальные значения функции принадлежности (равные 1.0) находятся на позициях, где разность между y и x равна 1, что соответствует интуитивному пониманию "немного меньше". При увеличении разности степень принадлежности уменьшается, что отражает уменьшение степени соответствия понятию "немного меньше".

Задание 2

Задача: Найти отношения двух нечетких множеств: "Пить много кофе в день (чашек)" И "поздно ложиться" в случае задания их в дискретном виде и непрерывном.

Решение:

2.1. Дискретный случай

Зададим нечеткие множества в дискретном виде:

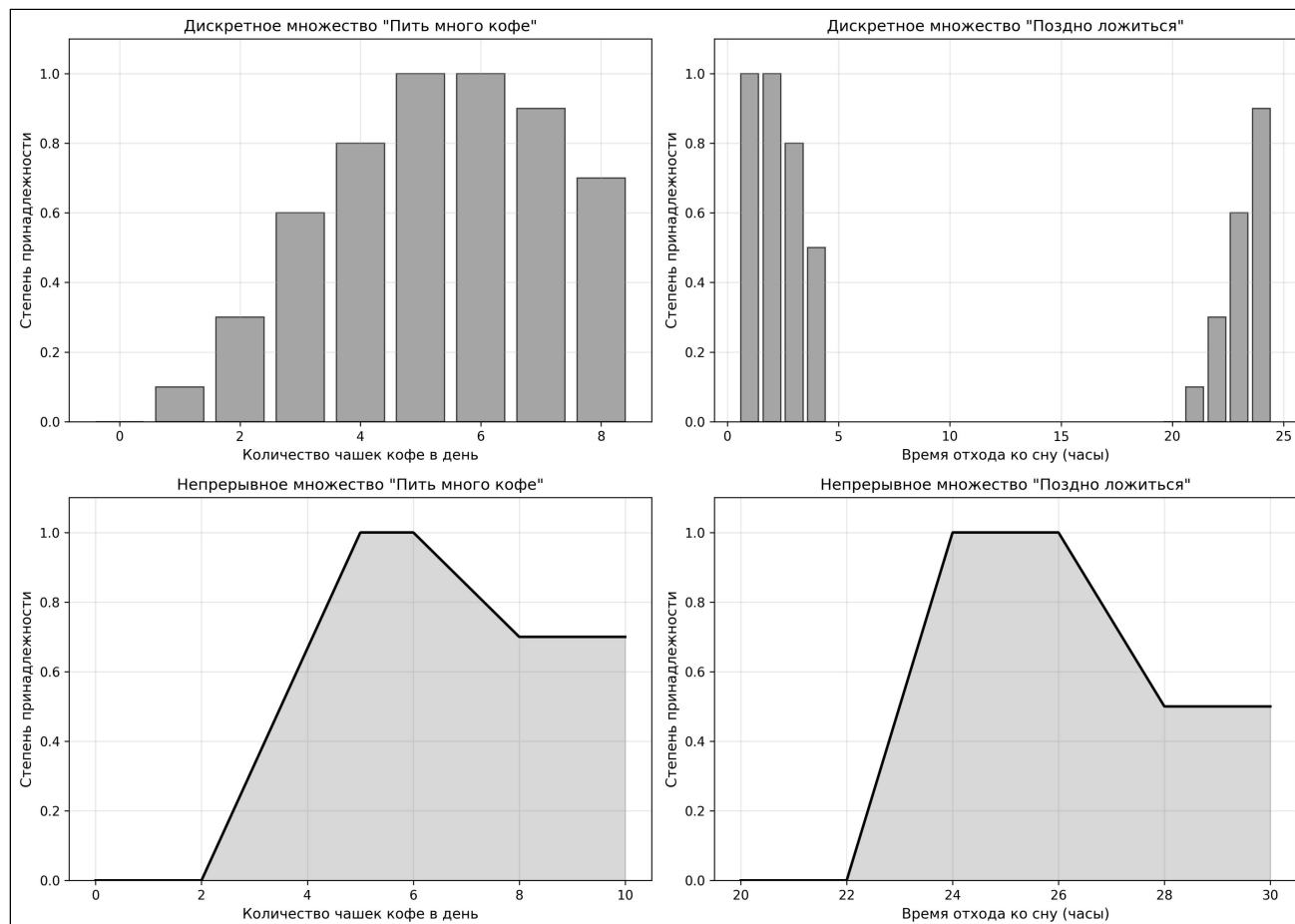
Множество "Пить много кофе" (чашек в день):

