06.5

相互垂直简谐振动的合成

振动的分解

一、相互垂直简谐振动的合成

1、同频率垂直简谐振动的合成

2、不同频率垂直简谐振动的合成

1、同频率垂直简谐振动的合成：

设两个同频率简谐振动分别沿 x 和 y 方向：

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

消去 t 后得轨迹方程：

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

合振动轨迹为椭圆，

运动限制在x方向±A_1和y方向± A_2的矩形范围内。

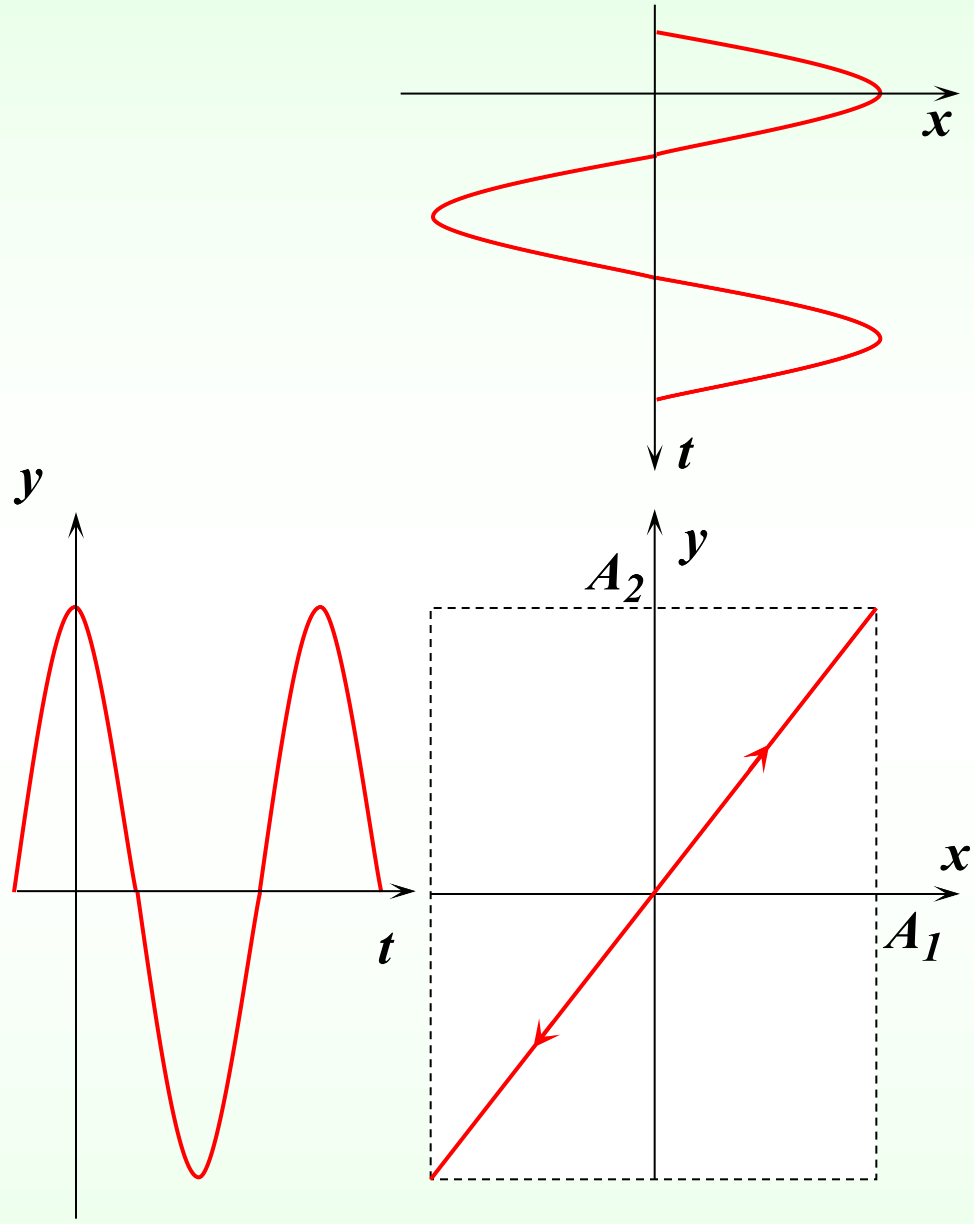
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

- $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi$ $\boxed{y=\frac{A_2}{A_1}x}$ I、III象限中直线
- $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi$ $\boxed{y=-\frac{A_2}{A_1}x}$ II、IV象限中直线
- $\varphi_2-\varphi_1=\pm(k+\frac{1}{2})\pi$ $\boxed{\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1}$ 正椭圆
- 其他情况：斜椭圆

