第六章　振　动

自然界中有着各式各样的振动。

物体在一定位置附近作重复的往返运动称为**机械振动**。如：钟摆的摆动、琴弦的振动、心脏的跳动、机器运转时的振动等。

广义地说，任一物理量随时间的周期性变化都可以称为振动。如：交变电流、电磁振荡等。

最简单、最基本的周期性振动是简谐振动，也叫简谐运动，

- 它出现在许多物理现象中；
- 任何复杂的振动形式都可分解为若干简谐运动之和；

——我们从简谐运动开始学习振动。

第六章主要内容

*(1)*简谐运动的运动学；

*(2)*简谐振动的动力学；

*(3)*简谐振动的能量；

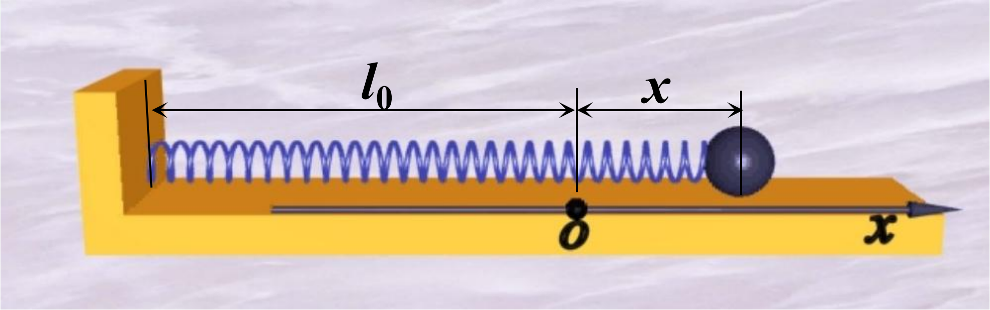
*(4)*同方向的简谐振动的合成；

*(5)*相互垂直的简谐振动的合成；

*(6)*阻尼振动、受迫振动、共振。

06. 1 简谐运动的运动学

1、简谐运动的运动方程：



以时间的余弦（或正弦）函数表示位移（或角位移）的运动称为**简谐运动**。

本教程采用余弦函数。

位移 $$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

——简谐运动的**运动学方程**。

2、简谐运动的特征量：

（1）振幅：

振动物体离开平衡点最大位移的绝对值A。

质点运动的位移一直在$x=-A$和$x=+A$之间来回变化，振幅给出了质点运动的范围。

(2) 周期、频率、角频率

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) = A\cos(\omega t+\varphi+2\pi) = A\cos\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]$$

——简谐运动的位移具有时间上的周期性。

周期T： 完成一次完全振动所需时间。

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}}$$

(单位： s)

频率ν： 单位时间内完成完全振动的次数。

$$\boxed{\nu=\frac{\omega}{2\pi}}$$

(单位： $\mathrm{Hz} = 1/\mathrm{s}$)

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \qquad \nu=\frac{\omega}{2\pi}$$

简谐振动的周期T和频率ν决定于ω。

$$\boxed{\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T}}$$

ω称为圆频率或角频率。

(单位：rad/s)

