Лабораторная работа 4

(L-R) - числа

Непосредственный подсчет легко реализуется для дискретных нечетких чисел, но для непрерывных нечетких чисел непосредственное выполнение этих операций затруднено. Поэтому применяется форма представления функций принадлежности нечетких чисел в виде (L-R) функций.

Определение: Функции (L-R) типа определяются как произвольные невозрастающие на множестве неотрицательных действительных чисел функции, удовлетворяющие условиям

$$L(-x)=L(x), \quad R(-x)=R(x), \quad L(0)=R(0)=1.$$

Нечеткое число (L-R) типа – нечеткая величина $\tilde{B}=\{x/\mu_{\tilde{B}}(x)\}$, функция принадлежности которой может быть представлена в форме композиции некоторой L-функции и некоторой R-функции следующим образом

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & x\le a, \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right), & x>a, \end{cases}$$

где α, β >0. При этом параметр *a* является модой нечеткого числа, а параметры α и β – левый и правый коэффициенты нечеткости.

При задании нечетких чисел (L-R)-типа могут использоваться, вообще говоря, две различные функции указанного вида, что существенно расширяет диапазон их возможных представлений.

Нечеткое число (L-R)-типа с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(x)$ однозначно определяется тройкой своих параметров $\langle a, \alpha, \beta\rangle$. Нечеткие числа (L-R)-типа обозначаются $\tilde{B}_{LR}=\langle a, \alpha, \beta\rangle_{LR}$.

Пример: Пусть нечеткое число (L-R)-типа задано с помощью функций

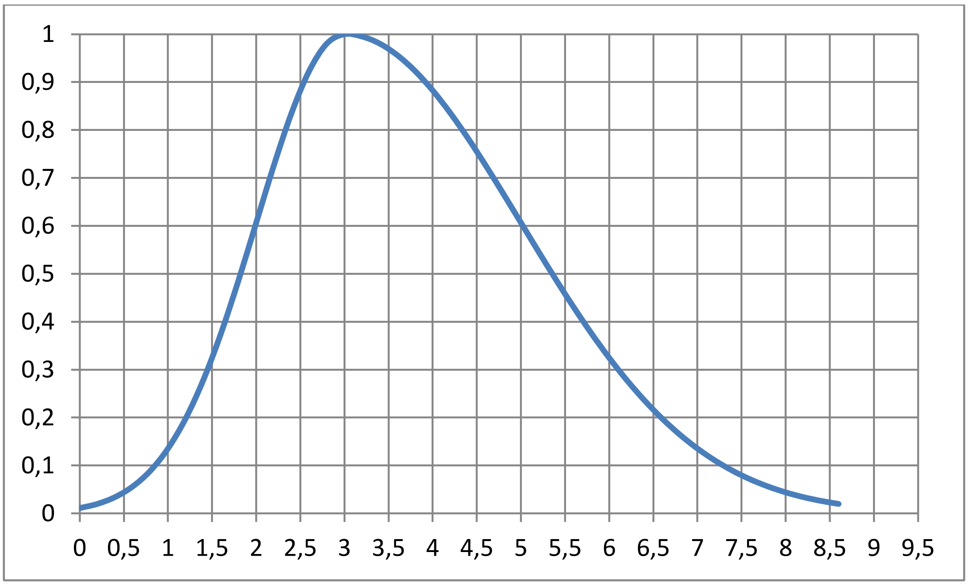
$$L(u)=e^{-\frac{u^2}{2}},\ u=\frac{a-x}{\alpha},\ x\le a;\ \ R(v)=e^{-\frac{v^2}{2}},\ v=\frac{x-a}{\beta},\ x>a;$$

причем $a=3, \quad \alpha=1, \quad \beta=2$.

Тогда нечеткое число имеет функцию принадлежности

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(3-x)^2}{2}}, & x \le 3, \\ e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}, & x > 3. \end{cases}$$

Оно отображает нечеткую тройку.