$$(1)\quad \varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi$$

$$\boxed{y=\frac{A_2}{A_1}x}$$

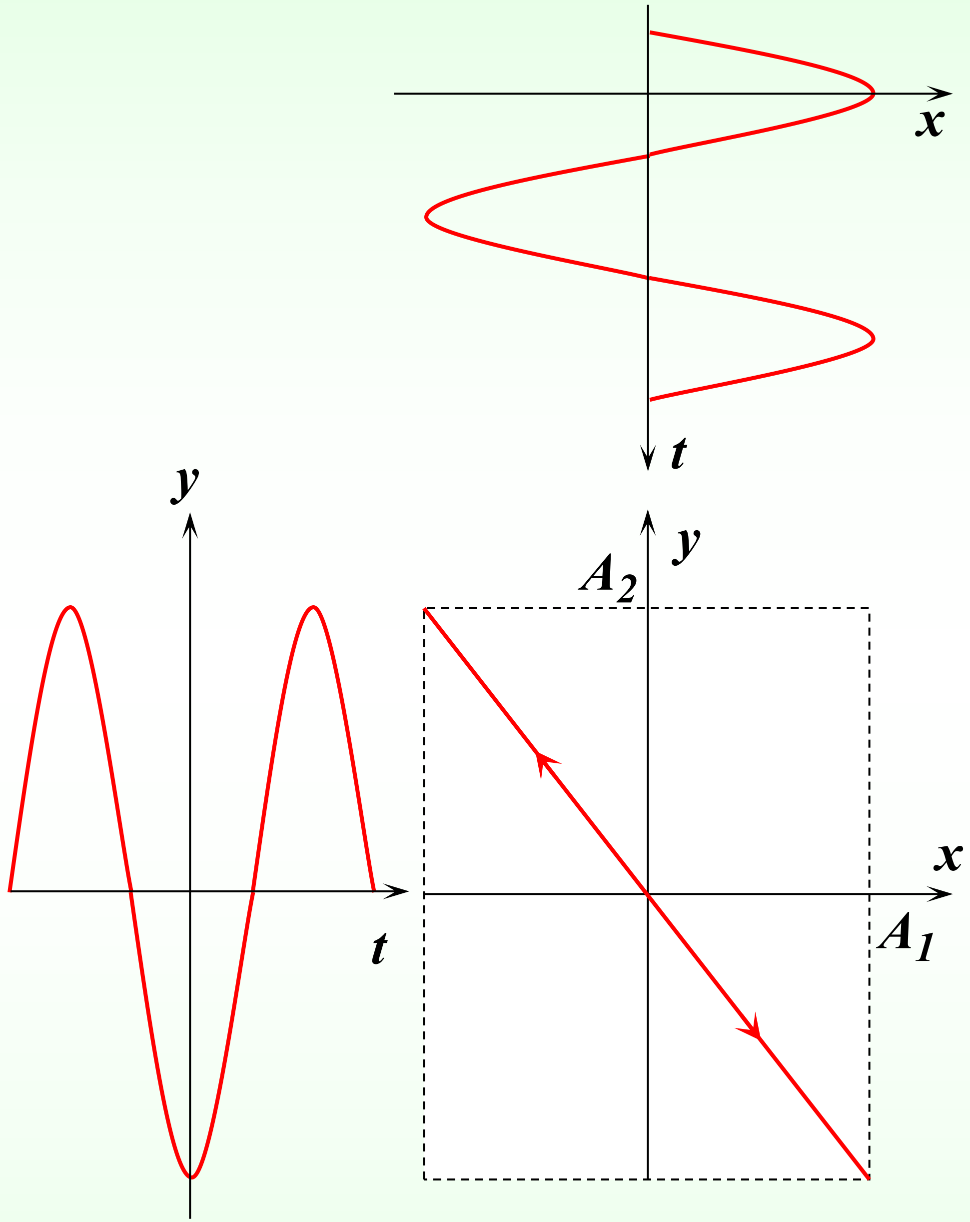
I、III象限中直线

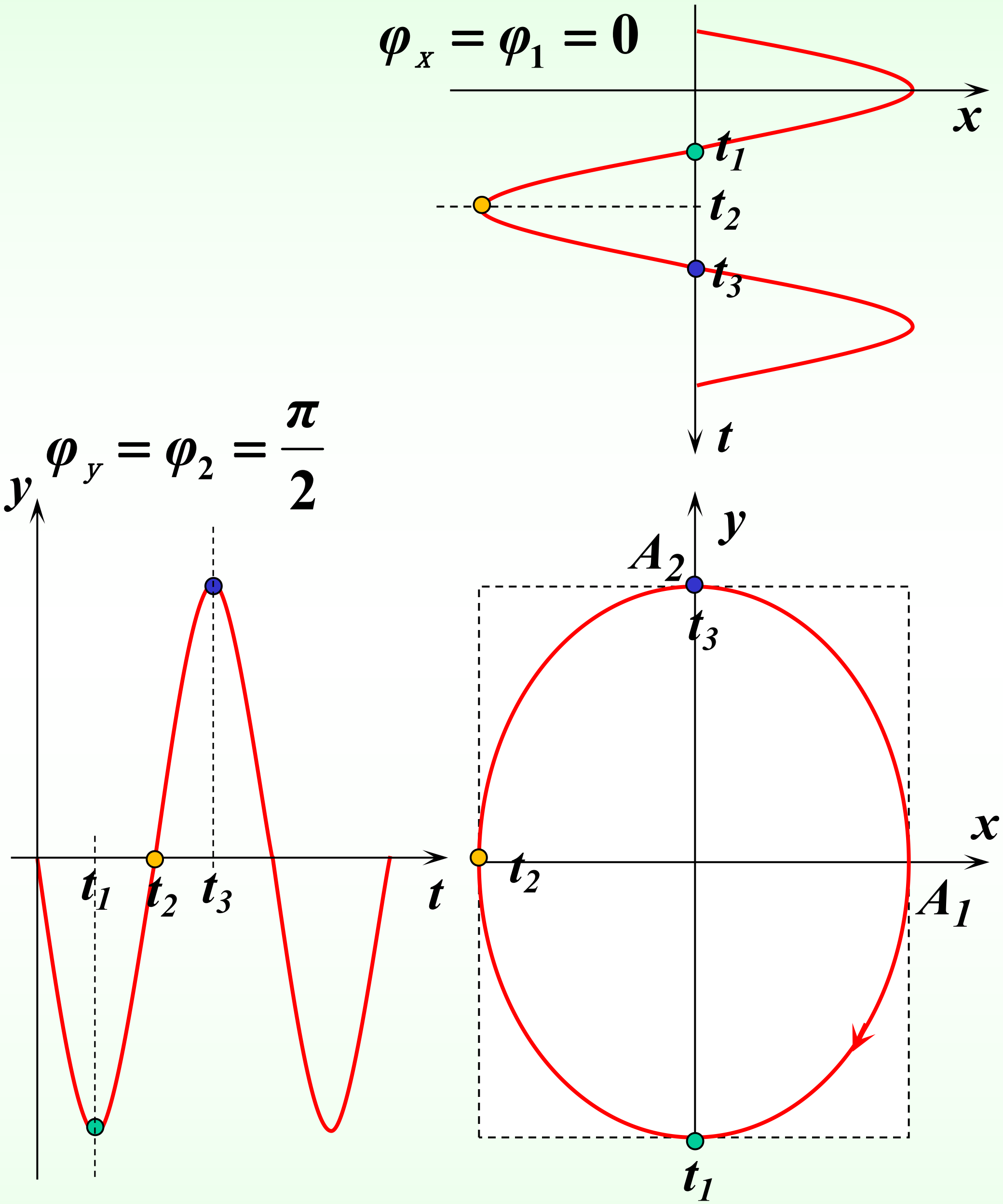


(2) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k+1)\pi$

$$\boxed{y = -\frac{A_2}{A_1}x}$$

II、IV象限中直线





$$(3)\ \ \varphi_2 - \varphi_1 = \pm\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$$