简谐振动的运动方程也可写成：

$$\boxed{x=A\cos(2\pi\nu t+\varphi)}$$

或

$$\boxed{x=A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)}$$

(3) 相位和初相位：

由简谐运动的运动方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 可得，

简谐运动速度： $v = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

加速度： $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$

——— x、v、a都随着角度$\omega t+\varphi$的变化而变化。

$\omega t+\varphi$：称为相位、周相或相位角。

相位是决定振动物体运动状态的重要物理量，

其中φ是 $t=0$ 时的相位，称为初相位。

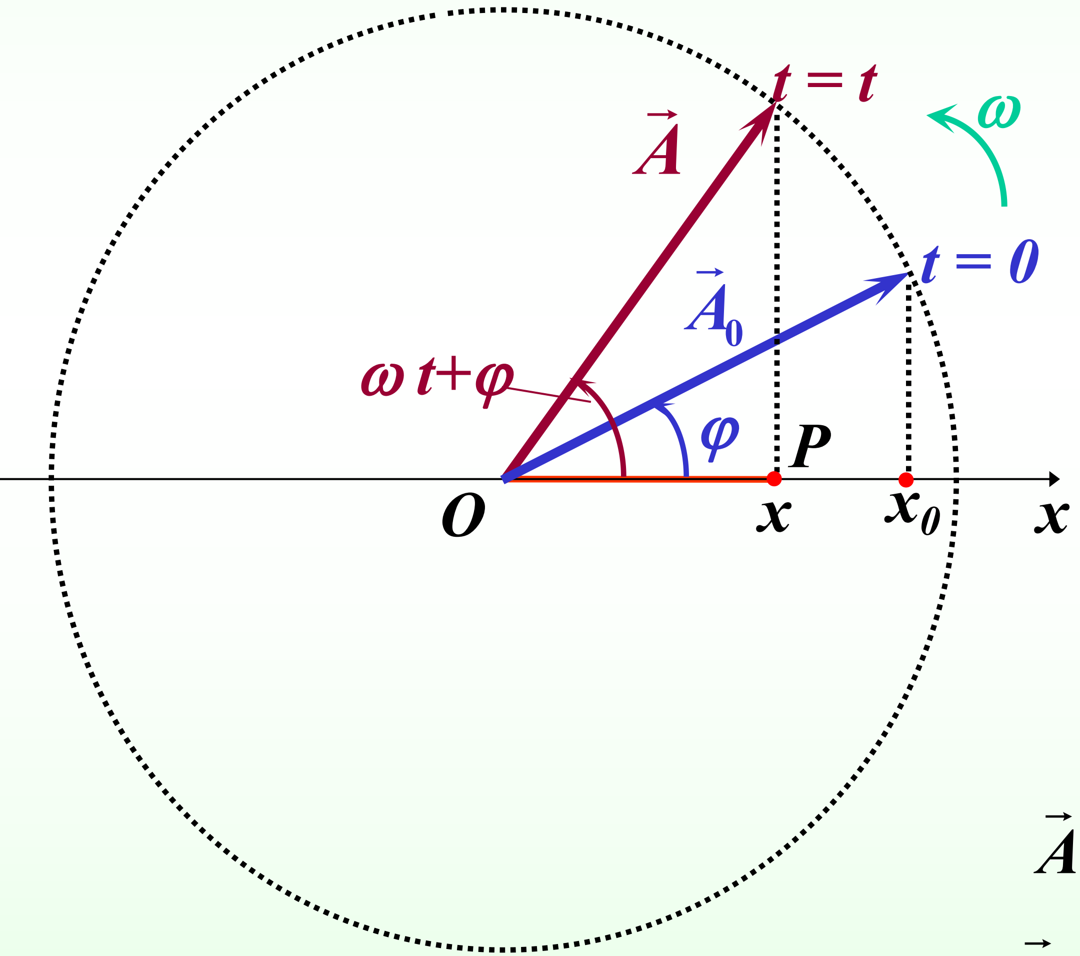
由初始条件确定振幅A和初相位φ：

设 $t=0$ 时，$x=x_0$、$v=v_0$，

则：
$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases}$$

得：
$$\begin{cases} \boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}} \\ \boxed{\tan\varphi = -\dfrac{v_0}{\omega x_0}} \end{cases}$$

