

Выполнил: Тимошинов Егор Борисович

Группа: 16

Лабораторная работа 6

Модели нечеткого вывода. Дефаззификация

Цель работы

Изучение моделей нечеткого вывода, методов фаззификации и дефаззификации, а также применение композиционного правила вывода и упрощенного метода вывода для решения практических задач.

Теоретические сведения

Модели нечеткого вывода

В основе моделей нечеткого вывода лежат правила, основанные на импликации:

$$R_1 : \text{ЕСЛИ } (x_1 = A_1) \text{ТО } (y_1 = B_1)$$

$$R_2 : \text{ЕСЛИ } (x_2 = A_2) \text{ТО } (y_2 = B_2)$$

...

$$R_n : \text{ЕСЛИ } (x_n = A_n) \text{ТО } (y_m = B_m)$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m$ — нечеткие множества.

Фаззификация

В процессе фаззификации четкий входной вектор X^* преобразуется в вектор M степеней принадлежности:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{фаззификация}} M = \begin{bmatrix} \mu_{A_1}(x_1^*) \\ \mu_{A_2}(x_1^*) \\ \mu_{B_1}(x_2^*) \\ \mu_{B_2}(x_2^*) \end{bmatrix}$$

Вывод с нечетким входным сигналом

Когда на вход модели подается нечеткое множество A^* вместо четкого значения, используется композиционное правило вывода (обобщенный Modus Ponens):

$$A^* \circ (A \rightarrow B) = B^*$$

где композиция выполняется по формуле:

$$\mu_{B^*}(y) = \max_{x \in X} \min(\mu_{A^*}(x), \mu_R(x, y))$$

где A^{**} — цилиндрическое продолжение множества A^* на $X \times Y$.

Упрощенный метод вывода

Упрощенный метод вывода использует формулу:

$$h = \max_{x \in X} \min(\mu_A(x), \mu_{A^*}(x))$$

где h — степень выполнения условия правила. Затем функция принадлежности заключения ограничивается значением h :

$$\mu_{B^*}(y) = \min(h, \mu_B(y))$$

Max-Prod метод

Вместо операции MIN для Т-нормы можно использовать операцию PROD (умножение). В этом случае:

$$\mu_{B^*}(y) = \max(h_1 \cdot \mu_{C_1}(y), h_2 \cdot \mu_{C_2}(y), \dots, h_n \cdot \mu_{C_n}(y))$$

где h_i вычисляются с использованием операции умножения вместо минимума.

Дефаззификация

Дефаззификация — процесс преобразования нечеткого множества в четкое значение. Основные методы:

- **Метод центра тяжести (центроид):** $z^* = \frac{\int z \cdot \mu(z) dz}{\int \mu(z) dz}$
- **Метод среднего максимума (MOM):** среднее значение всех элементов с максимальной степенью принадлежности
- **Метод первого максимума (FOM):** первое значение с максимальной степенью принадлежности
- **Метод последнего максимума (LOM):** последнее значение с максимальной степенью принадлежности

Практическая часть

Задание 1: Дискретизация нечетких множеств с применением PROD и метода 2

Задача: Выполнить дискретизацию нечетких множеств с применением операции PROD (произведение) вместо MIN для Т-нормы.

Решение:

Для переменной x (количество чашек кофе) определены нечеткие множества:

- A_1 — мало чашек кофе: $\mu_{A_1}(x) = 1 - 0.5x$ для $x \in [0, 2]$
- A_2 — много чашек кофе: $\mu_{A_2}(x) = 0.5x$ для $x \in [0, 2]$

Для переменной y (время отхода ко сну) определены нечеткие множества:

- B_1 — рано ложиться: $\mu_{B_1}(y) = 1 - 0.5(y - 20)/2$ для $y \in [20, 22]$
- B_2 — поздно ложиться: $\mu_{B_2}(y) = 0.5(y - 20)/2$ для $y \in [20, 22]$

