第六章　振　动

物体在一定位置附近作重复的往返运动称为机械振动。如：钟摆的摆动、琴弦的振动、心脏的跳动、机器运转时的振动等。

广义地说，任何一个物理量随时间的周期性变化都可以称为振动。如：交变电流、电磁震荡等。

最简单、最基本的周期性振动是简谐振动，因为：

(1) 它出现在许多物理现象中；

(2) 任何复杂的振动形式都可分解为若干简谐振动之和。

振动与波动的关系：

振动是产生波动的根源，而波动是振动的传播。

主要内容：

(1) 简谐振动的运动学方程和特征量；

(2) 简谐振动的矢量表示法；

(3) 简谐振动的动力学方程；

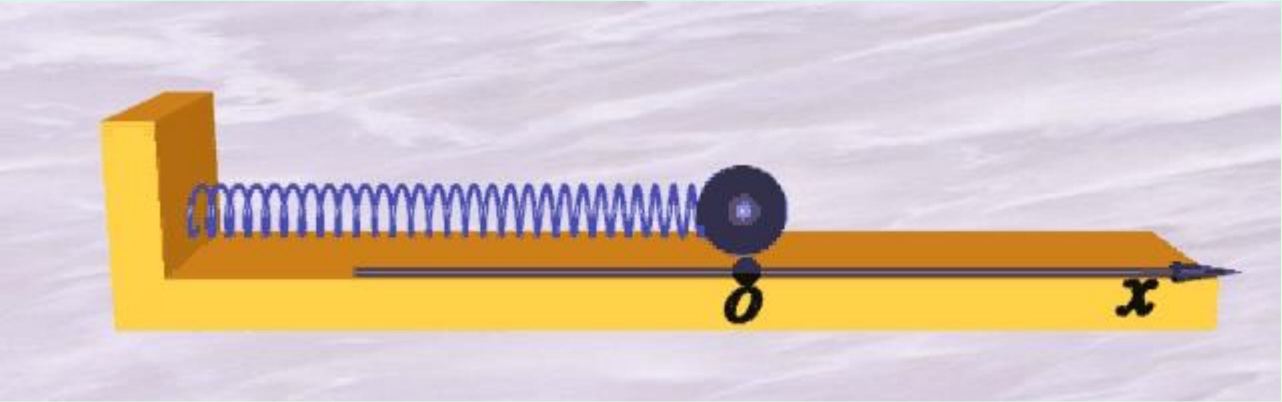
(4) 简谐振动的能量；

(5) 简谐振动的合成；

(6) 阻尼振动、受迫振动、共振。

§6-1 简谐振动的运动学

1、弹簧振子：



弹簧质量不计，小球与水平面间无摩擦。

小球在弹性力和惯性作用下运动

—— 无阻尼自由振动 —— 简谐振动。

2、简谐振动的运动方程：

以时间的余弦（或正弦）函数表示位移（或角位移）的运动称为**简谐振动**。

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

若令：$\varphi' = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$ ，则上式也可写成：

$$x = A\sin(\omega t + \varphi')$$

3、简谐振动的特征量：

(1) 由系统性质决定的特征量：

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) = A\cos(\omega t+\varphi+2\pi) = A\cos\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]$$

周期T：完成一次完全振动所需时间。

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}}$$

(单位：s)

频率ν：单位时间内完成完全振动的次数。

$$\boxed{\nu=\frac{\omega}{2\pi}}$$

(单位：$Hz = 1/s$)

简谐振动的周期T和频率ν决定于ω。

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}}$$

ω称为圆频率或角频率。

简谐振动的运动方程也可写成：

$$x = A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

或 $$x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi)$$

(2) **由初始条件决定的特征量：**

振幅*A*：振动物体离开平衡点最大位移的绝对值。

相位$(\omega t+\varphi)$：决定振动物体运动状态的重要物理量。

其中φ是 $t=0$ 时的相位，称为初相位。

4、简谐振动的速度和加速度：

速度 $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) = \upsilon_m \cos(\omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2})$