3、简谐运动的矢量表示法：



以圆心O为起点、长度为A的矢量 $\vec{A}$ 以角速度ω作逆时针旋转，

$t=0$时，矢量 $\vec{A}_0$ 与x轴夹角为初相位角φ，

$t=t$ 时：$\vec{A}$ 与x轴夹角为相角$\omega t+\varphi$，该质点在轴上的投影的坐标：

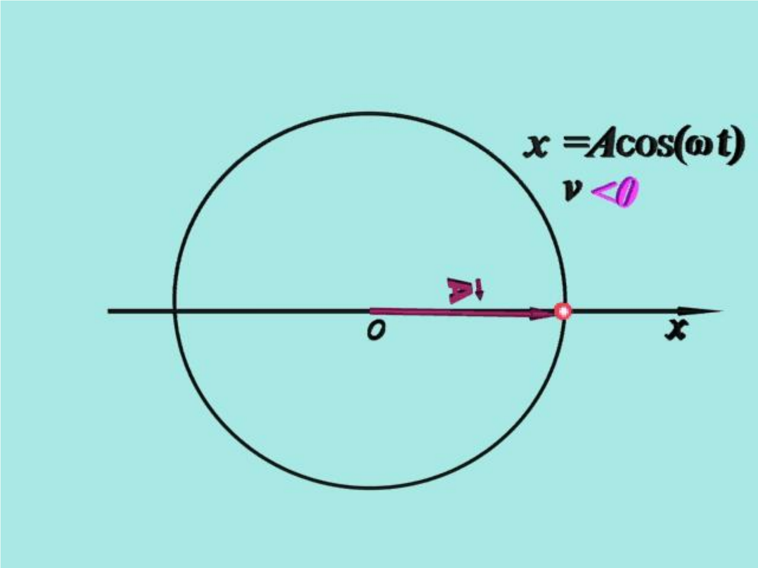
$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

即为简谐运动方程。

$\vec{A}$：振幅矢量或旋转矢量，

$\vec{A}$ 的端点轨迹称为参考圆。

◆旋转矢量 $\vec{A}$ 在x轴上的投影就可以描述简谐运动位移的变化规律：



➢旋转矢量$\vec{A}$ 的长度A即振动的振幅；

➢矢量旋转的角速度ω即振动的角频率；

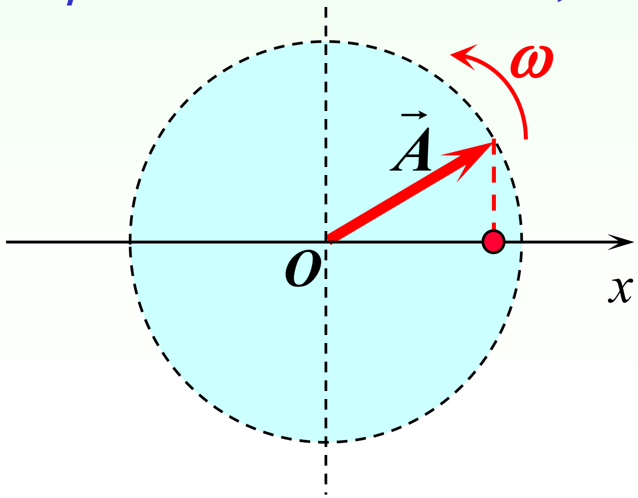
➢矢量与x轴的夹角 $\omega t+\varphi$ 为振动的相位，因而也称为相角。t=0时的夹角φ就是初相位。

