Лабораторное занятие 3

Нечеткие числа. Нечеткая арифметика

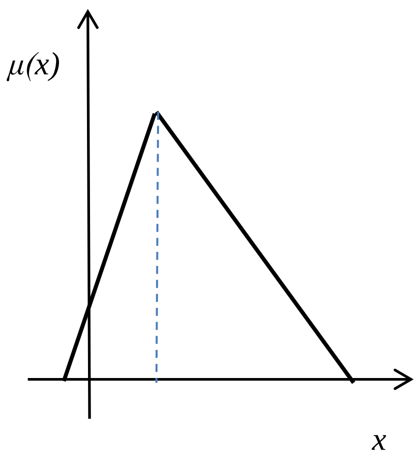
Рассмотрим специальные нечеткие множества, которые задаются на множестве действительных чисел и обладают некоторыми дополнительными свойствами. Наиболее общим понятием в этом контексте является нечеткая величина.

Нечеткая величина. Нечеткой величиной называется произвольное нечеткое множество $\tilde{A} = \{x / \mu_{\tilde{A}}(x)\}$, заданное на множестве действительных чисел R, т. е. для которого универсальным множеством X служит все множество R. Другими словами, функция принадлежности нечеткой величины есть отображение $\mu_{\tilde{A}}(x): \quad R \to [0, 1]$.

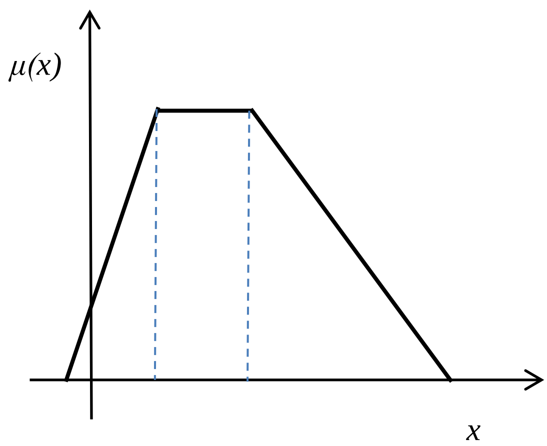
Если в качестве универсума взять подмножество неотрицательных действительных чисел R^+, то получим определение неотрицательной нечеткой величины $\tilde{A}^+$.

Нечеткий интервал. Нечетким интервалом называется такая нечеткая величина, функция принадлежности которой является выпуклой.

Нечеткое число. Нечетким числом называется такая нечеткая величина, функция принадлежности которой является выпуклой и унимодальной.



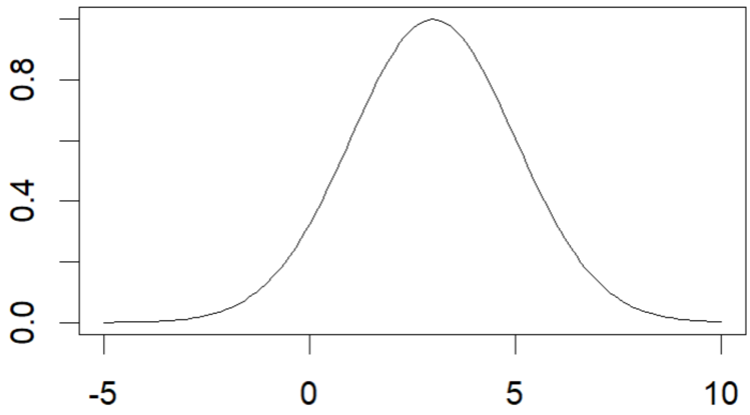
Нечеткое число



Нечеткий интервал

Пример. Нечеткое число «тройка» можно представить разными способами, например, с помощью треугольной функции принадлежности или гауссовой функции принадлежности.

$$\mu(x)=\begin{cases}0, x<1,\\ \dfrac{x-1}{2}, 1\le x<3,\\ \dfrac{5-x}{2}, 3\le x<5,\\ 0, x\ge 5\end{cases} \quad \text{или} \quad \mu(x)=e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$$



Классическая арифметика предоставляет методы выполнения операций сложения, вычитания, умножения и деления над четкими числами, такими как 4, 5, 6. В свою очередь, нечеткая арифметика определяет методы выполнения указанных операций над нечеткими числами, такими как:

примерно 4,

плюс/минус 5,

приблизительно 6.