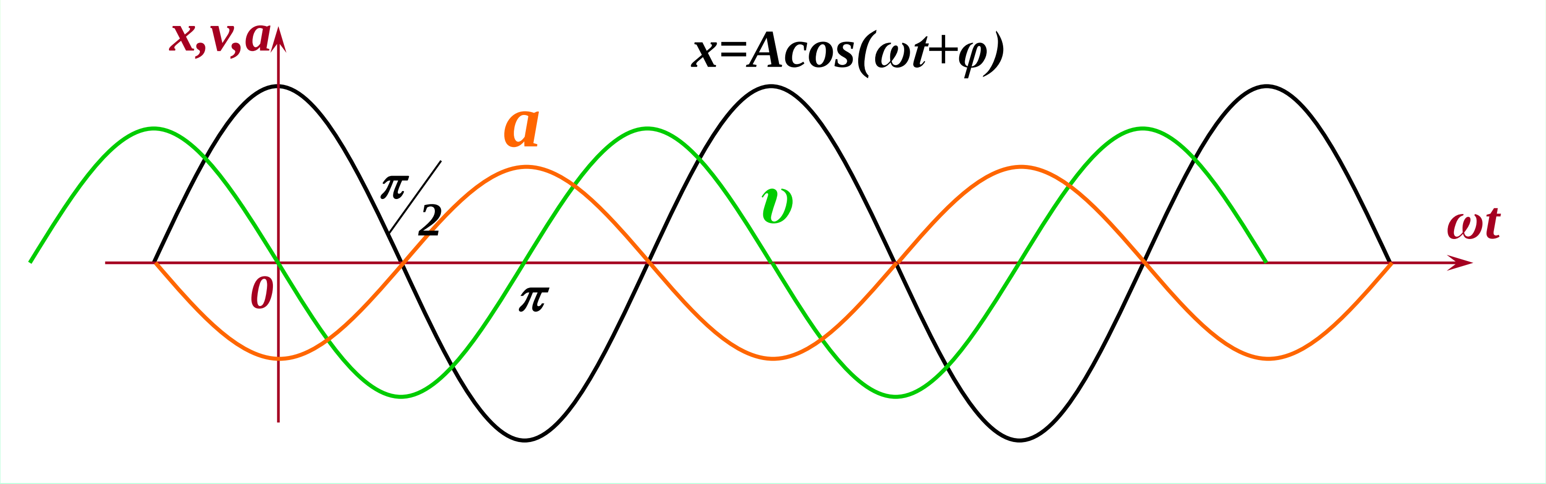
比x超前π/2

加速度 $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

$= a_m \cos(\omega t + \varphi + \pi)$

比x超前π

$\upsilon_m = A\omega$ 速度振幅 $a_m = A\omega^2$ 加速度振幅



5、由初始条件确定振幅A和初相位φ：

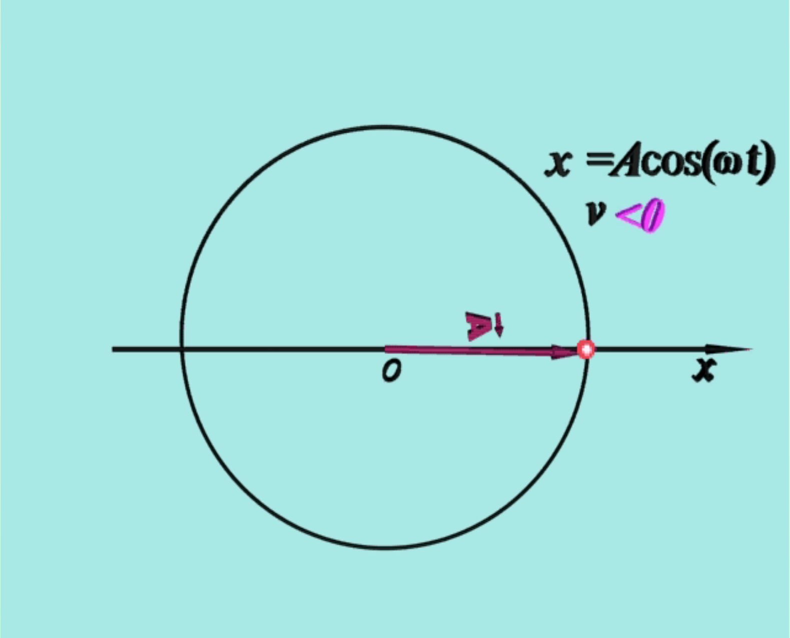
设 $t=0$ 时，$x=x_0$、$\upsilon=\upsilon_0$，条件是外界提供的

则：
$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ \upsilon_0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases}$$

得：
$$\begin{cases} \boxed{A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{\upsilon_o^2}{\omega^2}}} \\ \boxed{\tan\varphi = -\dfrac{\upsilon_0}{\omega x_0}} \end{cases}$$

6、简谐振动的矢量表示法：

设一质点绕圆心*O*作半径为*A*、角速度为ω的匀速圆周运动。$t=0$时，位矢*A*与*x*轴夹角为φ。t时刻*A*与*x*轴夹角（相角）为$\omega t+\varphi$则该质点在轴上的投影的坐标：

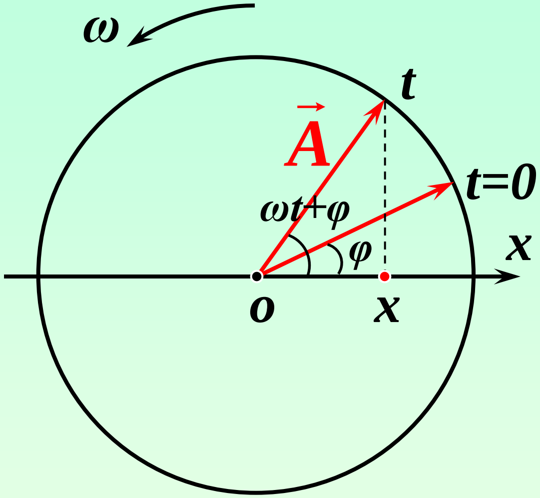


$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

即为简谐振动的运动方程。

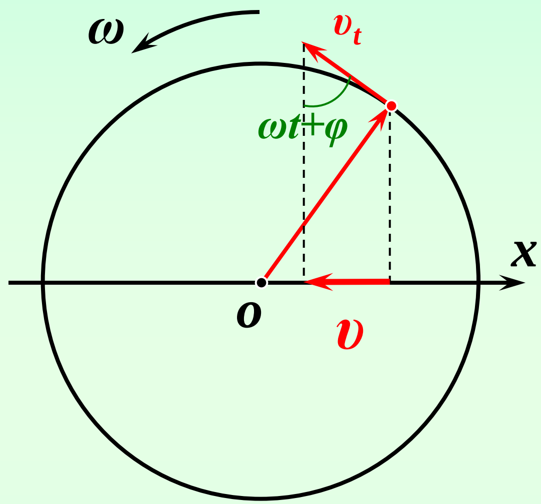
$\vec{A}$：振幅矢量或旋转矢量

$\vec{A}$ 的端点轨迹称为参考圆



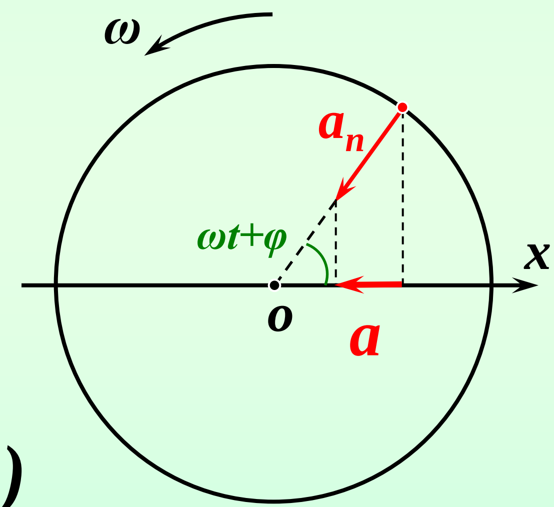
$$x_0 = A\cos\varphi$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



$$\upsilon_t = A\omega$$

$$\upsilon = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

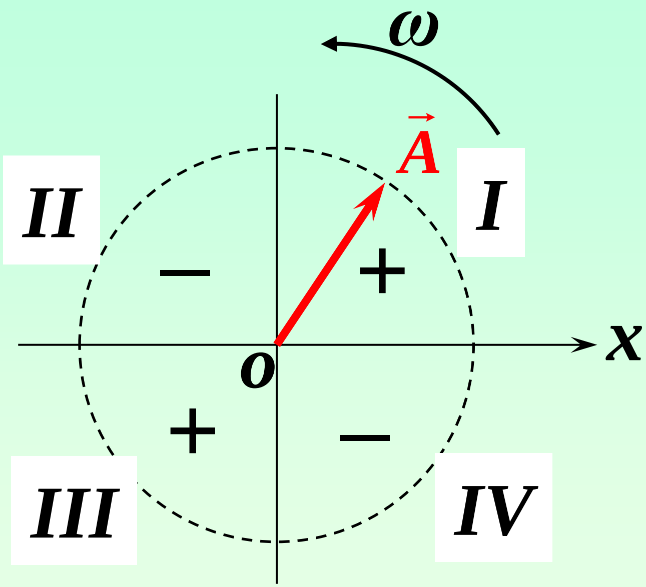


$$a_n = A\omega^2$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

由矢量表示法确定初相位：

$$\boxed{\tan\varphi = -\frac{\upsilon_0}{\omega x_0}}$$



$\tan\varphi > 0$时，φ在I、III象限内。

$$\begin{cases}\text{当}x_0>0\text{和}v_0<0\text{时，}\varphi\text{在第}I\text{象限内；}\\ \text{当}x_0<0\text{和}v_0>0\text{时，}\varphi\text{在第}III\text{象限内。}\end{cases}$$