*此演示中初相位φ=0，简谐运动的运动方程为：

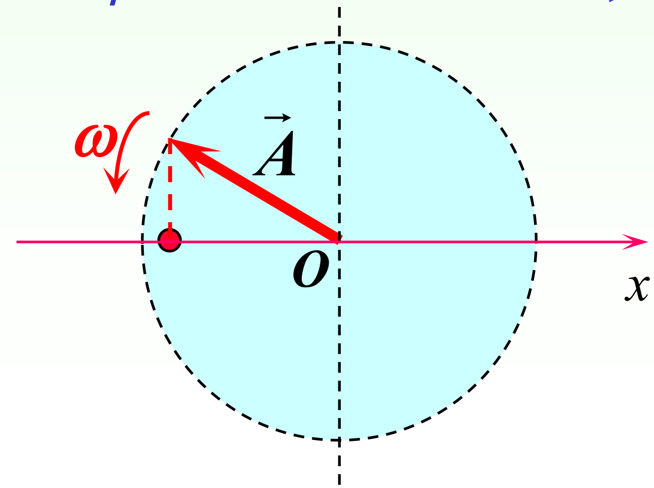
$$x = A\cos(\omega t)$$

振幅矢量旋转过程中x、v与相位$\omega t+\varphi$的关系：

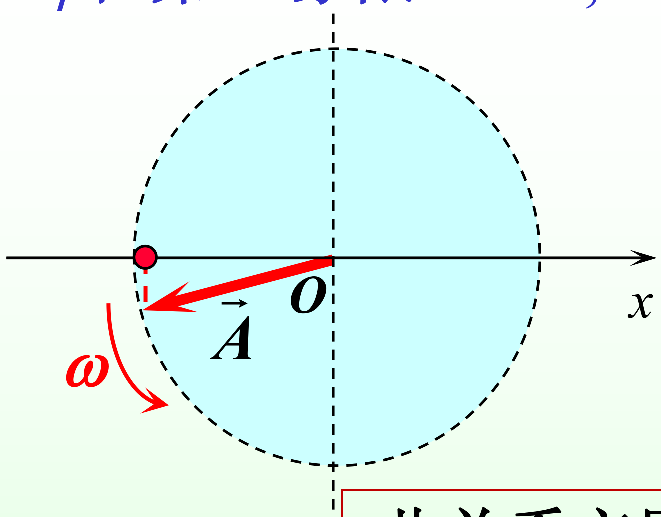
$\omega t+\varphi$ 在第I象限：$x>0,\ v<0$



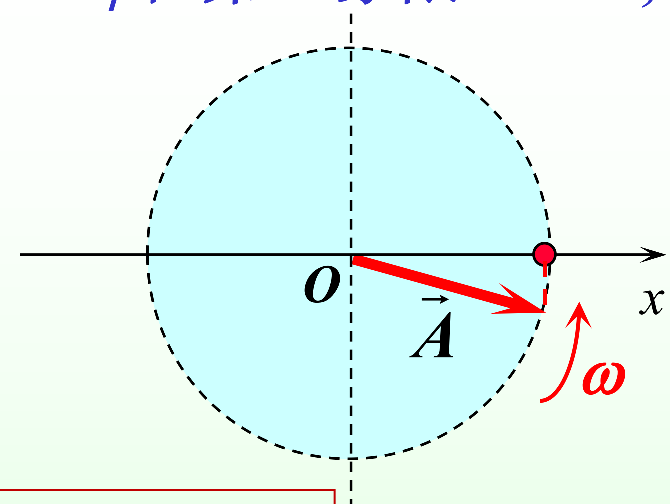
$\omega t+\varphi$在第II象限：$x<0, v<0$



$\omega t+\varphi$在第III象限：$x<0, v>0$



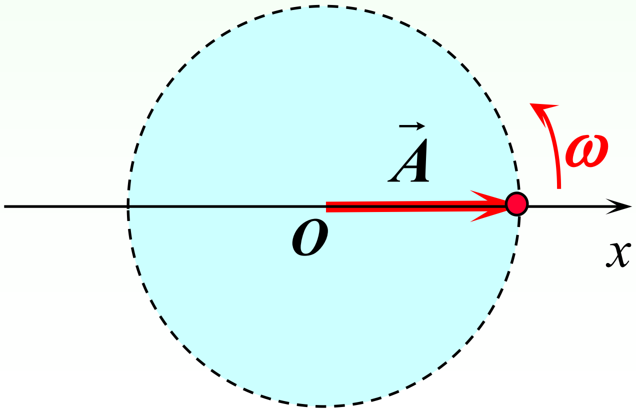
$\omega t+\varphi$在第IV象限：$x>0\ ,\ v>0$



