



Acyklické grafy, stromy a kostry

Stanislav Palúch

Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita

24. marca 2017

Definícia

Cyklus (orientovaný cyklus, polocyklus) je *netriviálny* uzavretý ťah (orientovaný ťah, polotáh), v ktorom sa okrem prvého a posledného vrchola žiaden vrchol nevyskytuje viac než raz.

Definícia

Kružnica je súvislý pravidelný graf 2. stupňa. Kružnicu o n vrchoch budeme označovať C_n .

Poznámka

Všetky vrcholy a hrany kružnice C_n možno usporiadať do cyklu

$$(v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, v_n, \{v_n, v_1\}, v_1)$$

a naopak,
všetky vrcholy a hrany cyklu tvoria graf, ktorý je kružnicou.

Definícia

Cyklus (orientovaný cyklus, polocyklus) je *netriviálny* uzavretý ťah (orientovaný ťah, polotáh), v ktorom sa okrem prvého a posledného vrchola žiaden vrchol nevyskytuje viac než raz.

Definícia

Kružnica je súvislý pravidelný graf 2. stupňa. Kružnicu o n vrchoch budeme označovať C_n .

Poznámka

Všetky vrcholy a hrany kružnice C_n možno usporiadať do cyklu

$$(v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, v_n, \{v_n, v_1\}, v_1)$$

a naopak,
všetky vrcholy a hrany cyklu tvoria graf, ktorý je kružnicou.

Definícia

Cyklus (orientovaný cyklus, polocyklus) je *netriviálny* uzavretý ťah (orientovaný ťah, polotáh), v ktorom sa okrem prvého a posledného vrchola žiaden vrchol nevyskytuje viac než raz.

Definícia

Kružnica je súvislý pravidelný graf 2. stupňa. Kružnicu o n vrchoch budeme označovať C_n .

Poznámka

Všetky vrcholy a hrany kružnice C_n možno usporiadať do cyklu

$$(v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, v_n, \{v_n, v_1\}, v_1)$$

a naopak,
všetky vrcholy a hrany cyklu tvoria graf, ktorý je kružnicou.



Definícia acyklického grafu a stromu

Definícia

Acyklický graf je taký graf, ktorý neobsahuje cyklus.

Definícia

Strom je súvislý acyklický graf.

Poznámka

Triviálny graf je stromom.

Poznámka

Pretože každý komponent acyklického grafu je stromom (je súvislý a neobsahuje cyklus), možno sa na acyklický graf pozeráť ako na zjednotenie stromov. Od toho je odvodený pojem les, ktorý sa používa ako synonymum pre acyklické grafy.



Definícia acyklického grafu a stromu

Definícia

Acyklický graf je taký graf, ktorý neobsahuje cyklus.

Definícia

Strom je súvislý acyklický graf.

Poznámka

Triviálny graf je stromom.

Poznámka

Pretože každý komponent acyklického grafu je stromom (je súvislý a neobsahuje cyklus), možno sa na acyklický graf pozeráť ako na zjednotenie stromov. Od toho je odvodený pojem les, ktorý sa používa ako synonymum pre acyklické grafy.



Definícia acyklického grafu a stromu

Definícia

Acyklický graf je taký graf, ktorý neobsahuje cyklus.

Definícia

Strom je súvislý acyklický graf.

Poznámka

Triviálny graf je stromom.

Poznámka

Pretože každý komponent acyklického grafu je stromom (je súvislý a neobsahuje cyklus), možno sa na acyklický graf pozeráť ako na zjednotenie stromov. Od toho je odvodený pojem les, ktorý sa používa ako synonymum pre acyklické grafy.



Definícia acyklického grafu a stromu

Definícia

Acyklický graf je taký graf, ktorý neobsahuje cyklus.

Definícia

Strom je súvislý acyklický graf.

Poznámka

Triviálny graf je stromom.

Poznámka

Pretože každý komponent acyklického grafu je stromom (je súvislý a neobsahuje cyklus), možno sa na acyklický graf pozerať ako na zjednotenie stromov. Od toho je odvodený pojem les, ktorý sa používa ako synonymum pre acyklické grafy.



V netriviálnom strome existujú aspoň dva vrcholy stupňa 1

Veta

*Nech $G = (V, H)$ je strom, ktorý má aspoň dva vrcholy.
Potom V obsahuje aspoň dva vrcholy stupňa 1.*

DÔKAZ.

Nech

$$(v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, v_k) \quad (1)$$

je cesta v strome G s najväčším počtom hrán. Ukážeme, že $\deg(v_k) = 1$.

Obr.: Keby $\deg(v_k) > 1$,

existovala by aspoň jedna hrana (čiarkovane) incidentná s v_k ,
vytvárajúca jednu zo situácií a) alebo b).



V netriviálnom strome existujú aspoň dva vrcholy stupňa 1

Veta

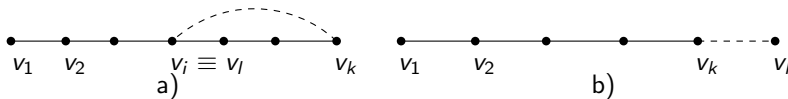
*Nech $G = (V, H)$ je strom, ktorý má aspoň dva vrcholy.
Potom V obsahuje aspoň dva vrcholy stupňa 1.*

DÔKAZ.

Nech

$$(v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, v_k) \quad (1)$$

je cesta v strome G s najväčším počtom hrán. Ukážeme, že $\deg(v_k) = 1$.



Obr.: Keby $\deg(v_k) > 1$,

existovala by aspoň jedna hrana (čiarkovane) incidentná s v_k ,
vytvárajúca jednu zo situácií a) alebo b).



Veta

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

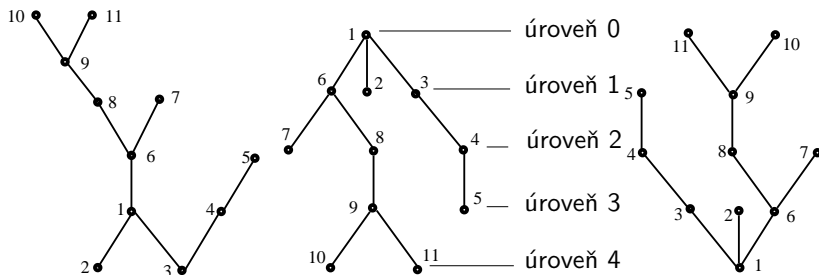
- a) $G = (V, H)$ je strom.
- b) V grafe $G = (V, H)$ existuje pre každé $u, v \in V$ jediná $u-v$ cesta.
- c) Graf $G = (V, H)$ je súvislý a každá hrana množiny H je mostom.
- d) Graf $G = (V, H)$ je súvislý a $|H| = |V| - 1$.
- e) V grafe $G = (V, H)$ platí $|H| = |V| - 1$ a G je acyklický.

Definícia

Koreňový strom je strom $G = (V, H)$ s pevne vybraným vrcholom $k \in V$, ktorý nazývame **koreň**. Koreňový strom budeme značiť $G = (V, H, k)$.

Úroveň vrchola u v koreňovom strome $G = (V, H, k)$ je dĺžka – počet hrán – (jedinej) k - u cesty.

Výška koreňového stromu $G = (V, H, k)$ je maximum z úrovni všetkých vrcholov koreňového stromu G .

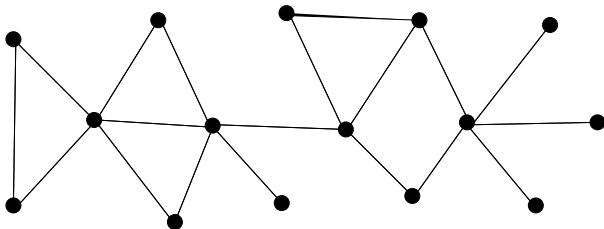


Obr.: Spôsoby kreslenia diagramu koreňového stromu s koreňom 1.



Definícia

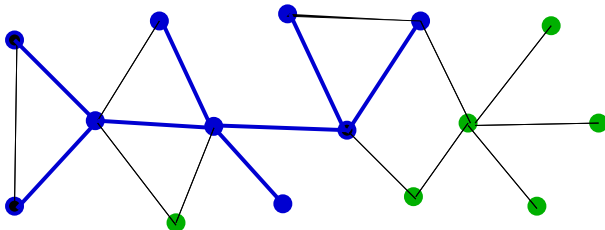
Nech strom $T = (V_T, H_T)$ je podgrafom grafu $G = (V, H)$. Hovoríme, že hrana $h = \{u, v\} \in H$ je **hraničnou hranou**, ak $u \in V_T$ a $v \notin V_T$. Nech $h = \{u, v\}$ je hraničná hrana, $u \in V_T$, $v \notin V_T$. Povieme, že u je **zaradený vrchol**, v je **voľný vrchol** hraničnej hrany h .





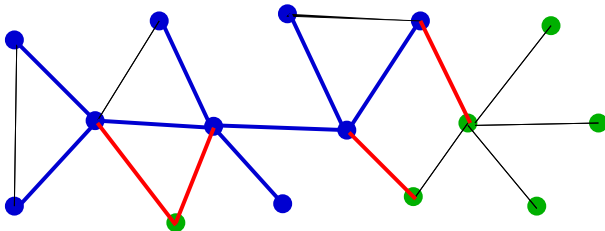
Definícia

Nech strom $T = (V_T, H_T)$ je podgrafom grafu $G = (V, H)$. Hovoríme, že hrana $h = \{u, v\} \in H$ je **hraničnou hranou**, ak $u \in V_T$ a $v \notin V_T$. Nech $h = \{u, v\}$ je hraničná hrana, $u \in V_T$, $v \notin V_T$. Povieme, že u je **zaradený vrchol**, v je **voľný vrchol** hraničnej hrany h .