В нечеткой арифметике базовые математические операции над нечеткими числами представляют собой обобщение соответствующих операций над обычными числами.

Правила такого обобщения предложены Заде в виде принципа обобщения.

Рассмотрим функцию $y= f(x)$, где f – четкое отображение: $f: \quad X \to Y$.

Пусть $\tilde{A}$ – нечеткое число с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$. Для построения образа нечеткого числа $\tilde{A}$ Заде предложил следующий подход:

образ множества $\tilde{A}$ при четком отображении f определяется как нечеткое подмножество $\tilde{B}$ множества Y, представляющее собой совокупность пар

$$\left(y, \mu_{\tilde{B}}(y)\right) = \left(f(x), \mu_{\tilde{A}}(x)\right), x \in X ,$$

где $\mu_{\tilde{B}}(y)$ – функция принадлежности образа.

Эту функцию можно записать

$\mu_{\tilde{B}}(y) = \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x / x = f^{-1}(y))$ для любого фиксированного $y \in Y$

или $\mu_{\tilde{B}}(y) = \bigvee\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x / x = f^{-1}(y))$.

Если отображение f является взаимно-однозначным, то

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\tilde{A}}(x / x = f^{-1}(y)).$$

Пример:

Пусть $\tilde{A}$ – множество «небольших неотрицательных целых чисел»:

$$\tilde{A} = \{0/1; \quad 1/0.8; \quad 2/0.6; \quad 3/0.4; \quad 4/0.2; \quad 5/0.1\}$$

Пусть $y = f(x) = x^2$.

Тогда нечеткое множество $\tilde{B}$: квадрат небольших неотрицательных целых чисел, являющееся образом $\tilde{A}$ имеет носитель

$$\{0; \quad 1; \quad 4; \quad 9; \quad 16; \quad 25\}$$

Найдем функцию принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(y)$: так как $f^{-1}(y) = y^{1/2}$ и отображение взаимно-однозначное, то

$$\tilde{B} = \{0/1; \quad 1/0.8; \quad 4/0.6; \quad 9/0.4; \quad 16/0.2; \quad 25/0.1\}.$$

Пример: Пусть $\tilde{A}$ – множество «целых чисел, близких к нулю»:

$$\tilde{A} = \{-3/0; \quad -2/0.5; \quad -1/0.8; \quad 0/1; \quad 1/0.9; \quad 2/0.6; \quad 3/0\}$$

Пусть $y = f(x) = x^2$.

Тогда носитель $\tilde{B}$: квадрат целых чисел, близких к нулю

$\{0; \quad 1; \quad 4; \quad 9\}$

Найдем функцию принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(y)$: так как $f^{-1}(y) = y^{1/2}$ и отображение не взаимно-однозначное, то

$$\tilde{B} = \{0/1; \quad 1/\max(0.8;0.9); \quad 4/\max(0.5;0.6); \quad 9/0\} = \{0/1; \quad 1/0.9; \quad 4/0.6; \quad 9/0\}$$