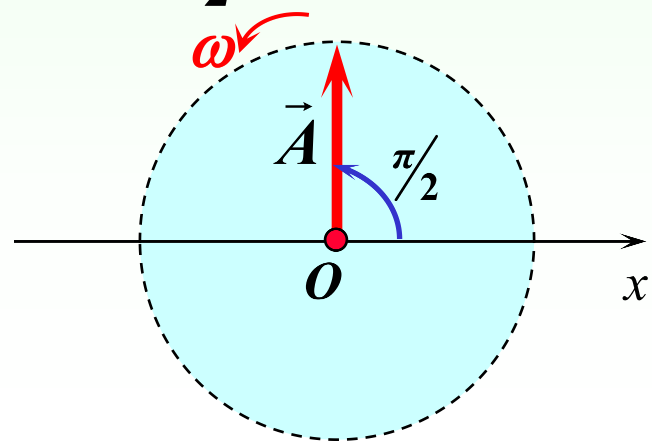
此关系亦用于初相位角的确定

用相位表示简谐运动的状态：

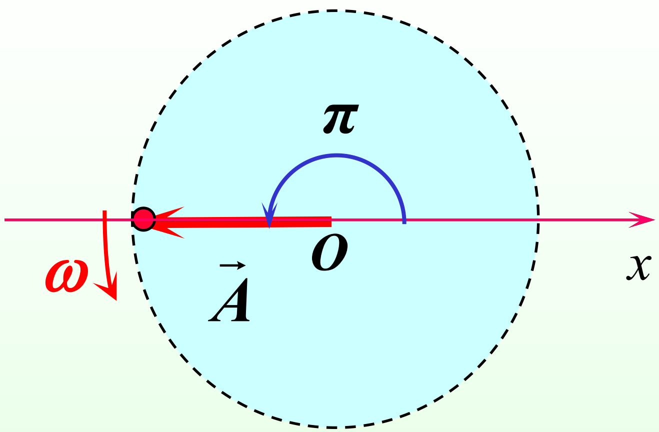
$\omega t+\varphi=0$： $x=A,\ v=0$



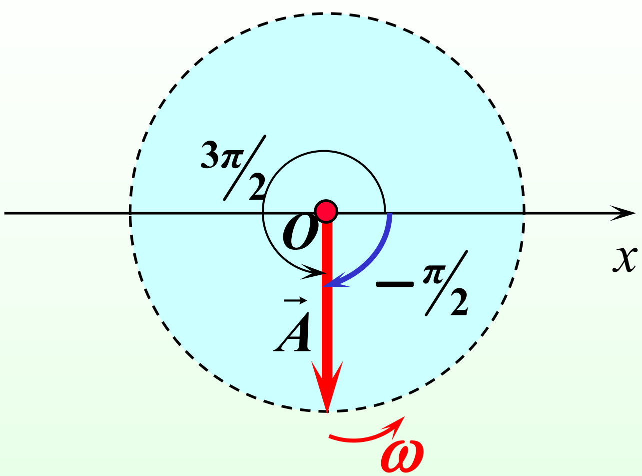
$\omega t+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$： $x=0,\ v=-\omega A$ (最大)



$\omega t+\varphi=\pi$： $x=-A,\ v=0$



$\omega t+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$或$-\dfrac{\pi}{2}$： $x=0,\ v=+\omega A$ (最大)