Definícia

Nech strom $T = (V_T, H_T)$ je podgrafom grafu $G = (V, H)$. Hovoríme, že hrana $h = \{u, v\} \in H$ je **hraničnou hranou**, ak $u \in V_T$ a $v \notin V_T$. Nech $h = \{u, v\}$ je hraničná hrana, $u \in V_T$, $v \notin V_T$. Povieme, že u je **zaradený vrchol**, v je **voľný vrchol** hraničnej hrany h .





Algoritmus

Prehľadávanie grafu $G = (V, H)$ do hĺbky. (Depth-First Search)

- **Krok 1. Inicializácia.**

Nech strom T je triviálny strom obsahujúci jediný vrchol $v \in V$.

Polož $p(v) := 1$, $k := 1$.

- **Krok 2.** *Ak T ešte neobsahuje všetky vrcholy grafu, GOTO Krok 3. Inak STOP.*

- **Krok 3.** *V grafe G so stromom T nájdí hraničnú hranu $h = \{u, v\}$ s maximálnou značkou $p(u)$ zaradeného vrchola u .*

- **Krok 4.** *Polož $T := T \cup \{h\} \cup \{v\}$, $k := k + 1$, $p(v) := k$. GOTO Krok 2.*





Algoritmus

Prehľadávanie grafu $G = (V, H)$ do hĺbky. (Depth-First Search)

- **Krok 1. Inicializácia.**

Nech strom T je triviálny strom obsahujúci jediný vrchol $v \in V$.

Polož $p(v) := 1$, $k := 1$.

- **Krok 2.** *Ak T ešte neobsahuje všetky vrcholy grafu, GOTO Krok 3. Inak STOP.*

- **Krok 3.** *V grafe G so stromom T nájdí hraničnú hranu $h = \{u, v\}$ s maximálnou značkou $p(u)$ zaradeného vrchola u .*

- **Krok 4.** *Polož $T := T \cup \{h\} \cup \{v\}$, $k := k + 1$, $p(v) := k$. GOTO Krok 2.*





Algoritmus

Prehľadávanie grafu $G = (V, H)$ do hĺbky. (Depth-First Search)

- **Krok 1. Inicializácia.**

Nech strom T je triviálny strom obsahujúci jediný vrchol $v \in V$.

Polož $p(v) := 1$, $k := 1$.

- **Krok 2.** *Ak T ešte neobsahuje všetky vrcholy grafu, GOTO Krok 3. Inak STOP.*

- **Krok 3.** *V grafe G so stromom T nájdi hraničnú hranu $h = \{u, v\}$ s maximálnou značkou $p(u)$ zaradeného vrchola u .*

- **Krok 4.** *Polož $T := T \cup \{h\} \cup \{v\}$, $k := k + 1$, $p(v) := k$. GOTO Krok 2.*





Algoritmus

Prehľadávanie grafu $G = (V, H)$ do hĺbky. (Depth-First Search)

- **Krok 1. Inicializácia.**

*Nech strom T je triviálny strom obsahujúci jediný vrchol $v \in V$.
Polož $p(v) := 1$, $k := 1$.*

- **Krok 2.** Ak T ešte neobsahuje všetky vrcholy grafu, GOTO Krok 3.
Inak STOP.

- **Krok 3.** V grafe G so stromom T nájdí hraničnú hranu $h = \{u, v\}$ s maximálnou značkou $p(u)$ zaradeného vrchola u .

- **Krok 4.** Polož $T := T \cup \{h\} \cup \{v\}$, $k := k + 1$, $p(v) := k$.
GOTO Krok 2.





Algoritmus

Prehľadávanie grafu $G = (V, H)$ do šírky. (Breadth-First Search.)

- **Krok 1.** *Inicializácia. Nech strom T je triviálny strom obsahujúci jediný vrchol $v \in V$. Polož $p(v) := 1$, $k := 1$.*
- **Krok 2.** *Ak T ešte neobsahuje všetky vrcholy grafu, GOTO Krok 3. Inak STOP.*
- **Krok 3.** *V grafe G so stromom T nájdí hraničnú hranu $h = \{u, v\}$ s minimálnou značkou $p(u)$ zaradeného vrchola u .*
- **Krok 4.** *Polož $T := T \cup \{h\} \cup \{v\}$, $k := k + 1$, $p(v) := k$. GOTO Krok 2.*





Algoritmus

Prehľadávanie grafu $G = (V, H)$ do šírky. (Breadth-First Search.)

- **Krok 1.** *Inicializácia. Nech strom T je triviálny strom obsahujúci jediný vrchol $v \in V$. Polož $p(v) := 1$, $k := 1$.*
- **Krok 2.** *Ak T ešte neobsahuje všetky vrcholy grafu, GOTO Krok 3. Inak STOP.*
- **Krok 3.** *V grafe G so stromom T nájdí hraničnú hranu $h = \{u, v\}$ s minimálnou značkou $p(u)$ zaradeného vrchola u .*
- **Krok 4.** *Polož $T := T \cup \{h\} \cup \{v\}$, $k := k + 1$, $p(v) := k$. GOTO Krok 2.*





Algoritmus

Prehľadávanie grafu $G = (V, H)$ do šírky. (Breadth-First Search.)

- **Krok 1.** *Inicializácia.* Nech strom T je triviálny strom obsahujúci jediný vrchol $v \in V$. Polož $p(v) := 1$, $k := 1$.
- **Krok 2.** Ak T ešte neobsahuje všetky vrcholy grafu, GOTO Krok 3. Inak STOP.
- **Krok 3.** V grafe G so stromom T nájdi hraničnú hranu $h = \{u, v\}$ s minimálnou značkou $p(u)$ zaradeného vrchola u .
- **Krok 4.** Polož $T := T \cup \{h\} \cup \{v\}$, $k := k + 1$, $p(v) := k$. GOTO Krok 2.





Algoritmus

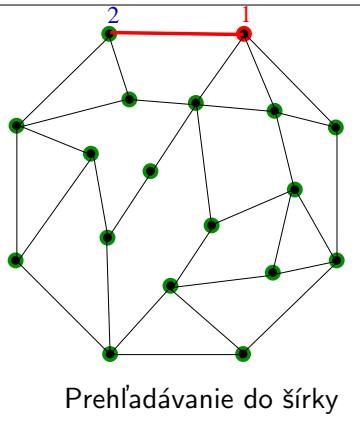
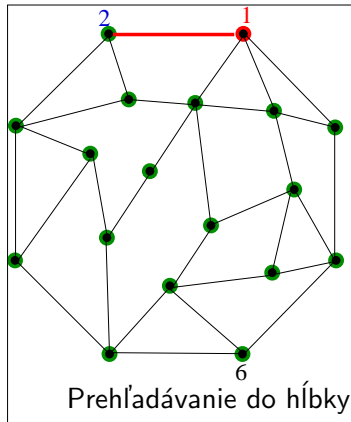
Prehľadávanie grafu $G = (V, H)$ do šírky. (Breadth-First Search.)

- **Krok 1.** *Inicializácia.* Nech strom T je triviálny strom obsahujúci jediný vrchol $v \in V$. Polož $p(v) := 1$, $k := 1$.
- **Krok 2.** Ak T ešte neobsahuje všetky vrcholy grafu, GOTO Krok 3. Inak STOP.
- **Krok 3.** V grafe G so stromom T nájdi hraničnú hranu $h = \{u, v\}$ s minimálnou značkou $p(u)$ zaradeného vrchola u .
- **Krok 4.** Polož $T := T \cup \{h\} \cup \{v\}$, $k := k + 1$, $p(v) := k$. GOTO Krok 2.



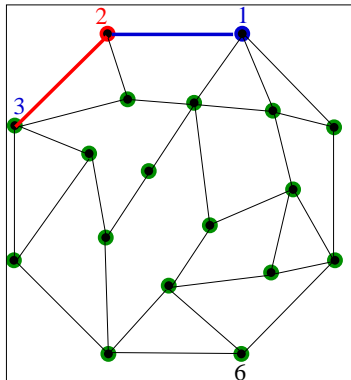


Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky

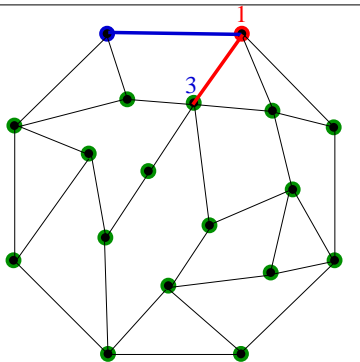




Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky



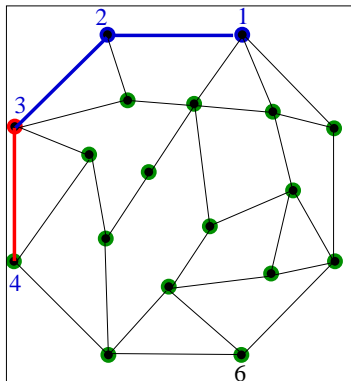
Prehľadávanie do hĺbky



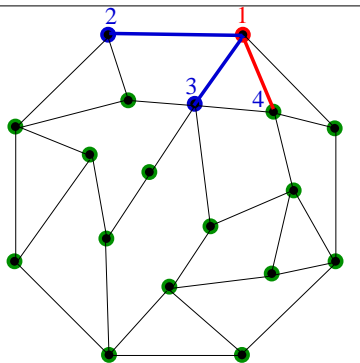
Prehľadávanie do šírky



Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky



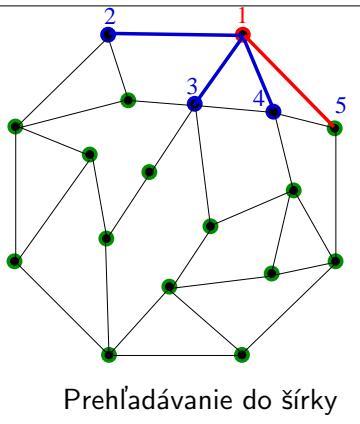
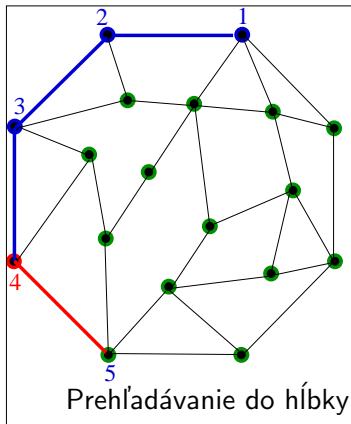
Prehľadávanie do hĺbky