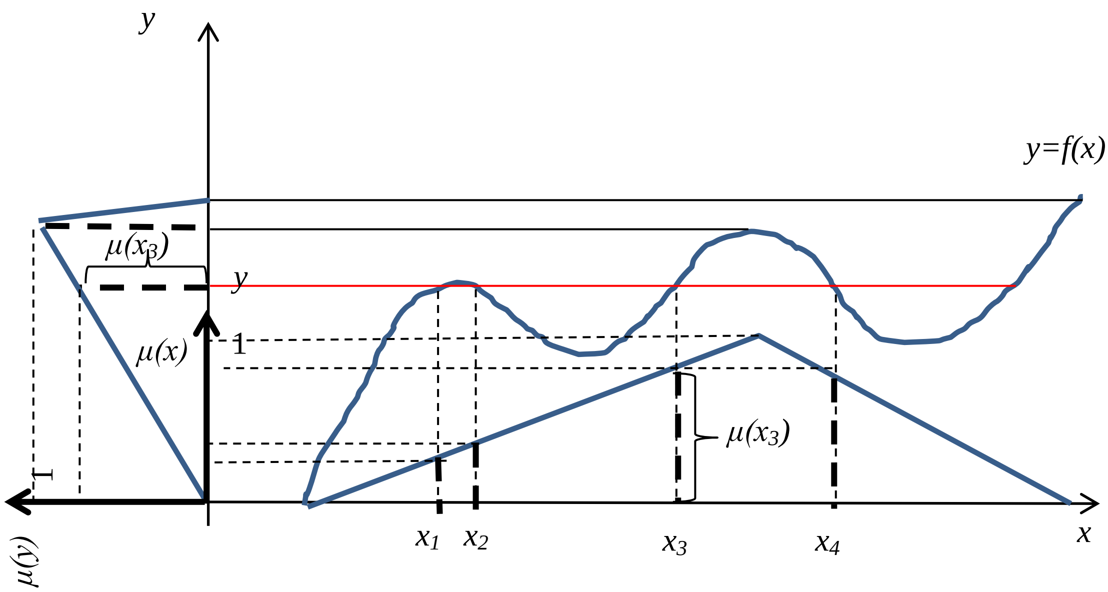
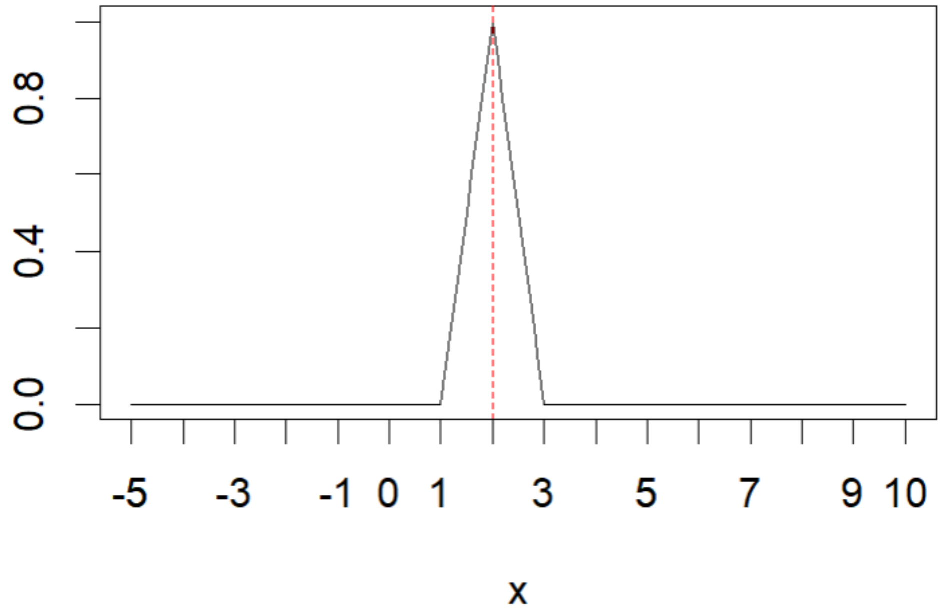


Иллюстрация принципа обобщения

Пример:

Пусть $\tilde{A}$ – нечеткое множество, «действительное число, приближенно равное двум», с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ x - 1, & 1 \le x < 2, \\ 3 - x, & 2 \le x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

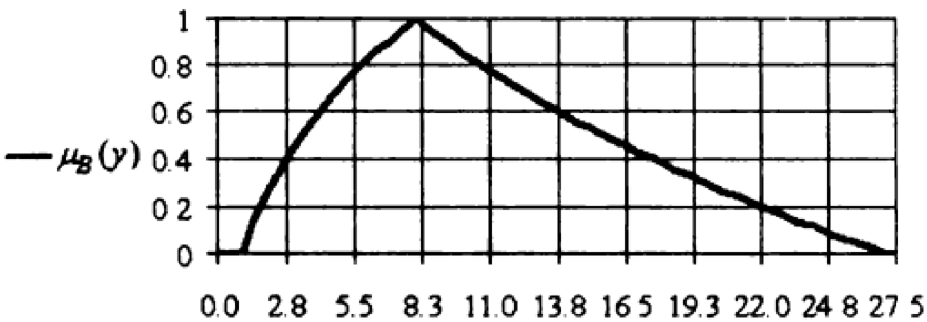


Зададим отображение : $y = x^3$.

