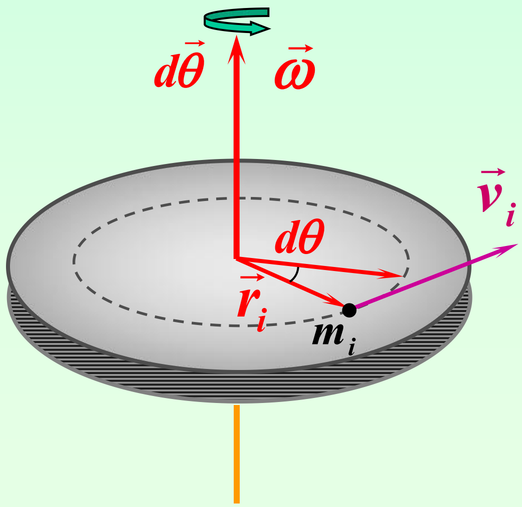
刚体的角速度、角动量和转动惯量

1、刚体定轴转动的角量描述：



➢ 角位移矢量：dt时间内位矢转过的角度。

$d\vec{\theta}$ (rad) 方向沿转轴

➢ 角速度矢量：角位移的时间变化率。

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \qquad (rad/s)$$

定轴转动刚体上任一质元的线速度和角速度的关系为：

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i}$$

➢ 角加速度矢量：角速度的时间变化率。

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (rad/s^2)$$

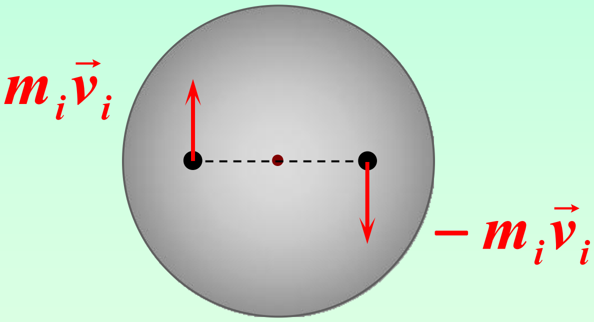
$\vec{\beta}$与$d\vec{\omega}$同方向。刚体加速转动 时$\vec{\beta}$、$\vec{\omega}$同方向，反之$\vec{\beta}$、$\vec{\omega}$反方向。

- 刚体定轴转动时转轴固定不动，所以各角量可用标量表示。
- 刚体定轴转动时，各质元角量 $d\vec{\theta},\vec{\omega},\vec{\beta}$ 均相同，但各质元线量 $d\vec{r}_i,\vec{v}_i,\vec{a}_i$ 均不同。
- 角量与线量的关系：

$$v_i=\omega r_i\ ,\quad a_{ti}=\beta r_i\ ,\quad a_{ni}=r_i\,\omega^2$$

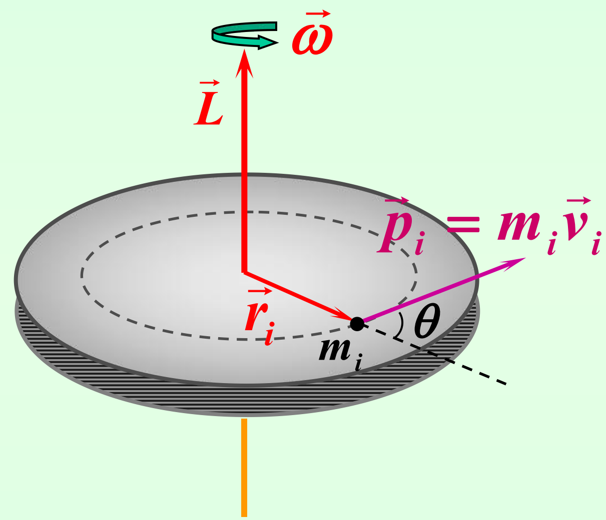
可见：研究刚体定轴转动时用角量描述比用线量描述方便得多。

2、刚体的角动量:



刚体定轴转动不能用动量进行描述,
而要用角动量进行描述。

定义：刚体上任一质元对转轴的角动量:



$$\boxed{\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i\vec{r}_i \times \vec{v}_i = m_i r_i^2 \vec{\omega}}$$

整个刚体对转轴的角动量为:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = (\sum m_i r_i^2)\vec{\omega}$$

定义：刚体绕某定轴的转动惯量:

$$\boxed{I = \sum m_i r_i^2}$$

单位：$kg \cdot m^2$

所以，刚体对某转轴的**角动量**:

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

3、转动惯量的计算：

转动惯量是刚体转动时惯性大小的量度，它的大小取决于：

(1) 刚体质量；　(2) 质量的分布；　(3) 转轴的位置。

对质量连续分布的刚体：

$$\boxed{I = \int r^2 dm}$$

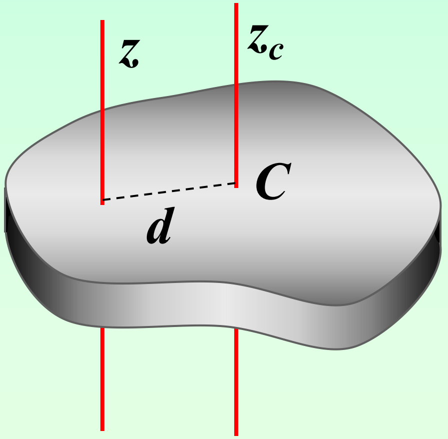
质量体分布时：　$dm = \rho\, dV$　　ρ 为质量体密度

质量面分布时：　$dm = \sigma\, dS$　　σ 为质量面密度

质量线分布时：　$dm = \lambda\, dl$　　λ 为质量线密度

应用以下两个定理，往往可简化转动惯量的计算：

(1) 平行轴定理：



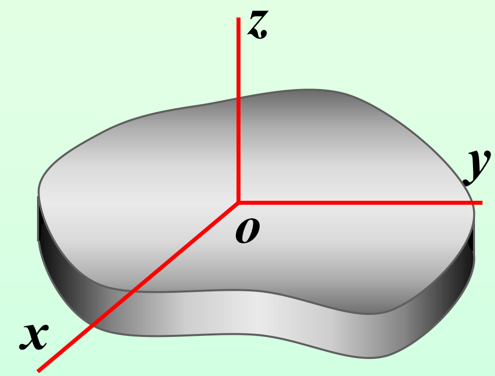
设z_c为通过刚体质心的转轴，z为与z_c平行的另一转轴。两转轴相距d，则：

$$\boxed{I = I_c + md^2}$$

其中：md^2相当于质量全部集中于c时，对z轴的转动惯量。

➢ 刚体对通过质心转轴的转动惯量最小。

(2) 正交轴定理：



薄板形刚体对板内两正交轴的转动惯量之和等于刚体对过两轴交点并垂直于板面的转轴的转动惯量。

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$

- 刚体定轴转动
  - 线量描述 → 二维问题 → 每个质点的位移、速度、加速度都不同
  - 角量描述 → 一维问题 → 每个质点的角位移、角速度、角加速度都相同

注意：各角量与线量之间的对应关系