$\tan\varphi < 0$时，φ在II、IV象限内。

$$\begin{cases}\text{当}x_0<0\text{和}v_0<0\text{时，}\varphi\text{在第}II\text{象限内；}\\ \text{当}x_0>0\text{和}v_0>0\text{时，}\varphi\text{在第}IV\text{象限内。}\end{cases}$$

7、两同频简谐振动间的相位差：

$$x_1 = A_1 cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 cos(\omega t + \varphi_2)$$

相位差：$\boxed{\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1}$

两同频简谐振动的相位差等于它们的初相位之差。

$\Delta\varphi > 0$	$\Delta\varphi = 0$	$\Delta\varphi < 0$	$\Delta\varphi = \pi$
x_2超前于x_1	x_2、x_1同相位	x_2落后于x_1	x_2、x_1反相位

习题6-13

习题6-13：沿x轴做简谐振动的弹簧振子，振幅为A，周期为T。振动方程用余弦函数表示。$t = 0$时，振子处于下列状态。求振动方程。

振动方程 $$\boxed{x = A\cos(2\pi\frac{t}{T} + \varphi)}$$

(1) $x_0 = -A$:

(2) 过平衡位置向正方向运动：

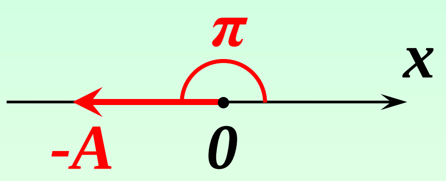
(3) 过$x = A/2$ 处向负方向运动：

(4) 过 $x = -\frac{A}{\sqrt{2}}$ 处向正方向运动：

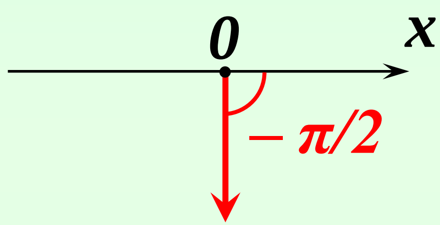
习题6-13

习题6-13：沿x轴做简谐振动的弹簧振子，振幅为A，周期为T。振动方程用余弦函数表示。$t = 0$ 时，振子处于下列状态。求振动方程。

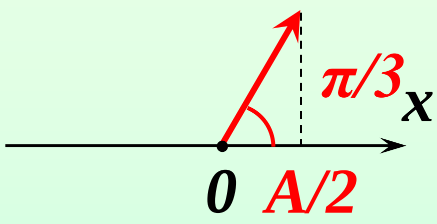
振动方程 $\boxed{x = A\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi\right)}$



(1) $x_0 = -A$:　　$\varphi = \pi$

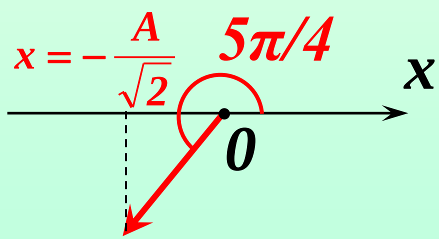


(2) 过平衡位置向正方向运动：$\varphi = -\pi/2$



(3) 过$x = A/2$ 处向负方向运动：$\varphi = \pi/3$

(4) 过 $x = -\dfrac{A}{\sqrt{2}}$ 处向正方向运动：



$\varphi = 5\pi/4$ 或 $-3\pi/4$

例6-1

例6-1： 一质点沿x轴作简谐振动，$A=0.1m$，$T=2s$ 。$t = 0$时$x_0=0.05m$，且$v_0>0$ ，求：(1) 质点的振动方程； (2) $t=0.5s$时质点的位置、速度和加速度； (3) 若某时刻质点在 $x = -0.05m$处且沿x轴负向运动，质点从该位置第一次回到平衡位置的时间是多少？

例6-1：一质点沿x轴作简谐振动，$A=0.1m$，$T=2s$ 。$t = 0$时$x_0=0.05m$，且$\upsilon_0>0$，求：(1) 质点的振动方程； (2) $t=0.5s$时质点的位置、速度和加速度； (3) 若某时刻质点在 $x = -0.05m$处且沿x轴负向运动，质点从该位置第一次回到平衡位置的时间是多少？

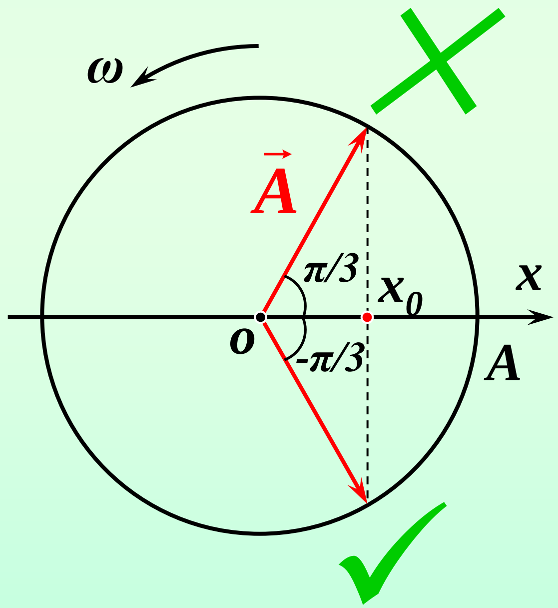
(1) 设振动方程为：$x = A\cos(\omega t+\varphi)$

已知：$A = 0.1m$，$\omega = {2\pi}/{T} = \pi \ {rad}/{s}$，

$t = 0$时，$x_0 = {A}/{2}$，$\upsilon_0 > 0$

由旋转矢量图：$\varphi = -{\pi}/{3}$

$$\therefore \quad x = 0.1\cos(\pi t - \frac{\pi}{3}) \quad m$$



(2) t=0.5s

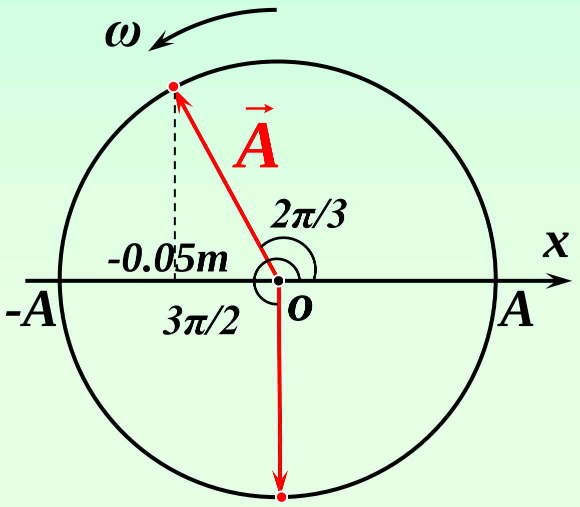
$$x = 0.1\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = 0.1\cos\frac{\pi}{6} \approx 0.0866m$$

$$v = -0.1\pi\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) \approx -0.157m/s$$

$$a = -0.1\pi^2\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) \approx -0.855m/s^2$$

