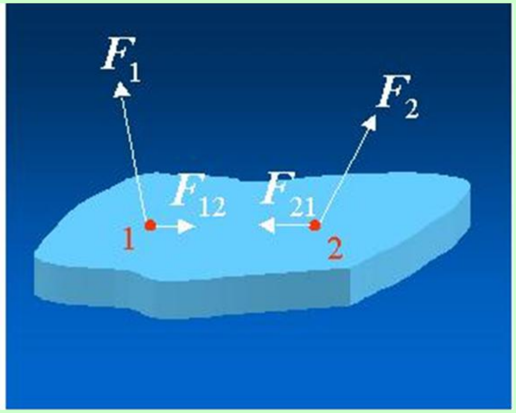
质点系的动量定理和动量守恒定律

质点系的动量定理



如图，两个质点 1 和 2 组成系统，两质点的质量分别为 m_1 和 m_2。设作用在质点上的外力分别为 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$，而两个质点间的相互作用内力分别为 $\vec{F}_{12}$ 和 $\vec{F}_{21}$。根据质点的动量定理，有

$$\int_t^{t'}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_{12}\right)dt=\vec{p}_1'-\vec{p}_1$$

$$\int_t^{t'}\left(\vec{F}_2+\vec{F}_{21}\right)dt=\vec{p}_2'-\vec{p}_2$$

两式相加，并考虑牛顿第三定律，得

$$\int_t^{t'}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)dt=\left(\vec{p}_1'+\vec{p}_2'\right)-\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2\right)$$