Существует технология выполнения простейших операций с нечеткими числами, представимыми в виде чисел (L-R)-типа

Пусть $\tilde{A}_{LR} = \langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{LR}$, $\tilde{B}_{LR} = \langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{LR}$ – два нечетких числа (L-R)-типа.

Тогда основные операции над этими числами реализуются следующим образом:

1) Противоположное число $-\tilde{A}_{LR} = \langle -a_1, \beta_1, \alpha_1 \rangle_{LR}$ (1)
2) Обратное число $\tilde{A}_{LR}^{-1} = \left\langle \frac{1}{a_1}, \frac{\beta_1}{a_1^2}, \frac{\alpha_1}{a_1^2} \right\rangle_{LR}$ (2)
3) Сумма двух нечетких чисел
   $\tilde{A}_{LR} + \tilde{B}_{LR} = \langle a_1 + a_2, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2 \rangle_{LR}$ (3)
4) Разность двух нечетких чисел
   $\tilde{A}_{LR} - \tilde{B}_{LR} = \langle a_1 - a_2, \alpha_1 + \beta_2, \alpha_2 + \beta_1 \rangle_{LR}$

5) Произведение двух положительных нечетких чисел

$$\tilde{A}_{LR} \cdot \tilde{B}_{LR} = \langle a_1 \cdot a_2,\ a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1,\quad a_1\beta_2 + a_2\beta_1 \rangle_{LR} \tag{4}$$

6) Произведение положительного и отрицательного нечетких чисел $\tilde{A}_{LR} > 0,\ \tilde{B}_{LR} < 0$:
$$\tilde{A}_{LR} \cdot \tilde{B}_{LR} = \langle a_1 \cdot a_2,\ a_1\alpha_2 - a_2\beta_1,\quad a_1\beta_2 - a_2\alpha_1 \rangle_{LR}$$
7) Произведение отрицательных нечетких чисел $\tilde{A}_{LR} < 0,\ \tilde{B}_{LR} < 0$:
$$\tilde{A}_{LR} \cdot \tilde{B}_{LR} = \langle a_1 \cdot a_2,\ -a_1\beta_2 - a_2\beta_1,\quad -a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1 \rangle_{LR}$$
8) Деление положительных нечетких чисел
$$\tilde{A}_{LR} : \tilde{B}_{LR} = \left\langle a_1 / a_2,\quad \frac{a_1\beta_2 + a_2\alpha_1}{a_2^2},\quad \frac{a_1\alpha_2 + a_2\beta_1}{a_2^2} \right\rangle_{LR}.$$

Задание: Пусть $\tilde{A}_{LR} = \langle 4, 2, 1 \rangle_{LR}$ – нечеткая четверка, а $\tilde{B}_{LR} = \langle 2, 1, 2 \rangle_{LR}$ – нечеткая двойка. $L(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$, $u = \dfrac{a - x}{\alpha}$, $x \le a$; $R(v) = e^{-\frac{v^2}{2}}$, $v = \dfrac{x - a}{\beta}$, $x > a$. При этом

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(4-x)^2}{8}}, & x \le 4, \\ e^{-\frac{(x-4)^2}{2}}, & x > 4, \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(2-x)^2}{2}}, & x \le 2, \\ e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}, & x > 2. \end{cases}$$

Найдем $\tilde{C}\langle a, \alpha, \beta \rangle_{LR} = \langle 4, 2, 1 \rangle_{LR} + \langle 2, 1, 2 \rangle_{LR}$.

$a = 4 + 2 = 6,\ \alpha = 2 + 1 = 3,\ \beta = 1 + 2 = 3$.

Тогда

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(6-x)^2}{18}}, & x \le 6, \\ e^{-\frac{(x-6)^2}{18}}, & x > 6. \end{cases}$$

Нарисуйте график.

Задание: найдите

a) $\tilde{C}\langle a, \alpha, \beta\rangle_{LR} = \langle 4, 2, 1\rangle_{LR} - \langle 2, 1, 2\rangle_{LR}$,

b) $\tilde{C}\langle a, \alpha, \beta\rangle_{LR} = \langle 4, 2, 1\rangle_{LR} \cdot \langle 2, 1, 2\rangle_{LR}$,

c) $\tilde{C}\langle a, \alpha, \beta\rangle_{LR} = \langle 4, 2, 1\rangle_{LR} : \langle 2, 1, 2\rangle_{LR}$,

d) $-\tilde{A}$,

e) $\tilde{A}^{-1}$.