(3) 若某时刻质点在 $x = -0.05m$ 处且沿 x 轴负向运动，质点从该位置第一次回到平衡位置的时间是多少？

$x = -0.05m$，$v<0$ 时， $\varphi_1 = 2\pi/3$



第一次回到平衡位置时： $\varphi_2 = 3\pi/2$

两位置相角之差：

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

旋转矢量转过 $\Delta\varphi$ 需时：

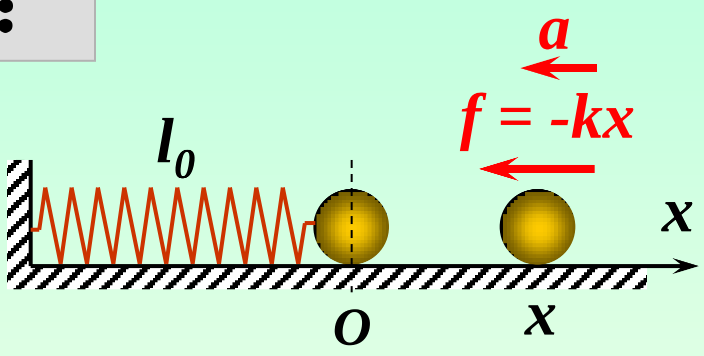
$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{5\pi}{6} \times \frac{1}{\pi} = \frac{5}{6} \quad (s)$$

返回

§6-2 简谐振动的动力学

1、简谐振动的动力学方程：

由胡克定律和牛顿第二定律：



$$f = -kx = ma$$

得：$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

或：$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

式中：$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

此微分方程的解为：

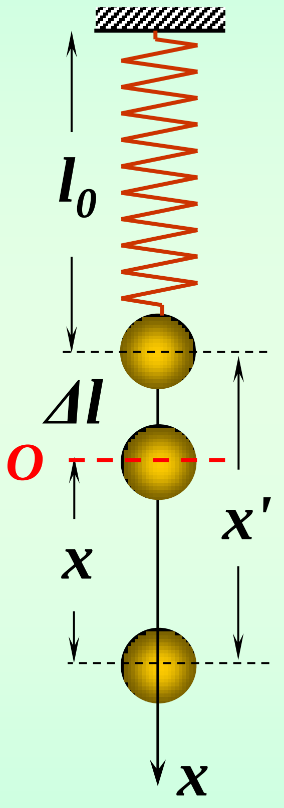
$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

(ω即为圆频率)

弹簧振子的周期和频率：

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

例6-2：一劲度系数为k的轻弹簧上端固定，下端挂一质量为m的物体，使物体上下振动。证明该物体作简谐振动。



例6-2：一劲度系数为k的轻弹簧上端固定，下端挂一质量为m的物体，使物体上下振动。证明该物体作简谐振动。

$$mg - kx' = m\frac{d^2x'}{dt^2}$$

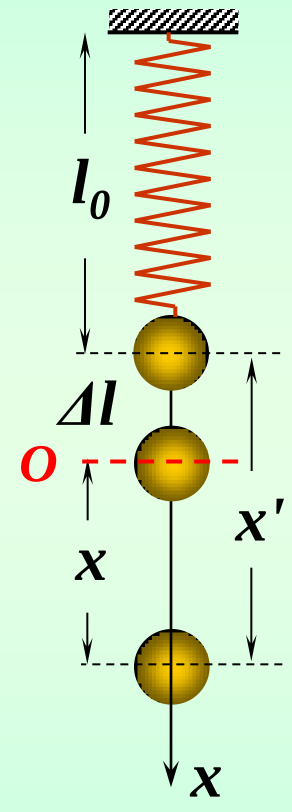
即：$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \omega^2 x' - g = 0 \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

当物体处在平衡位置时：

$$mg = k\Delta l = k(x' - x)$$

或：$$g = \omega^2 (x' - x)$$

所以：$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

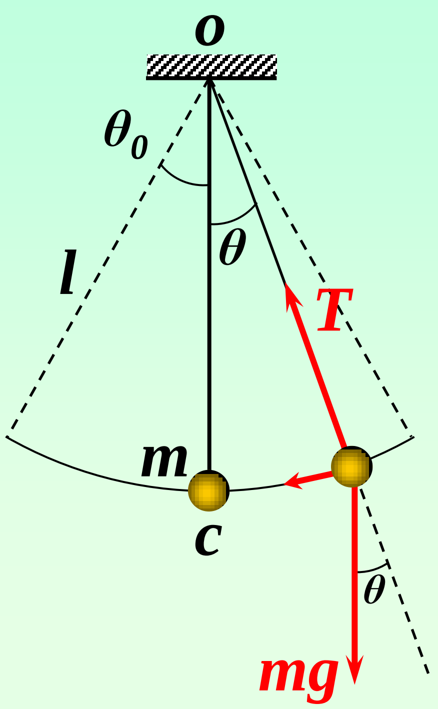


可见：取平衡位置为坐标原点时，该物体作简谐振动。

2、单摆

(1) $l >> d$（小球直径）；

(2) 忽略所有摩擦力的作用。



重力产生的切向分力：

$$F = -mg\sin\theta$$

“–”号表示与角位移方向相反。

由牛顿定理：$$m\frac{d^2s}{dt^2} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

得：$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$ 单摆的动力学方程

当单摆做小角度摆动（$\theta < 5°$）时：$\sin\theta \approx \theta$

得：$\boxed{\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0}$　　$\boxed{\omega^2 = \dfrac{g}{l}}$

方程的解：$\boxed{\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)}$

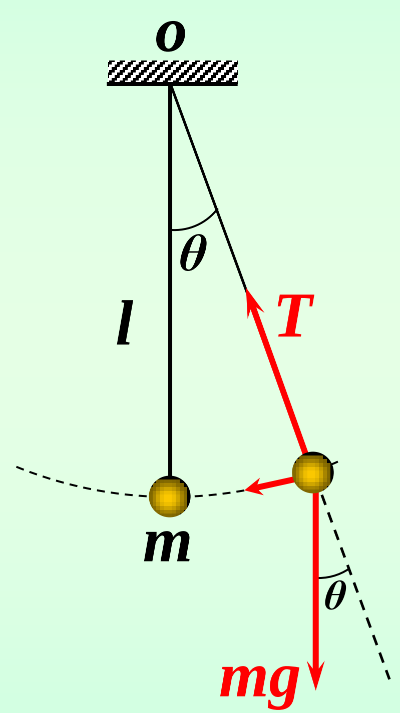
可见：当摆角很小时，单摆的运动为简谐振动。

振动的周期：$\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$

单摆振动的周期与摆锤质量无关，只和摆线长度有关。

例6-3

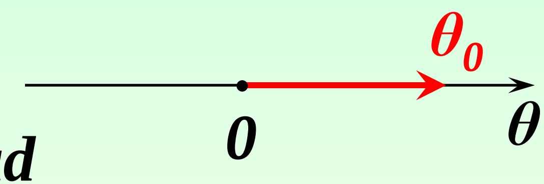
例6-3： 单摆，$l=0.8m$，$m=0.30kg$ 。向右拉离平衡位置$15°$ 后自由释放。求：(1) ω、T ；(2) θ_0 、 φ、振动方程；(3) ω_{max} ；(4) 绳中最大张力T_{max} 。