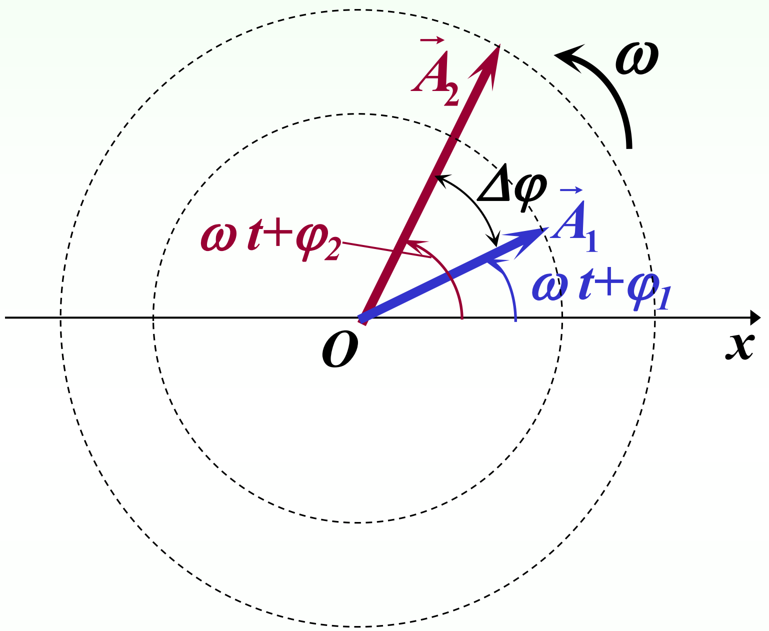


4、两同频率简谐运动的相位差：

两同频率振动：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$



相位差：

$$\boxed{\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1}$$

两同频简谐运动的相位差等于它们的初相位之差。

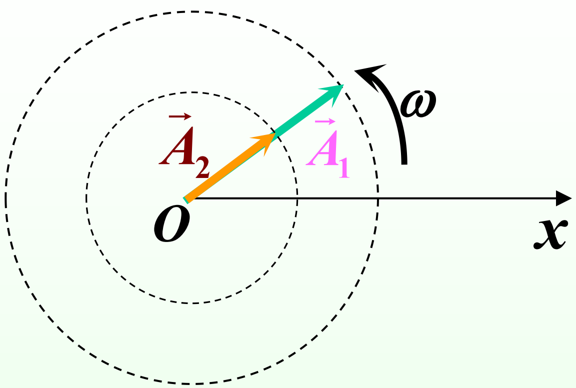
（亦即两旋转矢量的夹角）

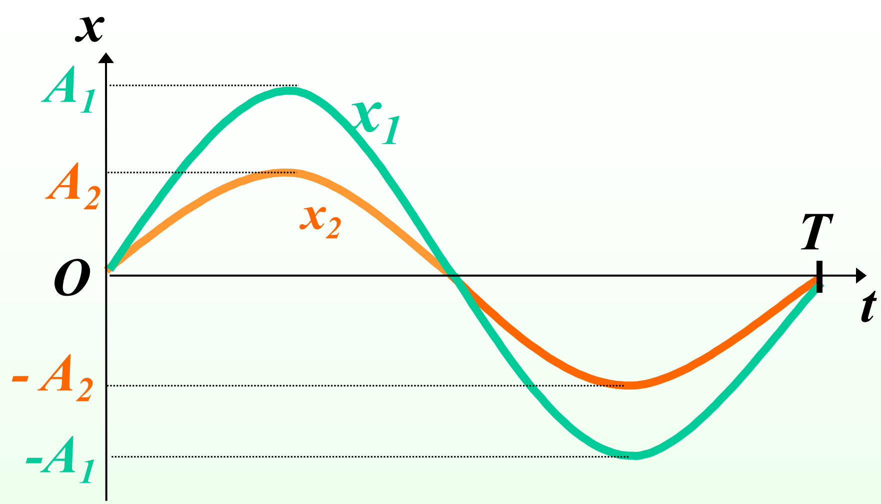
➢ 同相和反相

（1）当$\Delta\varphi = \pm 2k\pi \quad (k = 0,1,2,\ldots)$时

两振动步调完全相同

——同相

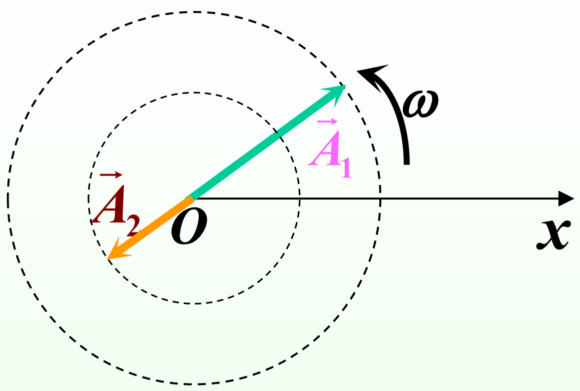


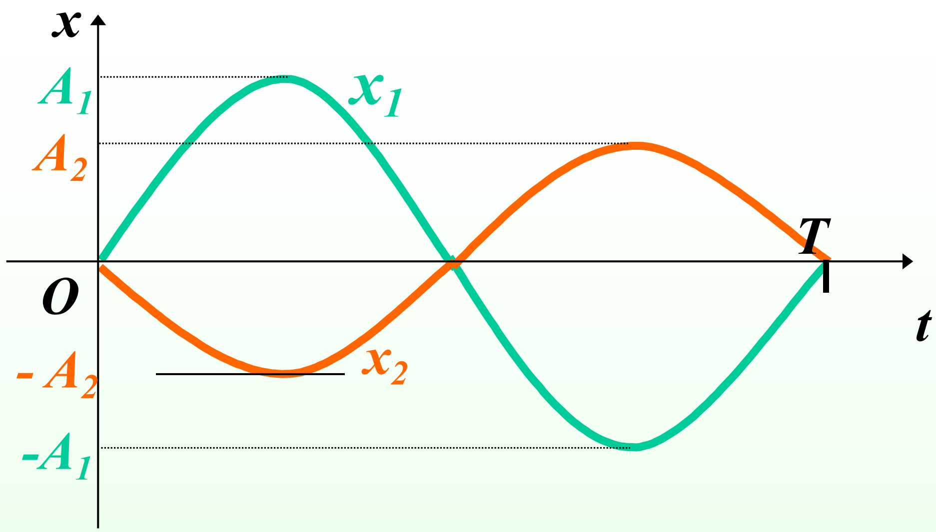


（2）当$\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi \quad (k = 0,1,2,\ldots)$ 时