Нарисуйте графики исходных множеств и результатов операций над этими множествами.

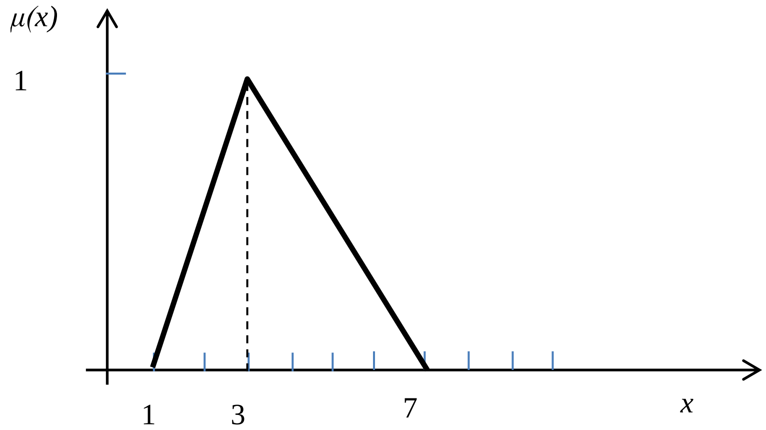
Задание: из формул (1), (2), (3) и (4) выведите все остальные формулы для арифметических операций над нечеткими числами.

Представление нечеткого треугольного числа в виде (L-R)-числа

Пример

Пусть задано нечеткое треугольное число $\tilde{A}$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}, & x \le 3, \\ \dfrac{7-x}{4}, & x > 3, \\ 0, \text{ иначе} & \end{cases}$$

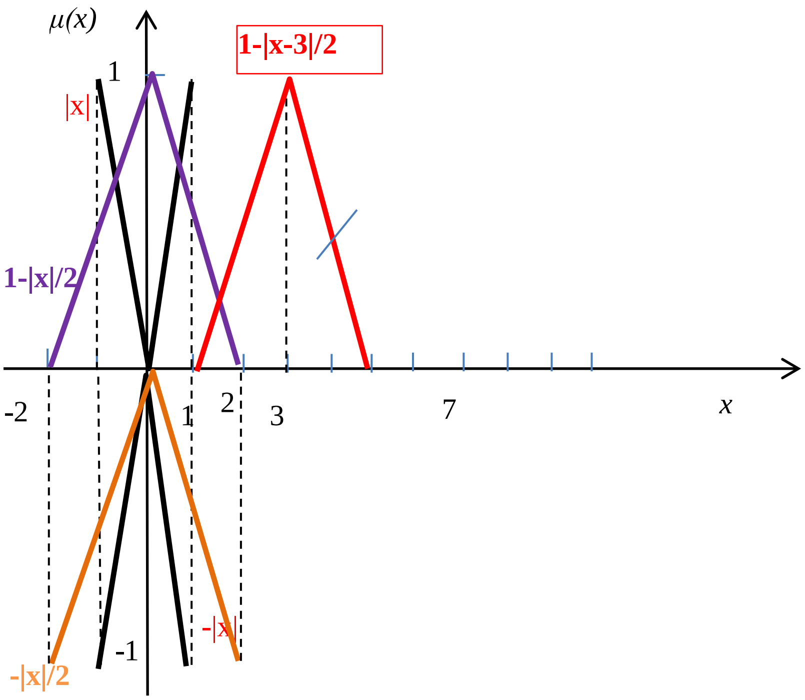


Представим его в виде (L-R)-числа.

Как уже говорилось L и R функции должны обладать свойствами

L(-u)=L(u), R(-v)=R(v), L(0)=R(0)=1.