Так как с ненулевыми значениями функции принадлежности значения x из интервала (1; 3), то y будет иметь ненулевые значения функции принадлежности в интервале (1; 27), при x=2, y=8.

Так как $x = y^{1/3}$, то

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \text{ или } y > 27, \\ y^{1/3} - 1, & 1 \le y < 8, \\ 3 - y^{1/3}, & 8 \le y \le 27. \end{cases}$$



Пример: Пусть $\tilde{A}$ – множество «небольших неотрицательных целых чисел»:

$\tilde{A} = \{0/1; \quad 1/0.8; \quad 2/0.6; \quad 3/0.4; \quad 4/0.2; \quad 5/0.1\}$

Пусть $y = f(x) = -x$.

Тогда $\tilde{B} = -\tilde{A} = \{0/1;\quad -1/0.8;\quad -2/0.6;\quad -3/0.4;\quad -4/0.2;\quad -5/0.1\}$ – множество небольших отрицательных чисел.

Задание: изобразите это число.

В общем пусть $y = f(x) = -x$ и известна $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

Тогда $\mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\tilde{A}}(x / x = -y)$.

Например, пусть $\tilde{A}$ – нечеткое множество, «действительное число, приближенно равное двум», с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ x-1, & 1 \le x < 2, \\ 3-x, & 2 \le x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Тогда $y = f(x) = -x$

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} 0, & -y < 1, \\ -y-1, & 1 \le -y < 2, \\ 3-(-y), & 2 \le -y \le 3, \\ 0, & -y > 3. \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} 0, & y > -1, \\ -y-1, & -2 \le y < -1, \\ 3+y, & -3 \le y \le -2, \\ 0, & y < -3. \end{cases}$$

Построить графики этих функций

Если операция унарная, то ее легко реализовать с нечеткими числами. Но для бинарных и вообще k-нарных операций ситуация существенно усложняется.

Пусть $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_k$ – набор произвольных нечетких чисел с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), ..., \mu_{\tilde{A}_k}(x_k)$ соответственно. Тогда функция принадлежности нечеткого числа $\tilde{B} = f(x_1, x_2, ..., x_k)$ имеет вид

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \sup\{\min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), ..., \mu_{\tilde{A}_k}(x_k)\} / y = f(x_1, x_2, ..., x_k)\} \qquad (1)$$

в более общем случае

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \vee\{\wedge\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), ..., \mu_{\tilde{A}_k}(x_k)\} / y = f(x_1, x_2, ..., x_k)\},$$

где операция $\vee$ может быть реализована с помощью Т-конормы, а $\wedge$ –с помощью Т-нормы.

В простейшем частном случае сложения двух нечетких чисел $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ соотношение упрощается

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \max_{\substack{x_1, x_2 \\ x_1 + x_2 = y}} \{\min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2)\}\}$$

Пример: пусть $\tilde{A}_1 = \{0/0.2; \quad 1/0.6; \quad 2/1; \quad 3/0.6; \quad 4/0.2\}$ – нечеткая двойка.

$\tilde{A}_2 = \{1/0.1; \quad 2/0,7; \quad 3/1; \quad 4/0.7; \quad 5/0.7; \quad 6/0.1\}$ – нечеткая тройка.

Тогда результат сложения $\tilde{B} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$ будет иметь носитель

{1, 2,...,10}

$$\begin{aligned}
&\tilde{B} = \{1/\min(0.2; 0.1); \quad 2/\max(\min(0.2; 0.7); \min(0.6; 0.1)); \\
&3/\max(\min(0.2; 1), \min(0.6; 0.7), \min(1; 0.1)); \quad 4/\max(0.2; 0.6; 0.7; 0.1); \\
&5/\max(0.2; 0.6; 1; 0.6; 0.1); 6/\max(0.2; 0.6; 0.7; 0.6; 0.1); \quad 7/\max(0.1; 0.7; 0.6; 0.2); \\
&8/\max(0.1; 0.6; 0.2); \quad 9/\max(0.1; 0.2); \quad 10/0.1\} = \\
&= \{1/0.1; 2/0.2; 3/0.6; 4/0.7; 5/1; 6/0.7; 7/0.7; 8/0.6; 9/0.2; 10/0.1\}
\end{aligned}$$

Задание: изобразить числа примерно 2 и примерно 3 и результат их сложения.