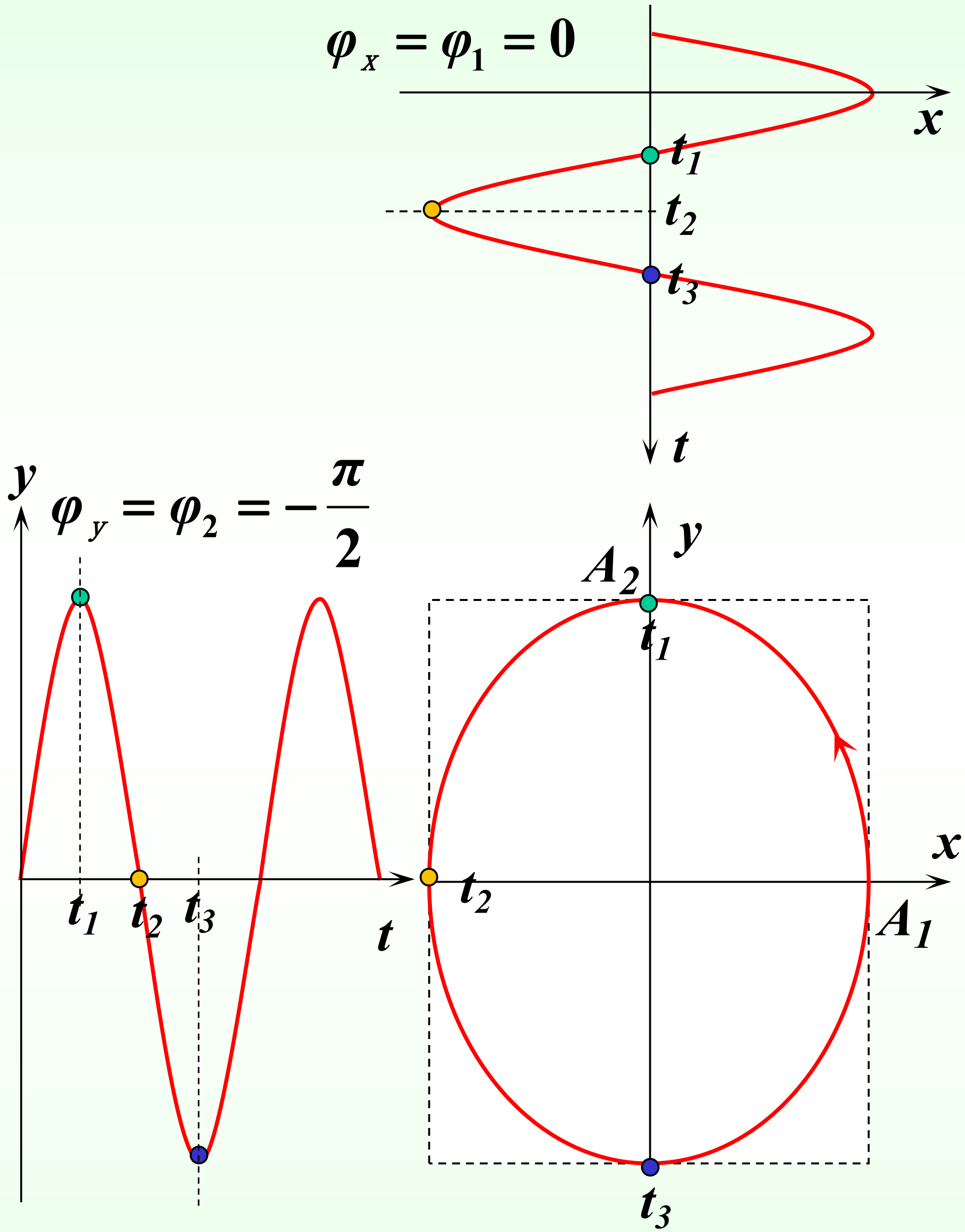
$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1}$$

正椭圆

当 $\varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$ ，

即 $\varphi_x - \varphi_y = -\dfrac{\pi}{2}$ 时，

顺时针运动 （右旋）



(3) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(k + \dfrac{1}{2})\pi$

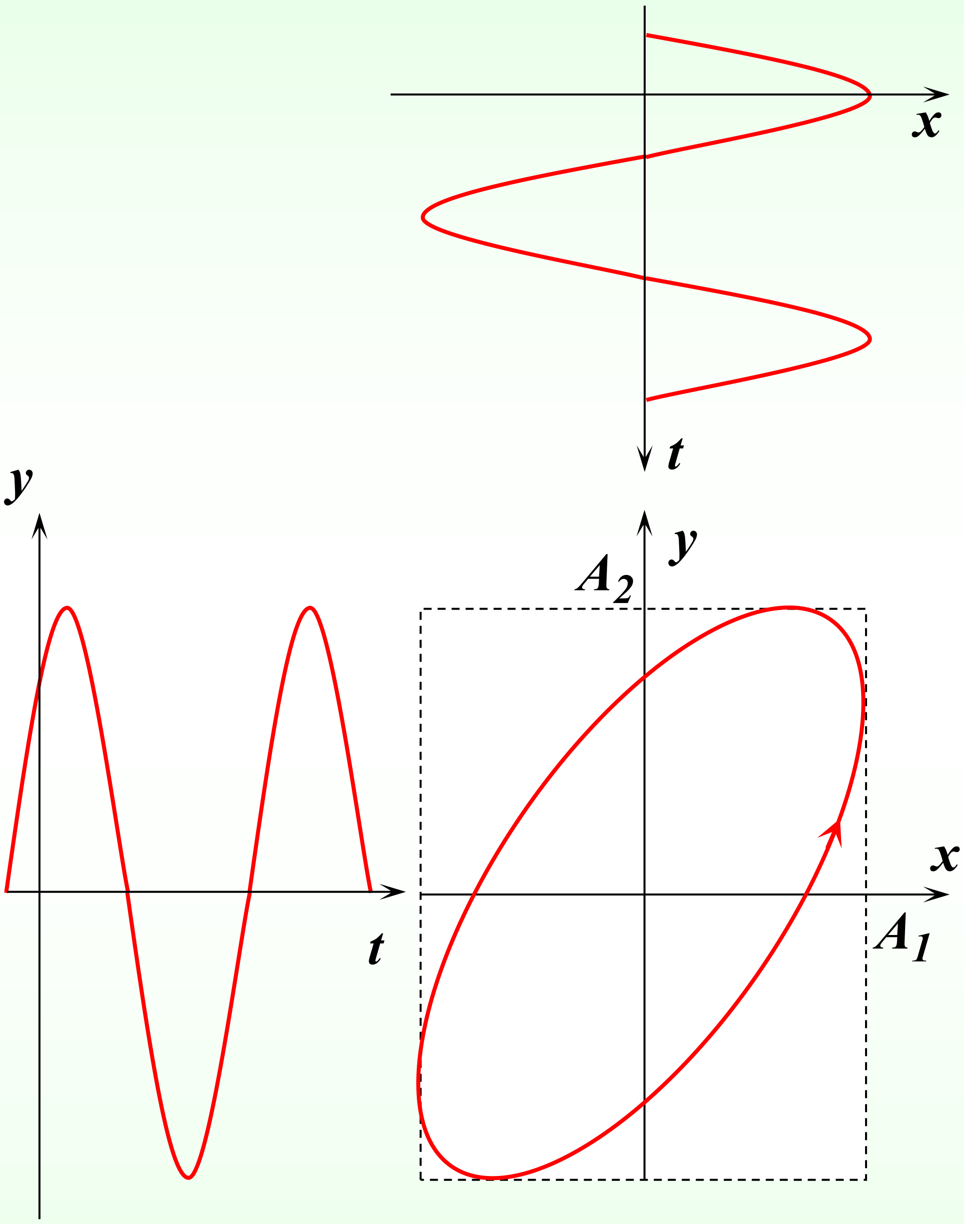
$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1}$$

