

力矩 刚体转动定理

1、力矩：

外力对刚体定轴转动的影响，与力的大小、方向、作用点的位置都有关。但外力在平行于转轴方向的分力对刚体定轴转动不起作用，所以只需考虑外力在垂直于轴的平面内的分力。

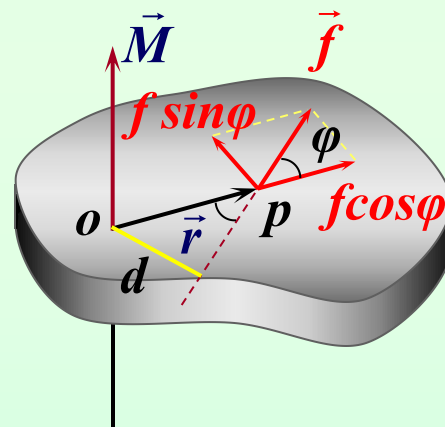
定义：外力相对于某固定轴的**力矩**为：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f} \quad (N \cdot m)$$

力矩的大小：

$$M = |\vec{M}| = f r \sin \varphi = f \cdot d$$

其中： $d = r \sin \varphi$ 称为外力对转轴的**力臂**。



力矩的大小也可以写作：

$$M = r (f \sin \varphi)$$

可见：只有垂直于位矢方向的分力 $f \sin \varphi$ 才对刚体定轴转动起作用。

当有几个外力同时作用于刚体时，合外力矩等于各外力力矩的矢量和：

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$$

但对于作定轴转动的刚体，合外力矩可用代数和表示：

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i$$

➤ 刚体所受合外力为零时，合外力矩不一定为零，反之亦然。

2、刚体的转动定理：

刚体中第*i*个质元对转轴的角动量为：

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\begin{aligned}\text{对时间求导：} \frac{d\vec{L}_i}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{M}_i\end{aligned}$$

其中： $\vec{f}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$ 为第*i*个质元所受的作用力；

$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{f}_i$ 为*f_i*对转轴的力矩。

$$\text{对整个刚体：} \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{M}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{M}_i$$

$\sum_i \vec{M}_i$ 为所有质元所受外力矩和内力矩的矢量和：

$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{M}_{i\text{外}} + \sum_i \vec{M}_{i\text{内}}$$

因为刚体内每一对内力的力矩均等值、反向，所以内力矩对定轴转动刚体的运动无影响。

设 \vec{M} 为刚体所受的合外力矩，则：

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

刚体的转动定理：刚体所受的合外力矩等于刚体对同一转轴角动量对时间的变化率。

非相对论情况下，转动惯量 I 为常量：

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta}$$

所以，经典力学中刚体的转动定理可表示为：

$$\boxed{\vec{M} = I\vec{\beta}}$$

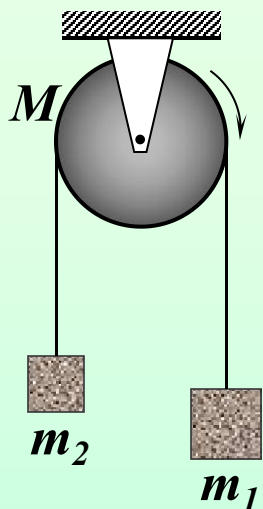
- 当外力矩一定时，转动惯量越大，则角加速度越小。说明转动惯量 I 是刚体转动惯性大小的量度。

例题

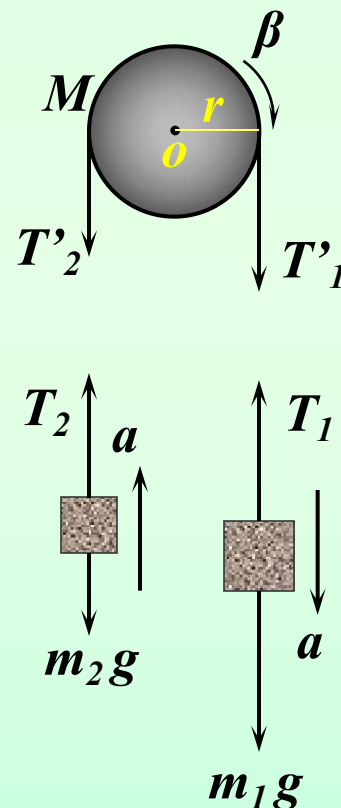
设 $m_1 > m_2$ ，定滑轮可看作匀质圆盘，其质量为 M 而半径为 r 。绳的质量不计且与滑轮无相对滑动，滑轮轴的摩擦力不计。求： m_1 、 m_2 的加速度及绳中的张力。

隔离滑轮及重物，画受力分析图。

因绳的质量不计，所以： $T_1' = T_1$ ， $T_2' = T_2$ 。



$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \\ T_1 r - T_2 r = I \beta = \frac{1}{2} M r^2 \beta \\ a = r \beta \end{cases}$$



解方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} g \\ T_1 = \frac{2m_2 + \frac{M}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} m_1 g \\ T_2 = \frac{2m_1 + \frac{M}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} m_2 g \end{array} \right.$$

➤若滑轮质量不计，即 $M=0$ ，则：

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \\ T_1 = T_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \end{array} \right.$$