将上述结论推广到 n 个质点组成的系统

$$\int_t^{t'}\vec{F}_{外}dt=\vec{p}'-\vec{p}$$

上式表明，作用于系统的合外力的冲量等于系统总动量的增量。这就是质点系的动量定理。

质点系的动量定理说明，只有外力才对系统总动量的变化有贡献，而系统的内力不能改变整个系统的总动量

应用动量守恒定律时的几个注意点

1．在动量守恒定律中，各物体的动量必须是相对于同一惯性参考系；

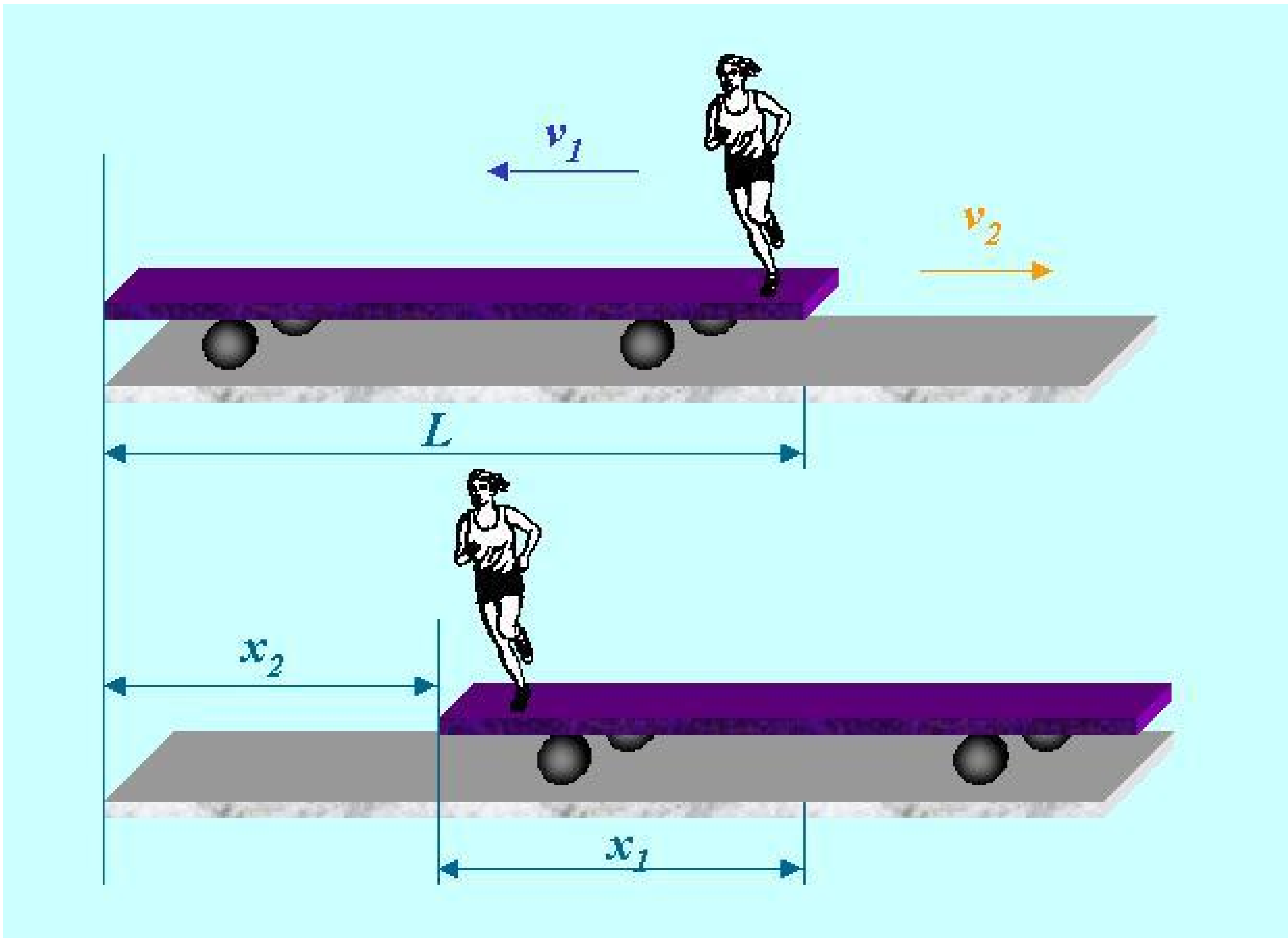
2．系统的动量守恒的条件是系统所受的合外力必须为零。然而，有时系统所受的合外力虽不为零，但与系统的内力相比较，外力远小于内力，这时可以略去外力对系统的作用，认为系统的动量是守恒的。像碰撞、打击、爆炸等这类问题，一般都可以这样来处理；

3．如果系统所受外力的矢量和并不为零，但合外力在某个坐标轴上的分矢量为零，此时，系统的总动量虽不守恒，但在该坐标轴的分动量则是守恒的；

4．动量守恒定律是物理学最普遍、最基本的定律之一。动量守恒定律虽然是从表述宏观物体运动规律的牛顿运动定律导出的，但近代的科学实验和理论分析都表明:在自然界中，大到天体间的相互作用，小到质子、中子、电子等微观粒子间的相互作用都遵守动量守恒定律;而在原子、原子核等微观领域中，牛顿运动定律却是不适用的。因此，动量守恒定律比牛顿运动定律更加基本，它与能量守恒定律一样，是自然界中最普遍、最基本的定律之一。

例题

一质量为M 的板车在光滑的水平面上, 车长L, 车上一质量为m 的人从车右端走到车左端, 求对于地面, 人, 车分别前进了多少?



解：设人在车上走时对地的速度为 v_1，车对地速度为 v_2。对车、人系统，由动量守恒定律，得

$$mv_1 + Mv_2 = 0 \qquad v_2 = -\frac{m}{M}v_1$$

人相对于车的速度为

$$v' = v_1 - v_2 = v_1 - \left(-\frac{m}{M}\right)v_1 = \frac{M+m}{M}v_1$$

设人从车右端走到左端的时间为 T，则

$$L = \int_0^T v'dt = \frac{M+m}{M}\int_0^T v_1 dt$$

人相对于地面前进的距离为 $$x_1 = \int_0^T v_1 dt = \frac{M}{M+m}L$$

车相对于地面前进的距离为

$$x_2 = \int_0^T v_2 dt = -\frac{m}{M}\int_0^T v_1 dt = -\frac{m}{M+m}L$$

例题

一质量为10kg的物体沿x轴无摩擦地运动，设t=0时，物体位于原点，速度为零

- 如果物体在作用力F=(3+4t)(F的单位为N)的作用下运动了3s，它的速度和加速度各为多少?
- 如果物体在作用力F=(3+4x)(F的单位为N)的作用下运动了3m，它的速度和加速度各为多少?