正椭圆

当 $\varphi_2 - \varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ ，

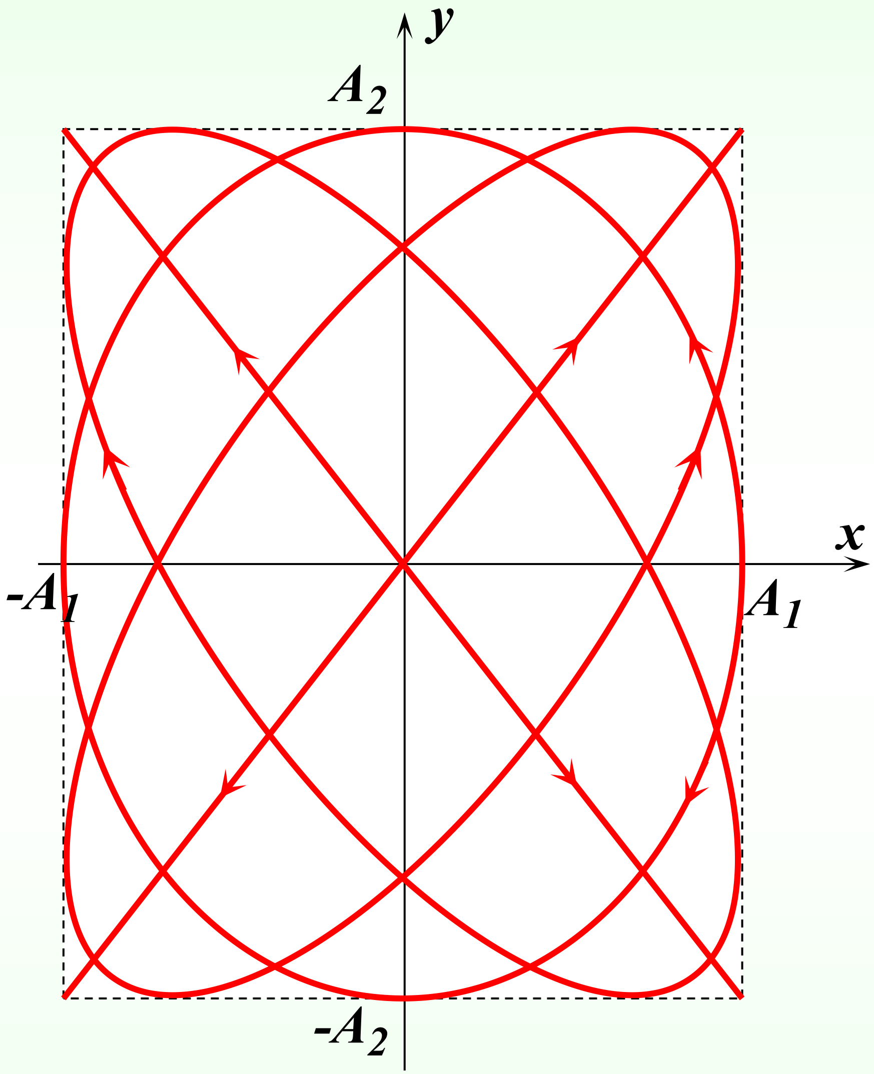
即 $\varphi_x - \varphi_y = \dfrac{\pi}{2}$ 时，