例6-3

例6-3： 单摆，$l=0.8m$，$m=0.30kg$ 。向右拉离平衡位置15°后自由释放。求：(1) ω、T；(2) θ_0、φ、振动方程；(3) ω_{max}；(4) 绳中最大张力T_{max}。

(1) $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}=3.5rad/s,\quad T=\dfrac{2\pi}{\omega}=1.795s$



(2) 由旋转矢量图：$\varphi=0$，$\theta_0=15°=0.262\ rad$

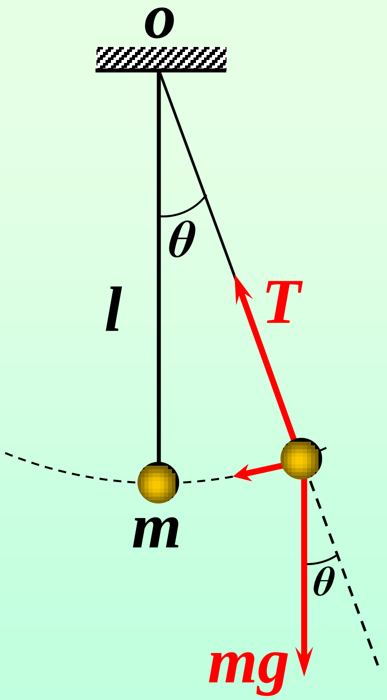
$$\theta=0.262\cos3.5t\quad(rad)$$

(3) $\omega_{max}=\theta_0\,\omega=0.917\quad(rad/s)$

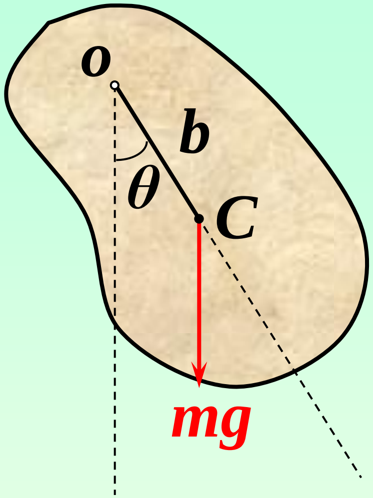
(4) 张力 $T=mg\cos\theta+m\dfrac{\upsilon^2}{l}$

当$\theta=0$，即单摆处于平衡位置时，张力最大。

$$T_{max}=mg+m\frac{\upsilon_{max}^2}{l}=mg+ml\omega_{max}^2=3.14N$$



3、复摆（物理摆）：



重力产生的恢复力矩：

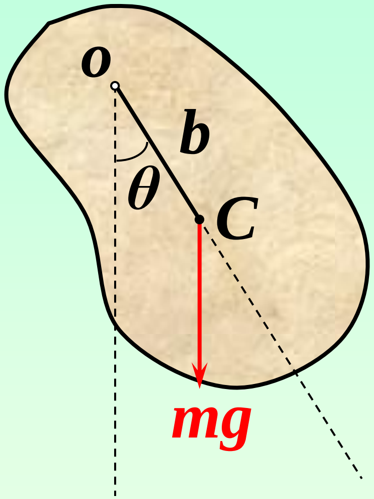
$$M = -mgb\sin\theta$$

由转动定理，并考虑小角度摆动（θ<5°）：

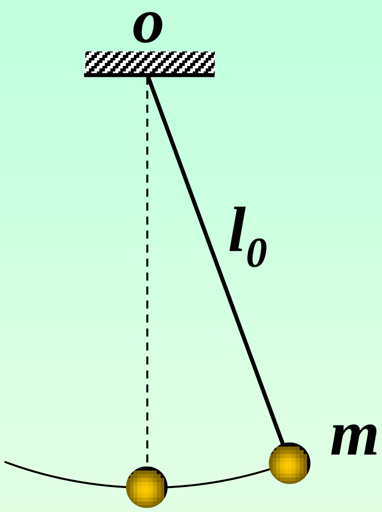
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgb\sin\theta \approx -mgb\,\theta$$

或：$\boxed{\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0}$　　$\boxed{\omega^2 = \dfrac{mbg}{I}}$

当摆角很小时，复摆的运动为简谐振动。



等效 ⇒



复摆：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mbg}}$

单摆：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}$

$l_0=\dfrac{I}{mb}$ 等值摆长

返回

§6-3 简谐振动的能量

以弹簧振子为例：

任意时刻 t：

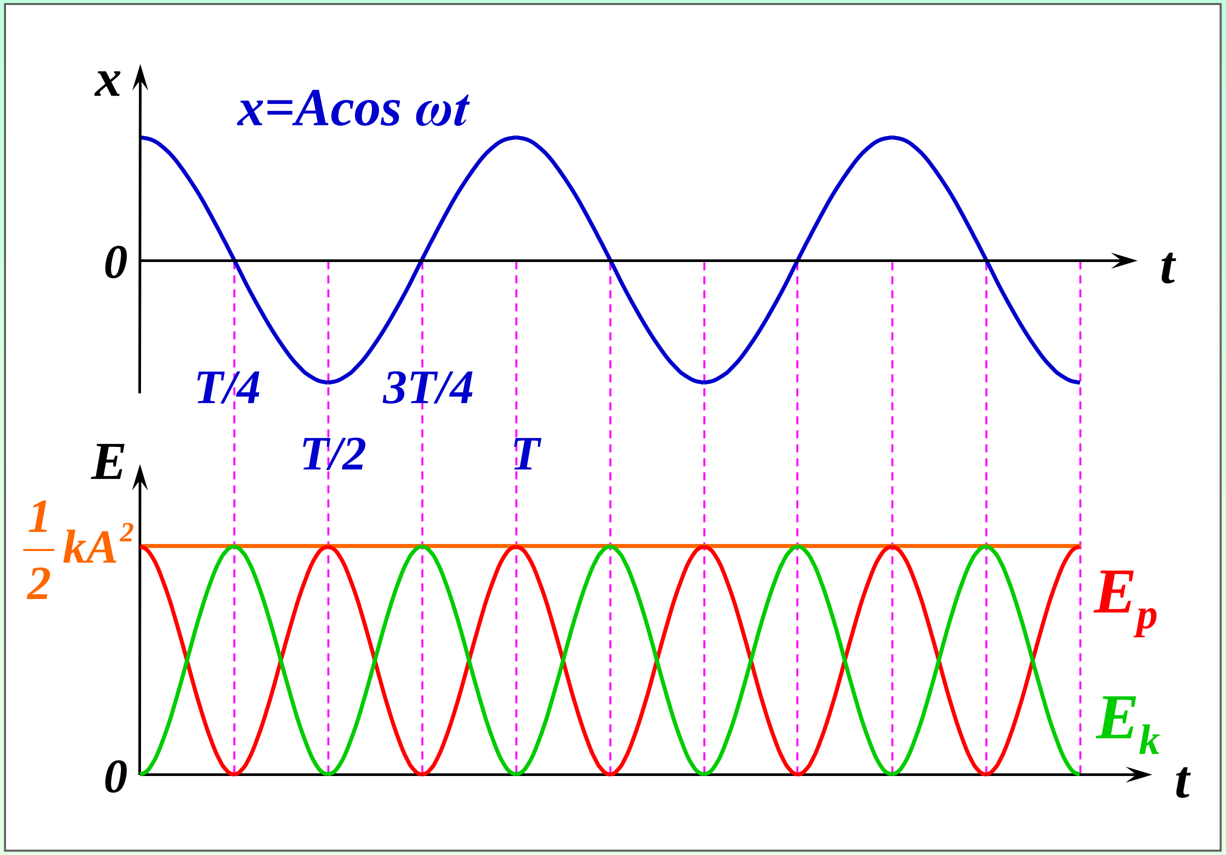
弹性势能： $$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