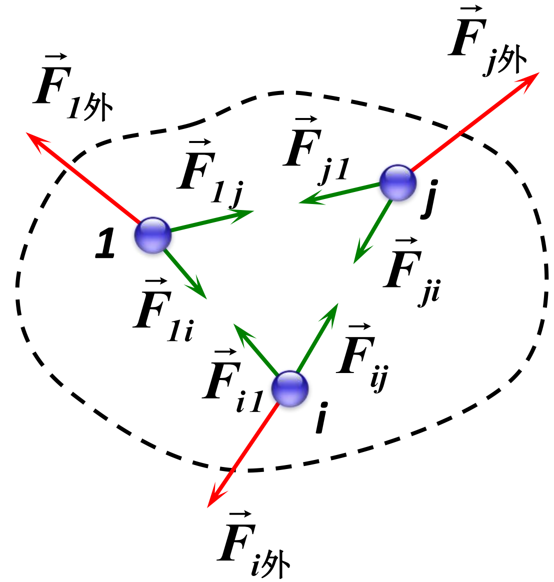
$$a=\frac{F}{m}=\frac{(3+4\times3)}{10}=1.5m/s^2 \qquad I=\int_0^{3s}f(t)dt=\int_0^{3s}(3+4t)dt=3t+2t^2\Big|_0^3=27N\cdot s$$

$$\Delta P=\int md(v)=m\Delta v \qquad \because I=\Delta P \qquad \therefore \Delta v=2.7m/s$$

$$a=\frac{F}{m}=\frac{(3+4\times3)}{10}=1.5m/s^2 \quad W=\int_0^{3s}f(x)dx=\int_0^{3s}(3+4x)dx=3t+2t^2\Big|_0^3=27J$$

$$\Delta E_K=\frac{1}{2}mv^2-0=\frac{1}{2}mv^2 \quad \because W=\Delta E_K \qquad \therefore v=2.3m/s$$

质点系的动量定理：



作用于质点系的力可分为“内力”和“外力”。

对质点 i ：

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i外} + \vec{F}_{i内} = \vec{F}_{i外} + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij} \qquad (j \neq i)$$

$$\therefore \quad \vec{I}_i = \int_t^{t'} \vec{F}_i dt = \int_t^{t'} \vec{F}_{i外} dt + \int_t^{t'} (\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij})dt = \vec{p}'_i - \vec{p}_i$$

对整个质点系 ：

$$\vec{I} = \sum_i \vec{I}_i = \int_t^{t'} (\sum_i \vec{F}_{i外})dt + \int_t^{t'} (\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij})dt = \vec{p}' - \vec{p}$$

其中： $\vec{F}_{外} = \sum_i \vec{F}_{i外}$ 为质点系受到的合外力。

由牛顿第三定律： $\vec{F}_{内} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = 0$

质点系的动量定理：质点系总动量的增量等于合外力的冲量。

$$\vec{I}=\int_{t}^{t'}\vec{F}_{外}dt=\vec{p}'-\vec{p}$$

质点系的动量守恒定律：

当系统所受合外力 $\vec{F}_{外}=\sum_{i}\vec{F}_{i外}=0$ 时：

$$\vec{p}=\sum_{i}\vec{p}_{i}=\text{恒矢量}$$

动量守恒定律的分量式：

$$\begin{cases} p_{x}=\sum_{i}p_{ix}=\text{常量}_{1} \\ p_{y}=\sum_{i}p_{iy}=\text{常量}_{2} \end{cases}$$

若系统总动量不守恒，但合外力在某方向的分量为零，则总动量在该方向的分量守恒（如抛体运动在水平方向的分运动）。