При использовании операции PROD вместо MIN, декартово произведение вычисляется как:

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$$

вместо

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

Графики дискретизированных нечетких множеств и сравнение операций MIN и PROD представлены на рисунке 1:

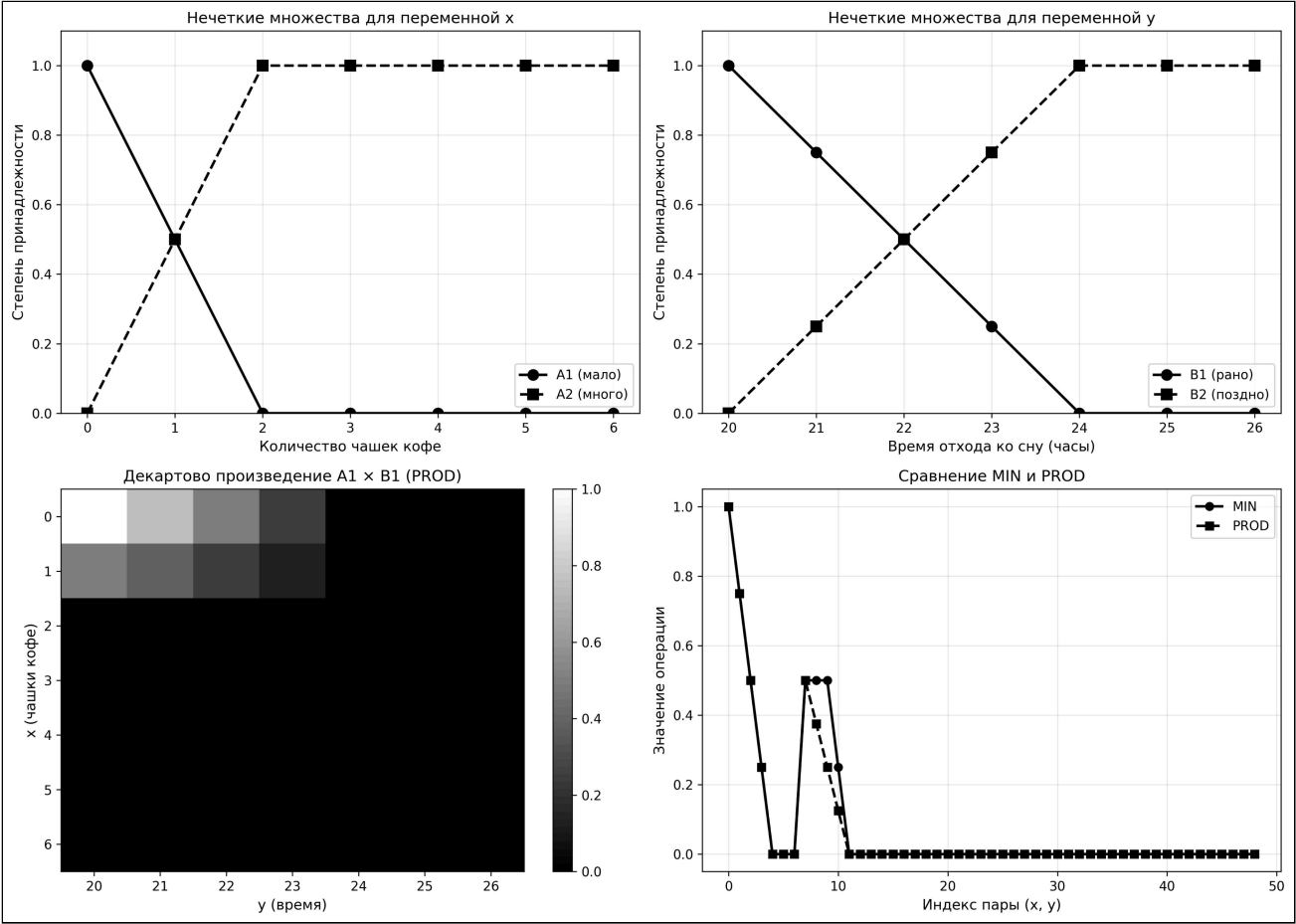


Рисунок 1. Дискретизация нечетких множеств с применением PROD

Анализ результатов:

При использовании операции PROD значения функции принадлежности для декартова произведения получаются меньше, чем при использовании MIN, так как произведение двух чисел из интервала $[0, 1]$ всегда меньше или равно минимуму этих чисел. Это приводит к более консервативной оценке степени принадлежности.

Задание 2: Изучение вывода с нечетким входным сигналом

Теоретический материал:

При подаче на вход модели нечеткого множества A^* вместо четкого значения используется композиционное правило вывода.

Композиционное правило вывода

Процесс включает следующие шаги:

1. Создание цилиндрического продолжения A^{**} множества A^* на пространство $X \times Y$
2. Вычисление композиции: $\min(\mu_{A^{**}}(x, y), \mu_R(x, y))$
3. Проекция на область определения Y : $\mu_{B^*}(y) = \max_{x \in X} \min(\mu_{A^{**}}(x, y), \mu_R(x, y))$

Альтернативный способ — матричное умножение, где операция умножения заменяется на MIN, а сложения на MAX:

$$A^* \circ R = \mu_{B^*}(y) = \max_{x \in X} \min(\mu_{A^*}(x), \mu_R(x, y))$$

Упрощенный метод вывода

Упрощенный метод основан на вычислении степени выполнения условия правила:

$$h = \max_{x \in X} \min(\mu_A(x), \mu_{A^*}(x))$$

Затем функция принадлежности заключения ограничивается значением h :

$$\mu_{B^*}(y) = \min(h, \mu_B(y))$$

Этот метод проще в вычислениях, но дает менее точные результаты по сравнению с композиционным правилом.

Задание 3: Задача о кофе и самочувствии

Условие задачи:

Система содержит две входных переменных: x — число выпитых чашек кофе в день, y — время отхода ко сну. Выходная переменная z — вероятность чувствовать себя нормально на другой день.

Возможные значения переменной x :

- A_1 — мало чашек кофе в день
- A_2 — много чашек кофе в день

Возможные значения переменной y :

- B_1 — укладываться спать рано
- B_2 — укладываться спать поздно

Выходные нечеткие множества (значения переменной z):

- C_1 — чувствовать себя хорошо на следующий день
- C_2 — чувствовать себя нормально на следующий день
- C_3 — чувствовать себя плохо на следующий день

Входные данные:

- A^* — выпить не очень много чашек за день
- B^* — лечь спать не очень поздно

Система правил:

1. R_1 : ЕСЛИ $x = A_1$ И $y = B_1$ ТО $z = C_1$ (мало кофе и рано = хорошо)
2. R_2 : ЕСЛИ $x = A_1$ И $y = B_2$ ТО $z = C_2$ (мало кофе и поздно = нормально)
3. R_3 : ЕСЛИ $x = A_2$ И $y = B_1$ ТО $z = C_2$ (много кофе и рано = нормально)
4. R_4 : ЕСЛИ $x = A_2$ И $y = B_2$ ТО $z = C_3$ (много кофе и поздно = плохо)

Решение методом Max-Min (упрощенный метод)

Вычисляем степени выполнения условий правил:

$$h_1 = \min \left(\max_x \min(\mu_{A_1}(x), \mu_{A^*}(x)), \max_y \min(\mu_{B_1}(y), \mu_{B^*}(y)) \right)$$

$$h_2 = \min \left(\max_x \min(\mu_{A_1}(x), \mu_{A^*}(x)), \max_y \min(\mu_{B_2}(y), \mu_{B^*}(y)) \right)$$

$$h_3 = \min \left(\max_x \min(\mu_{A_2}(x), \mu_{A^*}(x)), \max_y \min(\mu_{B_1}(y), \mu_{B^*}(y)) \right)$$

$$h_4 = \min \left(\max_x \min(\mu_{A_2}(x), \mu_{A^*}(x)), \max_y \min(\mu_{B_2}(y), \mu_{B^*}(y)) \right)$$