动 能： $$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

总机械能：

$$\boxed{E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_m^2}$$



(1) E_k、E_p周期性变化的频率为简谐振动的两倍。

(2) 总机械能$E=E_k+E_p$=常量。

(3) $$\overline{E}_k = \overline{E}_p = \frac{1}{2}E$$

返回

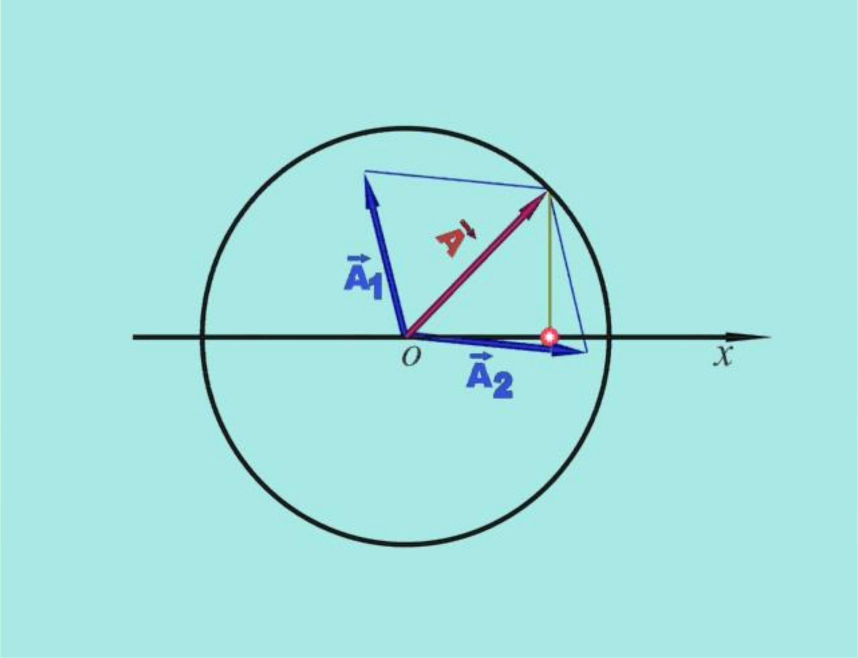
§6-4　同方向简谐振动的合成

1、同方向、同频率简谐振动的合成：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

合位移：$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

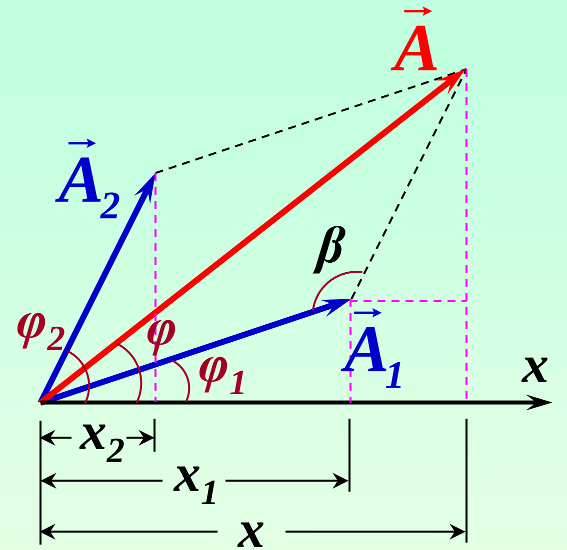


合振动仍为简谐振动：

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

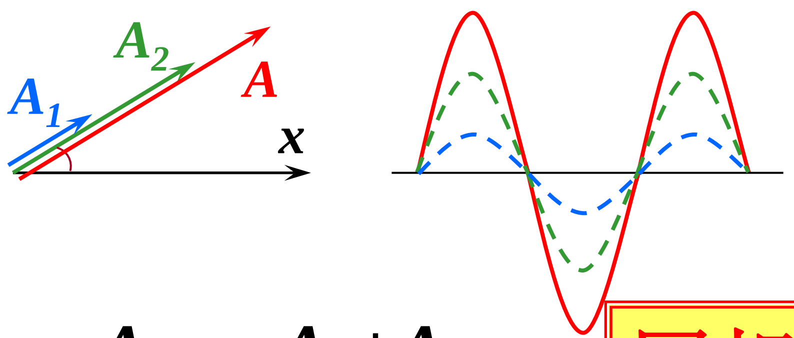
由 $t = 0$ 时的旋转矢量图：

$$\begin{cases} \boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}} \\ \boxed{\tan\varphi=\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}} \end{cases}$$



合振动振幅决定于两分振动振幅和两分振动相位差。

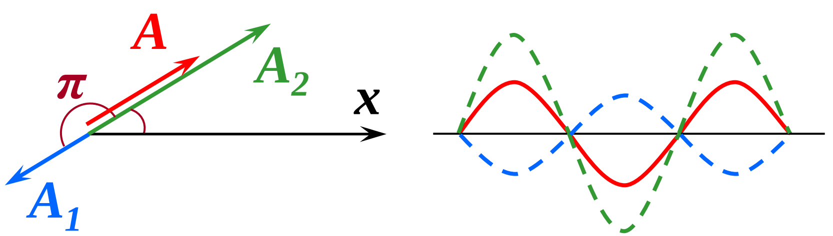
(1) $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi$



$A_{max}=A_1+A_2$

同相

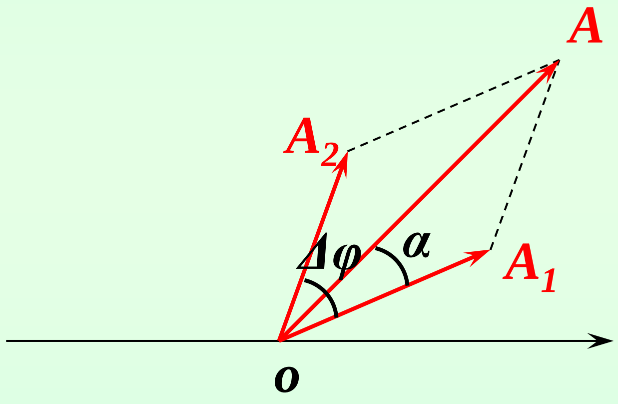
(2) $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi$