Prehľadávanie do šírky

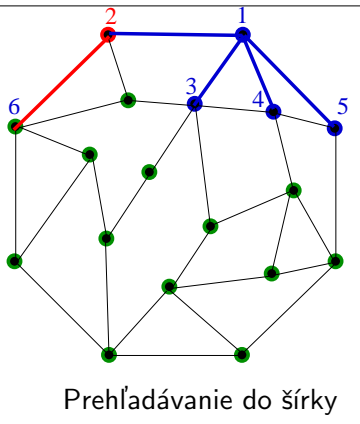
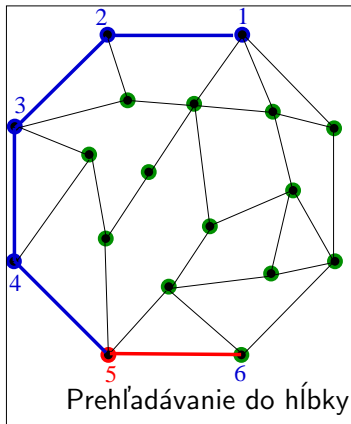


Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky



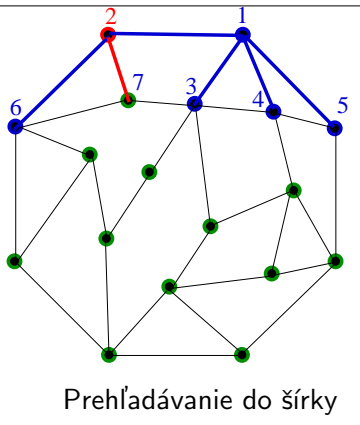
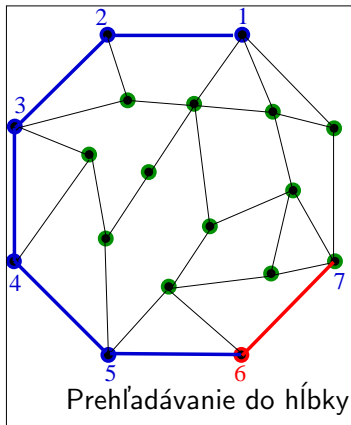


Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky



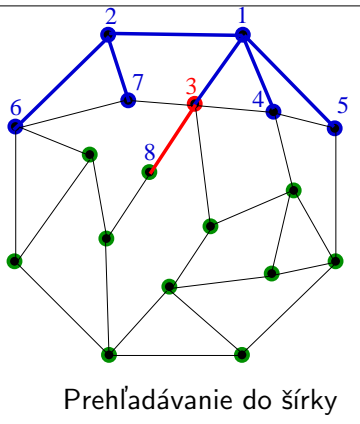
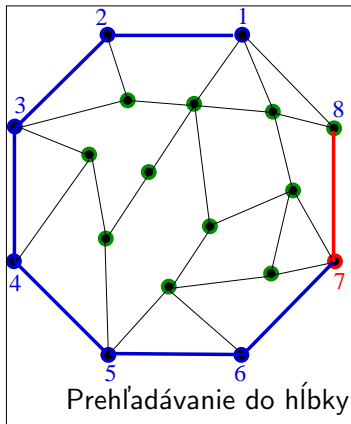


Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky



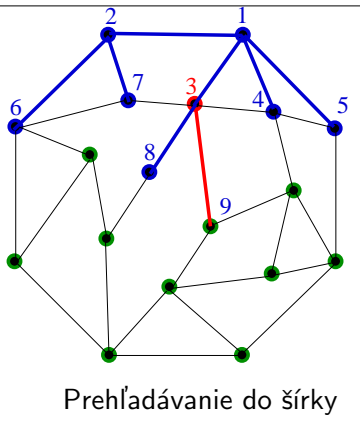
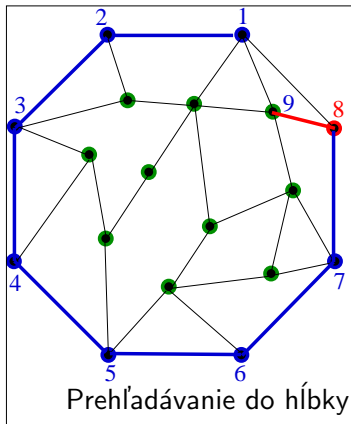


Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky



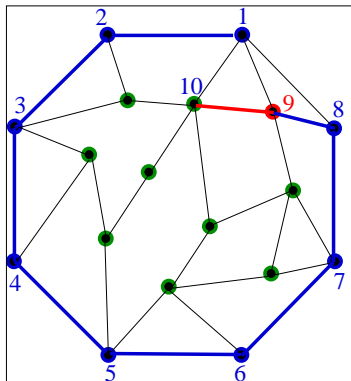


Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky

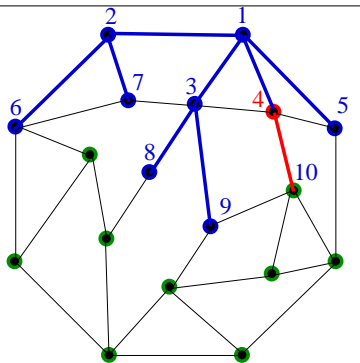




Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky



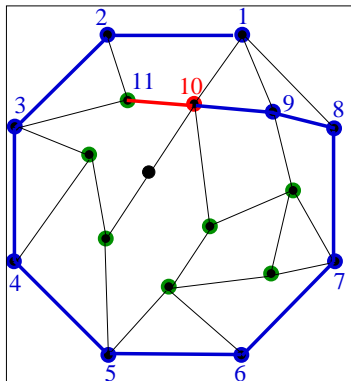
Prehľadávanie do hĺbky



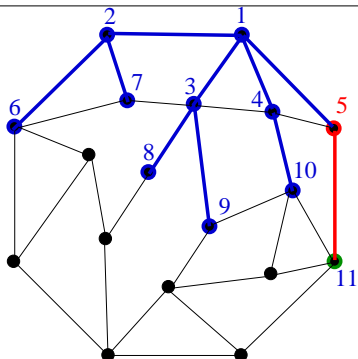
Prehľadávanie do šírky



Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky



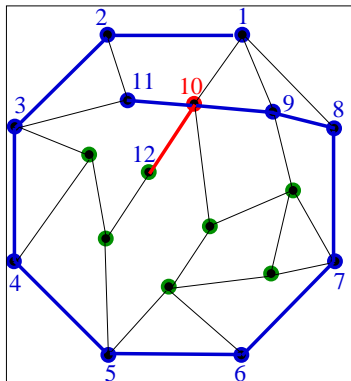
Prehľadávanie do hĺbky



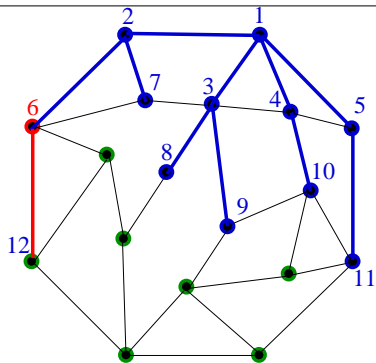
Prehľadávanie do šírky



Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky



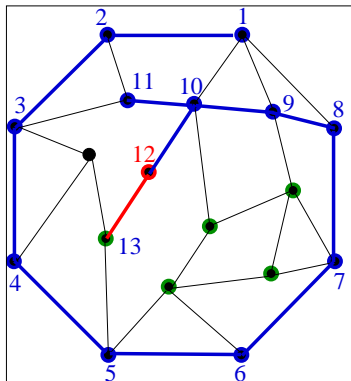
Prehľadávanie do hĺbky



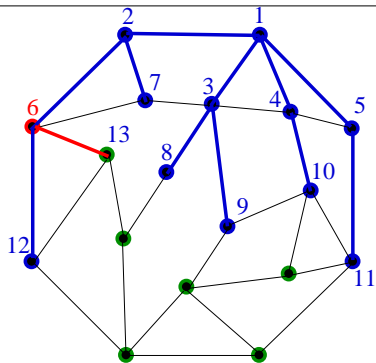
Prehľadávanie do šírky



Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky



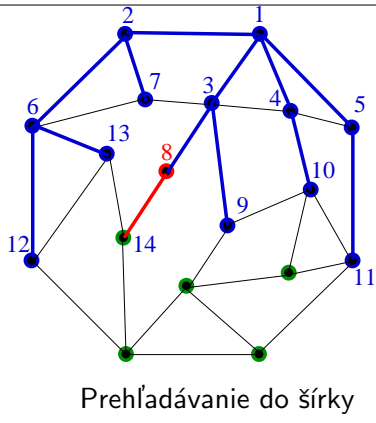
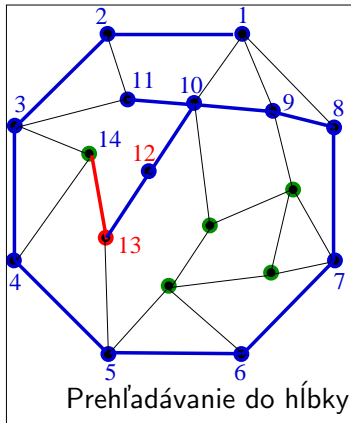
Prehľadávanie do hĺbky



