平面简谐波及其波动方程

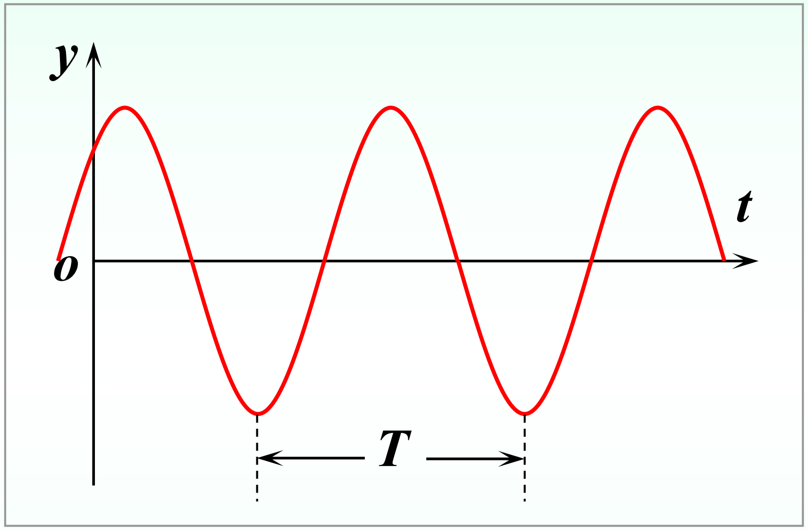
波　动

波的能量 能流密度

对波函数的讨论

(1) 当x一定时，波函数为x点处质元的振动方程：

$$y = A\cos[\,2\pi\nu t + (\phi - \frac{2\pi}{\lambda}x\,)]$$



式中： $\varphi - \dfrac{2\pi}{\lambda}x$

为x点处质元的振动初相位。

而： $-\dfrac{2\pi}{\lambda}x$ 为x点处振动落后于o点处振动的相位。

位移—时间图上相邻两个同相点的间隔即为周期T。

(2) 当t一定时，波函数为t时刻各质元的位移分布情况：

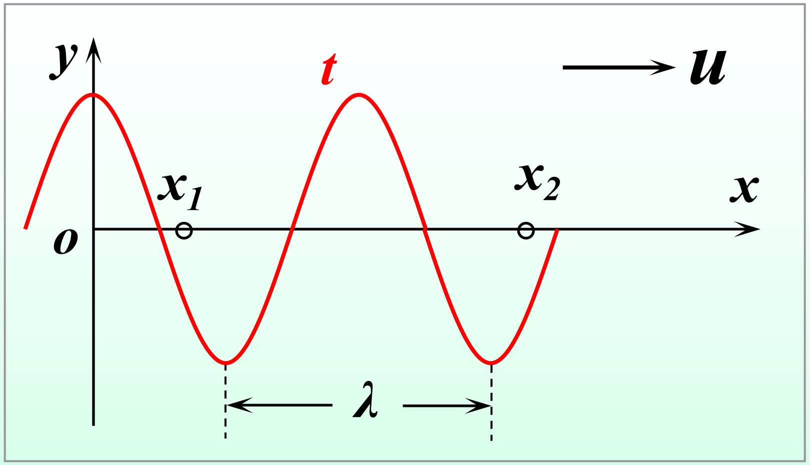
波形图上相邻同相位点的间隔为波长λ。

同一时刻t，同一波线上x_1、x_2两点处振动的相位差：

$$\Delta\varphi = [2\pi(\nu t - \frac{x_2}{\lambda}) + \varphi] - [2\pi(\nu t - \frac{x_1}{\lambda}) + \varphi]$$

