

Выполнил: Тимошинов Егор Борисович

Группа: 16

Лабораторная работа 7

Модель Мамдани (часть 1)

Цель работы

Изучение модели Мамдани как одного из основных методов нечеткого логического вывода, понимание этапов её работы (фазификация, активация правил, агрегация, дефазификация) и практическое применение для решения задачи определения самочувствия на основе количества выпитого кофе и времени отхода ко сну.

Теоретические сведения

Модель Мамдани

Модель Мамдани — один из наиболее распространенных методов нечеткого логического вывода, предложенный Эбрахимом Мамдани в 1975 году. Данная модель использует нечеткие множества как в посылках (антецедентах), так и в заключениях (консеквентах) правил.

Модель Мамдани состоит из следующих этапов:

1. **Фазификация:** преобразование четких входных значений в степени принадлежности нечетким множествам.
2. **Активация правил:** вычисление степени выполнения условий каждого правила с использованием Т-нормы (обычно MIN).
3. **Ограничение выходных множеств:** применение степени активации к выходным нечетким множествам (усечение).
4. **Агрегация:** объединение выходных множеств всех правил с использованием Т-конормы (обычно MAX).
5. **Дефазификация:** преобразование результирующего нечеткого множества в четкое выходное значение.

Математическое описание

Рассмотрим систему нечетких правил:

$$R_1 : \text{ЕСЛИ } (x_1 = A_1) \text{ И } (x_2 = B_1) \text{ ТО } (y = C_1)$$

$$R_2 : \text{ЕСЛИ } (x_1 = A_2) \text{ И } (x_2 = B_2) \text{ ТО } (y = C_2)$$

...

Этап 1: Фазификация

Для четких входных значений x_1^* и x_2^* вычисляются степени принадлежности:

$$\mu_{A_i}(x_1^*), \quad \mu_{B_j}(x_2^*)$$

Этап 2: Активация правил

Степень активации правила вычисляется как минимум (Т-норма MIN) степеней принадлежности условий:

$$h_i = \min(\mu_{A_i}(x_1^*), \mu_{B_j}(x_2^*))$$

Этап 3: Ограничение выходных множеств

Выходное нечеткое множество каждого правила ограничивается значением степени активации:

$$\mu_{C_i^*}(y) = \min(h_i, \mu_{C_i}(y))$$

Этап 4: Агрегация

Результирующее выходное множество получается объединением всех ограниченных множеств с использованием максимума (Т-конорма MAX):

$$\mu_{res}(y) = \max(\mu_{C_1^*}(y), \mu_{C_2^*}(y), \dots, \mu_{C_n^*}(y))$$

Этап 5: Дефазификация

Наиболее распространенный метод дефазификации — метод центра тяжести (центроид):

$$y^* = \frac{\int y \cdot \mu_{res}(y) dy}{\int \mu_{res}(y) dy}$$

В дискретном случае:

$$y^* = \frac{\sum_i y_i \cdot \mu_{res}(y_i)}{\sum_i \mu_{res}(y_i)}$$

Практическая часть

Задание: Определение самочувствия на основе количества кофе и времени отхода ко сну

Постановка задачи:

Разработать модель Мамдани для определения вероятности хорошего самочувствия на следующий день на основе двух входных переменных:

- x — количество выпитых чашек кофе в день (диапазон: 0–6 чашек)
- y — время отхода ко сну (диапазон: 20:00–02:00, представлено как 20–26)

Выходная переменная:

- z — вероятность хорошего самочувствия на следующий день (диапазон: 0–1)

Нечеткие множества входных переменных

Для переменной x (количество чашек кофе):

- A_1 — мало чашек кофе:

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 - 0.5x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

- A_2 — много чашек кофе:

$$\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 0.5x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0.5x, & x > 2 \end{cases}$$

Для переменной y (время отхода ко сну):

- B_1 — рано ложиться спать (до 22:00):

$$\mu_{B_1}(y) = \begin{cases} 1 - 0.5 \frac{y-20}{2}, & 20 \leq y \leq 22 \\ 0, & y > 22 \end{cases}$$

