苏州大学《线性代数》课程试卷库（第十五卷）共 4 页

学院________________ 专业________________成绩____________

年级___________ 学号__________ 姓名___________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									

一、选择题：（每题 3 分，共计 15 分）

1、已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，则 $A^*=$ [ ]

（A）$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ （C）$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

2、设 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则下列结论必成立的是 [ ]

（A）$\lambda E-A=\lambda E-B$，其中 λ 为 A 与 B 的特征值

（B）对于任意常数 t，有 $|tE-A|=|tE-B|$

（C）存在对角矩阵 Λ，使得 A 与 B 都相似于 Λ

（D）当 λ_0 是 A 与 B 的特征值时，n 元齐次线性方程组 $(\lambda_0 E-A)x=0$ 与 $(\lambda_0 E-B)x=0$ 同解

3、设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^k=0$（k 为正整数），则 [ ]

（A） $A=0$ （B） A 有一个不为零的特征值

（C） A 的特征值全为零 （D） A 有 n 个线性无关的特征向量

4、设 A 为 n 阶方阵，$r(A)=n-3$，且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $Ax=0$ 的三个线性无关的解向量，则 $Ax=0$ 的基础解系可以是 [ ]

（A）$\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$ （B）$\alpha_2-\alpha_1, \alpha_3-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3$

（C）$2\alpha_2-\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_3-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3$ （D）$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_3-\alpha_2, -2\alpha_3-\alpha_1$

5、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$（$n\ge 2$）线性相关，那么向量组内 [ ] 可由向量组内其余向量线性表示。

（A）任何一个向量 （B）没有一个向量

（C）至少有一个向量 （D）至多有一个向量

二、填空题：（每题 3 分，共计 15 分）

1、设向量 $\alpha=(1,\ a,\ b)$ 与 $\beta=(2,\ 2,\ 2)$，$\gamma=(3,\ 1,\ 3)$ 都正交，则 $a=$__________，$b=$___________。

2、设 A，B 为 3 阶方阵，且 $|A|=-1,|B|=2$，则 $\left|2(A^T B^{-1})^2\right|=$ ________。

3、设 4 阶方阵 A 的秩为 2，则其伴随阵 A^* 的秩是___________。

4、线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$ 当 $\lambda=$________时，有无穷多组解。

5、设 3 阶方阵 A 的三个特征值为 1，2，3，则 A^*A^{-1} 的三个特征值为________，__________，__________。

三、（10 分）计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

四、（10 分）设方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$，

1、证明：A 可逆；2、求 $(A^*)^{-1}$；3、解矩阵方程 $A^*X=A+A^{-1}$.

五、（10 分）设线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+3x_4+7x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$

用基础解系表示方程组的全部解

六、（10 分）向量组A：$\alpha_1=(1,\ -2,\ -1,\ -2,\ 2)$，$\alpha_2=(4,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3)$，

$\alpha_3=(2,\ 5,\ 4,\ -1,\ 0)$，$\alpha_4=\left(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{3}\right)$，

（1） 证明向量组α_1，α_2，α_3,α_4线性相关；

（2） 求向量组的一个极大无关组；

（3） 将其余向量用极大无关组线性表示。

七、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 A 特征值和特征向量；

八、（10 分）利用正交变换将二次型 $f=x^2+2y^2-4xy$ 化为标准型。

九、（10 分）设非零数 λ_0 是正交矩阵 A 的一个特征值，

证明：$\dfrac{1}{\lambda_0}$ 也是 A 的特征值