同学们好！今天我们来学习静电场的第四讲高斯定理

为了形象地描绘电场的分布，使电场有一个比较直观的图像，通常引入电场线的概念，这个概念是法拉第首先提出的。因为电场中每一点的场强 E 都有一定的大小和方向，所以我们在电场中描绘一系列的曲线，使曲线上每一点的切线方向都与该点处的场强方向一致，这些曲线就叫做电场线。

为了使电场线不仅表示电场中场强的方向，而且表示场强的大小，我们对电场线作如下规定：在电场中任一点，取一垂直于该点场强方向的面积元，使通过单位面积的电场线数目等于该点场强的大小。显然，按照这种规定，在场强较大的地方电场线较密，在场强较小的地方电场线较稀疏，这样，电场线的疏密就形象地反映了电场中场强大小的分布。

电场线是虚构的曲线，客观并不存在。但是可以借助一些实验的方法，把各种电荷分布的电场线显示出来。图 a 是两个电极周围电场线的分布情况，图 b 是平行板电容器周围电场线的分布情况。

从电场线的图形可以看到，静电场的电场线有如下性质：（1）电场线起于正电荷，终止于负电荷；（2）电场线不会形成闭合的曲线；（3）任何两条电场线都不会相交。

应该注意到，虽然在电场中每一点，正电荷所受的力和通过该点的电场线方向相同，但是，在一般情况下，电场线并不是一个正电荷在场中运动的轨迹。我们来看，带电粒子在均匀电场中的运动

通量是描述矢量场的一个重要概念。描述电场的通量，叫电场强度通量，简称电通量，常用字母 Φ_E 表示。

在这里我们利用上述电场线的图像，将有助我们对电通量的理解。按照电场线的作图法，均匀电场的电场线是一系列均匀分布的平行直线，如图，在均匀电场中取一个想象的平面，其面积为△S 并与 E 的方向垂直。显然，通过这一平面的电场线总数等于 E 乘以△S。

如果平面的法线单位矢量 n 与电场强度 E 成 θ 角时，那么通过这一平面的电通量为

$$\Delta\Phi_E = E\Delta S\cos\theta = \vec{E}\cdot\Delta\vec{S}$$

也就是场强 E 的大小与面元△S 在垂直于场强方向上投影面积△Scos θ 的乘积，就是通过面元△S 的电通量。插入

但是一般情况，电场是不均匀的，而且所取的几何面 S 可以是一个任意的假想曲面，在曲面上场强的大小和方向是逐点变化的，要计算通过该曲面的电通量，如图，则先要把该曲面划分为无限多个面积元 dS，在每一个无限小面积元 dS 上，电场强度 E 可以认为是均匀的。

设 dS 的法线单位矢量 n 与该处的电场强度 E 成 θ 角，那么通过这个面积元的电通量为

$$d\Phi_E = E\,dS\cos\theta = \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

所以对整个曲面积分可求得通过该曲面的电通量为:

$$\Phi_E = \iint_S E\,dS\cos\theta = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

当 S 是闭合曲面时，上式可写成

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

必须指出，电通量虽是标量，但是有正有负，对闭合曲面来说，通常规定自内向外的方向为面元法线的正方向。所以，在电场线从曲面之内向外穿出时电通量为正，当电场线从外部穿入曲面时电通量为负。插入

接下来进一步讨论通过闭合曲面的电通量和场源电荷量之间的关系，从而得出表征静电场性质的基本定理—高斯定理

如图，首先我们计算（1）在点电荷 q（＞0）所激发的电场中，通过以点电荷 q 为中心、半径为 r 的球面上的电通量。场强的方向沿半径呈辐射状，处处和球面上的法线单位矢量 n 的方向相同，即 n 和 E 之间的夹角 θ=0. 所以通过面元 dS 的电通量为

$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS$$

则通过整个闭合曲面的电通量为

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oiint_S dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

这一结果表明，通过闭合球面上的电通量和球面所包围的电

荷量成正比，而和所取球面的半径无关。如果用电场线来理解的话，这表示通过半径不同的同心球面的电场线的总条数相等，那么通过各球面的电通量都等于 q/ε0.这也表明从点电荷 q 发出的所有电场线连续地延伸到无限远处。

下面把这一结论推广到（2）任意形状的闭合曲面 S 包围点电荷 q 的情况，在点电荷 q 与闭合曲面 S 间作以 q 为球心的球面 S’如图。因 S 与 S’间无其它电荷，所以通过 S’的电场线也一定通过 S 。

所以，通过任意闭合曲面 S 的电通量依然等于 q/ε0。

（3）如果电场是由任意带电体所激发的，任意带电体可看作点电荷系，那么通过任意闭合曲面 S 的电通量等于闭合曲面 S 内所包围的所有电荷除以 ε0。

（4）设想有另一个任意闭合曲面 S 不包围任何电荷时，如图，由电场线的连续性可知，穿入曲面的电场线必定从该曲面的另一侧穿出，为此通过这一闭合曲面的电通量为零。

从以上的分析我们可以得出：通过任意闭合曲面 S 的电通量 Φ_E 等于该曲面所包围的所有电量的代数和除以 ε_0，与闭合曲面外的电荷无关。

这就是表征静电场普遍性质的高斯定理.习惯上称闭合曲面为高斯面。其数学表达式为

$$\Phi_E = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)} q_i$$

插入

从高斯定理可以看出，当闭合曲面内的电荷为正时，电通量大于零，表示有电场线从 q 发出并穿出闭合曲面，所以，正电荷称为静电场的源头；当闭合曲面内的电荷为负时，电通量小于零，表示有电场线穿进闭合曲面而终止于 q，所以，负电荷称为静电场的尾闾。因此高斯定理说明了电场线起于正电荷、终止于负电荷，也就是说静电场是有源场。

高斯定理和库仑定律都是静电场的基本定律，但是库仑定律只适用于静电场，而高斯定理不但适用于静止电荷和静电场，也适用于运动电荷和迅速变化的电磁场。

值得注意的是，高斯面上的场强 E 是高斯面内外所有电荷激发的总场强，也就是说高斯面外的电荷对空间各点的场强有贡献，但是，它们对整个高斯面上的电通量的贡献为零。例如当高斯面内没有电荷或电量的代数和为零时，则电通量等于零 ，但高斯面 S 上的场强不一定为零。

今天的这一讲就到这里，同学们再见。