$A_{min}=|A_1-A_2|$

反相

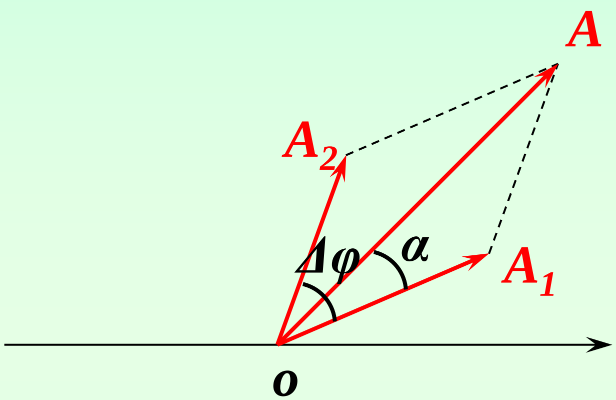
习题6-22： 两个同方向、同频率简谐振动。合振动振幅为 *0.20m*，合振动与第一振动相位差为 $\pi/6$，第一振动振幅为 *0.173m*。求第二振动振幅及第一、第二振动间的相位差。



习题6-22： 两个同方向、同频率简谐振动。合振动振幅为0.20m，合振动与第一振动相位差为$\pi/6$，第一振动振幅为0.173m。求第二振动振幅及第一、第二振动间的相位差。

$$A_2 = \sqrt{A_1^2 + A^2 - 2A_1A\cos\alpha}$$

$$= 0.10 \quad m$$



$$\because \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

$$\therefore \quad \cos\Delta\varphi = \frac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2} = 2.05\times10^{-3}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

2、同方向、不同频率简谐振动的合成：

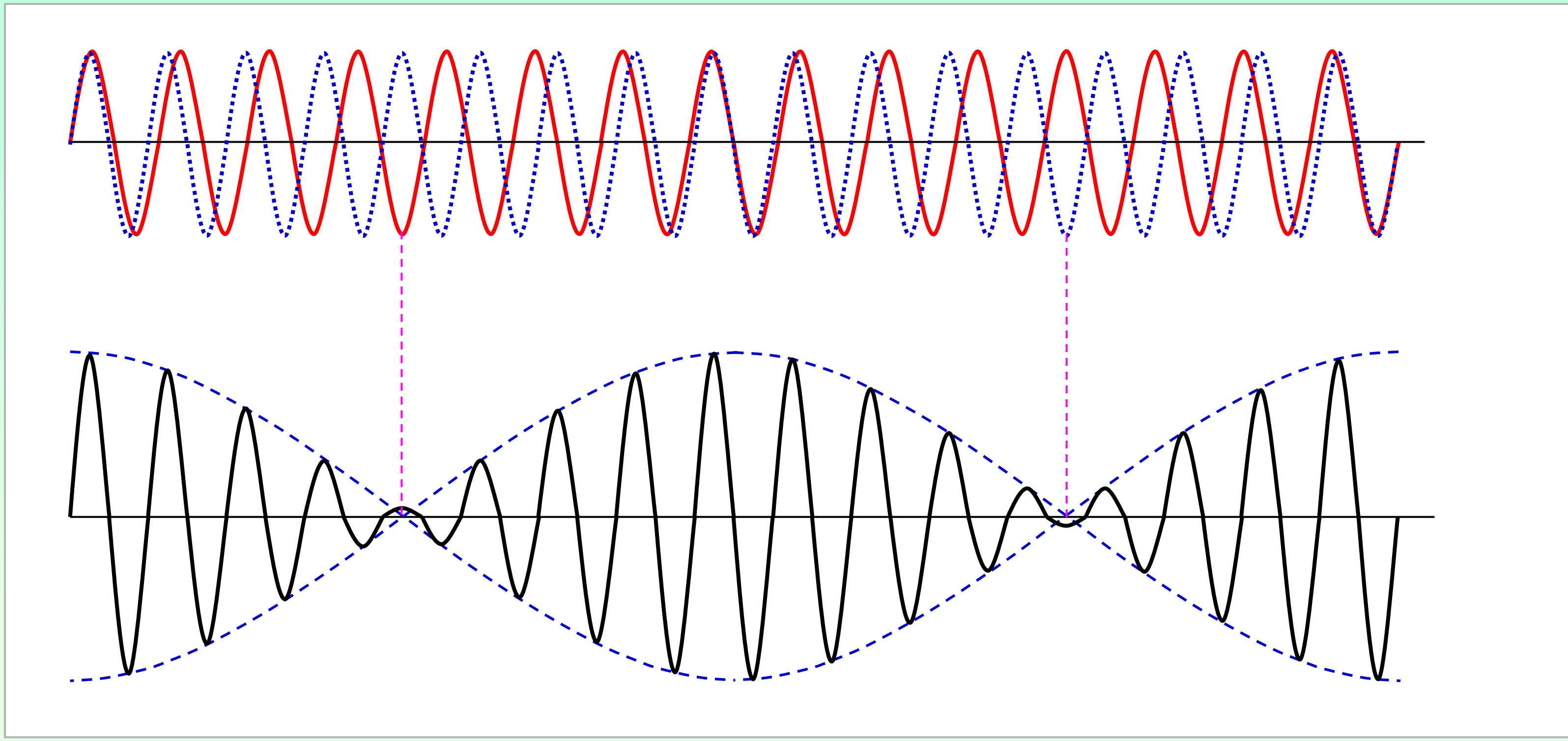
当两个分振动频率不同时，$\Delta\varphi$ 将不断变化。所以合振动振幅也将不断变化。此时，合振动不是简谐振动。

设：
$$x_1 = A\cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A\cos(\omega_2 t)$$

合振动：
$$x = x_1 + x_2 = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$
$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)$$

若将 $\left|2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\right|$ 作为合振动的振幅，则：