Аналогично определяются функции принадлежности результата операции вычитания, умножения и деления.

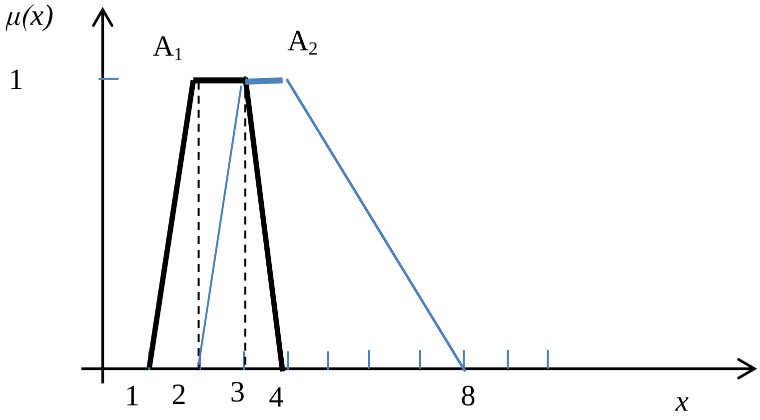
Задание: Найти сумму нечетких чисел «Нечеткая 2» и «Нечеткая “-2”»

Принцип обобщения на практике:

Нечеткие числа $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ заданы следующими трапециевидными функциями принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A}_1}(x) = \begin{cases} x - 1, & 1 < x \le 2, \\ 1, & 2 < x \le 3 \\ 4 - x, & 3 < x \le 4, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{A}_2}(x) = \begin{cases} x - 2, & 2 < x \le 3, \\ 1, & 3 < x \le 4 \\ 2 - x/4, & 4 < x \le 8, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Необходимо найти нечеткое число $\tilde{B} = \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2$.



Решение:

Перейдем от непрерывных нечетких чисел к дискретным. Для этого рассмотрим точки носителя первого числа {1, 2, 3 ,4}, второго числа {2, 3, 4, 8}. Тогда первое число заменим на дискретное $\tilde{A}_1$={1/0, 2/1, 3/1 ,4/0}, а второе на $\tilde{A}_2$={2/0, 3/1, 4/1, 8/0}.

Процесс выполнения умножения над нечеткими числами сведен в таблице.

$\tilde{B} = \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2$	2	3	4	6	8	9	12	16	24	32
$\tilde{A}_1$	1	1	1 2	2 3	2 4 1	3	3 4	2 4	3	4
$\tilde{A}_2$	2	3	4 2	3 2	4 2 8	3	4 3	8 4	8	8
$\mu_{\tilde{A}_1}(x)$	0	0	**0** 1	**1** 1	**1** **0** **0**	1	**1** **0**	1 **0**	1	0
$\mu_{\tilde{A}_2}(x)$	0	1	1 **0**	1 **0**	1 0 0	1	1 1	**0** 1	0	0
$\mu_{\tilde{B}}(x)$ =max	0	0	**0**	1	1	1	1	0	0	0

Получаем число $\tilde{B} = \{2/0;\ 3/0;\ 4/0;\ 6/1;\ 8/1;\ 9/1;\ 12/1;\ 16/0;\ 24/0;\ 32/0\}$

Если провести интерполяцию по внешнему контуру с помощью прямых, получим трапециевидное число $\tilde{B}(2, 6, 12, 32)$.

Задание: написать выражение для этого трапециевидного числа.

Задание: Исследовать, как изменится результат нечеткого обобщения при увеличении числа дискрет, на которых задаются аргументы, до 10.

Применение принципа обобщения Заде сопряжено с двумя трудностями:

1. большой объем вычислений;
2. необходимость построения верхней огибающей элементов результирующего нечеткого множества.

α - уровневый принцип обобщения

Более практичным по сравнению с принципом обобщения Заде является применение α-уровневого принципа обобщения. В этом случае нечеткие числа представляются в виде разложений по α-уровневым множествам:

$\tilde{A} = \bigcup\limits_{\alpha \in [0;1]} \alpha \cdot \left(\underline{\tilde{A}}_{\alpha}; \overline{\tilde{A}}_{\alpha} \right)$, где $\underline{\tilde{A}}_{\alpha} \left(\overline{\tilde{A}}_{\alpha} \right)$ – минимальное (максимальное) значение $\tilde{A}$ на α-уровне.