- B_2 — поздно ложиться спать (после 22:00):

$$\mu_{B_2}(y) = \begin{cases} 0.5 \frac{y-20}{2}, & 20 \leq y \leq 22 \\ 0.5 \frac{y-20}{2}, & y > 22 \end{cases}$$

Нечеткие множества выходной переменной

Для переменной z (вероятность хорошего самочувствия):

- C_1 — чувствовать себя хорошо (трапециевидная функция с максимумом на $[0.4, 0.6]$)
- C_2 — чувствовать себя нормально (трапециевидная функция с максимумом на $[0.4, 0.6]$)
- C_3 — чувствовать себя плохо (убывающая функция с максимумом при $z = 0$)

Система правил

1. R_1 : ЕСЛИ $x = A_1$ (мало кофе) И $y = B_1$ (рано) ТО $z = C_1$ (хорошо)
2. R_2 : ЕСЛИ $x = A_1$ (мало кофе) И $y = B_2$ (поздно) ТО $z = C_2$ (нормально)
3. R_3 : ЕСЛИ $x = A_2$ (много кофе) И $y = B_1$ (рано) ТО $z = C_2$ (нормально)
4. R_4 : ЕСЛИ $x = A_2$ (много кофе) И $y = B_2$ (поздно) ТО $z = C_3$ (плохо)

Решение

Рассмотрим пример: выпито $x^* = 1.5$ чашек кофе, отход ко сну в $y^* = 21.5$ (21:30).

Шаг 1: Фаззификация

Вычисляем степени принадлежности входных значений:

- $\mu_{A_1}(1.5) = 1 - 0.5 \cdot 1.5 = 0.25$
- $\mu_{A_2}(1.5) = 0.5 \cdot 1.5 = 0.75$
- $\mu_{B_1}(21.5) = 1 - 0.5 \cdot \frac{21.5-20}{2} = 0.625$
- $\mu_{B_2}(21.5) = 0.5 \cdot \frac{21.5-20}{2} = 0.375$

Шаг 2: Активация правил (MIN для условий)

| Правило | Условие | Степень активации h_i |
|---------|----------------------|-----------------------------------|
| R_1 | $A_1 \text{ И } B_1$ | $h_1 = \min(0.25, 0.625) = 0.25$ |
| R_2 | $A_1 \text{ И } B_2$ | $h_2 = \min(0.25, 0.375) = 0.25$ |
| R_3 | $A_2 \text{ И } B_1$ | $h_3 = \min(0.75, 0.625) = 0.625$ |
| R_4 | $A_2 \text{ И } B_2$ | $h_4 = \min(0.75, 0.375) = 0.375$ |

Шаг 3: Ограничение выходных множеств

Для каждого правила ограничиваем выходное множество значением степени активации:

- $\mu_{C_1^*}(z) = \min(0.25, \mu_{C_1}(z))$ для правила R_1
- $\mu_{C_2^*}(z) = \min(0.25, \mu_{C_2}(z))$ для правила R_2
- $\mu_{C_2^*}(z) = \min(0.625, \mu_{C_2}(z))$ для правила R_3
- $\mu_{C_3^*}(z) = \min(0.375, \mu_{C_3}(z))$ для правила R_4

Шаг 4: Агрегация (MAX для объединения)

Результирующая функция принадлежности:

$$\mu_{res}(z) = \max(\min(0.25, \mu_{C_1}(z)), \min(0.25, \mu_{C_2}(z)), \min(0.625, \mu_{C_2}(z)), \min(0.375, \mu_{C_3}(z)))$$

Шаг 5: Дефазификация

Используя метод центра тяжести (центроид), получаем четкое выходное значение z^* .

Графики входных нечетких множеств, процесса активации правил и результата агрегации представлены на следующих рисунках:

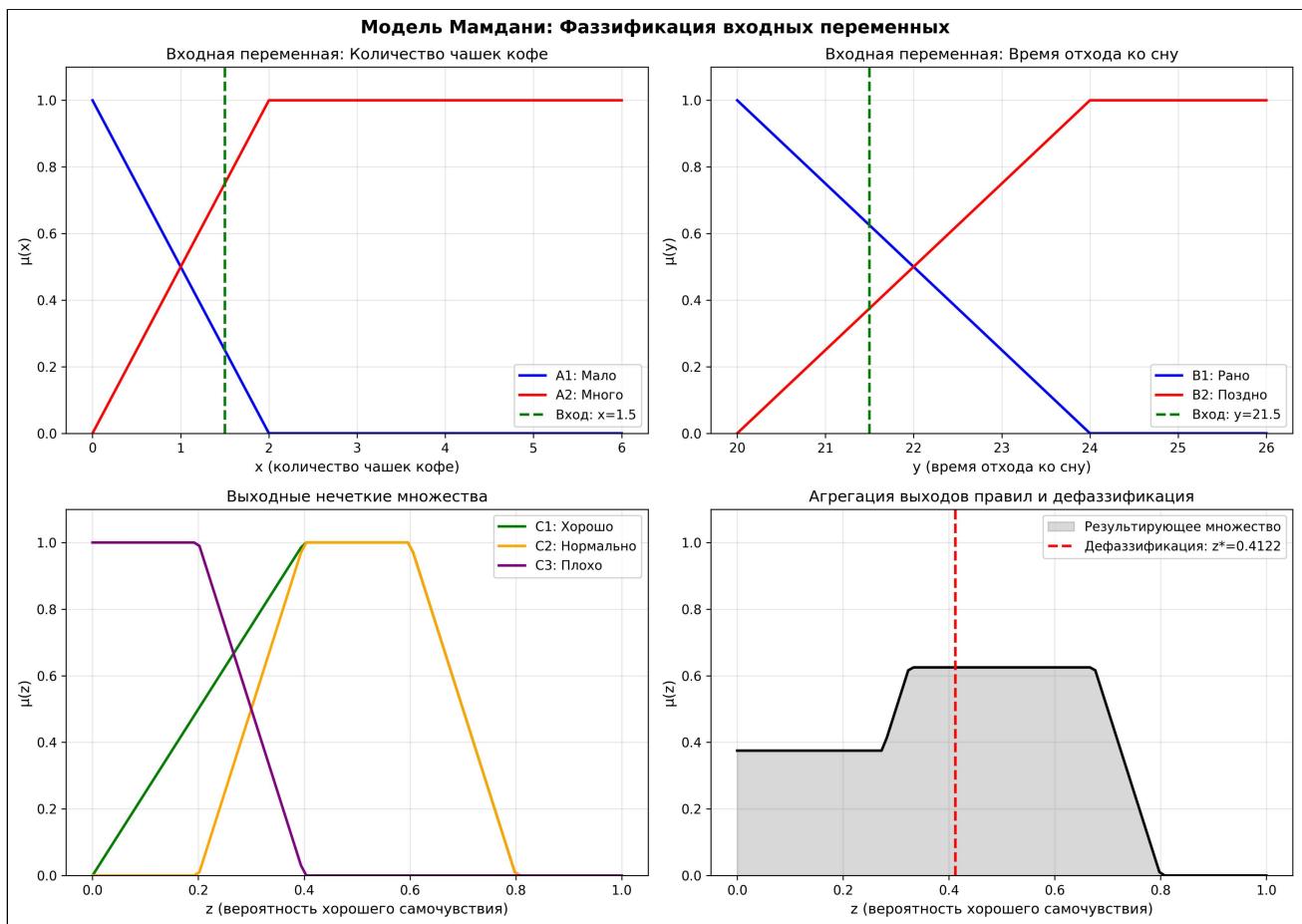


Рисунок 1. Фаззификация входных переменных и выходные нечеткие множества

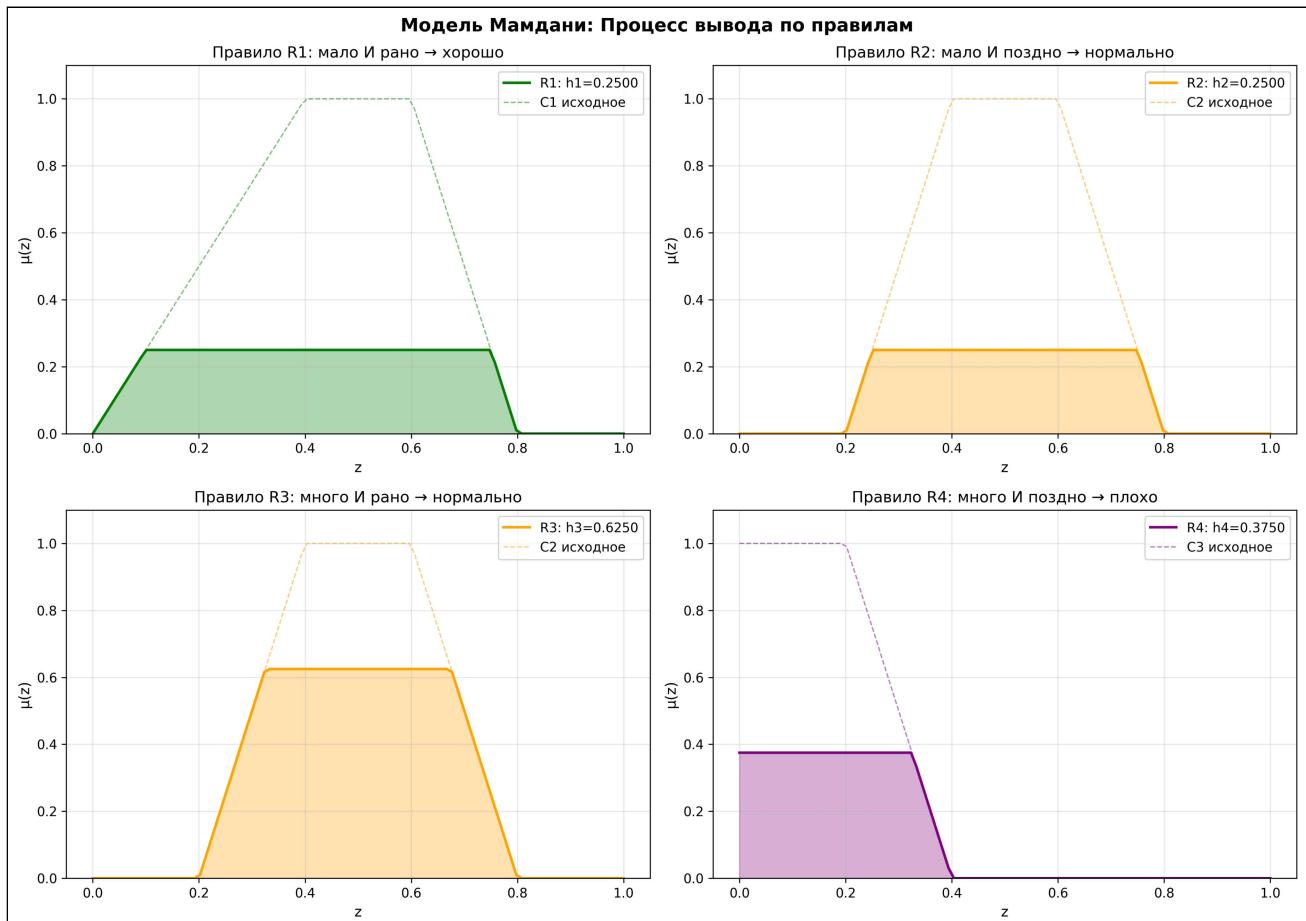


Рисунок 2. Процесс активации правил модели Мамдани

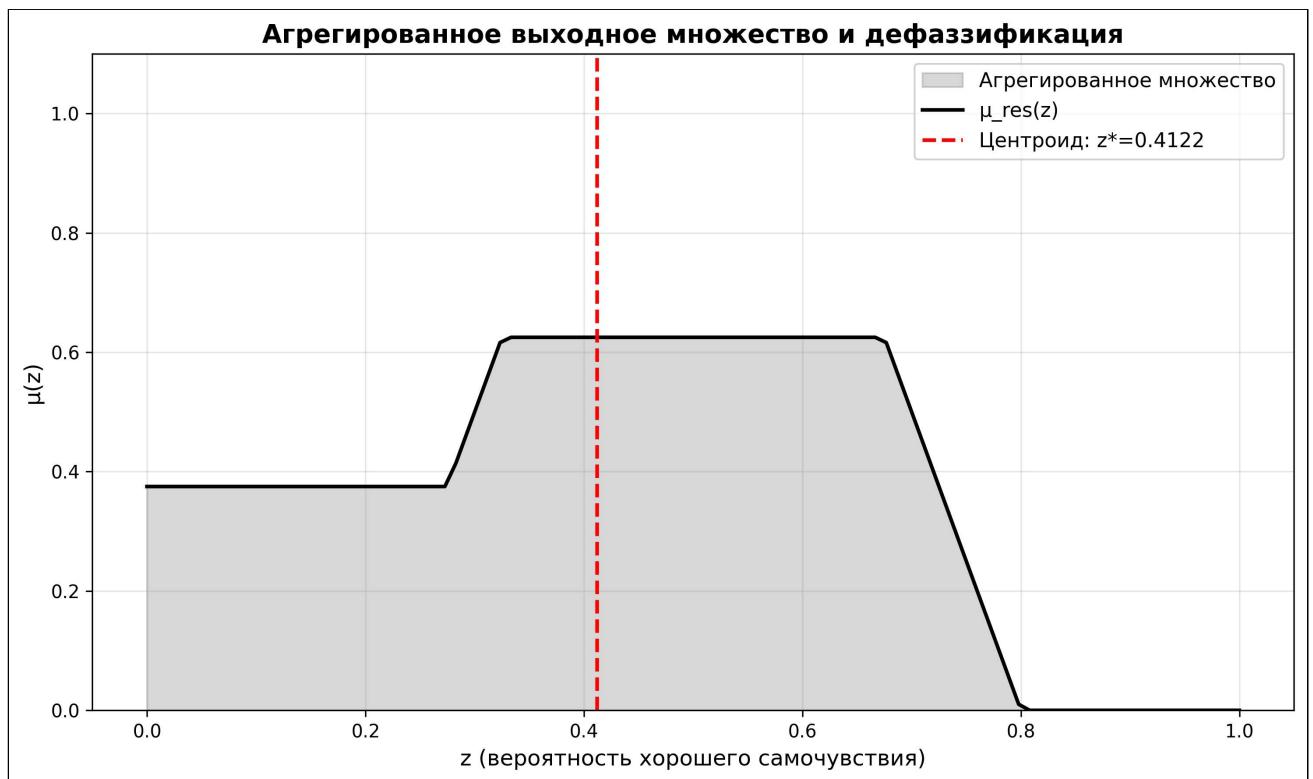


Рисунок 3. Агрегированное выходное множество и результат дефазификации

Анализ результатов:

Модель Мамдани позволяет учесть все правила одновременно и получить результирующее нечеткое множество, которое отражает комбинированное влияние всех условий. Дефазификация преобразует это нечеткое множество в конкретное числовое значение вероятности хорошего самочувствия.

В данном примере наибольшую активацию получило правило R_3 ($h_3 = 0.625$), что соответствует ситуации "много кофе