$$\tilde{A} = \{0/0.0, 1/0.1, 2/0.3, 3/0.6, 4/0.8, 5/1.0, 6/1.0, 7/0.9, 8/0.7\}$$

Множество "Поздно ложиться" (часы):

$$\tilde{B} = \{20/0.0, 21/0.1, 22/0.3, 23/0.6, 24/0.9, 1/1.0, 2/1.0, 3/0.8, 4/0.5\}$$

Графики дискретных множеств представлены на рисунке 2:



2.2. Непрерывный случай

Зададим нечеткие множества в непрерывном виде с помощью функций принадлежности:

Функция принадлежности "Пить много кофе" (чашек в день):

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \frac{x-2}{3}, & 2 \leq x \leq 5, \\ 1, & 5 \leq x \leq 6, \\ 1 - 0.3 \cdot \frac{x-6}{2}, & 6 < x \leq 8, \\ 0.7, & x > 8. \end{cases}$$

Функция принадлежности "Поздно ложиться" (часы, где 22 = 22:00):

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 22, \\ \frac{x-22}{2}, & 22 \leq x \leq 24, \\ 1, & 24 < x \leq 26, \\ 1 - 0.5 \cdot \frac{x-26}{2}, & 26 < x \leq 28, \\ 0.5, & x > 28. \end{cases}$$

2.3. Декартово произведение нечетких множеств

Декартово произведение $\tilde{A} \times \tilde{B}$ задается функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A} \times \tilde{B}}(x, y) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y))$$

где x - количество чашек кофе в день, y - время отхода ко сну.

Визуализация декартова произведения представлена на рисунке 3:

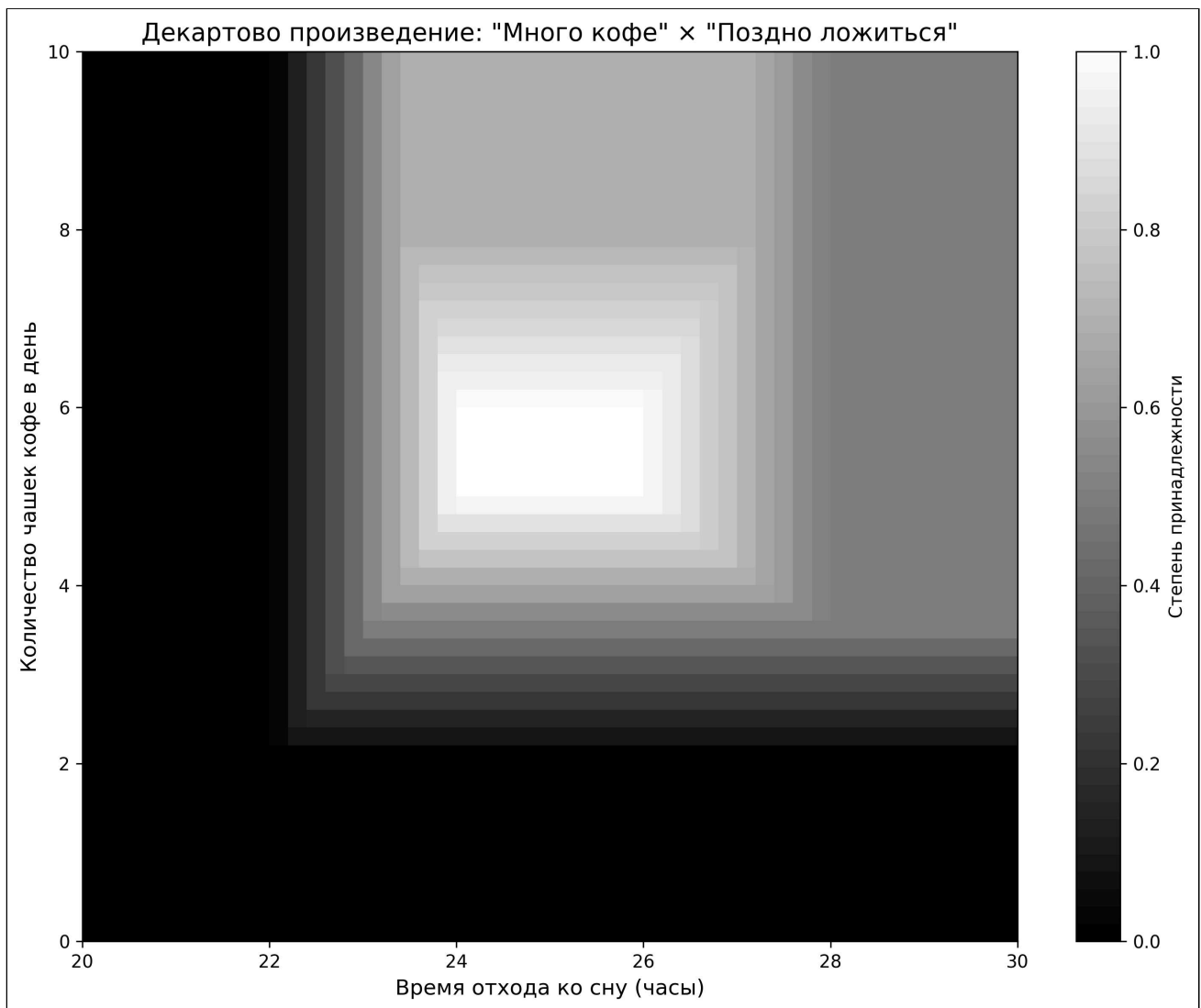


Рисунок 3. Декартово произведение "Много кофе" × "Поздно ложиться"

Анализ результатов:

Декартово произведение показывает области, где одновременно выполняются оба условия: человек пьет много кофе И поздно ложится. Максимальные значения функции принадлежности (близкие к 1.0) находятся в области, где количество чашек кофе составляет 5-6 чашек, а время отхода ко сну - после полуночи до 2 часов ночи.

Задание 3

Задача: Задача о консалтинге в области выбора профессии.

Постановка задачи:

Имеется множество кандидатов и множество профессий. Требуется определить степень совместимости каждого кандидата с каждой профессией на основе их характеристик и требований профессий.

Решение:

3.1. Исходные данные

Множество кандидатов: Кандидат 1, Кандидат 2, Кандидат 3, Кандидат 4, Кандидат 5

Множество профессий: Программист, Менеджер, Дизайнер, Аналитик, Маркетолог

3.2. Характеристики кандидатов (нечеткие множества)

Каждый кандидат характеризуется тремя параметрами:

- **Математические способности** (степень принадлежности к множеству "высокие математические способности")
- **Творческие способности** (степень принадлежности к множеству "высокие творческие способности")
- **Коммуникативные способности** (степень принадлежности к множеству "высокие коммуникативные способности")

Характеристики кандидатов представлены в таблице 2:

Кандидат	Математические способности	Творческие способности	Коммуникативные способности
Кандидат 1	0.9	0.3	0.4
Кандидат 2	0.6	0.7	0.9
Кандидат 3	0.4	0.9	0.6
Кандидат 4	0.8	0.5	0.7
Кандидат 5	0.5	0.8	0.8