Prehľadávanie do šírky

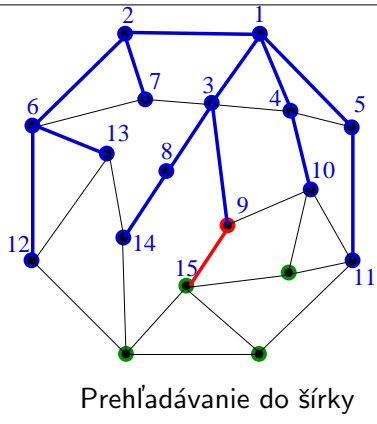
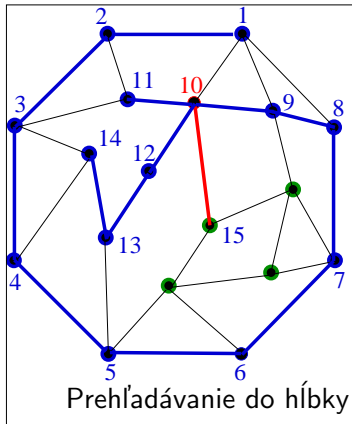


Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky



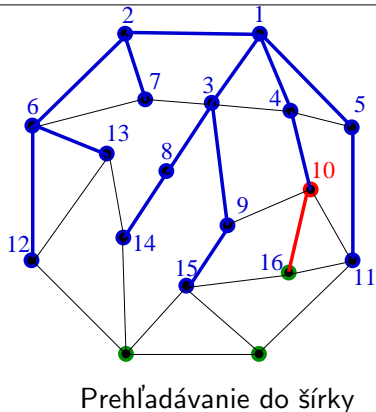
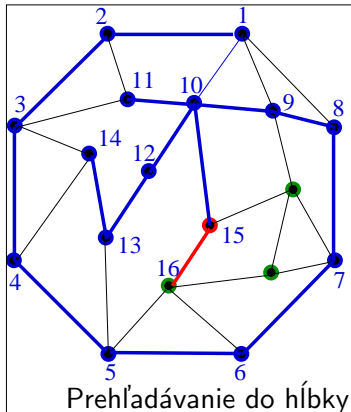


Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky



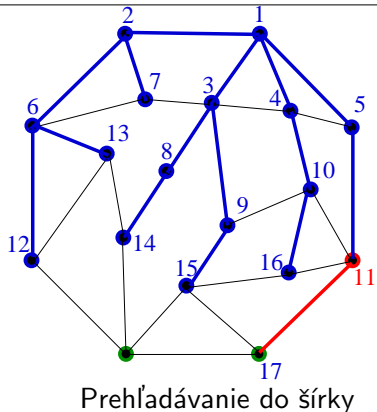
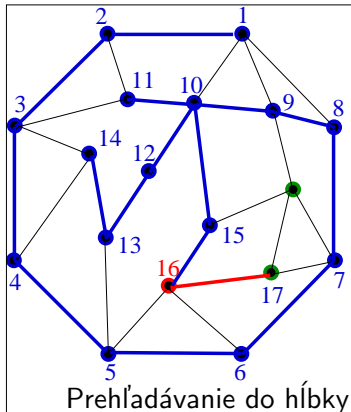


Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky



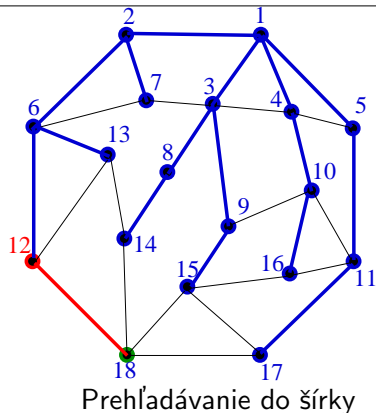
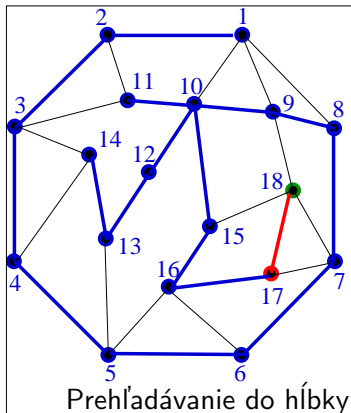


Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky





Prehľadávanie grafu do hĺbky a do šírky





Najlacnejšia a najdrahšia kostra

Definícia

Kostra súvislého grafu $G = (V, H)$ je taký jeho faktorový podgraf, ktorý je stromom.

Nech $G = (V, H, c)$ je hranovo ohodnotený graf, K kostra grafu G .

Cena $c(K)$ **kostry** K je súčet ohodnotení jej hrán.

Najlacnejšia kostra v grafe G je kostra s najmenšou cenou.

Najdrahšia kostra v grafe G je kostra s najväčšou cenou.



Najlacnejšia a najdrahšia kostra

Definícia

Kostra súvislého grafu $G = (V, H)$ je taký jeho faktorový podgraf, ktorý je stromom.

Nech $G = (V, H, c)$ je hranovo ohodnotený graf, K kostra grafu G .

Cena $c(K)$ **kostry** K je súčet ohodnotení jej hrán.

Najlacnejšia kostra v grafe G je kostra s najmenšou cenou.

Najdrahšia kostra v grafe G je kostra s najväčšou cenou.



Algoritmus

Kruskalov algoritmus I. na hľadanie najlacnejšej (najdrahšej) kostry súvislého hranovo ohodnoteného grafu $G = (V, H, c)$.

- **Krok 1.** Zorad' hrany podľa ich ohodnotenia vzostupne (zostupne) do postupnosti \mathcal{P} .
- **Krok 2.** Nech prvá hrana v postupnosti \mathcal{P} je hrana $\{u, v\}$. Vylúč hranu $\{u, v\}$ z postupnosti \mathcal{P} a ak s už vybranými hranami nevytvára cyklus, zarad' ju do kostry.
- **Krok 3.** Ak je počet vybraných hrán rovný $|V| - 1$ alebo ak je postupnosť \mathcal{P} prázdna, STOP. Inak GOTO Krok 2.





Algoritmus

Kruskalov algoritmus I. na hľadanie najlacnejšej (najdrahšej) kostry súvislého hranovo ohodnoteného grafu $G = (V, H, c)$.

- **Krok 1.** Zorad' hrany podľa ich ohodnotenia vzostupne (zostupne) do postupnosti \mathcal{P} .
- **Krok 2.** Nech prvá hrana v postupnosti \mathcal{P} je hrana $\{u, v\}$. Vylúč hranu $\{u, v\}$ z postupnosti \mathcal{P} a ak s už vybranými hranami nevytvára cyklus, zarad' ju do kostry.
- **Krok 3.** Ak je počet vybraných hrán rovný $|V| - 1$ alebo ak je postupnosť \mathcal{P} prázdna, STOP. Inak GOTO Krok 2.





Algoritmus

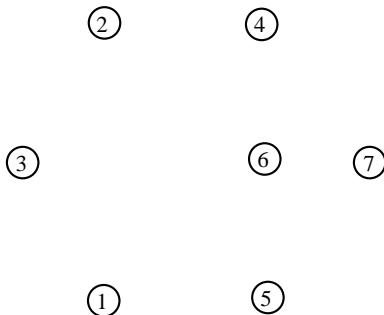
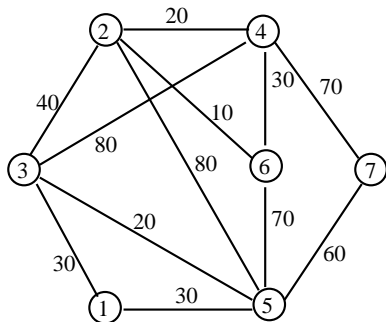
Kruskalov algoritmus I. na hľadanie najlacnejšej (najdrahšej) kostry súvislého hranovo ohodnoteného grafu $G = (V, H, c)$.

- **Krok 1.** Zorad' hrany podľa ich ohodnotenia vzostupne (zostupne) do postupnosti \mathcal{P} .
- **Krok 2.** Nech prvá hrana v postupnosti \mathcal{P} je hrana $\{u, v\}$. Vylúč hranu $\{u, v\}$ z postupnosti \mathcal{P} a ak s už vybranými hranami nevytvára cyklus, zarad' ju do kostry.
- **Krok 3.** Ak je počet vybraných hrán rovný $|V| - 1$ alebo ak je postupnosť \mathcal{P} prázdna, STOP. Inak GOTO Krok 2.