и рано спать", приводящей к "нормальному" самочувствию. Это объясняется тем, что хотя выпито не очень много кофе (1.5 чашки соответствует больше "много", чем "мало"), но и легли спать не очень поздно, что компенсирует влияние кофеина.

Особенности модели Мамдани

Модель Мамдани имеет следующие характеристики:

- **Интерпретируемость:** выходные нечеткие множества имеют четкий семантический смысл, что делает модель понятной для экспертов.
- **Гибкость:** возможность использования различных Т-норм и Т-конорм для операций И и ИЛИ.
- **Вычислительная эффективность:** алгоритм является достаточно простым для реализации.
- **Применимость:** модель хорошо подходит для задач, где важна экспертная интерпретация результатов.

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы:

1. Изучена модель Мамдани как метод нечеткого логического вывода.
2. Реализованы все этапы модели Мамдани: фазификация, активация правил, ограничение выходных множеств, агрегация и дефазификация.
3. Применена модель Мамдани для решения практической задачи определения самочувствия на основе количества выпитого кофе и времени отхода ко сну.
4. Продемонстрировано, что модель Мамдани позволяет учитывать все правила одновременно и получать интерпретируемые результаты.

Модель Мамдани является эффективным инструментом для решения задач нечеткого вывода, особенно когда требуется сохранить семантику нечетких множеств в выходных результатах и обеспечить понятность модели для экспертов.