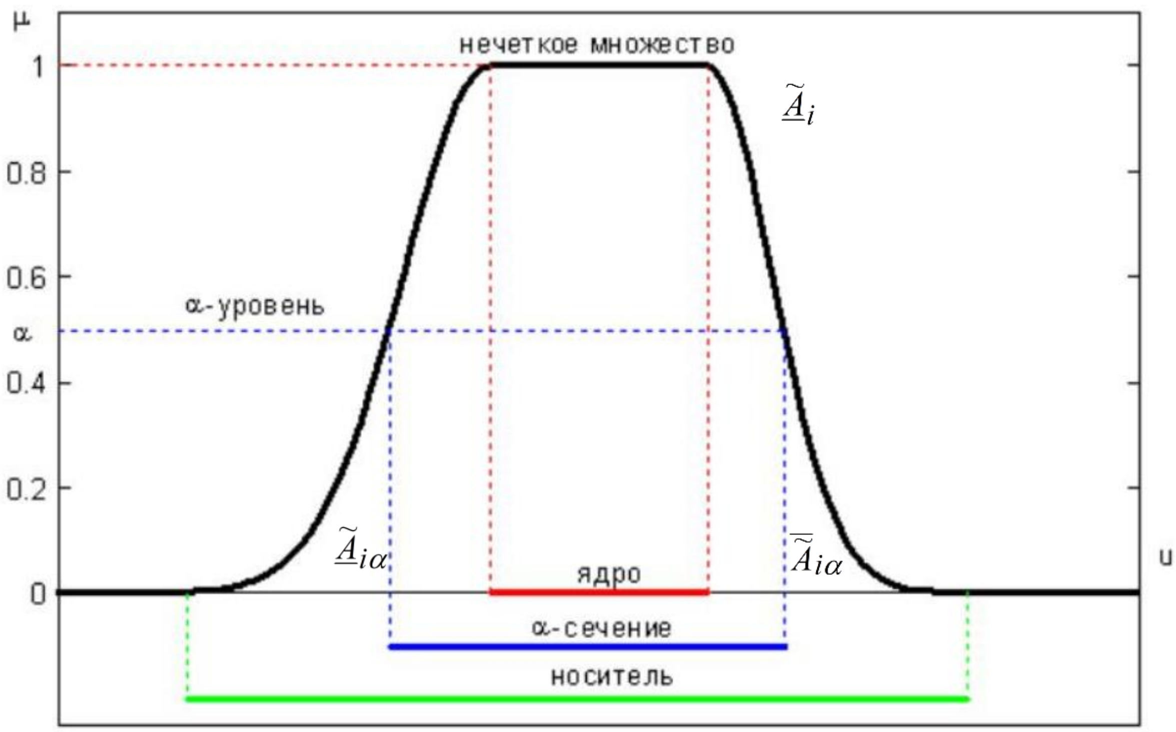
α-уровневый принцип обобщения: если $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ и аргументы x_i заданы нечеткими числами $\tilde{A}_i = \bigcup\limits_{\alpha \in (0;1]} \alpha \cdot \left(\underline{\tilde{A}}_{i\alpha}; \overline{\tilde{A}}_{i\alpha} \right)$, $i = \overline{1,n}$, то значением функции $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ называется нечеткое число $\tilde{B} = \bigcup\limits_{\alpha \in (0;1]} \alpha \cdot \left(\underline{\tilde{B}}_{\alpha}; \overline{\tilde{B}}_{\alpha} \right)$,

где

$$\underline{\tilde{B}}_{\alpha} = \inf_{\substack{x_{i,\alpha} : A_{i\alpha} \in \left(\underline{\tilde{A}}_{i\alpha}; \overline{\tilde{A}}_{i\alpha} \right), \\ i = \overline{1,n}}} f\left(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, ..., x_{n,\alpha}\right),$$ - точная нижняя грань

$$\overline{\tilde{B}}_{\alpha} = \sup_{\substack{x_{i,\alpha} : A_{i\alpha} \in \left(\underline{\tilde{A}}_{i\alpha}; \overline{\tilde{A}}_{i\alpha} \right), \\ i = \overline{1,n}}} f\left(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, ..., x_{n,\alpha}\right)$$

