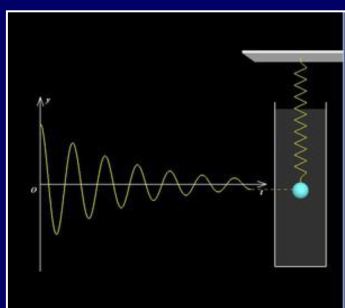
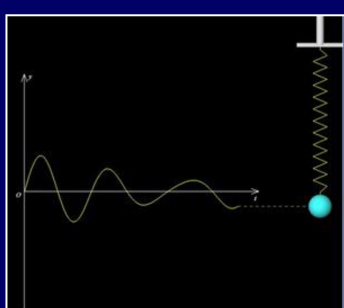
06. 6 阻尼振动

受迫振动、共振



阻尼振动



受迫振动

共振

一、阻尼振动

振动系统在阻尼力作用下，振幅（能量）不断减小的振动称为阻尼振动。

阻尼的两种形式：摩擦阻尼、辐射阻尼。

振动物体速度不太大时，阻尼力与速度成正比。

$$f = -\gamma \upsilon = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

γ：阻力系数

动力学方程：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\frac{dx}{dt} - kx$$

令：$\boxed{\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}}$ ω_0:固有圆频率；$\boxed{\beta = \dfrac{\gamma}{2m}}$ 阻尼因数

阻尼振动方程：

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

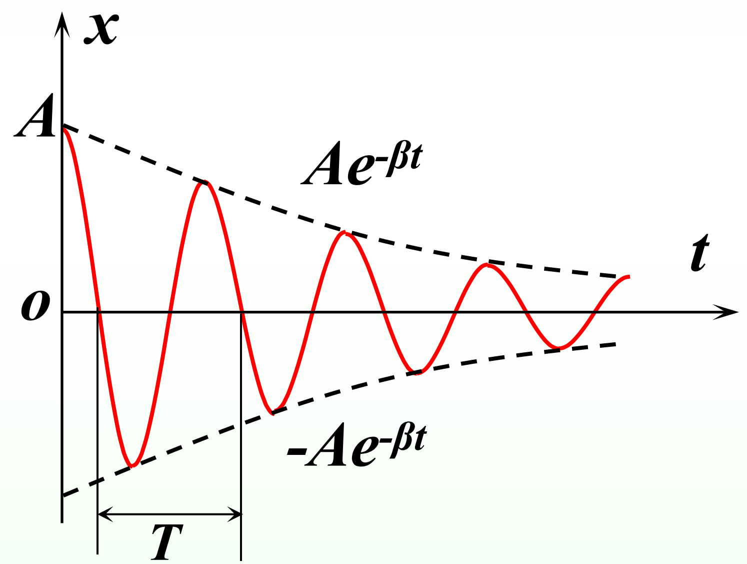
(1) 欠阻尼状态（阻尼较小）： $\beta<\omega_0$

$$\boxed{x=Ae^{-\beta t}\cos(\omega' t+\varphi)}$$

其中：

$$\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}<\omega_0$$

$$\therefore\quad T=\frac{2\pi}{\omega'}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}>T_0$$



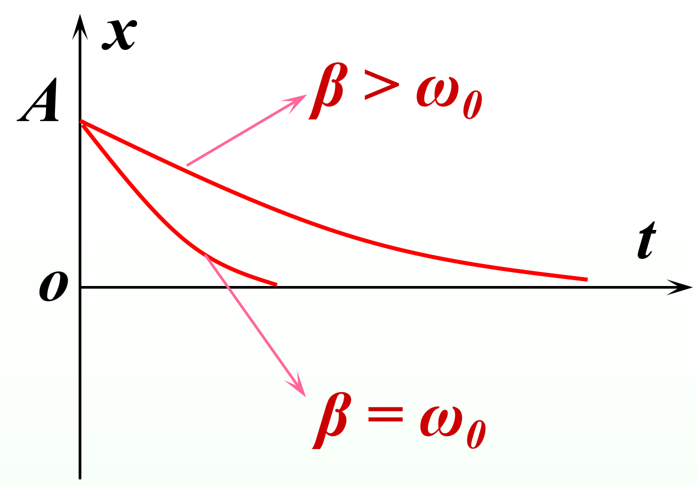
阻尼越大，振幅衰减越快，周期越长。

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

(2) 过阻尼状态（阻尼较大）： $\beta>\omega_0$

$$\boxed{x=C_1e^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}+C_2e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}}$$

振动不会发生，物体缓慢回到平衡位置。



(3) 临界阻尼状态： $\beta=\omega_0$

$$\boxed{x=(C_1+C_2t)e^{-\beta t}}$$

振动不会发生，物体很快回到平衡位置。

阻尼的应用：阻尼天平、灵敏检流计 *etc.*。

二、受迫振动 共振

1. 受迫振动

阻尼的存在使振幅减小，若对系统施加一持续的周期性外力，则系统将做振幅不变的振动———受迫振动。

周期性外力叫驱动力

设周期性外力：$F(t)=F_0\cos\omega t$

则受迫振动的动力学方程为：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\gamma\frac{dx}{dt}-kx+F_0\cos\omega t$$