两振动步调相反

——反相





超前和落后

若$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1>0$,

称 x_2 比 x_1 超前 (或 x_1 比 x_2 落后)

若$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1<0$,

称 x_1 比 x_2 超前 (或 x_2 比 x_1 落后)

超前、落后常以 $|\Delta\varphi|<\pi$ 来判断

5、简谐振动的速度和加速度及相位关系：

速度 $$v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)=v_m\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

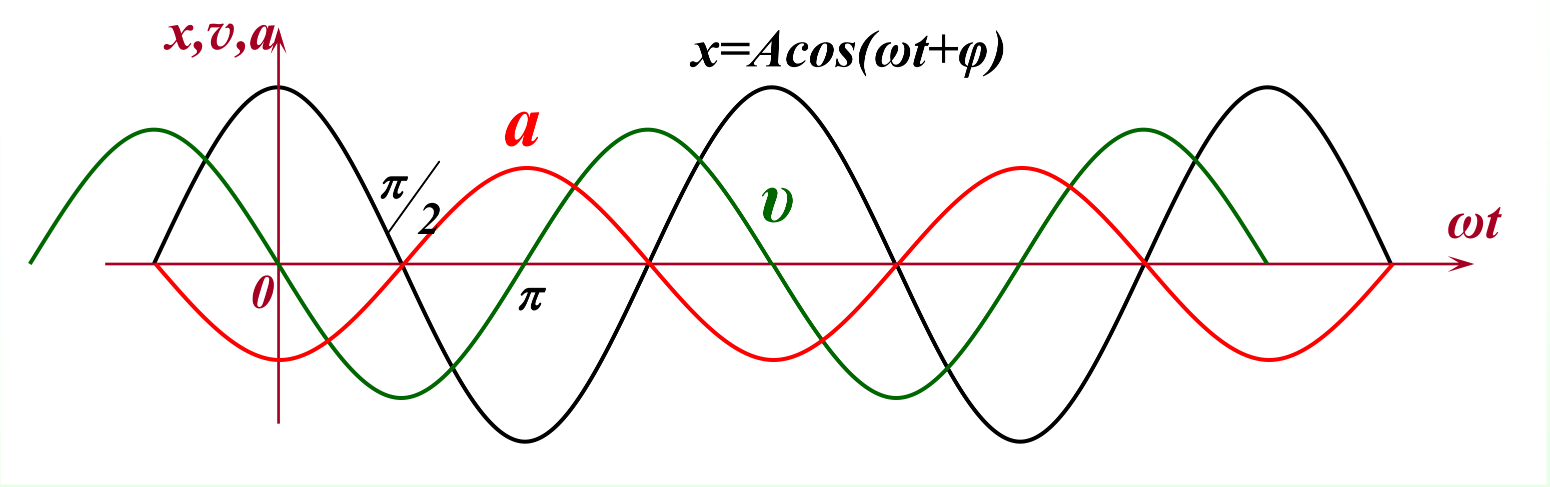
v比x超前$\pi/2$

加速度 $$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

$$=a_m\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

a比v超前$\pi/2$，与x反相

$v_m=A\omega$ 速度幅值 $a_m=A\omega^2$ 加速度幅值

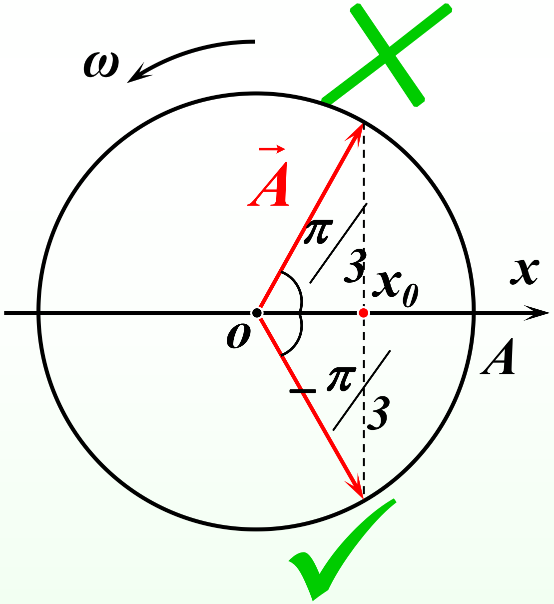


例6-1：一质点沿x轴作简谐振动，$A = 0.1m$，$T = 2s$ 。$t = 0$ 时 $x_0=0.05m$，且$v_0>0$ ，求：(1) 质点的振动方程；(3) 若某时刻质点在 $x = -0.05m$处且沿x轴负向运动，质点从该位置第一次回到平衡位置的时间是多少？

解：(1) 设振动方程为： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

已知：$A = 0.1m$，$\omega = 2\pi/T = \pi\ rad/s$，

$t = 0$时，$x_0 = A/2$，$v_0 > 0$



由旋转矢量图，初相位角在第IV象限，

故 $\varphi = -\pi/3$