逆时针运动（左旋）



(4) 其他情况：

斜椭圆



(1) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi$

I、III象限中直线

(2) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k+1)\pi$

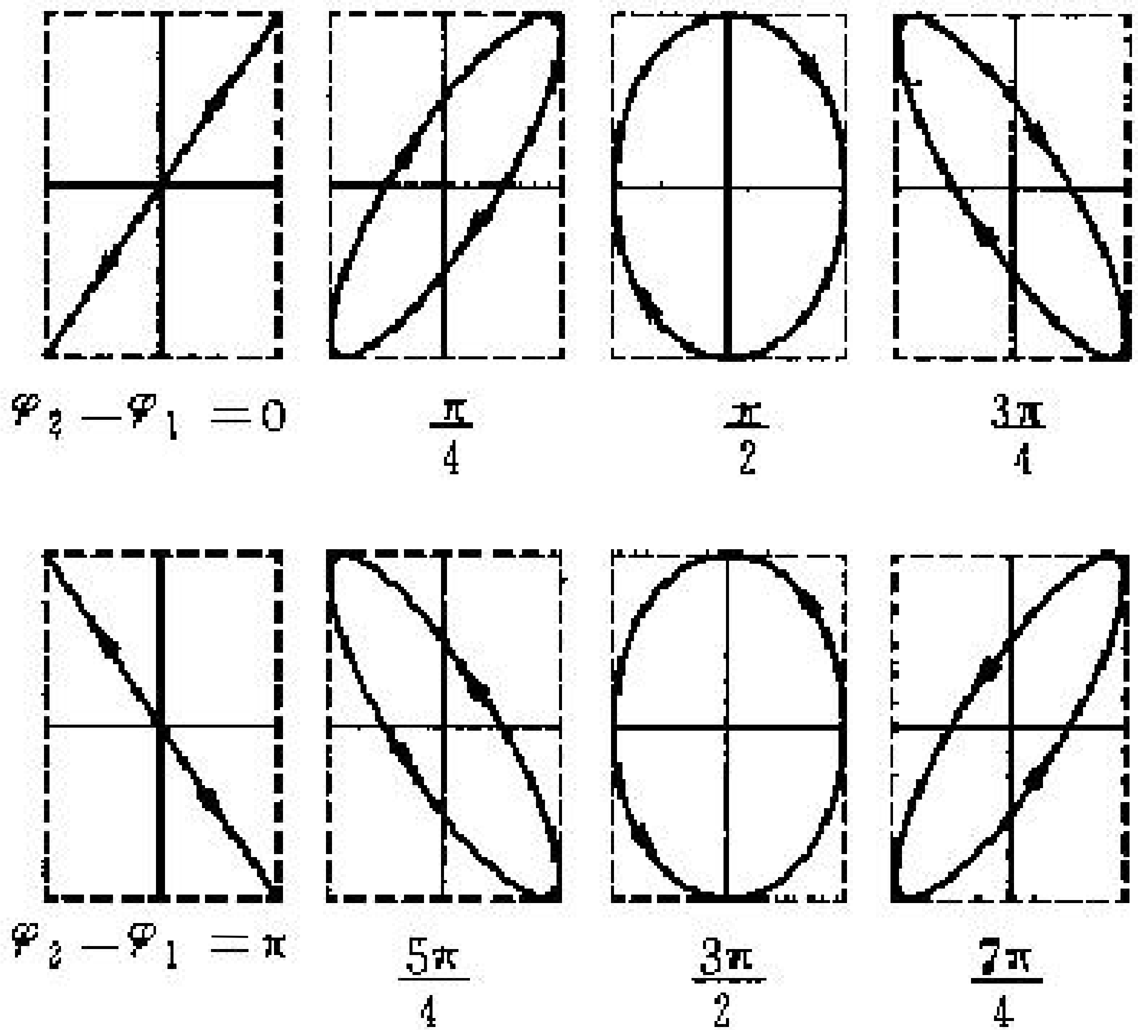
II、IV象限中直线

(3) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(k+\frac{1}{2})\pi$

正椭圆

(4) 其他情况：

斜椭圆



几种不同相位差的合运动轨迹

2、不同频率垂直简谐振动的合成：

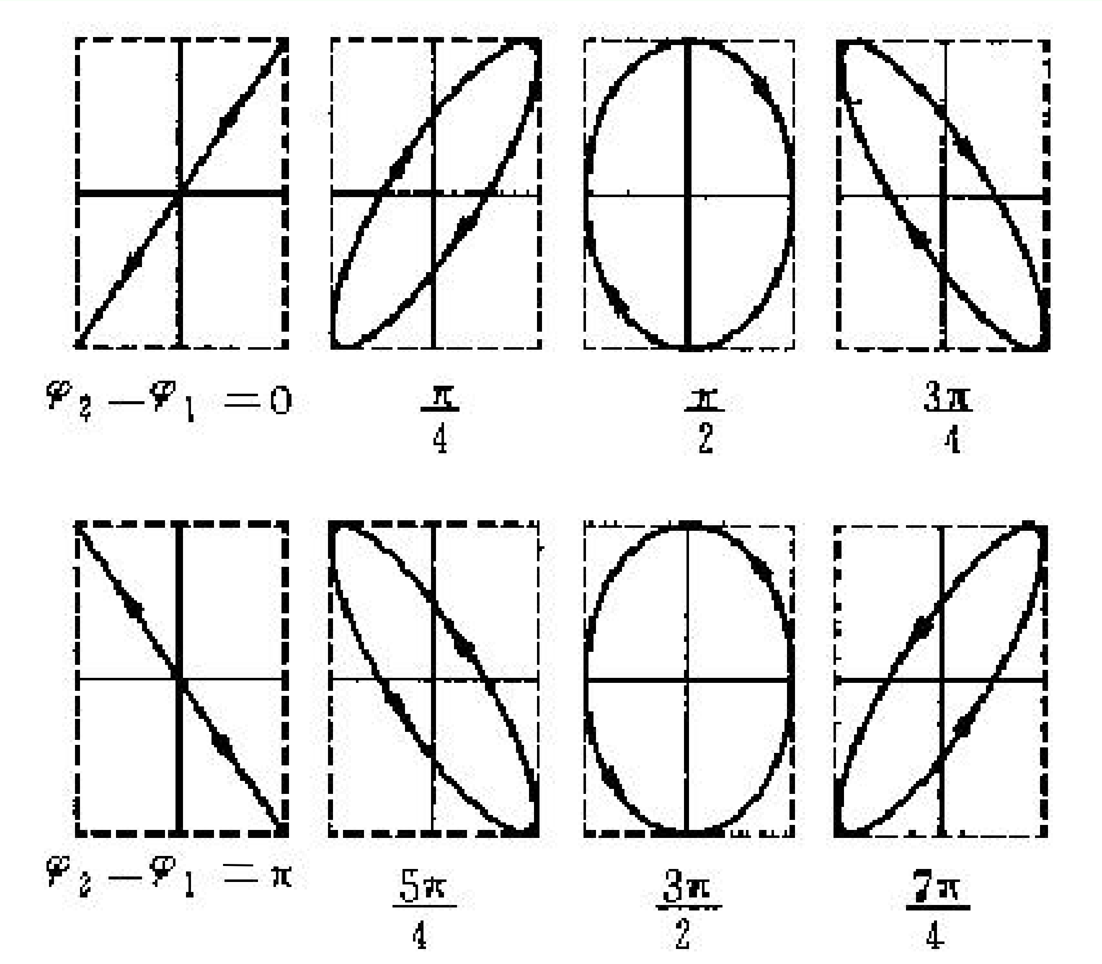
设两个频率不同的简谐振动分别沿 x 和 y 方向：

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega_1 t \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta) \end{cases}$$