令：$\omega_0^2=\frac{k}{m}$，$2\beta=\frac{\gamma}{m}$，$f_0=\frac{F_0}{m}$

得：$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t}$$

解为：$$\boxed{x=A_0e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi')+A\cos(\omega t+\varphi)}$$

即：受迫振动为阻尼振动和“简谐振动”之和。

$$\boxed{x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t + \varphi') + A\cos(\omega t + \varphi)}$$

(1) 经足够长时间，第一项减弱到忽略不计，只剩第二项。

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

受迫振动为稳定振动，其周期为外力的周期，与系统的固有频率无关。

(2) 稳定受迫振动与周期性外力有一相位差 φ 。

(3)稳定振动表达式中：

$$\boxed{A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \tan\varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

2. 共振：

阻尼越小，位移共振角频率就越接近系统的固有角频率，共振振幅也就越大，共振现象也就越强烈。

$$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

令： $\dfrac{dA}{d\omega}=0$

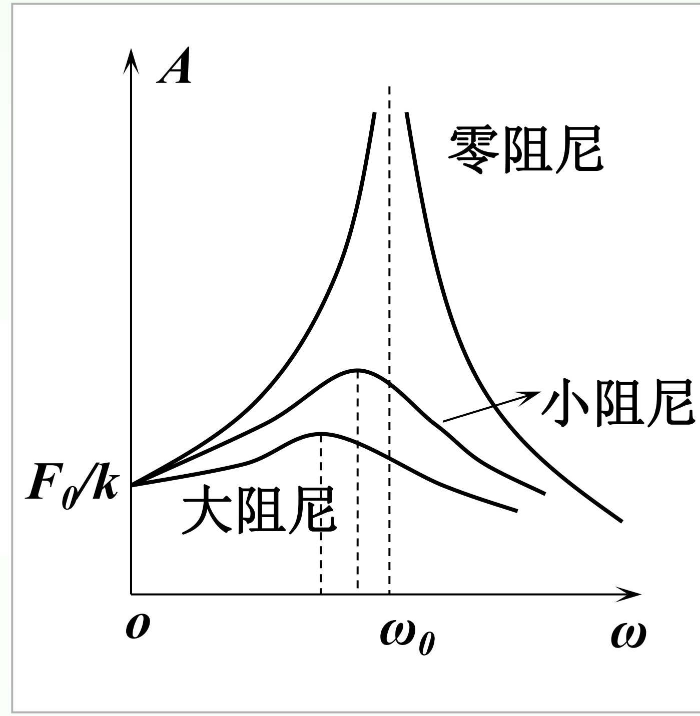
得：当周期性外力角频率为

$$\boxed{\omega_m=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$$

位移共振角频率

时，振幅有最大值：

$$\boxed{A_m=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}}$$



当$\beta\rightarrow 0$时，

$\omega_m\rightarrow\omega_0$，$A_m\rightarrow\infty$。

振幅达到极大值的现象叫做**位移共振**

受迫振动的速度在一定的条件下也可以发生共振

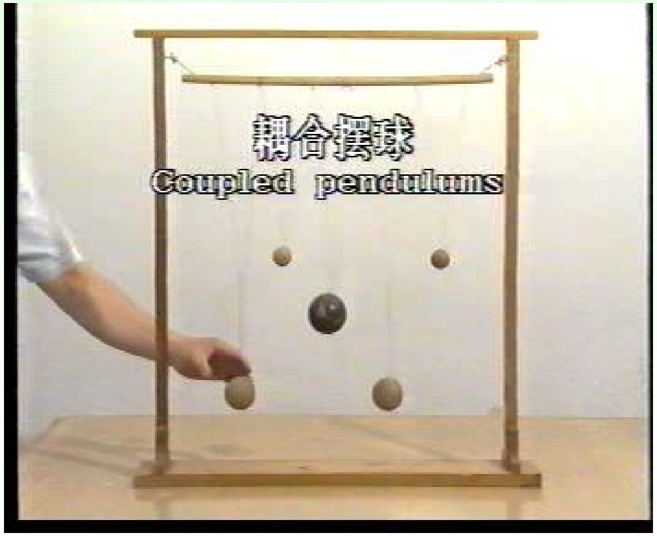
——速度共振

速度共振频率正好等于系统的固有频率。

在阻尼很小的情况下，

速度共振和位移共振可以不加区分

共振现象极为普遍:



（视频）

乐器利用共振来提高音响效果,

收音机利用电磁共振进行选台,

核磁共振被利用来进行物质结构研究以及医疗诊断


美国塔科马海峡大桥断塌


直升机损坏

思考题：弹簧振子的无阻尼自由振动，位移和时间变化满足余弦函数的关系；而实际系统在驱动力 $F(t)=F_0\cos\omega t$ 持续作用下的稳态受迫振动也满足余弦函数的关系，这两种振动有什么不同?