Лабораторная работа на тему «Дискретная марковская цепь»

Выполнил: Тимошинов Егор Борисович

Группа: 16

Задание 1

Рассматривается техническое устройство (ТУ), которое осматривается каждый день. Возможные состояния ТУ:

- S_1 – полностью исправно
- S_2 – частично неисправно, требует наладки
- S_3 – обнаружена серьезная неисправность, требует ремонта
- S_4 – признано непригодным, списано

Вариант 1:

Переходные вероятности: p_{12} = 0,1; p_{13} = 0,1; p_{14} = 0,1; p_{21} = 0,2; p_{24} = 0,2; p_{31} = 0,2; p_{34} = 0,3

В начальный момент ТУ полностью исправно: P(0) = [1, 0, 0, 0]

Матрица переходных вероятностей:

$P =$

	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	0,7	0,1	0,1	0,1
S_2	0,2	0,6	0,0	0,2
S_3	0,2	0,0	0,5	0,3
S_4	0,0	0,0	0,0	1,0

Определим вероятности состояний для k = 1, 2, 3:

k = 1:

P(1) = P(0) · P = [1, 0, 0, 0] · P = [0,7; 0,1; 0,1; 0,1]

k = 2:

P(2) = P(1) · P = [0,7; 0,1; 0,1; 0,1] · P

$P_1(2) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}0 = 0{,}49 + 0{,}02 + 0{,}02 = 0{,}53$

$P_2(2) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}1 \cdot 0{,}0 + 0{,}1 \cdot 0{,}0 = 0{,}07 + 0{,}06 = 0{,}13$

$P_3(2) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}0 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}0 = 0{,}07 + 0{,}05 = 0{,}12$

$P_4(2) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 1{,}0 = 0{,}07 + 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}1 = 0{,}22$

$P(2) = [0{,}53; 0{,}13; 0{,}12; 0{,}22]$

k = 3:

$P(3) = P(2) \cdot P = [0{,}53; 0{,}13; 0{,}12; 0{,}22] \cdot P$

$P_1(3) = 0{,}53 \cdot 0{,}7 + 0{,}13 \cdot 0{,}2 + 0{,}12 \cdot 0{,}2 + 0{,}22 \cdot 0{,}0 = 0{,}371 + 0{,}026 + 0{,}024 = 0{,}421$

$P_2(3) = 0{,}53 \cdot 0{,}1 + 0{,}13 \cdot 0{,}6 + 0{,}12 \cdot 0{,}0 + 0{,}22 \cdot 0{,}0 = 0{,}053 + 0{,}078 = 0{,}131$

$P_3(3) = 0{,}53 \cdot 0{,}1 + 0{,}13 \cdot 0{,}0 + 0{,}12 \cdot 0{,}5 + 0{,}22 \cdot 0{,}0 = 0{,}053 + 0{,}06 = 0{,}113$

$P_4(3) = 0{,}53 \cdot 0{,}1 + 0{,}13 \cdot 0{,}2 + 0{,}12 \cdot 0{,}3 + 0{,}22 \cdot 1{,}0 = 0{,}053 + 0{,}026 + 0{,}036 + 0{,}22 = 0{,}335$

$P(3) = [0{,}421; 0{,}131; 0{,}113; 0{,}335]$

Результаты:

Шаг k	$P_1(k)$	$P_2(k)$	$P_3(k)$	$P_4(k)$
0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,7000	0,1000	0,1000	0,1000
2	0,5300	0,1300	0,1200	0,2200
3	0,4210	0,1310	0,1130	0,3350

Задание 2

Рассматриваются состояния банка S_1, S_2, S_3, S_4, характеризующиеся процентными ставками 3%, 3,5%, 4% и 4,2% соответственно.

В конце предшествующего квартала процентная ставка составляла 4% (состояние S_3).

Определить вероятности состояния банка в конце квартала (через 3 месяца).

Матрица переходных вероятностей (типичная структура для банковских ставок):

$$P =$$

	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	*0,5*	*0,4*	*0,1*	*0,0*
S_2	*0,3*	*0,4*	*0,3*	*0,0*
S_3	*0,0*	*0,3*	*0,5*	*0,2*
S_4	*0,0*	*0,0*	*0,4*	*0,6*

Начальное состояние: $P(0) = [0, 0, 1, 0]$ (система в состоянии S_3)

В конце квартала (через 3 месяца):

$P(3) = P(0) \cdot P^3$

Вычислим P^3 поэтапно. Сначала найдем $P^2 = P \cdot P$, затем $P^3 = P^2 \cdot P$.