则相位差：

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t + \delta$$

（1）两个振动的角频率ω_1、ω_2有很小的差异

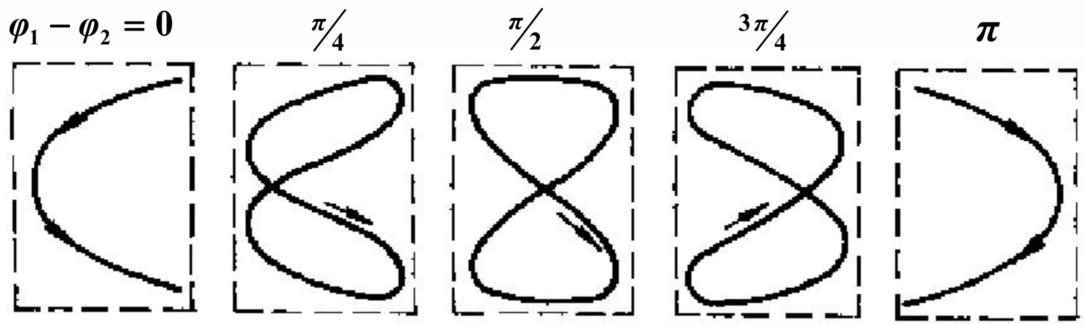


两振动相位差就随时间慢慢变化，合运动的轨道将不断地按照图上的顺序在矩形范围内由直线逐渐变成椭圆，又由椭圆逐渐变成直线，并重复进行。

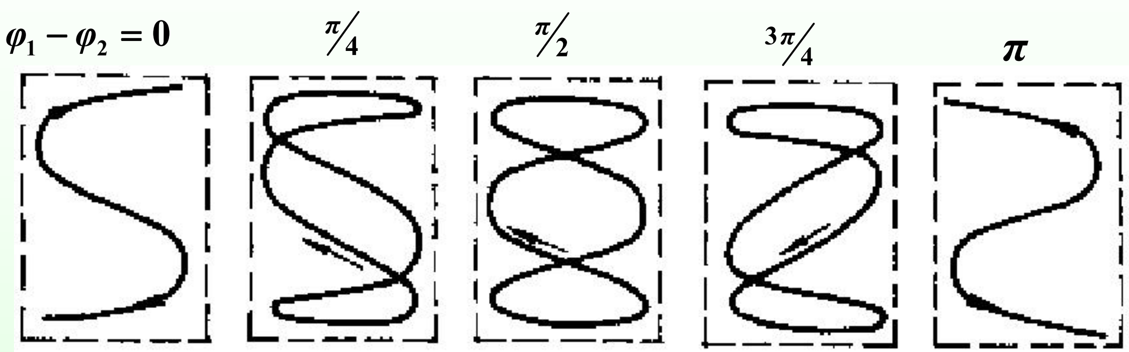
（2）当两个分振动频率ω_1、ω_2成简单整数比时，

合振动轨迹是稳定的封闭曲线，称为李萨如图。

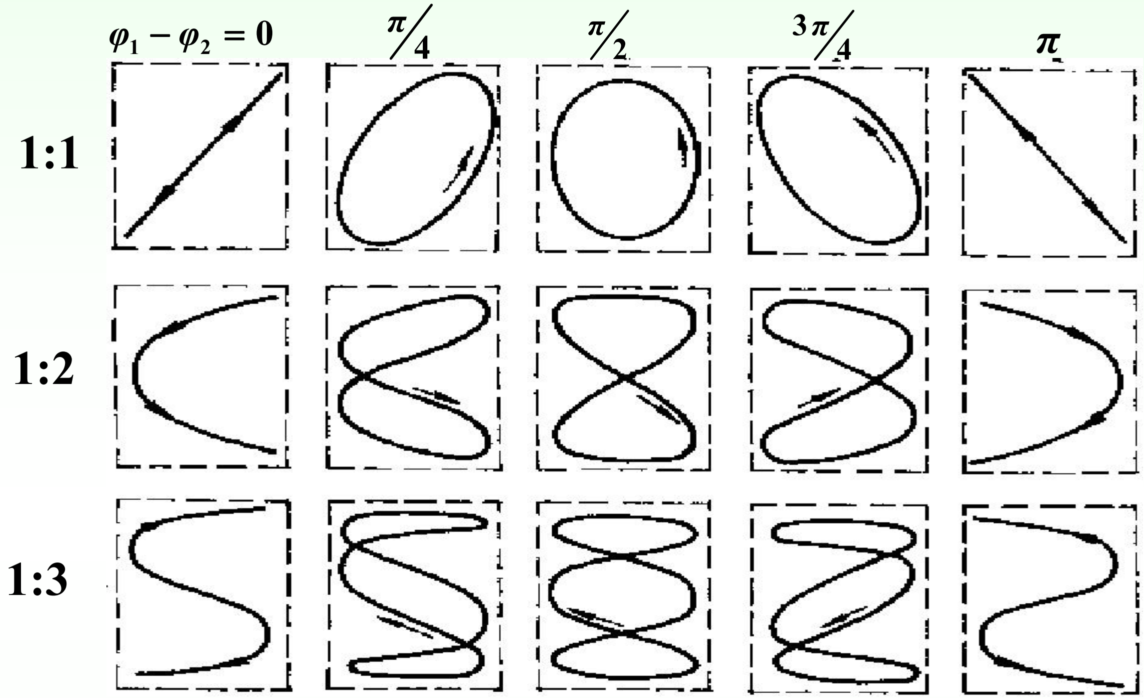
2个周期比为1:2的振动合成的图形：

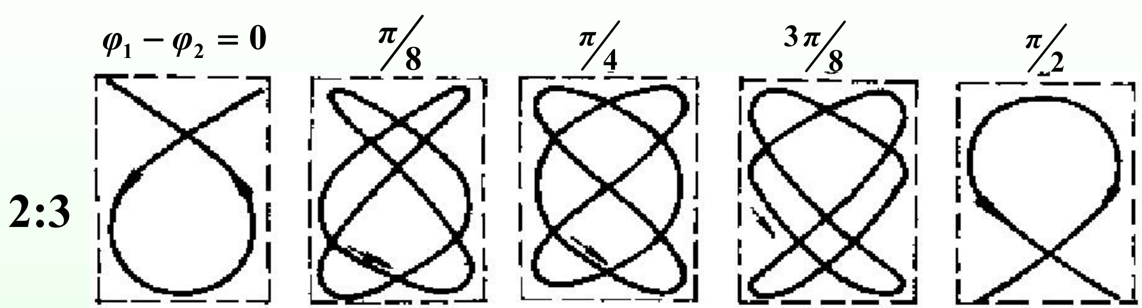


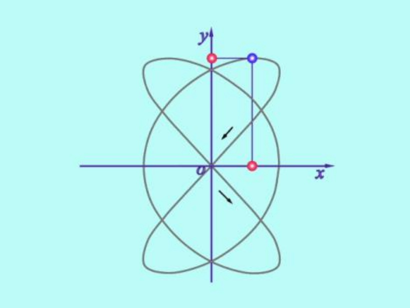
2个周期比为1:3的振动合成的图形：



李萨如图







利用李萨如图，可由一个已知频率求得另一个振动的未知频率；或者频率比已知时利用李萨如图形确定相位关系。

二、振动的分解

任一复杂振动都可分解为许多频率、振幅不同的简谐振动。

- 周期振动可通过傅里叶级数分解成一系列不同频率、不同振幅的简谐振动之和；

- 非周期振动可通过傅里叶变换把它展开成无数个频率连续分布的简谐振动。

这种根据实际振动曲线的位移时间函数关系，求出它所包含的各种简谐运动的频率和振幅的数学方法叫傅里叶分析。

根据傅里叶分析，一个周期为T的周期函数$x(t)$ 可表示为:

$$x(t)=A_0+A_1\cos\omega t+A_2\cos 2\omega t+A_3\cos 3\omega t+\cdots$$

$$+B_1\sin\boxed{\omega}t+B_2\sin\boxed{2\omega}t+B_3\sin\boxed{3\omega}t+\cdots$$