$$\therefore\quad x = 0.1\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})\quad m$$

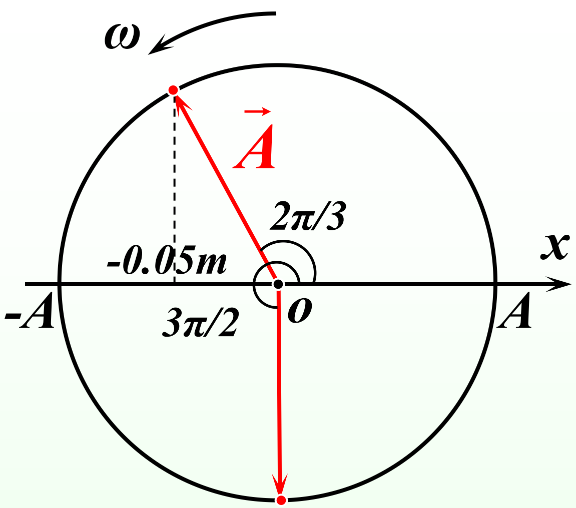
(3) 若某时刻质点在 $x = -0.05m$ 处且沿 x 轴负向运动，质点从该位置第一次回到平衡位置的时间是多少？

解法一： $x = -0.05m$，$v < 0$ 时： 相位 $\omega t_1 + \varphi = 2\pi/3$

第一次回到平衡位置： 相位 $\omega t_2 + \varphi = 3\pi/2$

两位置相位之差：

$$\Delta\varphi = \omega(t_2 - t_1) = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

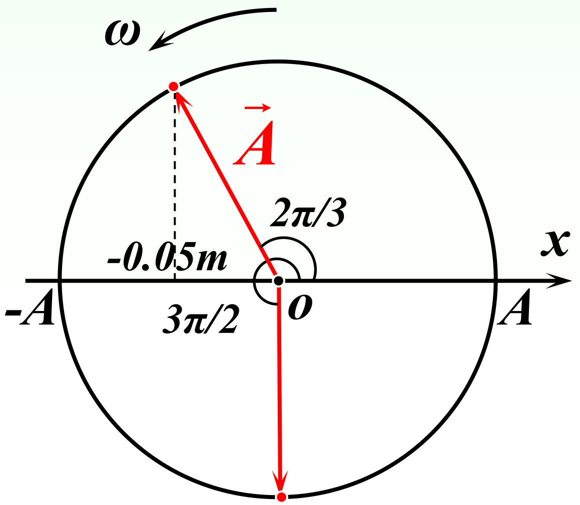


质点从该位置第一次回到平衡位置的时间即旋转矢量转过 $\Delta\varphi$ 所需时间，

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{5\pi}{6} \times \frac{1}{\pi} = \frac{5}{6} \quad (s)$$

(3) 若某时刻质点在 $x = -0.05m$处且沿x轴负向运动，质点从该位置第一次回到平衡位置的时间是多少？

解法二：



t_1时刻：$\cos(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

$$\pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_1 = 1s$$

t_2时刻：$\cos(\pi t_2 - \frac{\pi}{3}) = 0$

$$\pi t_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{11}{6}s$$

所以：$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{5}{6}s$