Таблица 2. Характеристики кандидатов

3.3. Требования профессий

Каждая профессия имеет требования к характеристикам кандидата. Требования представлены в таблице 3:

Профессия	Математические способности	Творческие способности	Коммуникативные способности
Программист	0.9	0.2	0.5
Менеджер	0.5	0.3	0.9

Дизайнер	0.2	0.9	0.6
Аналитик	0.8	0.3	0.6
Маркетолог	0.3	0.7	0.9

Таблица 3. Требования профессий к характеристикам

3.4. Вычисление совместимости с помощью композиции нечетких отношений

Для решения задачи используем композицию нечетких отношений. Определим два отношения:

Отношение R: Кандидаты → Характеристики (способности кандидатов)

Отношение S: Характеристики → Профессии (требования профессий)

Композиция отношений $R \circ S$ дает отношение Кандидаты → Профессии и вычисляется по формуле MAX-MIN композиции:

$$\mu_{R \circ S}(c, p) = \max_k \min(\mu_R(c, k), \mu_S(k, p))$$

где c - кандидат, p - профессия, k - характеристика (математические, творческие или коммуникативные способности).

Это означает, что для каждой пары (кандидат, профессия) мы находим максимум по всем характеристикам от минимума способности кандидата и требования профессии по этой характеристике.

3.5. Матрицы отношений

Матрица R (Кандидаты → Характеристики):

Кандидат \ Характеристика	Математические	Творческие	Коммуникативные
Кандидат 1	0.9	0.3	0.4
Кандидат 2	0.6	0.7	0.9
Кандидат 3	0.4	0.9	0.6
Кандидат 4	0.8	0.5	0.7
Кандидат 5	0.5	0.8	0.8

Таблица 4. Матрица отношения R (Кандидаты → Характеристики)

Матрица S (Характеристики → Профессии):

Характеристика \ Профессия	Программист	Менеджер	Дизайнер	Аналитик	Маркетолог
----------------------------	-------------	----------	----------	----------	------------

Математические	0.9	0.5	0.2	0.8	0.3
Творческие	0.2	0.3	0.9	0.3	0.7
Коммуникативные	0.5	0.9	0.6	0.6	0.9

Таблица 5. Матрица отношения S (Характеристики → Профессии)

3.6. Результат композиции RoS

Матрица совместимости кандидатов с профессиями (результат композиции RoS) представлена в таблице 6:

Кандидат \ Профессия	Программист	Менеджер	Дизайнер	Аналитик	Маркетолог
Кандидат 1	0.9	0.5	0.4	0.8	0.4
Кандидат 2	0.6	0.9	0.7	0.6	0.9
Кандидат 3	0.4	0.6	0.9	0.4	0.7
Кандидат 4	0.8	0.7	0.6	0.8	0.7
Кандидат 5	0.5	0.8	0.8	0.5	0.8

Таблица 6. Матрица совместимости RoS (Кандидаты → Профессии)

Пример вычисления: Для Кандидата 1 и Программиста:

- По математическим: $\min(0.9, 0.9) = 0.9$
- По творческим: $\min(0.3, 0.2) = 0.2$
- По коммуникативным: $\min(0.4, 0.5) = 0.4$
- Результат: $\max(0.9, 0.2, 0.4) = 0.9$

Визуализация всех трех матриц представлена на рисунке 4:

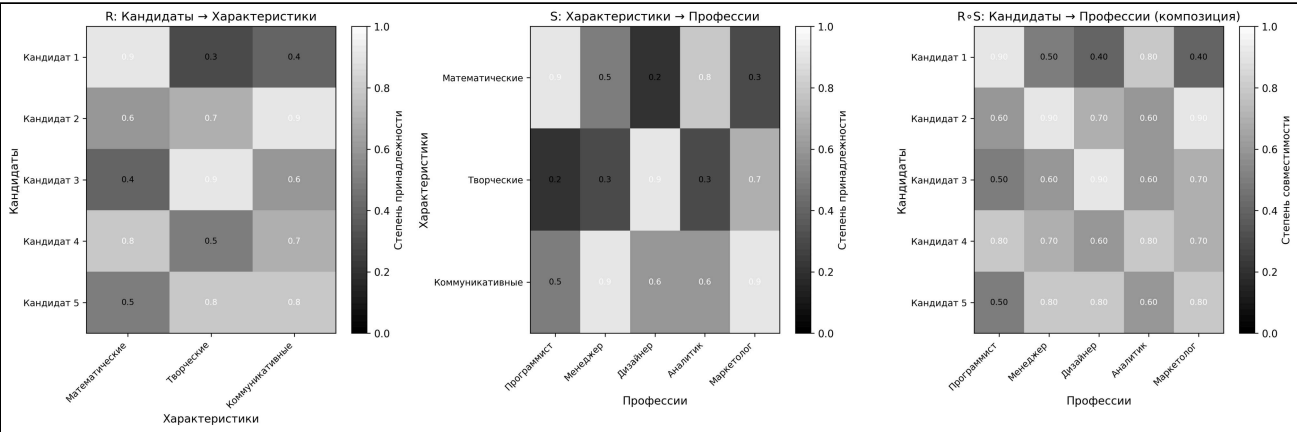


Рисунок 4. Матрицы отношений R, S и результат композиции RoS

3.7. Рекомендации по выбору профессии

На основе матрицы совместимости можно сделать следующие рекомендации:

Кандидат	Рекомендуемая профессия	Степень совместимости
Кандидат 1	Программист	0.9
Кандидат 2	Менеджер / Маркетолог	0.9
Кандидат 3	Дизайнер	0.9
Кандидат 4	Программист / Аналитик	0.8
Кандидат 5	Менеджер / Дизайнер / Маркетолог	0.8

Таблица 5. Рекомендации по выбору профессии

Анализ результатов:

- **Кандидат 1** имеет высокие математические способности (0.9), но низкие творческие и коммуникативные. Наилучшее соответствие - профессия Программист (совместимость 0.9), так как его математические способности полностью соответствуют требованиям профессии.
- **Кандидат 2** имеет высокие коммуникативные способности (0.9) и средние остальные. Наилучшее соответствие - профессии Менеджер или Маркетолог (совместимость 0.9), так как его коммуникативные способности максимально соответствуют требованиям этих профессий.
- **Кандидат 3** имеет высокие творческие способности (0.9) и средние остальные. Наилучшее соответствие - профессия Дизайнер (совместимость 0.9), так как его творческие способности полностью соответствуют требованиям профессии.
- **Кандидат 4** имеет сбалансированные характеристики с высокими математическими способностями. Наилучшее соответствие - профессии Программист или Аналитик (совместимость 0.8).
- **Кандидат 5** имеет высокие творческие и коммуникативные способности. Наилучшее соответствие - профессии Менеджер, Дизайнер или Маркетолог (совместимость 0.8).

Выводы:

Использование композиции нечетких отношений (MAX-MIN композиция) позволяет количественно оценить совместимость кандидатов с различными профессиями на основе их характеристик. Метод учитывает не только наличие определенных способностей, но и степень их выраженности. Композиция отношений $R \circ S$ эффективно объединяет информацию о способностях кандидатов и требованиях профессий, что делает рекомендации более точными и обоснованными.

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены следующие понятия и методы:

1. Нечеткие отношения и способы их задания на декартовых произведениях множеств.

2. Операции над нечеткими отношениями, в частности, декартово произведение нечетких множеств.
3. Применение нечетких отношений для решения практических задач, таких как задача о консалтинге в области выбора профессии.

Практическое применение нечетких отношений показало их эффективность для моделирования нечетких связей между объектами и принятия решений в условиях неопределенности.