Сконструируем функцию L: по форме функция L должна представлять собой две стороны треугольника, который опирается на ось абсцисс, стороны должны быть симметричны относительно оси ординат, такими свойствами обладает функция |x|.



1) Перевернем треугольник: -|x|.
2) Умножим на ½: -|x|/2.
3) Поднимем вверх на 1: 1-|x|/2
4) Сдвинем на 3 единицы вправо: $1-\frac{|x-3|}{2}$ или $1-\left|\frac{x-3}{2}\right|=1-\left|\frac{3-x}{2}\right|$
5) Убираем правую ветку .

   В результате сконструировали нечеткую функцию L-типа:

   $L(u)=1-|u|$, где $u=\frac{3-x}{2}$.

   Аналогично сконструируем R-функцию, только возьмем ее правую ветку:

   $R(v)=1-|v|$, где $v=\frac{x-3}{4}$

Таким образом, нечеткое число $\tilde{A}$

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{3-x}{2}\right)=\max\left(0;1-\left|\dfrac{3-x}{2}\right|\right), & x\le 3,\\ R\left(\dfrac{x-3}{4}\right)=\max\left(0;1-\left|\dfrac{x-3}{4}\right|\right), & x>3.\end{cases}$$

или $\tilde{A}_{LR}=\langle 3,2,4\rangle_{LR}$, где a=3 – совпадает с модой, 2=α=b-a, 4=β=c-b.

Задание:

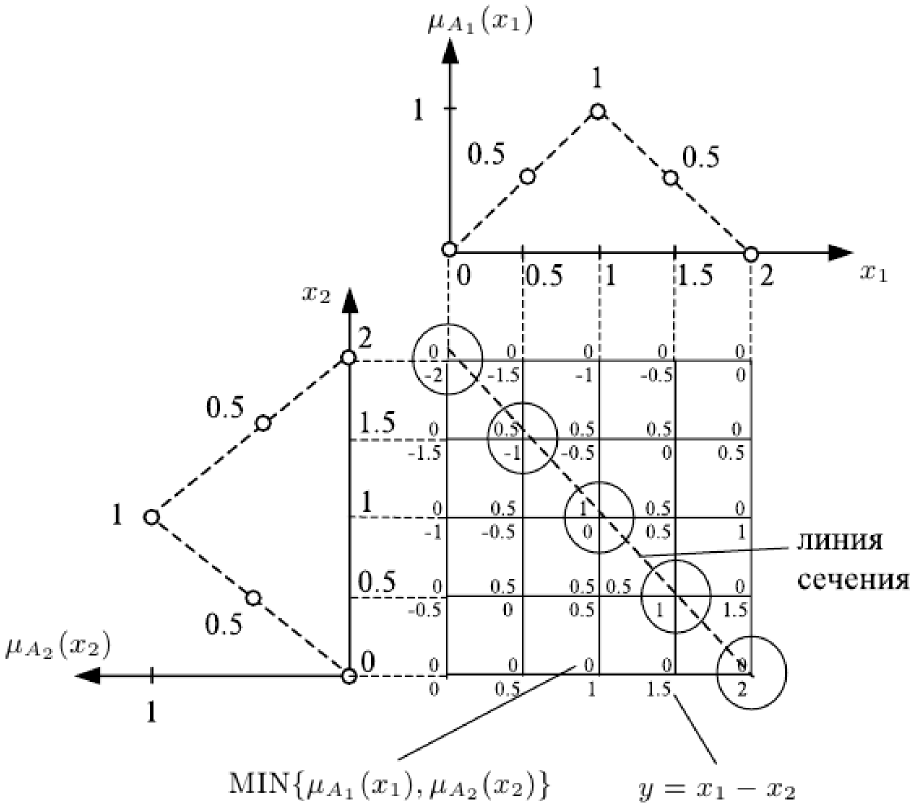
Представить в виде (L-R)- числа треугольное число

$$\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}, & 2<x\le 3,\\ \dfrac{8-x}{5}, & 3<x\le 8,\\ 0, \text{ иначе}\end{cases}$$

Свойства операций сложения и умножения нечетких чисел:

1) Закон коммутативности
   $\tilde{A}+\tilde{B}=\tilde{B}+\tilde{A},$
   $\tilde{A}\cdot\tilde{B}=\tilde{B}\cdot\tilde{A}$
2) Закон дистрибутивности
   $\tilde{A}+(\tilde{B}+\tilde{C})=(\tilde{A}+\tilde{B})+\tilde{C},$
   $\tilde{A}\cdot(\tilde{B}\cdot\tilde{C})=(\tilde{A}\cdot\tilde{B})\cdot\tilde{C}$
3) Наличие нейтрального элемента:
   $\tilde{A}+0=0+\tilde{A}=\tilde{A},$
   $\tilde{A}\cdot 1=1\cdot\tilde{A}=\tilde{A},$
   где 0 и 1 – четкие.
   НО: если $\tilde{A}$ - нечеткое число, а $-\tilde{A}$ - ему противоположное, то не выполняется
   $$\tilde{A}-\tilde{A}=0.$$
   Пусть $\tilde{A}$=”примерно 1”.
   $\tilde{A}=\{0/0;\quad 0{,}5/0{,}5;\quad 1/1;\quad 1.5/0.5;\quad 2/0\}.$
   Тогда

$$\tilde{A}-\tilde{A}=\{-2/0;\quad -1.5/0;\quad -1/0.5;\quad -0.5/0.5;\quad 0/1;\quad 0.5/0.5;\quad 1/0.5;\quad 2/0\}$$



Рассмотрим уравнение

$$X + \widetilde{A} = \widetilde{B} \tag{5}$$

Решение этого уравнения не представимо в форме $X = \widetilde{B} - \widetilde{A}$, так как при подстановке в (5) $\widetilde{B} - \widetilde{A} + \widetilde{A} = \widetilde{C} \neq \widetilde{B}$.

Задание: Пусть $\widetilde{A} = \{0/0; 1/0.5; 2/1; 3/0\}$, $\widetilde{B} = \{2/0; 3/0.5; 4/1; 5/0.5; 6/0\}$ и дано уравнение $X + \widetilde{A} = \widetilde{B}$

Показать, что $X = \widetilde{B} - \widetilde{A}$ не является решением уравнения, то есть при подстановке $X = \widetilde{B} - \widetilde{A}$ в уравнение не получится $\widetilde{B}$.

Значение X можно найти с помощью L-R чисел:

Пусть $X = \langle a_X, \alpha_X, \beta_X \rangle$, $\widetilde{A} = \langle 2, 2, 1 \rangle$, $\widetilde{B} = \langle 4, 2, 2 \rangle$,

Тогда

$$X + \widetilde{A} = \langle a_X + 2, \quad \alpha_X + 2, \quad \beta_X + 1 \rangle = \langle 4, \quad 2, \quad 2 \rangle$$

Откуда находим $\langle a_X, \alpha_X, \beta_X \rangle$,

Равенство вида $\widetilde{A} \cdot \widetilde{A}^{-1} = 1$ в общем случае тоже не выполняется.

Решим уравнение

$$X \cdot \widetilde{A} = \widetilde{B}$$

Его нельзя решить как

$X \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{A}^{-1} = \tilde{B} \cdot \tilde{A}^{-1}$.

Но его можно решить с использованием L-R- представления.

Пусть $\tilde{A} = \langle 7;3;2 \rangle$, $\tilde{B} = \langle 35;29;31 \rangle$, $X = \langle a_X, \alpha_X, \beta_X \rangle$, тогда