- точная верхняя грань

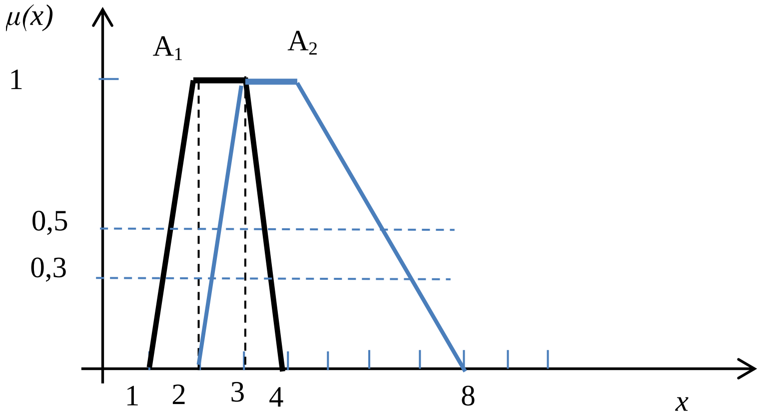


Применение α-уровневого принципа обобщения сводится к решению для каждого α- уровня следующей задачи оптимизации: найти максимальное и минимальное значения функции при условии, что аргументы могут принимать значения из соответствующих α - уровневых множеств. Количество α-уровней выбирают так, чтобы обеспечить необходимую точность вычислений.

Пример: рассмотрим пример из предыдущего занятия.

Нечеткие интервалы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ заданы следующими трапециевидными функциями принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A}_1}(x)=\begin{cases} x-1, & 1<x\le 2, \\ 1, & 2<x\le 3 \\ 4-x, & 3<x\le 4, \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{A}_2}(x)=\begin{cases} x-2, & 2<x\le 3, \\ 1, & 3<x\le 4 \\ 2-x/4, & 4<x\le 8, \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$



Необходимо найти нечеткий интервал $\tilde{B}=\tilde{A}_1\cdot\tilde{A}_2$.

Решение: Возьмем, например, α-уровни, равные 0,3, 0,5 и 1.

Тогда для α=0,3:

$\underline{\tilde{A}}_{1;\,0,3}$: $x-1=0.3,\ x=1.3$, следовательно, $\underline{\tilde{A}}_{1;\,0,3}=1.3$

$\overline{\tilde{A}}_{1;\,0.3}$: $4-x=0.3,\ x=3.7$, следовательно, $\overline{\tilde{A}}_{1;\,0.3}=3.7$

$\underline{\tilde{A}}_{2;\,0,3}$: $x-2=0.3,\ x=2.3$, следовательно, $\underline{\tilde{A}}_{2;\,0,3}=2.3$

$\overline{\tilde{A}}_{2;\,0.3}$: $2-x/4=0.3,\ x=7.2$, следовательно, $\overline{\tilde{A}}_{2;\,0.3}=7.2$

Для α=0,5:

$\underline{\tilde{A}}_{1;\,0,5}=1.5$, $\overline{\tilde{A}}_{1;\,0.5}=3.5$

$\underline{\tilde{A}}_{2;\,0,5}=2.5$, $\overline{\tilde{A}}_{2;\,0.5}=6$

Для α=1:

$\underline{\tilde{A}}_{1;\,1}=2$, $\overline{\tilde{A}}_{1;\,0.5}=3$

$\underline{\tilde{A}}_{2;\,0,5}=3$, $\overline{\tilde{A}}_{2;\,0.5}=4$

Тогда

$$\tilde{A}_1=0.3\cdot(1.3;\,3.7)_{0.3}\cup 0.5\cdot(1.5;\,3.5)_{0.5}\cup 1\cdot(2;\,3)_1$$

$$\tilde{A}_2=0.3\cdot(2.3;\,7.2)_{0.3}\cup 0.5\cdot(2.5;\,6)_{0.5}\cup 1\cdot(3;\,4)_1$$

$\tilde{B} = 0,3\cdot(1,3\cdot 2,3;\quad 3.7\cdot 7.2)_{0.3} \cup 0,5\cdot(1,5\cdot 2,5;\quad 3.5\cdot 6)_{0.5} \cup 1\cdot(2\cdot 3;\quad 3\cdot 4)_1 =$
$= 0,3\cdot(2.99;\quad 26.64)_{0.3} \cup 0,5\cdot(3.75;\quad 21)_{0.5} \cup 1\cdot(6;\quad 12)_1$