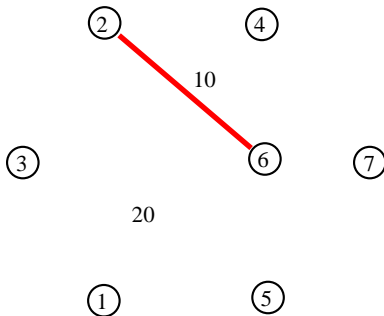
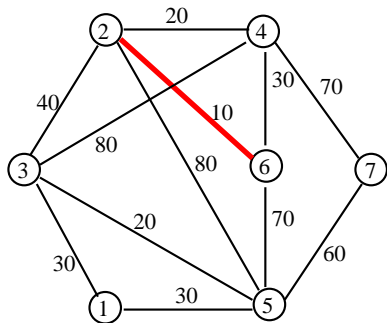


Príklad



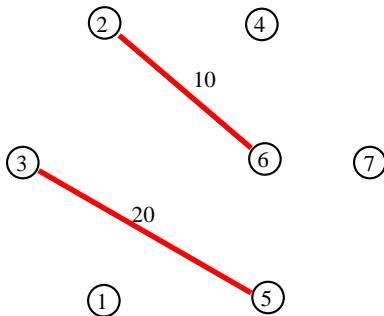
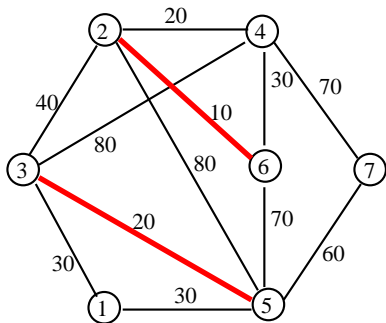


Príklad



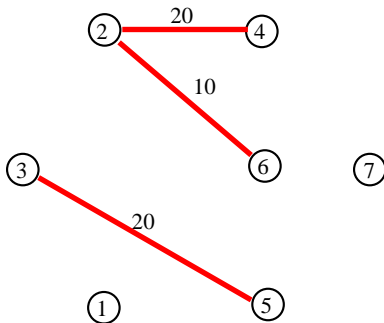
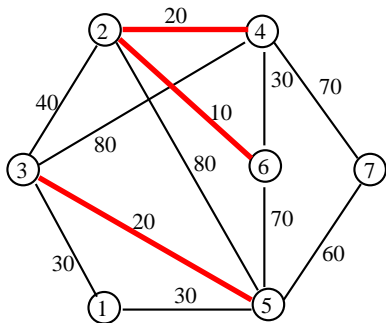


Príklad



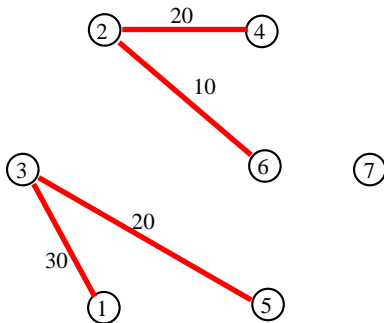
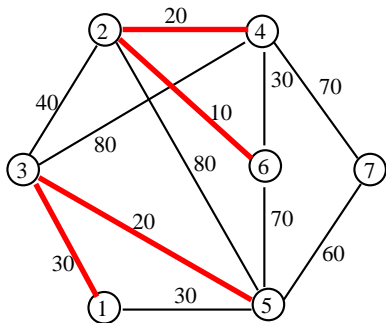


Príklad



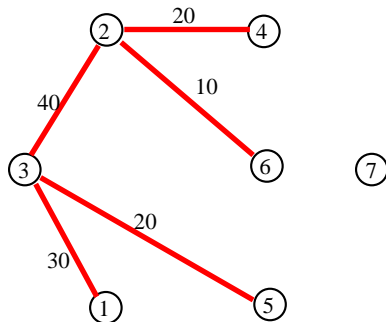
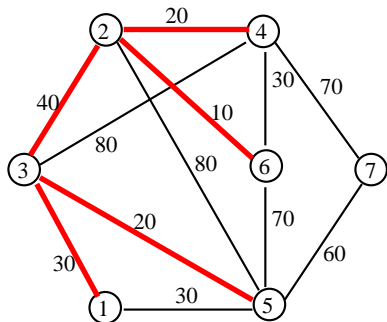


Príklad



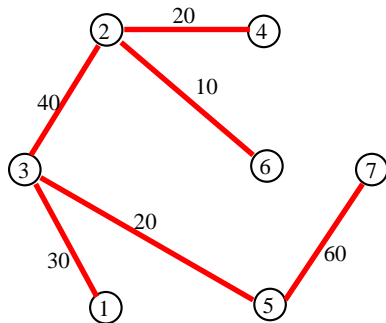
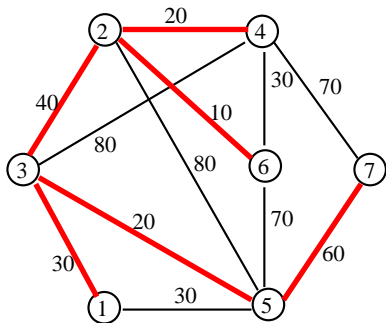


Príklad





Príklad





Kruskalov algoritmus II.

Algoritmus

Kruskalov algoritmus II. *na hľadanie najlacnejšej (najdrahšej) kostry súvislého hranovo ohodnoteného grafu $G = (V, H, c)$.*

- **Krok 1.** *Zorad' hrany podľa ich ohodnotenia vzostupne (zostupne) do postupnosti \mathcal{P} .*
- **Krok 2.** *Pre každý vrchol $i \in V$ polož $k(i) = i$.*
- **Krok 3.** *Nech prvá hrana v postupnosti \mathcal{P} je hrana $\{u, v\}$. Vylúč hrana $\{u, v\}$ z postupnosti \mathcal{P} . Ak $k(u) \neq k(v)$, zarad' hrana $\{u, v\}$ do kostry, a $\forall i \in V$, pre ktoré $k(i) = k(v)$, potom polož $k(i) := k(u)$.*
- **Krok 4.** *Ak je počet vybraných hrán rovný $|V| - 1$ alebo ak je postupnosť \mathcal{P} prázdna, STOP. Inak GOTO krok 3.*





Kruskalov algoritmus II.

Algoritmus

Kruskalov algoritmus II. *na hľadanie najlacnejšej (najdrahšej) kostry súvislého hranovo ohodnoteného grafu $G = (V, H, c)$.*

- **Krok 1.** *Zorad' hrany podľa ich ohodnotenia vzostupne (zostupne) do postupnosti \mathcal{P} .*
- **Krok 2.** *Pre každý vrchol $i \in V$ polož $k(i) = i$.*
- **Krok 3.** *Nech prvá hrana v postupnosti \mathcal{P} je hrana $\{u, v\}$. Vylúč hrana $\{u, v\}$ z postupnosti \mathcal{P} . Ak $k(u) \neq k(v)$, zarad' hrana $\{u, v\}$ do kostry, a $\forall i \in V$, pre ktoré $k(i) = k(v)$, potom polož $k(i) := k(u)$.*
- **Krok 4.** *Ak je počet vybraných hrán rovný $|V| - 1$ alebo ak je postupnosť \mathcal{P} prázdna, STOP. Inak GOTO krok 3.*





Kruskalov algoritmus II.

Algoritmus

Kruskalov algoritmus II. *na hľadanie najlacnejšej (najdrahšej) kostry súvislého hranovo ohodnoteného grafu $G = (V, H, c)$.*

- **Krok 1.** *Zorad' hrany podľa ich ohodnotenia vzostupne (zostupne) do postupnosti \mathcal{P} .*
- **Krok 2.** *Pre každý vrchol $i \in V$ polož $k(i) = i$.*
- **Krok 3.** *Nech prvá hrana v postupnosti \mathcal{P} je hrana $\{u, v\}$. Vylúč hranu $\{u, v\}$ z postupnosti \mathcal{P} . Ak $k(u) \neq k(v)$, zarad' hranu $\{u, v\}$ do kostry, a $\forall i \in V$, pre ktoré $k(i) = k(v)$, potom polož $k(i) := k(u)$*
- **Krok 4.** *Ak je počet vybraných hrán rovný $|V| - 1$ alebo ak je postupnosť \mathcal{P} prázdna, STOP. Inak GOTO krok 3.*





Kruskalov algoritmus II.

Algoritmus

Kruskalov algoritmus II. *na hľadanie najlacnejšej (najdrahšej) kostry súvislého hranovo ohodnoteného grafu $G = (V, H, c)$.*

- **Krok 1.** *Zorad' hrany podľa ich ohodnotenia vzostupne (zostupne) do postupnosti \mathcal{P} .*
- **Krok 2.** *Pre každý vrchol $i \in V$ polož $k(i) = i$.*
- **Krok 3.** *Nech prvá hrana v postupnosti \mathcal{P} je hrana $\{u, v\}$. Vylúč hranu $\{u, v\}$ z postupnosti \mathcal{P} . Ak $k(u) \neq k(v)$, zarad' hranu $\{u, v\}$ do kostry, a $\forall i \in V$, pre ktoré $k(i) = k(v)$, potom polož $k(i) := k(u)$*
- **Krok 4.** *Ak je počet vybraných hrán rovný $|V| - 1$ alebo ak je postupnosť \mathcal{P} prázdna, STOP. Inak GOTO krok 3.*



Kruskalov algoritmus II.