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t)$$

（付里叶级数展开）

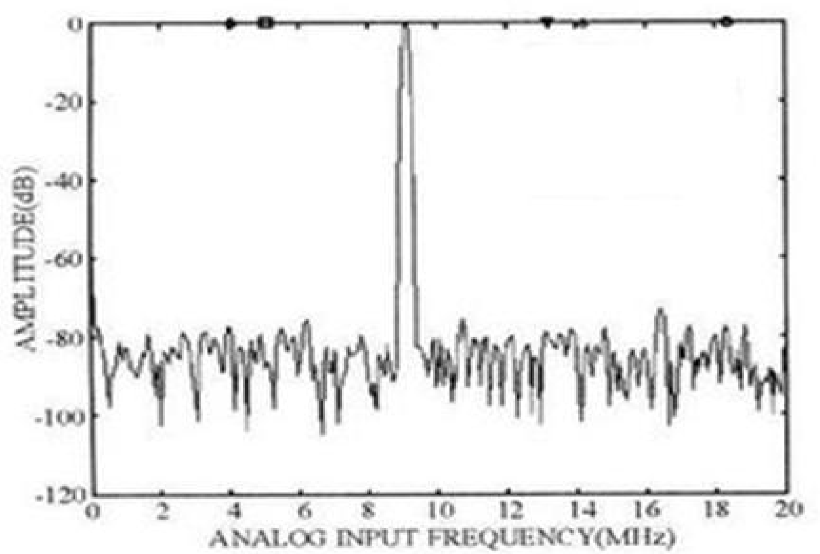
基频振动

谐　频

分振动中频率最低的称为基频振动，其频率就是原周期函数$x(t)$的频率$1/T$，这一频率也就叫基频。

其它分振动的频率都是基频的整数倍，依次分别称为二次谐频、三次谐频、四次谐频……

若用横坐标表示各个谐频振动的频率（v），纵坐标表示对应的振幅（A），就得到了振动的频谱。

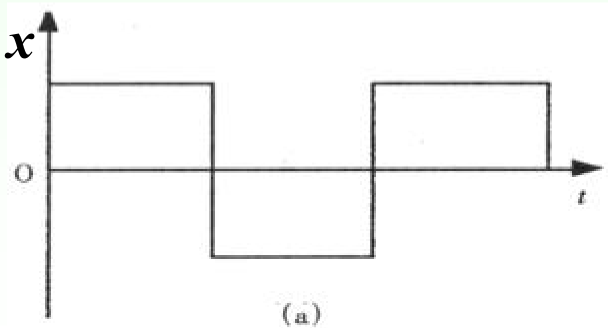


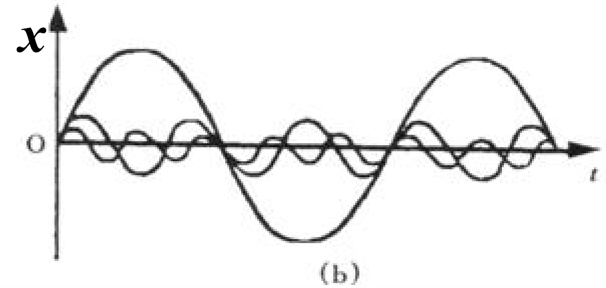
FFT频谱图

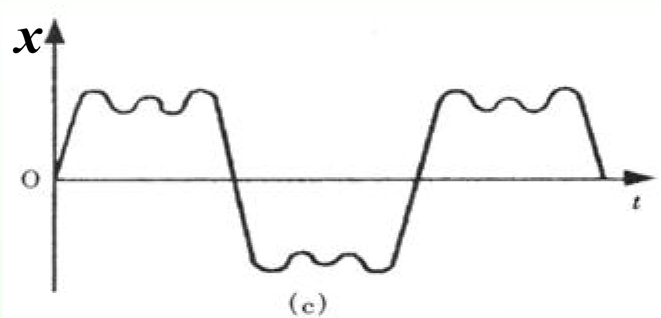
确定一个振动所包含的各种简谐振动的频率和振幅就称为频谱分析。

方波振动的分解：

只取前三项：基频振动、三次谐频和五次谐频振动。