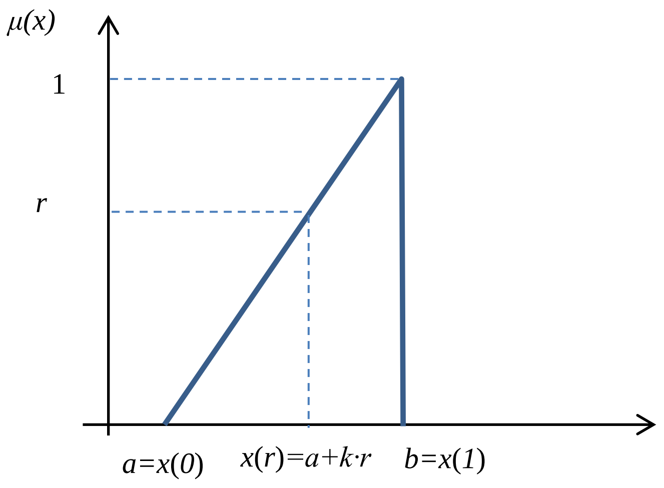
$\langle a_X, \alpha_X, \beta_X \rangle \cdot \langle 7;3;2 \rangle = \langle 35;29;31 \rangle$

Воспользуемся формулой умножения L-R-чисел и приравняем соответствующие параметры, далее самостоятельно.

W-числа и W-алгебра

Рассмотрим сначала однокомпонентное число

$x(r) = a + kr$



Введем операции:

1) сложения $x_1(r) + x_2(r) = a_1 + k_1 r + a_2 + k_2 r = a_1 + a_2 + (k_1 + k_2)r$
2) умножения

$$x_1(r) \cdot x_2(r) = (a_1 + k_1 r) \cdot (a_2 + k_2 r) = a_1 \cdot a_2 + (k_1 a_2 + k_2 a_1 + k_1 k_2)r$$

Определим нулевой и единичный элементы:

$$0 = 0 + 0 \cdot r, \quad 1 = 1 + 0 \cdot r$$

Противоположный элемент: $-x(r) = -a - kr$

Тогда $x(r) - x(r) = x(r) + (-x(r)) = a - a + (k - k)r = 0$

3) Операция вычитания:

$$x_1(r)-x_2(r)=x_1(r)+(-x_2(r))=a_1-a_2+(k_1-k_2)r$$

4) Обратный элемент $x(r)^{-1}$ выбирается так, чтобы $x(r)^{-1}\cdot x(r)=1$:

Пусть $x(r)^{-1}=d+er$, где d и e – неизвестны.

$(d+er)\cdot(a+kr)=1$ или $da+(dk+ea+ek)r=1+0\cdot r$

Откуда $da=1$ и $d=\dfrac{1}{a}$

$dk+ea+ek=0$, откуда $\dfrac{1}{a}\cdot k+ea+ek=0$ и $e=\dfrac{-k}{a(a+k)}$.

Следовательно, $x(r)^{-1}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{k}{a(a+k)}\cdot r$

5) Операция деления:

$$x_1(r):x_2(r)=x_1(r)\cdot x_2(r)^{-1}=\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2k_1-a_1k_2}{a_2^2+a_2k_2}\cdot r$$

Однокомпонентное число

$x(r)=a+kr$

можно также представить как

$$x(r)=x(0)+(x(1)-x(0))r,$$

где $k=x(1)-x(0),\quad a=x(0)$.

Тогда $x_1(r)*x_2(r)=x_1(0)*x_2(0)+(x_1(1)*x_2(1)-x_1(0)*x_2(0))\cdot r$, (1)

где $*\in\{+;\ -;\ \bullet;\ /\}$.

Докажем это для операции сложения:

$$\begin{aligned}&x_1(r)+x_2(r)=a_1+a_2+(k_1+k_2)r=\\&=x_1(0)+x_2(0)+((x_1(1)-x_1(0))+(x_2(1)-x_2(0)))r=\\&=x_1(0)+x_2(0)+((x_1(1)+x_2(1))-(x_1(0)+x_2(0)))r\end{aligned}$$