Hrany grafu G usporiadame neklesajúco podľa ich ohodnotenia do nasledujúcej tabuľky:

$\{2,6\}$	$\{2,4\}$	$\{3,5\}$	$\{1,3\}$	$\{1,5\}$	$\{4,6\}$	$\{2,3\}$	$\{5,7\}$	$\{4,7\}$	$\{5,6\}$	$\{2,5\}$	$\{3,4\}$
10	20	20	30	30	30	40	60	70	70	80	80

Hrana do kostry	1	2	3	4	5	6	7
	$k(v)$						
-	1	2	3	4	5	6	7
$\{2,6\}$	1	2	3	4	5	2	7
$\{2,4\}$	1	2	3	2	5	2	7
$\{3,5\}$	1	2	3	2	3	2	7
$\{1,3\}$	1	2	1	2	1	2	7
$\{2,3\}$	1	1	1	1	1	1	7
$\{5,7\}$	1	1	1	1	1	1	1

Kruskalov algoritmus II.

Hrany grafu G usporiadame neklesajúco podľa ich ohodnotenia do nasledujúcej tabuľky:

$\{2,6\}$	$\{2,4\}$	$\{3,5\}$	$\{1,3\}$	$\{1,5\}$	$\{4,6\}$	$\{2,3\}$	$\{5,7\}$	$\{4,7\}$	$\{5,6\}$	$\{2,5\}$	$\{3,4\}$
10	20	20	30	30	30	40	60	70	70	80	80

Hrana $\{u, v\} = \{2, 6\}$
 $k(2) = 2, k(6) = 6$

$k(2) \neq k(6) \Rightarrow$
 zarad' $\{2, 6\}$ do kostry

Hrana do kostry	1	2	3	4	5	6	7
	$k(v)$						
-	1	2	3	4	5	6	7
$\{2,6\}$	1	2	3	4	5	2	7
$\{2,4\}$	1	2	3	2	5	2	7
$\{3,5\}$	1	2	3	2	3	2	7
$\{1,3\}$	1	2	1	2	1	2	7
$\{2,3\}$	1	1	1	1	1	1	7
$\{5,7\}$	1	1	1	1	1	1	1

Kruskalov algoritmus II.

Hrany grafu G usporiadame neklesajúco podľa ich ohodnotenia do nasledujúcej tabuľky:

$\{2,6\}$	$\{2,4\}$	$\{3,5\}$	$\{1,3\}$	$\{1,5\}$	$\{4,6\}$	$\{2,3\}$	$\{5,7\}$	$\{4,7\}$	$\{5,6\}$	$\{2,5\}$	$\{3,4\}$
10	20	20	30	30	30	40	60	70	70	80	80

Hrana $\{u, v\} = \{2, 4\}$
 $k(2) = 2, k(4) = 4$

$k(2) \neq k(4) \Rightarrow$
 zarad' $\{2, 4\}$ do kostry

Hrana do kostry	1	2	3	4	5	6	7
	$k(v)$						
-	1	2	3	4	5	6	7
$\{2,6\}$	1	2	3	4	5	2	7
$\{2,4\}$	1	2	3	2	5	2	7
$\{3,5\}$	1	2	3	2	3	2	7
$\{1,3\}$	1	2	1	2	1	2	7
$\{2,3\}$	1	1	1	1	1	1	7
$\{5,7\}$	1	1	1	1	1	1	1

Kruskalov algoritmus II.

Hrany grafu G usporiadame neklesajúco podľa ich ohodnotenia do nasledujúcej tabuľky:

$\{2,6\}$	$\{2,4\}$	$\{3,5\}$	$\{1,3\}$	$\{1,5\}$	$\{4,6\}$	$\{2,3\}$	$\{5,7\}$	$\{4,7\}$	$\{5,6\}$	$\{2,5\}$	$\{3,4\}$
10	20	20	30	30	30	40	60	70	70	80	80

Hrana $\{u, v\} = \{3, 5\}$
 $k(3) = 3, k(5) = 5$

$k(3) \neq k(5) \Rightarrow$
 zarad' $\{3, 5\}$ do kostry

Hrana do kostry	1	2	3	4	5	6	7
	$k(v)$						
-	1	2	3	4	5	6	7
$\{2,6\}$	1	2	3	4	5	2	7
$\{2,4\}$	1	2	3	2	5	2	7
$\{3,5\}$	1	2	3	2	3	2	7
$\{1,3\}$	1	2	1	2	1	2	7
$\{2,3\}$	1	1	1	1	1	1	7
$\{5,7\}$	1	1	1	1	1	1	1

Kruskalov algoritmus II.

Hrany grafu G usporiadame neklesajúco podľa ich ohodnotenia do nasledujúcej tabuľky:

$\{2,6\}$	$\{2,4\}$	$\{3,5\}$	$\{1,3\}$	$\{1,5\}$	$\{4,6\}$	$\{2,3\}$	$\{5,7\}$	$\{4,7\}$	$\{5,6\}$	$\{2,5\}$	$\{3,4\}$
10	20	20	30	30	30	40	60	70	70	80	80

Hrana $\{u, v\} = \{1, 3\}$
 $k(1) = 1, k(3) = 3$

$k(1) \neq k(3) \Rightarrow$
 zarad' $\{1, 3\}$ do kostry

Hrana do kostry	1	2	3	4	5	6	7
	$k(v)$						
-	1	2	3	4	5	6	7
$\{2,6\}$	1	2	3	4	5	2	7
$\{2,4\}$	1	2	3	2	5	2	7
$\{3,5\}$	1	2	3	2	3	2	7
$\{1,3\}$	1	2	1	2	1	2	7
$\{2,3\}$	1	1	1	1	1	1	7
$\{5,7\}$	1	1	1	1	1	1	1

Kruskalov algoritmus II.

Hrany grafu G usporiadame neklesajúco podľa ich ohodnotenia do nasledujúcej tabuľky:

$\{2,6\}$	$\{2,4\}$	$\{3,5\}$	$\{1,3\}$	$\{1,5\}$	$\{4,6\}$	$\{2,3\}$	$\{5,7\}$	$\{4,7\}$	$\{5,6\}$	$\{2,5\}$	$\{3,4\}$
10	20	20	30	30	30	40	60	70	70	80	80

Hrana $\{u, v\} = \{1, 5\}$
 $k(1) = 1, k(5) = 1$

$k(1) = k(5) \Rightarrow$
 vyhod' $\{1, 5\}$

Hrana do kostry	1	2	3	4	5	6	7
	$k(v)$						
-	1	2	3	4	5	6	7
$\{2,6\}$	1	2	3	4	5	2	7
$\{2,4\}$	1	2	3	2	5	2	7
$\{3,5\}$	1	2	3	2	3	2	7
$\{1,3\}$	1	2	1	2	1	2	7
$\{2,3\}$	1	1	1	1	1	1	7
$\{5,7\}$	1	1	1	1	1	1	1

Kruskalov algoritmus II.

Hrany grafu G usporiadame neklesajúco podľa ich ohodnotenia do nasledujúcej tabuľky:

$\{2,6\}$	$\{2,4\}$	$\{3,5\}$	$\{1,3\}$	$\{1,5\}$	$\{4,6\}$	$\{2,3\}$	$\{5,7\}$	$\{4,7\}$	$\{5,6\}$	$\{2,5\}$	$\{3,4\}$
10	20	20	30	30	30	40	60	70	70	80	80

Hrana $\{u, v\} = \{4, 6\}$
 $k(4) = 2, k(6) = 2$

$k(4) = k(6) \Rightarrow$
 vyhod' $\{4, 6\}$

Hrana do kostry	1	2	3	4	5	6	7
	$k(v)$						
-	1	2	3	4	5	6	7
$\{2,6\}$	1	2	3	4	5	2	7
$\{2,4\}$	1	2	3	2	5	2	7
$\{3,5\}$	1	2	3	2	3	2	7
$\{1,3\}$	1	2	1	2	1	2	7
$\{2,3\}$	1	1	1	1	1	1	7
$\{5,7\}$	1	1	1	1	1	1	1

Kruskalov algoritmus II.

Hrany grafu G usporiadame neklesajúco podľa ich ohodnotenia do nasledujúcej tabuľky:

$\{2,6\}$	$\{2,4\}$	$\{3,5\}$	$\{1,3\}$	$\{1,5\}$	$\{4,6\}$	$\{2,3\}$	$\{5,7\}$	$\{4,7\}$	$\{5,6\}$	$\{2,5\}$	$\{3,4\}$
10	20	20	30	30	30	40	60	70	70	80	80

Hrana $\{u, v\} = \{2, 3\}$
 $k(2) = 2, k(3) = 1$

$k(2) \neq k(3) \Rightarrow$
 zarad' $\{2, 3\}$ do kostry

Hrana do kostry	1	2	3	4	5	6	7
	$k(v)$						
-	1	2	3	4	5	6	7
$\{2,6\}$	1	2	3	4	5	2	7
$\{2,4\}$	1	2	3	2	5	2	7
$\{3,5\}$	1	2	3	2	3	2	7
$\{1,3\}$	1	2	1	2	1	2	7
$\{2,3\}$	1	1	1	1	1	1	7
$\{5,7\}$	1	1	1	1	1	1	1

Kruskalov algoritmus II.