$$= -2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

$\Delta x = x_2 - x_1$称为波程差。

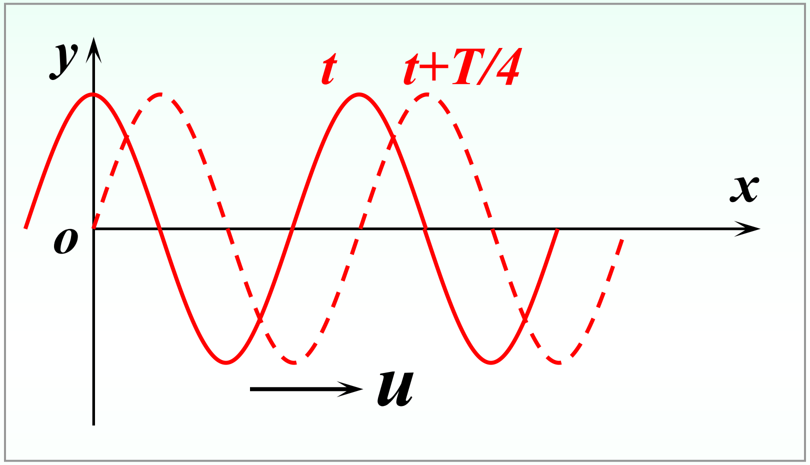


波形图（照片）

(3) 当t、x都变化时，波函数表示波线上所有质元的位移随时间的变化情况。

实线：t 时刻波形。

虚线：$t+\dfrac{T}{4}$时刻波形。



（电影）

整个波形随时间向 x 正方向运动 $\rightarrow$ 行波

波的能量、能量密度：

设一列简谐纵波沿均匀细杆传播，波的表达式：

$$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$$

细杆上任取体积元$\Delta V=S\Delta x$，其质量为$\Delta m=\rho\Delta V$。

动能：

$$E_k = \frac{1}{2}(\Delta m)(\frac{\partial y}{\partial t})^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2 A^2 \sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$$

势能：

$$E_p = \frac{1}{2}(\Delta m)(\frac{\partial y}{\partial x})^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2 A^2 \sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$$

机械能（不守恒）：

$$E = E_k + E_p = \rho\Delta V\omega^2 A^2 \sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$$

波的能量密度：单位体积介质内的能量。

$$\boxed{w = \frac{E}{\Delta V} = \rho\omega^2 A^2 \sin^2 \omega\left(t - \frac{x}{u}\right)} \qquad (J/m^3)$$

波的平均能量密度：能量密度在一个周期内的平均值。

$$\boxed{\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w\,dt = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2}$$

- E_k、E_p随时间周期性变化且$E_k=E_p$。它们同时达到最大值(过平衡位置时)；同时为零(最大位移时)，**波动中，介质内任一体积元的机械能不守恒。**
- 在简谐运动中，总机械能保持守恒。

波的能流、能流密度：

能流： 单位时间内通过某一面积的波的能量。

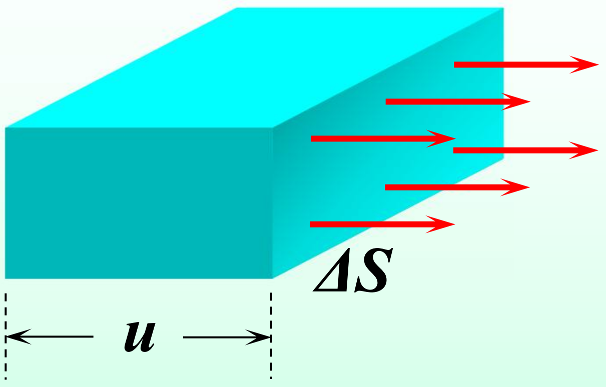
平均能流： $\Delta E = \overline{w} u \Delta S = \dfrac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot u \cdot \Delta S$

能流密度（波的强度）：

通过垂直于波传播方向单位面积的平均能流。

$$\boxed{I = \frac{\Delta E}{\Delta S} = \overline{w} u = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot u}$$

或： $$\boxed{\vec{I} = \overline{w}\cdot\vec{u} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \vec{u}}$$



单位： $\left(W/m^2 \right)$

声强和声强级：

声波的能流密度称为声强。

正常听觉反应的声强范围（$\nu = 1000\ Hz$）：

$$\begin{cases} \text{最低（闻域）：} & 10^{-12} \quad (W/m^2) \\ \text{最高（痛感域）：} & 1 \quad (W/m^2) \end{cases}$$

响度：人耳对声音强弱的主观感觉。

响度大致正比于声强的对数。

声强级：按对数标度的声强。

$$L = lg\frac{I}{I_0}$$ （单位：贝尔）

$$\boxed{L = 10\,lg\frac{I}{I_0}}$$ （单位：分贝 *dB*）

式中I_0为闻域的声强（$I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$）。

- 声强增大 *10* 倍，声强级增加 *10 dB* 。
- 声强增大 *1* 倍，声强级增加 *3 dB* 。