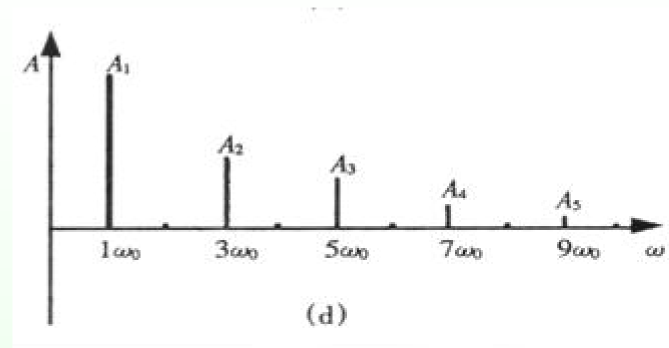


（a）方波信号

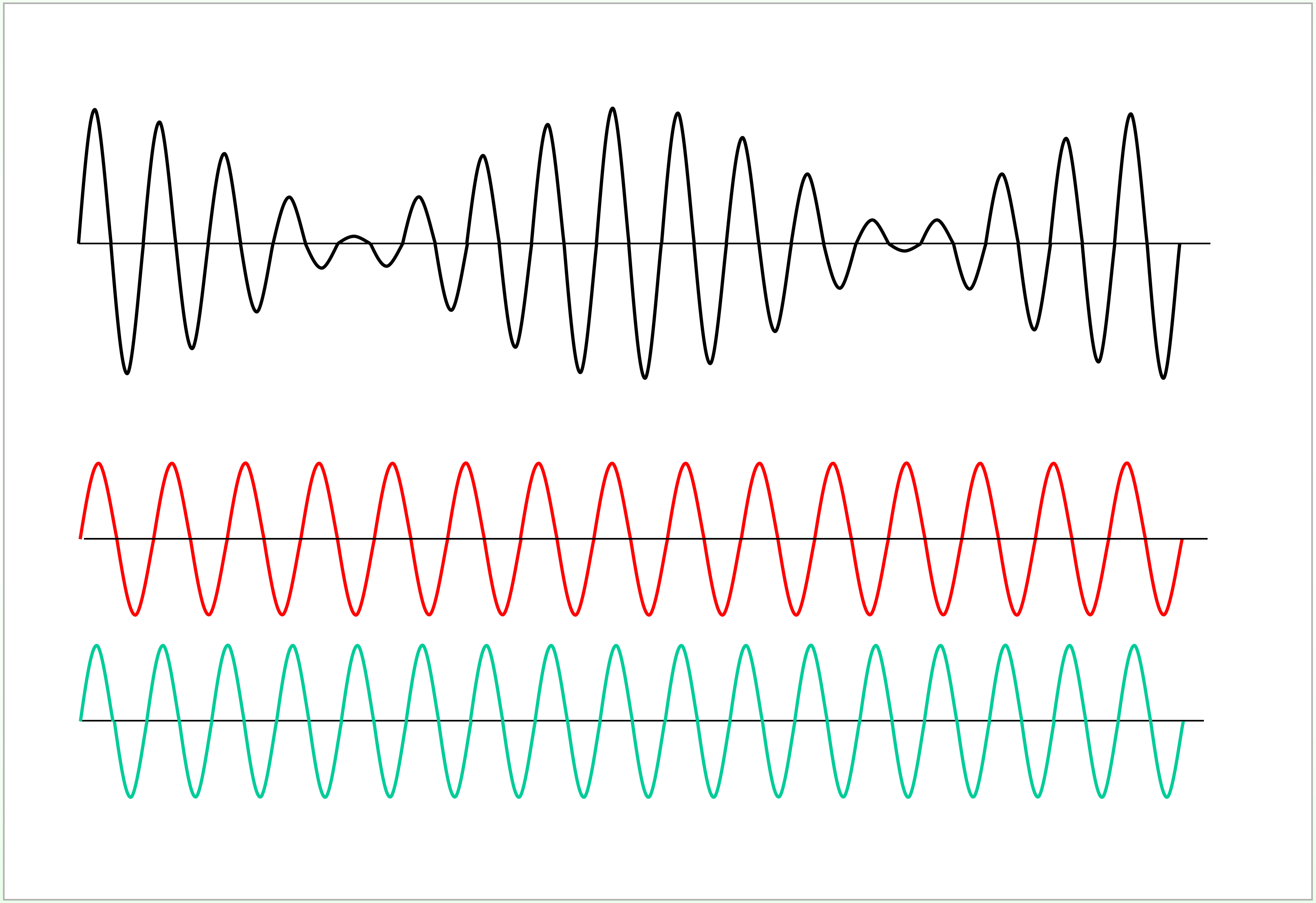
（b）前三项分振动

（c）前三项分振动之合成

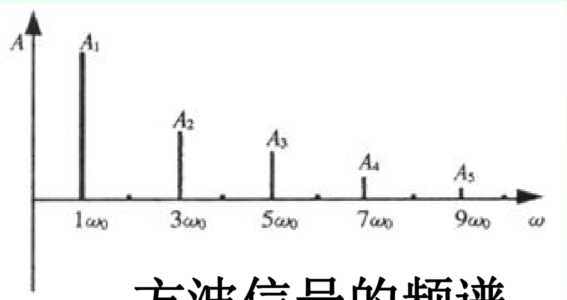
（d）方波信号的频谱



拍现象的振动可以分解成两个频率差别很小的简谐振动的合成

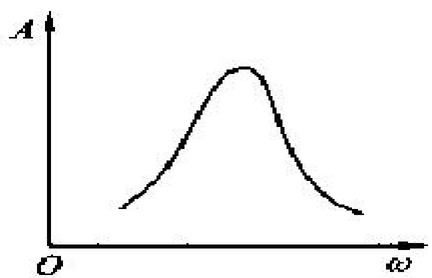


- 周期性振动的频谱是分立的线状谱

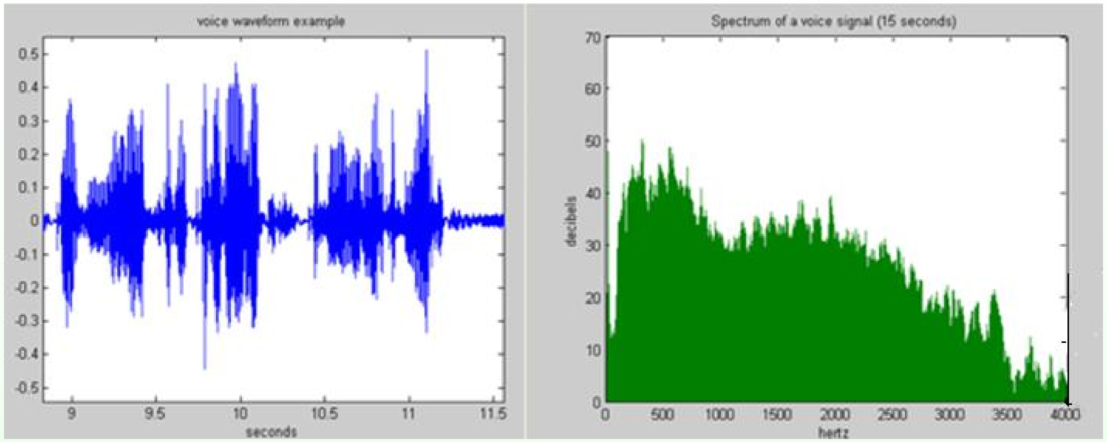


方波信号的频谱

- 非周期性振动的频谱密集成连续谱



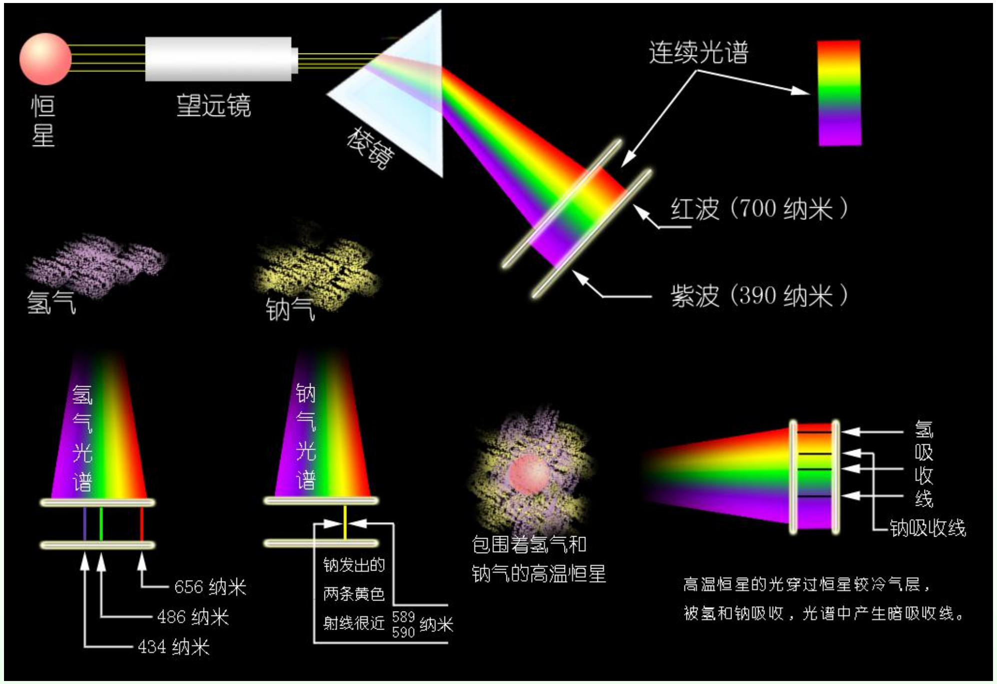
阻尼振动的频谱



一个复杂声音信号的位移时间变化曲线及其对应的频谱

组合音响工作时跳动的光柱
也是一种频谱显示

脑电波



光谱