Hrany grafu G usporiadame neklesajúco podľa ich ohodnotenia do nasledujúcej tabuľky:

$\{2,6\}$	$\{2,4\}$	$\{3,5\}$	$\{1,3\}$	$\{1,5\}$	$\{4,6\}$	$\{2,3\}$	$\{5,7\}$	$\{4,7\}$	$\{5,6\}$	$\{2,5\}$	$\{3,4\}$
10	20	20	30	30	30	40	60	70	70	80	80

Hrana $\{u, v\} = \{5, 7\}$
 $k(5) = 1, k(7) = 7$

$k(5) \neq k(7) \Rightarrow$
 zarad' $\{5, 7\}$ do kostry

Hrana do kostry	1	2	3	4	5	6	7
	$k(v)$						
-	1	2	3	4	5	6	7
$\{2,6\}$	1	2	3	4	5	2	7
$\{2,4\}$	1	2	3	2	5	2	7
$\{3,5\}$	1	2	3	2	3	2	7
$\{1,3\}$	1	2	1	2	1	2	7
$\{2,3\}$	1	1	1	1	1	1	7
$\{5,7\}$	1	1	1	1	1	1	1



Cesta maximálnej priepustnosti

Definícia

Nech $G = (V, H, c)$ je hranovo ohodnotený graf, v ktorom cena hrany $h \in H$ $c(h) > 0$ znamená jej priepustnosť.

Priepustnosť $c(\mu(u, v))$ $u-v$ cesty (sledu, polosledu, atď.) $\mu(u, v)$ definujeme ako

$$c(\mu(u, v)) = \min\{c(h) \mid h \in \mu(u, v)\}.$$

Definícia

Hovoríme, že $u-v$ cesta $\mu(u, v)$ v grafe $G = (V, H, c)$ je $u-v$ **cesta maximálnej priepustnosti**, má najväčšiu priepustnosť zo všetkých $u-v$ ciest v G .



Cesta maximálnej priepustnosti

Definícia

Nech $G = (V, H, c)$ je hranovo ohodnotený graf, v ktorom cena hrany $h \in H$ $c(h) > 0$ znamená jej priepustnosť.

Priepustnosť $c(\mu(u, v))$ $u-v$ cesty (sledu, polosledu, atď.) $\mu(u, v)$ definujeme ako

$$c(\mu(u, v)) = \min\{c(h) \mid h \in \mu(u, v)\}.$$

Definícia

Hovoríme, že $u-v$ cesta $\mu(u, v)$ v grafe $G = (V, H, c)$ je $u-v$ **cesta maximálnej priepustnosti**, má najväčšiu priepustnosť zo všetkých $u-v$ ciest v G .



Veta

Nech K je najdrahšia kostra v súvislom hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$, nech $\{u, v\} \in H$ je taká hrana grafu G , ktorá nepatrí k hranovej množine kostry K .

Nech $\mu(u, v)$ je (jediná) u - v cesta v kostre K .

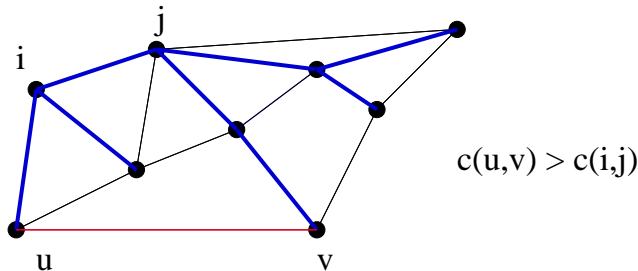
Potom je priepustnosť cesty $\mu(u, v)$ väčšia alebo rovná ako priepustnosť hrany $\{u, v\}$, t. j.

$$c(\mu(u, v)) \geq c(u, v).$$

Cesta maximálnej priepustnosti

DÔKAZ.

Majme najdrahšiu kostru \mathcal{K} a nech existuje hrana $\{u, v\}$ taká, že priepustnosť u - v cesty po hranách kostry je menšia než $c(u, v)$.



Kostra \mathcal{K} modro, hrana $h = \{u, v\}$ (červeno)

u - v cesta po hranách kostry (fialovo) s menšou priepustnosťou než $c(u, v)$

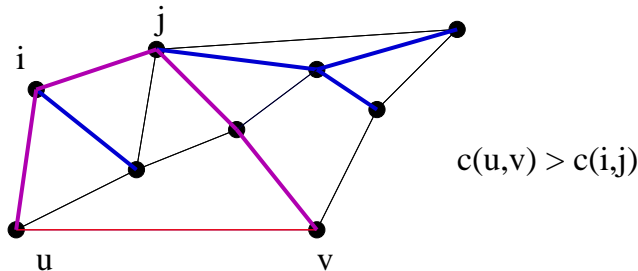
Musí existovať hrana $\{i, j\}$ tejto cesty taká že $c(u, v) > c(i, j)$

Nahradením hrany $\{i, j\}$ hranou $\{u, v\}$ vznikne kostra s väčšou cenou – spor s tým, že \mathcal{K} bola najdrahšia kostra.

Cesta maximálnej priepustnosti

DÔKAZ.

Majme najdrahšiu kostru \mathcal{K} a nech existuje hrana $\{u, v\}$ taká, že priepustnosť u - v cesty po hranách kostry je menšia než $c(u, v)$.



Kostra \mathcal{K} modro, hrana $h = \{u, v\}$ (červeno)

u - v cesta po hranách kostry (fialovo) s menšou priepustnosťou než $c(u, v)$

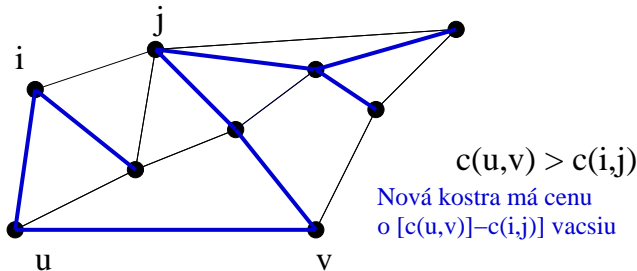
Musí existovať hrana $\{i, j\}$ tejto cesty taká že $c(u, v) > c(i, j)$

Nahradením hrany $\{i, j\}$ hranou $\{u, v\}$ vznikne kostra s väčšou cenou – spor s tým, že \mathcal{K} bola najdrahšia kostra.

Cesta maximálnej priepustnosti

DÔKAZ.

Majme najdrahšiu kostru \mathcal{K} a nech existuje hrana $\{u, v\}$ taká, že priepustnosť u - v cesty po hranách kostry je menšia než $c(u, v)$.



Kostra \mathcal{K} modro, hrana $h = \{u, v\}$ (červeno)
 u - v cesta po hranách kostry (fialovo) s menšou priepustnosťou než $c(u, v)$

Musí existovať hrana $\{i, j\}$ tejto cesty taká že $c(u, v) > c(i, j)$

Nahradením hrany $\{i, j\}$ hranou $\{u, v\}$ vznikne kostra s väčšou cenou –
spor s tým, že \mathcal{K} bola najdrahšia kostra.

Veta

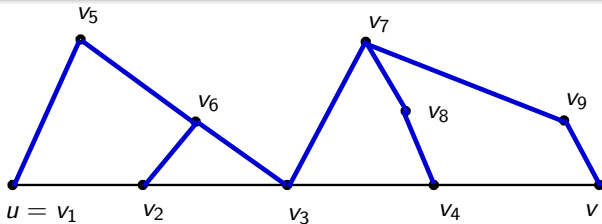
Nech K je najdrahšia kostra v súvislom hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$. Potom pre ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V$ je (jediná) $u-v$ cesta v K $u-v$ cestou maximálnej priepustnosti v G .

DÔKAZ.

Veta

Nech K je najdrahšia kostra v súvislom hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$. Potom pre ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V$ je (jediná) $u-v$ cesta v K $u-v$ cestou maximálnej priepustnosti v G .

DÔKAZ.



Cesta max. priepustnosti:

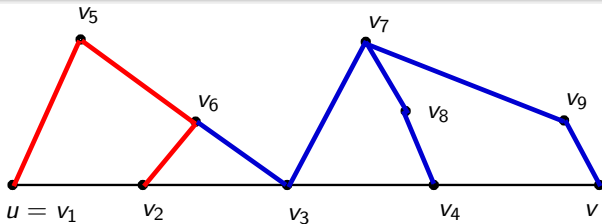
$$\mu(u, v) = (u, \{u \equiv v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \{v_3, v_4\}, v_4, \{v_4, v\}, v),$$

Cesta maximálnej priepustnosti

Veta

Nech K je najdrahšia kostra v súvislom hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$. Potom pre ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V$ je (jediná) $u-v$ cesta v K $u-v$ cestou maximálnej priepustnosti v G .

DÔKAZ.

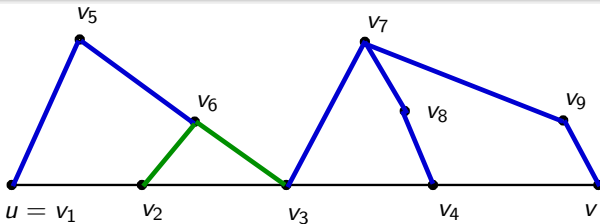


$$\mu(u, v_2) = (u, \{u, v_5\}, v_5, \{v_5, v_6\}, v_6, \{v_6, v_2\}, v_2),$$

Veta

Nech K je najdrahšia kostra v súvislom hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$. Potom pre ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V$ je (jediná) $u-v$ cesta v K $u-v$ cestou maximálnej priepustnosti v G .

DÔKAZ.

