同学们好！今天我们来学习静电场的第七讲电势叠加原理以及电势和电场强度的关系

我们在学习电势叠加原理之前，首先要知道点电荷的电势

由点电荷电场的计算式

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

和电势的定义，可以算得点电荷 q 的电场中任一点 P 的电势为

$$U_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

由此可见，在点电荷周围空间任一点的电势与该点离点电荷 q 的距离 r 成反比，如果 q 是正电荷，各点电势是正的，离点电荷越远处电势越低，在无限远处电势为零；如果 q 是负电荷，各点电势也是负的，离点电荷越远处电势越高，在无限远处电势为零最大。

如果电场是由 n 个点电荷所激发，则某点 P 的电势由场强叠加原理可得

$$U_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^\infty \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \cdots + \int_P^\infty \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^n U_{Pi}$$

这表明，在点电荷系的电场中某点的电势等于各点电荷单独存在时，在该点电势的代数和。这就是电势叠加原理。即

$$U_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

式中 r_i 为第 i 个点电荷 q_i 到 P 点的距离。

如果静电场是由电荷连续分布的带电体所激发，则可以把带电体分成无数电荷元 dq 的集合，按点电荷的电势计算 dq 在场点 P 的电势，再按照电势叠加原理来计算带电体在场点 P 的电势

$$U_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{dq}{r}$$

积分是对整个带电体积分。因为电势是标量，这里的积分是标量积分，所以电势的计算比电场强度的计算较为方便。

下面我们通过几个实例来分析电势的计算

首先讨论均匀带电球面电场的电势

如图设均匀带电球面的半径为 R，带电量为 q。因为在第五讲高斯定理的应用我们已经知道均匀带电球面的电场分布，球面内场强

$$E_{内} = 0$$

球面外场强

$$E_{外} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

利用电势和场强的积分关系式，并沿半径方向积分，可得球面外的电势为

$$U = \int_r^{\infty} \vec{E}_{外}\cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

因为球面内、外场强不同，要分段积分，则球面内的电势为

$$U = \int_r^{R} \vec{E}_{内}\cdot d\vec{r} + \int_R^{\infty} \vec{E}_{外}\cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

由此可见，一个均匀带电球面在球外任一点的电势和把全部电荷看作集中于球心的一个点电荷在该点的电势相同；在球面内任一点的电势应与球面上的电势相等。故均匀带电球面及其内部

是一个等电势的区域。电势 U 随距离 r 的变化关系如图所示。

均匀带电球面内、外场强不连续，但电势连续。

下面我们讨论均匀带电圆环轴线上一点的电势

如图设圆环半径为 R,均匀带有电荷量 q。在圆环上取线元 dl ，其带电量为 dq，dq 在场点 P 的电势为

$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

则整个带电圆环在 P 点的电势

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\oint dq = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}}$$

这是直接积分法：点电荷电势 + 电势叠加原理

但我们也可以用场势法来计算 P 点的电势，在第三讲场强叠加原理的应用我们已经知道带电圆环轴线上 P 点的场强

$$E = \frac{xq}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

那么 P 点的电势

$$U = \int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{x} = \int_a^\infty \frac{xq}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}\cdot dx$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}}$$

把 a=0 代入上式，得圆心 0 的电势

$$U_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

由此可见，虽然均匀带电圆环中心的电场强度等于零，而电势却不为零。

例 3. 求电偶极子电场中的电势分布。

设电偶极子的两点电荷为+q 和-q，相距为 l 。建立图示的极坐标， 原点取在电偶极子的中点，场点 P 离 l 的中点 O 的距离为 r，r 与 l 的夹角为θ。由电势叠加原理可得 P 点的电势

$$U=U_{+}+U_{-}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{+}}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{-}}$$

$$=\frac{q(r_{-}-r_{+})}{4\pi\varepsilon_0 r_{+}r_{-}}$$

$$\text{当} r>>l \text{时：} \quad r_{+}r_{-}\approx r^2, \quad r_{-}-r_{+}\approx l\cos\theta$$

从而可得

$$U=\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

其中电偶极矩 $P=ql$ ，再利用矢量的点积，则等于

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

插入测验题

电场强度和电势，都是用来描述同一静电场中各点性质的物理量，两者之间有着密切的关系。为了对这种关系有比较直观的认识，我们来介绍电势的图示法。

一般说来，静电场中各点的电势是逐点变化的，但是场中有许多点的电势值是相等的。把这些电势值相等的各点连起来所构成的曲面叫做等势面

同电场线一样，我们也可以对所绘的等势面的疏密作一些规定，使它们也能表示出电场中各处电势的强弱。这个规定是:任意

两相邻等势面间的电势差都相等,按这一规定绘出了几种常见电场的等势面和电场线图。图中带有箭头的线为电场线，不带箭头的线为等势面。从图中可以看出等势面密集的地方场强较大，等势面稀疏的地方场强越小。

等势面有两个重要的性质：（1）在等势面上移动电荷时，电场力不作功；（2）电场线与等势面处处正交。

现在，我们来讨论电势和电场强度的关系。设在静电场中，如图，取两个靠得很近的等势面 A 和 B，电势分别为 U 和 U+dU，并设 dU＞0。P 为等势面 A 上的一点，在 P 点作等势面 A 的法线（等势面的法线正方向规定为指向电势升高的方向），以 dn 表示两等势面在 P 点的法向距离 PQ。由于两个等势面是如此靠近，可以把 P 点附近的电场看成均匀场，当单位正电荷从 P 点沿法线方向移动到 Q 点时，电场力对单位正电荷所作的功等于起点和终点之间的电势差，则

$$dU = \left|E_P\right| dn \quad \text{或} \quad \left|E_P\right| = \frac{dU}{dn}$$

由于场强的方向总是由高电势指向低电势，所以：

$$\vec{E} = -\frac{dU}{dn}\vec{n}$$

$\frac{dU}{dn}\vec{n}$ **称为 P 点的电势梯度，以 $gradU$ 或 ∇U 表示：**

总之，电场强度和电势都是用来描述同一个静电场的分布，E 是矢量，U 是标量，它们之间关系是微分和积分的关系，这表明了电场强度和电势的关系是一种分布对应着另一种分布，而不能说它们是一一对应。

最后，请同学们思考一下如何利用电场强度和电势的关系求均匀带电圆环轴线上任一点的场强大小。

到这里为止，静电场这一单元的内容全部结束，同学们再见。