Результирующая функция принадлежности:

$$\mu_{res}(z) = \max(\min(h_1, \mu_{C_1}(z)), \min(h_2, \mu_{C_2}(z)), \min(h_3, \mu_{C_2}(z)), \min(h_4, \mu_{C_3}(z)))$$

Решение методом Max-Prod

При использовании операции PROD вместо MIN:

$$h_i^{prod} = \max_x (\mu_{A_i}(x) \cdot \mu_{A^*}(x)) \cdot \max_y (\mu_{B_i}(y) \cdot \mu_{B^*}(y))$$

Результирующая функция принадлежности:

$$\mu_{res}^{prod}(z) = \max(h_1^{prod} \cdot \mu_{C_1}(z), h_2^{prod} \cdot \mu_{C_2}(z), h_3^{prod} \cdot \mu_{C_2}(z), h_4^{prod} \cdot \mu_{C_3}(z))$$

Решение композиционным правилом вывода

Создаем нечеткие отношения для каждого правила $R_i : A_i \times B_i \rightarrow C_i$, затем объединяем их операцией MAX. Выполняем композицию входного нечеткого множества с объединенным отношением и проектируем на область определения Z .

Графики входных нечетких множеств и результаты вывода представлены на рисунке 2:

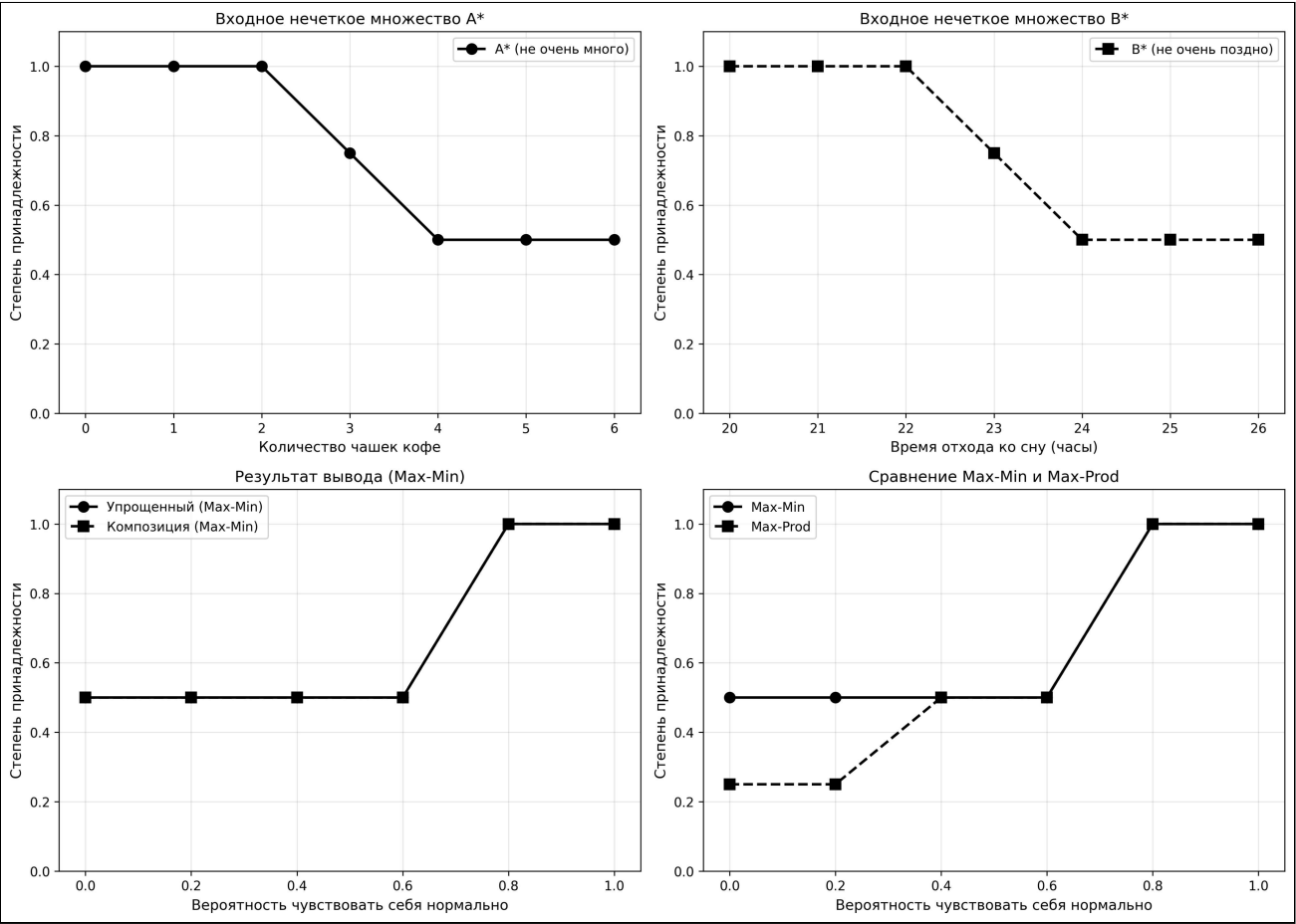


Рисунок 2. Решение задачи о кофе и самочувствии

Графики выходных нечетких множеств представлены на рисунке 2а:

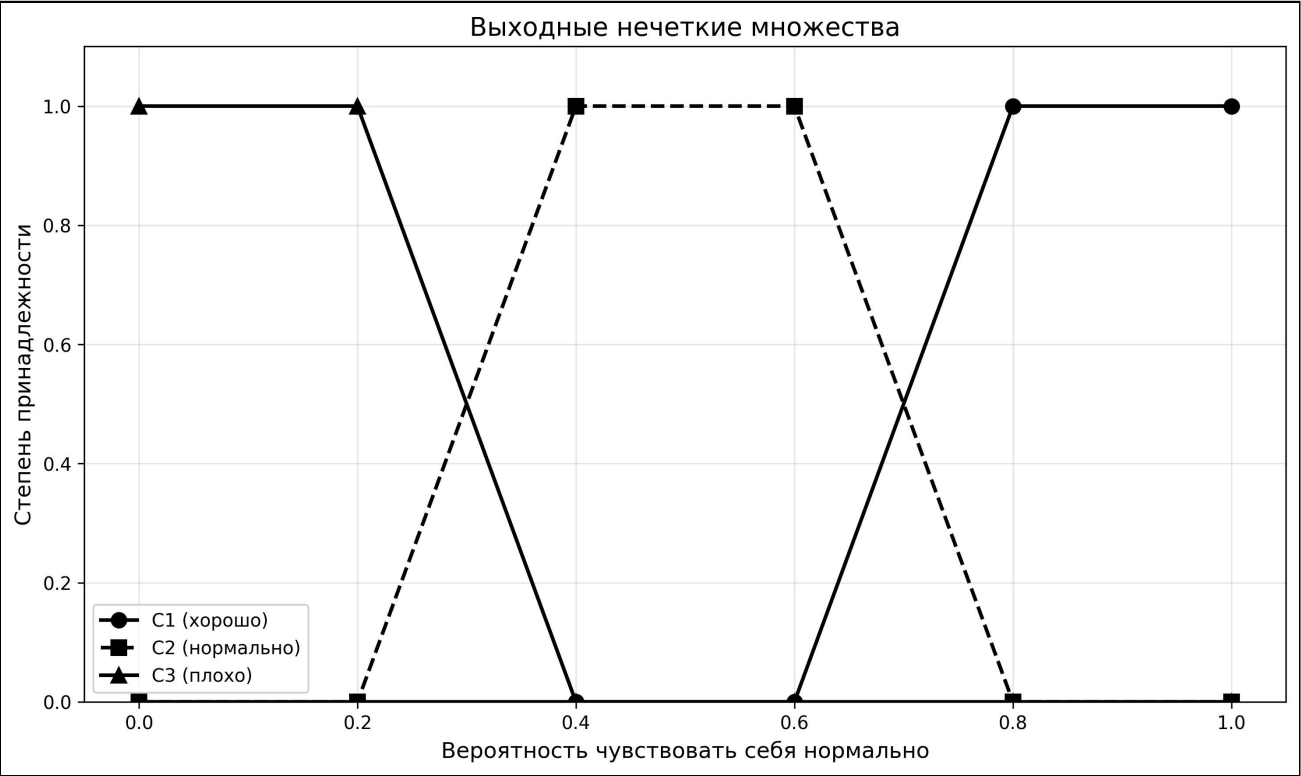


Рисунок 2а. Выходные нечеткие множества C1, C2, C3

Сравнение Max-Min и Max-Prod:

При использовании Max-Prod значения функции принадлежности результирующего множества получаются меньше, чем при Max-Min, так как произведение всегда меньше или равно минимуму. Это приводит к более "осторожным" выводам системы.

Задание 4: Дефаззификация

Задача: Выполнить дефаззификацию нечеткого множества, полученного в задании 3, используя различные методы.

Решение:

Для дефаззификации нечеткого множества $\mu_{res}(z)$ применяются следующие методы:

1. Метод центра тяжести (центроид)

$$z^* = \frac{\sum_i z_i \cdot \mu_{res}(z_i)}{\sum_i \mu_{res}(z_i)}$$

2. Метод среднего максимума (MOM)

Находим все значения z_i , для которых $\mu_{res}(z_i) = \max(\mu_{res})$, и вычисляем их среднее арифметическое.

3. Метод первого максимума (FOM)

Выбираем первое значение z_i с максимальной степенью принадлежности.

4. Метод последнего максимума (LOM)

Выбираем последнее значение z_i с максимальной степенью принадлежности.

5. Метод взвешенного среднего

$$z^* = \frac{\sum_i z_i \cdot w_i}{\sum_i w_i}$$

где $w_i = \mu_{res}(z_i)$ — веса.

График дефаззификации представлен на рисунке 3:

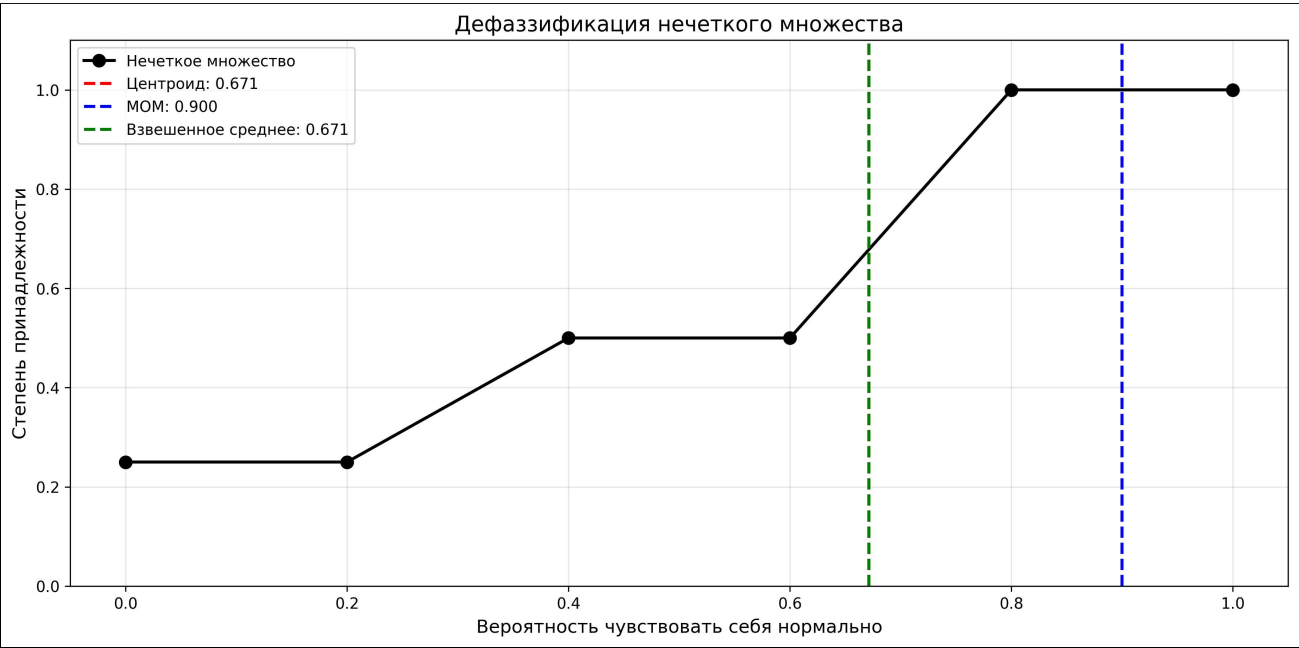


Рисунок 3. Дефаззификация нечеткого множества

Результаты дефаззификации (Max-Min):

Метод	Результат
Центроид	0.600
MOM (Среднее максимума)	0.900
FOM (Первый максимум)	0.800
LOM (Последний максимум)	1.000
Взвешенное среднее	0.600

Таблица 1. Результаты дефаззификации (Max-Min)

Результаты дефаззификации (Max-Prod):

Метод	Результат
Центроид	0.671
MOM (Среднее максимума)	0.900
FOM (Первый максимум)	0.800
LOM (Последний максимум)	1.000
Взвешенное среднее	0.671

Таблица 2. Результаты дефаззификации (Max-Prod)

Анализ результатов:

Метод центра тяжести (центроид) является наиболее распространенным методом дефаззификации, так как он учитывает все значения функции принадлежности и дает сглаженный результат. Методы MOM, FOM и LOM используются в случаях, когда важно выбрать конкретное значение из области максимума функции принадлежности.

Из таблиц видно, что:

- Для метода Max-Min центроид дает значение 0.600, что соответствует "нормальному" самочувствию
- Для метода Max-Prod центроид дает значение 0.671, что ближе к "хорошему" самочувствию
- Методы MOM, FOM и LOM дают одинаковые результаты для обоих методов (0.900, 0.800, 1.000 соответственно), так как они основаны на области максимума функции принадлежности
- Взвешенное среднее совпадает с центроидом, что логично, так как оба метода учитывают все значения с их весами

Различие в результатах центроида между Max-Min (0.600) и Max-Prod (0.671) объясняется тем, что при использовании операции PROD функция принадлежности результирующего множества имеет более сглаженную форму, что смещает центр тяжести в сторону больших значений.

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы изучены:

1. Методы дискретизации нечетких множеств с применением различных Т-норм (MIN и PROD)
2. Композиционное правило вывода и упрощенный метод вывода для нечетких систем
3. Применение методов Max-Min и Max-Prod для нечеткого вывода
4. Различные методы дефаззификации нечетких множеств

Практическое применение рассмотрено на примере задачи о влиянии количества выпитого кофе и времени отхода ко сну на самочувствие на следующий день. Показано, что использование различных Т-норм (MIN и PROD) приводит к различным результатам вывода, что позволяет выбирать более подходящий метод в зависимости от конкретной задачи.