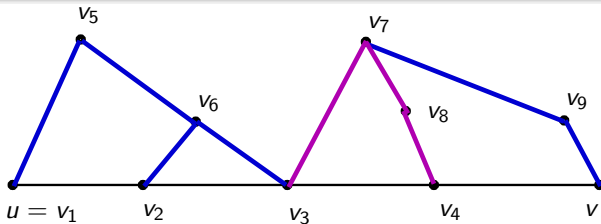


$$\mu(v_2, v_3) = (v_2, \{v_2, v_6\}, v_6, \{v_6, v_3\}, v_3),$$

Veta

Nech K je najdrahšia kostra v súvislom hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$. Potom pre ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V$ je (jediná) $u-v$ cesta v K $u-v$ cestou maximálnej priepustnosti v G .

DÔKAZ.

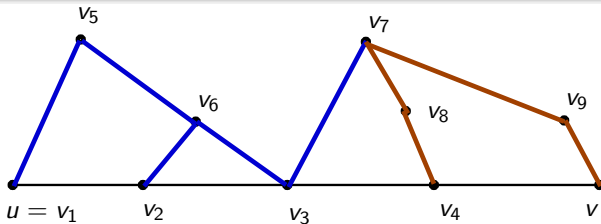


$$\mu(v_3, v_4) = (v_3, \{v_3, v_7\}, v_7, \{v_7, v_8\}, v_8, \{v_8, v_4\}, v_4),$$

Veta

Nech K je najdrahšia kostra v súvislom hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$. Potom pre ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V$ je (jediná) $u-v$ cesta v K $u-v$ cestou maximálnej priepustnosti v G .

DÔKAZ.

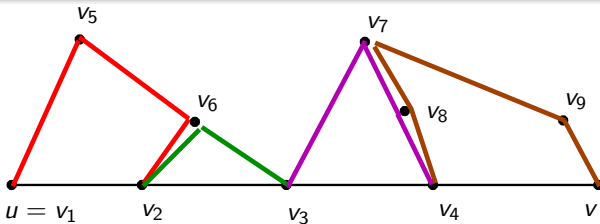


$$\mu(v_4, v) = (v_4, \{v_4, v_8\}, v_8, \{v_8, v_7\}, v_7, \{v_7, v_9\}, v_9, \{v_9, v\}, v).$$

Veta

Nech K je najdrahšia kostra v súvislom hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$. Potom pre ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V$ je (jediná) $u-v$ cesta v K $u-v$ cestou maximálnej priepustnosti v G .

DÔKAZ.



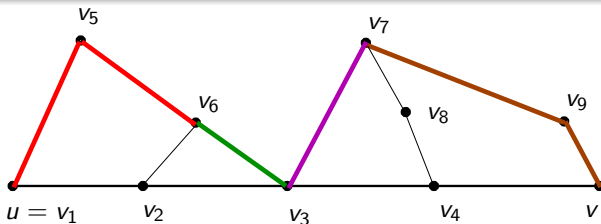
$u-v$ sled po hranách kostry s priepustnosťou \geq než priepustnosť cesty $\mu(u, v)$

Cesta maximálnej priepustnosti

Veta

Nech K je najdrahšia kostra v súvislom hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$. Potom pre ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V$ je (jediná) $u-v$ cesta v K $u-v$ cestou maximálnej priepustnosti v G .

DÔKAZ.



Cesta max. priepustnosti:

$$\mu(u, v) = (u, \{u \equiv v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \{v_3, v_4\}, v_4, \{v_4, v\}, v),$$

Cesta max. priepustnosti po hranách kostry

$$u, \{u, v_5\}, v_5, \{v_5, v_6\}, v_6, \{v_6, v_3\}, v_3, \{v_3, v_7\}, v_7, \{v_7, v_9\}, v_9, \{v_9, v\}, v.$$



Algoritmus na hľadanie $u-v$ cesty maximálnej priepustnosti

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie $u-v$ cesty maximálnej priepustnosti v súvislom hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$.

- **Krok 1.** V grafe G zostroj najdrahšiu kostru K .

- **Krok 2.** V kostre K nájdí (jedinú) $u-v$ cestu.

Táto (jediná) $u-v$ cesta v kostre K je $u-v$ cestou maximálnej priepustnosti v grafe G .



Poznámka

Uvedený algoritmus síce nájde $u-v$ cestu maximálnej priepustnosti, no táto nemusí byť – a spravidla ani nebýva – optimálnou z hľadiska prejdenej vzdialenosti.

Ak by sme chceli nájsť najkratšiu $u-v$ cestu s maximálnou priepustnosťou, potrebujeme mať v príslušnom grafe okrem kapacitného ohodnotenia hrán aj ohodnotenie vyjadrujúce ich dĺžku.



Algoritmus na hľadanie $u-v$ cesty maximálnej priepustnosti

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie $u-v$ cesty maximálnej priepustnosti v súvislom hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$.

- **Krok 1.** V grafe G zostroj najdrahšiu kostru K .
- **Krok 2.** V kostre K nájdí (jedinú) $u-v$ cestu.

Táto (jediná) $u-v$ cesta v kostre K je $u-v$ cestou maximálnej priepustnosti v grafe G .



Poznámka

Uvedený algoritmus síce nájde $u-v$ cestu maximálnej priepustnosti, no táto nemusí byť – a spravidla ani nebýva – optimálnou z hľadiska prejdenej vzdialenosti.

Ak by sme chceli nájsť najkratšiu $u-v$ cestu s maximálnou priepustnosťou, potrebujeme mať v príslušnom grafe okrem kapacitného ohodnotenia hrán aj ohodnotenie vyjadrujúce ich dĺžku.



Algoritmus na hľadanie $u-v$ cesty maximálnej priepustnosti

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie $u-v$ cesty maximálnej priepustnosti v súvislom hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$.

- **Krok 1.** V grafe G zostroj najdrahšiu kostru K .
- **Krok 2.** V kostre K nájdí (jedinú) $u-v$ cestu.

Táto (jediná) $u-v$ cesta v kostre K je $u-v$ cestou maximálnej priepustnosti v grafe G .



Poznámka

Uvedený algoritmus síce nájde $u-v$ cestu maximálnej priepustnosti, no táto nemusí byť – a spravidla ani nebýva – optimálnou z hľadiska prejdenej vzdialenosti.

Ak by sme chceli nájsť najkratšiu $u-v$ cestu s maximálnou priepustnosťou, potrebujeme mať v príslušnom grafe okrem kapacitného ohodnotenia hrán aj ohodnotenie vyjadrujúce ich dĺžku.



Algoritmus na hľadanie $u-v$ cesty maximálnej priepustnosti

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie najkratšej $u-v$ cesty s maximálnou priepustnosťou v súvislom hranovo ohodnotenom grafe

$G = (V, H, c, d)$, kde $c(h)$ je priepustnosť a $d(h)$ je dĺžka hrany $h \in H$.

- **Krok 1.** V grafe G nájdi cestu $\mu(u, v)$ maximálnej priepustnosti vzhľadom na ohodnotenie hrán c .
Nech C je priepustnosť cesty $\mu(u, v)$.
- Krok 2. Vytvor graf $G' = (V, H', d)$, kde $H' = \{h | h \in H, c(h) \geq C\}$.
 $\{H' \text{ obsahuje len tie hrany pôvodného grafu, ktoré majú priepustnosť väčšiu alebo rovnú než } C.\}$
- Krok 3. V grafe G' nájdi najkratšiu $u-v$ cestu vzhľadom na ohodnotenie hrán d .





Algoritmus na hľadanie $u-v$ cesty maximálnej priepustnosti

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie najkratšej $u-v$ cesty s maximálnou priepustnosťou v súvislom hranovo ohodnotenom grafe

$G = (V, H, c, d)$, kde $c(h)$ je priepustnosť a $d(h)$ je dĺžka hrany $h \in H$.

- **Krok 1.** V grafe G nájdi cestu $\mu(u, v)$ maximálnej priepustnosti vzhľadom na ohodnotenie hrán c .
Nech C je priepustnosť cesty $\mu(u, v)$.
- **Krok 2.** Vytvor graf $G' = (V, H', d)$, kde $H' = \{h \mid h \in H, c(h) \geq C\}$.
 $\{H' \text{ obsahuje len tie hrany pôvodného grafu, ktoré majú priepustnosť väčšiu alebo rovnú než } C.\}$
- **Krok 3.** V grafe G' nájdi najkratšiu $u-v$ cestu vzhľadom na ohodnotenie hrán d .





Algoritmus na hľadanie $u-v$ cesty maximálnej priepustnosti

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie najkratšej $u-v$ cesty s maximálnou priepustnosťou v súvislom hranovo ohodnotenom grafe

$G = (V, H, c, d)$, kde $c(h)$ je priepustnosť a $d(h)$ je dĺžka hrany $h \in H$.

- **Krok 1.** V grafe G nájsť cestu $\mu(u, v)$ maximálnej priepustnosti vzhľadom na ohodnotenie hrán c .
Nech C je priepustnosť cesty $\mu(u, v)$.
- **Krok 2.** Vytvor graf $G' = (V, H', d)$, kde $H' = \{h \mid h \in H, c(h) \geq C\}$.
 $\{H' \text{ obsahuje len tie hrany pôvodného grafu, ktoré majú priepustnosť väčšiu alebo rovnú než } C.\}$
- **Krok 3.** V grafe G' nájsť najkratšiu $u-v$ cestu vzhľadom na ohodnotenie hrán d .