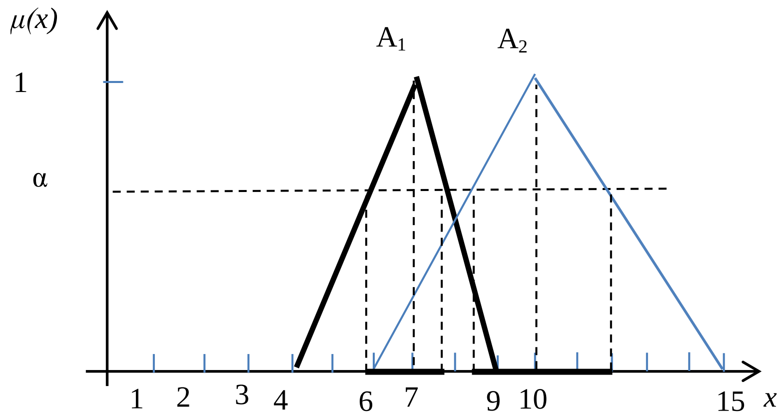
Пример:

Даны нечеткие числа $\tilde{A}_1$=«примерно 7» и $\tilde{A}_2$=«примерно 10».

$$\mu_{\tilde{A}_1}(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{3}, & 4 < x \le 7, \\ \frac{9-x}{2}, & 7 < x \le 9, \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{A}_2}(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{4}, & 6 < x \le 10, \\ \frac{15-x}{5}, & 10 < x \le 15, \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Выполнить арифметические операции над этими числами.

Решение:



Выразим границы множеств α-уровня для каждого нечеткого числа через α:

Для нечеткого числа $\tilde{A}_1$:

$$\frac{x-4}{3} = \alpha \Rightarrow \underline{A}_1 = 4 + 3\alpha$$

$$\frac{9-x}{2} = \alpha \Rightarrow \overline{A}_1 = 9 - 2\alpha$$

Таким образом, множеством α-уровня числа $\tilde{A}_1$ является отрезок $[\underline{A}_1; \overline{A}_1] = [4 + 3\alpha; 9 - 2\alpha]$, где $0 < \alpha \le 1$.

Для нечеткого числа $\tilde{A}_2$:

$$\frac{x-6}{4} = \alpha \Rightarrow \underline{A_2} = 6+4\alpha$$

$$\frac{15-x}{5} = \alpha \Rightarrow \overline{A_2} = 15-5\alpha$$

Множеством α-уровня числа $\tilde{A}_2$ является отрезок $\left[\underline{A}_2; \overline{A}_2\right] = [6+4\alpha; 15-5\alpha]$, где $0 < \alpha \le 1$.

Тогда

$$\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = \bigcup_{\alpha\in(0;1]} \alpha \cdot [4+3\alpha+6+4\alpha; 9-2\alpha+15-5\alpha] = \bigcup_{\alpha\in(0;1]} \alpha \cdot [10+7\alpha; 24-7\alpha],$$

$$\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 = \bigcup_{\alpha\in(0;1]} \alpha \cdot [4+3\alpha-15+5\alpha; 9-2\alpha-6-4\alpha] = \bigcup_{\alpha\in(0;1]} \alpha \cdot [-11+8\alpha; 3-6\alpha],$$

$$\tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2 = \bigcup_{\alpha\in(0;1]} \alpha \cdot [(4+3\alpha)\cdot(6+4\alpha); (9-2\alpha)\cdot(15-5\alpha)] =$$

$$= \bigcup_{\alpha\in(0;1]} \alpha \cdot \left[24+34\alpha+12\alpha^2; 135-75\alpha+10\alpha^2\right],$$

$$\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2} = \bigcup_{\alpha\in(0;1]} \alpha \cdot \left[\frac{4+3\alpha}{15-5\alpha}; \frac{9-2\alpha}{6+4\alpha}\right].$$

Задание: для значений $\alpha = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ составьте таблицу, где для каждой операции определите соответствующие множества α-уровня. Нарисуйте полученные множества.