Докажем это для операции деления:

$$x_1(r):x_2(r)=\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2k_1-a_1k_2}{a_2^2+a_2k_2}\cdot r=$$

$$=\frac{x_1(0)}{x_2(0)}+\frac{x_2(0)(x_1(1)-x_1(0))-x_1(0)(x_2(1)-x_2(0))}{x_2(0)^2+x_2(0)(x_2(1)-x_2(0))}\cdot r=$$

$$=\frac{x_1(0)}{x_2(0)}+\frac{x_2(0)x_1(1)-x_2(0)x_1(0)-x_1(0)x_2(1)+x_1(0)x_2(0)}{x_2(0)^2+x_2(0)x_2(1)-x_2(0)^2}\cdot r=$$

$$=\frac{x_1(0)}{x_2(0)}+\frac{x_2(0)x_1(1)-x_1(0)x_2(1)}{x_2(0)x_2(1)}\cdot r=\frac{x_1(0)}{x_2(0)}+\left(\frac{x_1(1)}{x_2(1)}-\frac{x_1(0)}{x_2(0)}\right)\cdot r$$

Задание: доказать формулу (1) для операций вычитания и умножения.

Двухкомпонентным треугольным числом W (W-число) будем называть конструкцию, представленную вектором однокомпонентных чисел $(x^L(r);x^R(r))$, причем $x^L(1)=x^R(1)$. Здесь $x^L(r)$ – левая компонента W-числа, $x^R(r)$ – правая компонента W-числа.

Пусть W1 и W2 – два W-числа. Тогда операции между этими числами будут производиться в соответствии со следующим правилом:
$(x_1^L(r);\, x_1^R(r))*(x_2^L(r);\, x_2^R(r))=(x_1^L(r)*x_2^L(r);\quad x_1^R(r)*x_2^R(r))$, (2)

где $*\in\{+;\,-;\,\bullet;\,/\}$.

W-число также можно представлять в виде трех чисел

W = (a,b,c), (3)

которое в параметрической форме имеет вид $x^L(r)=a+(b-a)\cdot r$ и $x^R(r)=c+(b-c)r$.

Пусть два W-числа представлены в виде

W1 = (a1,b1,c1), W2 = (a2, b2, c2).

Тогда результат выполнения операции примет вид

W = (a1 ∗ a2, b1 ∗ b2, c1 ∗ c2), (4)

где $*\in\{+;\,-;\,\bullet;\,/\}$ и все операции выполняются по правилам работы с действительными числами.

Пример:

Даны два W-числа:

W1 = (1,3,7), W2 = (4, 8, 9)

Найти:

1) левую и правую компоненты этих чисел;
   $W1=\left(1+(3-1)r;\,7+(3-7)r\right)=\left(1+2r;\,7-4r\right)$
   $W2=\left(4+(8-4)r;\,9+(8-9)r\right)=\left(4+4r;\,9-r\right)$
2) **2)** сумму, разность, произведение и частное двух W-чисел **по формуле (2)**
   $W1+W2=\left(1+4+(3+8-(1+4))r;\,7+9+(3+8-(7+9))r\right)=$
   $=\left(5+6r;16-5r\right)$
   $W1-W2=\left(1-4+(3-8-(1-4))r;\,7-9+(3-8-(7-9))r\right)=$
   $=\left(-3-2r;-2-3r\right)$
   $W1*W2=\left(1*4+(3*8-(1*4))r;\,7*9+(3*8-(7*9))r\right)=$
   $=\left(4+20r;\,63-39r\right)$
   $W1:W2=\left(1/4+(3/8-(1/4))r;\,7/9+(3/8-(7/9))r\right)=$
   $=\left(1/4+1/8r;\,7/9-29/72r\right)$
3) **3)** сумму, разность, произведение и частное двух W-чисел по формуле (4).
   $W1+W2=(1+4;3+8;7+9)=(5;11;16)$
   $W1-W2=(1-4;3-8;7-9)=(-3;-5;-2)$
   $W1*W2=(1*4;\,3*8;\,7*9)=(4;\,24;\,63)$
   $W1:W2=(1/4;3/8;7/9)$
4) Нарисуйте результаты операций

Алгоритм решения задач с W-числами следующий:

A. Решить уравнения отдельно для параметров a, b и c.
B. Записать решение в виде W-числа с итоговыми значениями a, b и c

5) Решите уравнения:

W1+X=W2

W1·X=W2

6) Решите уравнение:
   $x^2+W2\cdot x+2=0$