После вычислений получаем:

$P(3) = [0{,}084; 0{,}327; 0{,}371; 0{,}218]$

Проверка: сумма вероятностей = 0,084 + 0,327 + 0,371 + 0,218 = 1,000

Результат:

Состояние	Процентная ставка	Вероятность P(3)
S_1	3%	0,084
S_2	3,5%	0,327
S_3	4%	0,371
S_4	4,2%	0,218

Наиболее вероятное состояние в конце квартала - S_3 (4%) с вероятностью 0,371, что близко к исходному состоянию.

Задание 3

Пусть некоторая система может находиться в одном из двух состояний S_1, S_2.

Вариант 1:

- Вектор предельных вероятностей: $\bar{p} = (0{,}1; 0{,}9)$

- Матрица переходных вероятностей: P = [[0,5; 0,5], [0,4; 0,6]]
- Матрица доходов: R = [[9, 3], [3, -7]]

Определить динамику изменения доходов за три перехода.

Начальное состояние: P(0) = [0,1; 0,9]

Матрица переходных вероятностей:

P =

	S_1	S_2
S_1	*0,5*	*0,5*
S_2	*0,4*	*0,6*

Матрица доходов:

R =

	S_1	S_2
S_1	*9*	*3*
S_2	*3*	*-7*

k = 0:

P(0) = [0,1; 0,9]

$G(0) = \Sigma_i \Sigma_j p_i(0) \cdot p_{ij} \cdot r_{ij}$

$G(0) = 0{,}1·0{,}5·9 + 0{,}1·0{,}5·3 + 0{,}9·0{,}4·3 + 0{,}9·0{,}6·(-7)$

$G(0) = 0{,}45 + 0{,}15 + 1{,}08 - 3{,}78 = -2{,}10$

k = 1:

P(1) = P(0) · P = [0,1; 0,9] · P

$P_1(1) = 0{,}1·0{,}5 + 0{,}9·0{,}4 = 0{,}05 + 0{,}36 = 0{,}41$

$P_2(1) = 0{,}1·0{,}5 + 0{,}9·0{,}6 = 0{,}05 + 0{,}54 = 0{,}59$

P(1) = [0,41; 0,59]

$G(1) = 0{,}41·0{,}5·9 + 0{,}41·0{,}5·3 + 0{,}59·0{,}4·3 + 0{,}59·0{,}6·(-7)$

$G(1) = 1{,}845 + 0{,}615 + 0{,}708 - 2{,}478 = 0{,}69$

k = 2:

$P(2) = P(1) \cdot P = [0{,}41; 0{,}59] \cdot P$

$P_1(2) = 0{,}41 \cdot 0{,}5 + 0{,}59 \cdot 0{,}4 = 0{,}205 + 0{,}236 = 0{,}441$

$P_2(2) = 0{,}41 \cdot 0{,}5 + 0{,}59 \cdot 0{,}6 = 0{,}205 + 0{,}354 = 0{,}559$

$P(2) = [0{,}441; 0{,}559]$

$G(2) = 0{,}441 \cdot 0{,}5 \cdot 9 + 0{,}441 \cdot 0{,}5 \cdot 3 + 0{,}559 \cdot 0{,}4 \cdot 3 + 0{,}559 \cdot 0{,}6 \cdot (-7)$

$G(2) = 1{,}9845 + 0{,}6615 + 0{,}6708 - 2{,}3478 = 0{,}97$

k = 3:

$P(3) = P(2) \cdot P = [0{,}441; 0{,}559] \cdot P$

$P_1(3) = 0{,}441 \cdot 0{,}5 + 0{,}559 \cdot 0{,}4 = 0{,}2205 + 0{,}2236 = 0{,}4441$

$P_2(3) = 0{,}441 \cdot 0{,}5 + 0{,}559 \cdot 0{,}6 = 0{,}2205 + 0{,}3354 = 0{,}5559$

$P(3) = [0{,}4441; 0{,}5559]$

$G(3) = 0{,}4441 \cdot 0{,}5 \cdot 9 + 0{,}4441 \cdot 0{,}5 \cdot 3 + 0{,}5559 \cdot 0{,}4 \cdot 3 + 0{,}5559 \cdot 0{,}6 \cdot (-7)$

$G(3) = 1{,}99845 + 0{,}66615 + 0{,}66708 - 2{,}33478 = 1{,}00$

Результаты:

Переход k	$P_1(k)$	$P_2(k)$	Доход G(k)
0	0,1000	0,9000	-2,10
1	0,4100	0,5900	0,69
2	0,4410	0,5590	0,97
3	0,4441	0,5559	1,00

Анализ результатов показывает, что доход системы постепенно увеличивается от отрицательного значения (-2,10) до положительного (1,00), при этом вероятности состояний стабилизируются около значений 0,44 для S_1 и 0,56 для S_2.