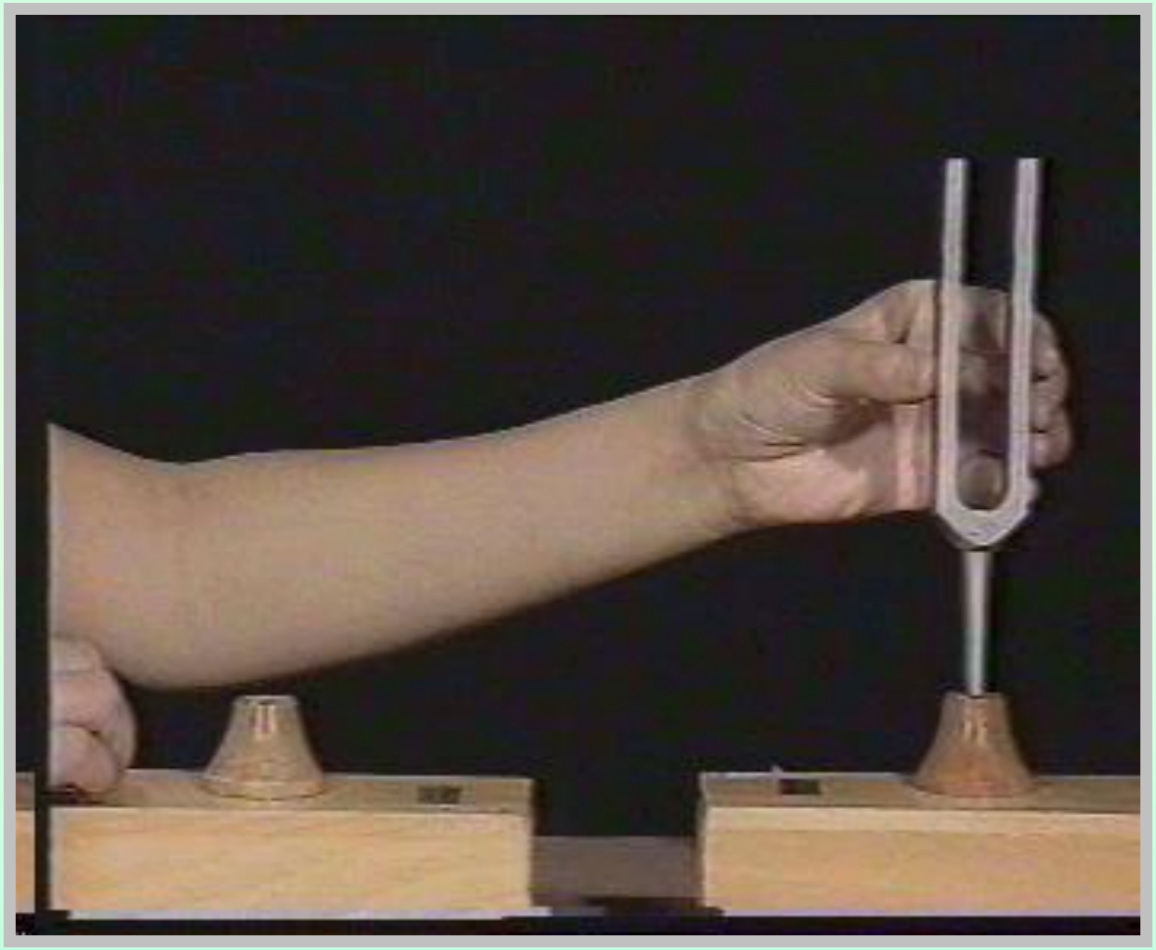
合振动振幅在 $0 \sim 2A$ 之间变化，称振幅被调制。



若两个分振动频率不同之和远大于两分振动的频率之差时，合振动振幅也时而加强，时而减弱的现象又称为拍，合振动变化的频率称为拍频。

$$\boxed{\nu = \nu_2 - \nu_1}$$

拍 的 现 象



返回

§6-5　相互垂直简谐振动的合成

1、同频率垂直简谐振动的合成：

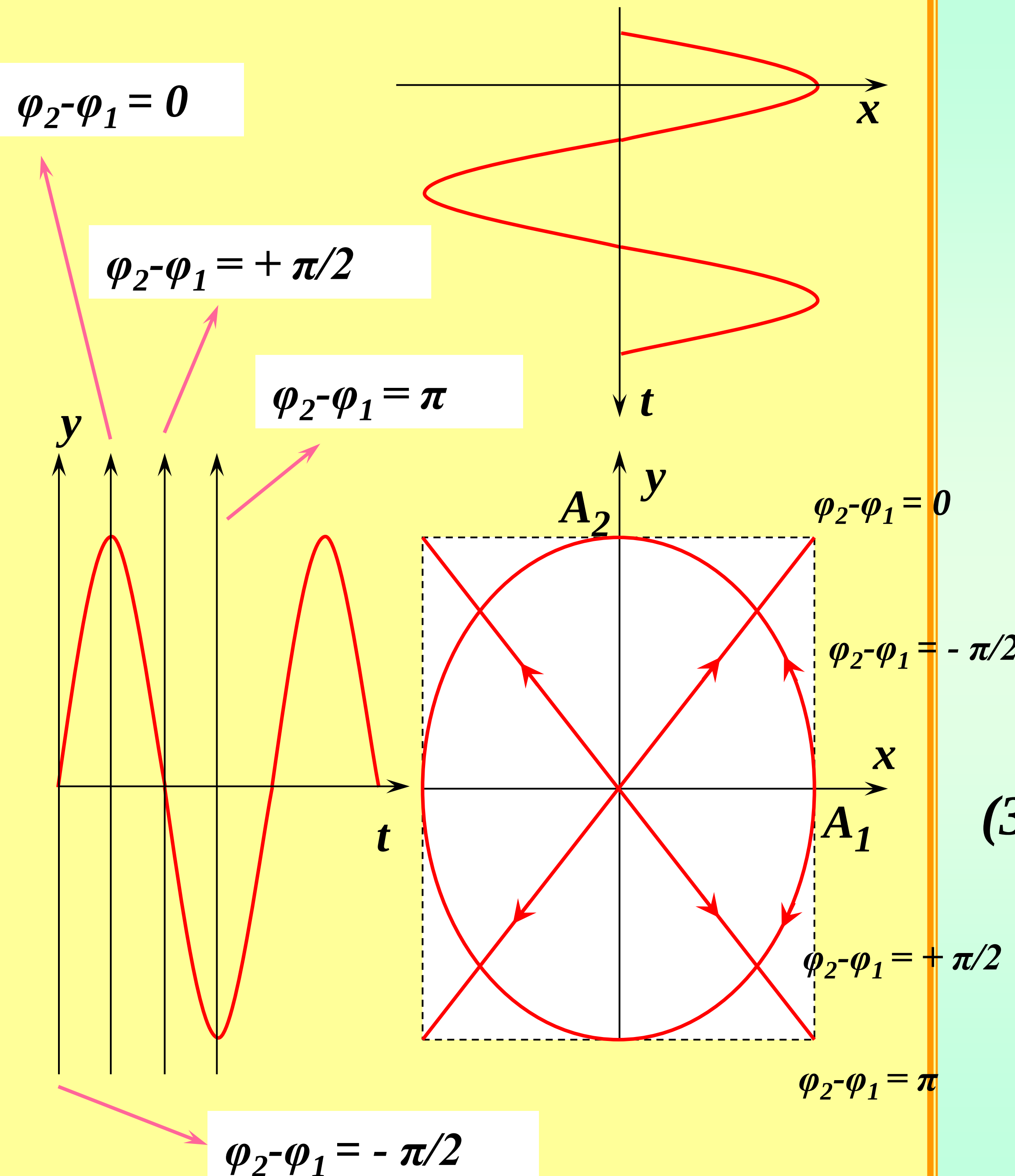
设两个同频率简谐振动分别沿 x 和 y 方向：

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

消去 t 后得轨迹方程：

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

合振动轨迹为椭圆。



(1) $\varphi_2-\varphi_1 = 2k\pi$ 时：

$$\boxed{y = \frac{A_2}{A_1}x}$$

I、III象限中直线

(2) $\varphi_2-\varphi_1 = (2k+1)\pi$ 时：

$$\boxed{y = -\frac{A_2}{A_1}x}$$

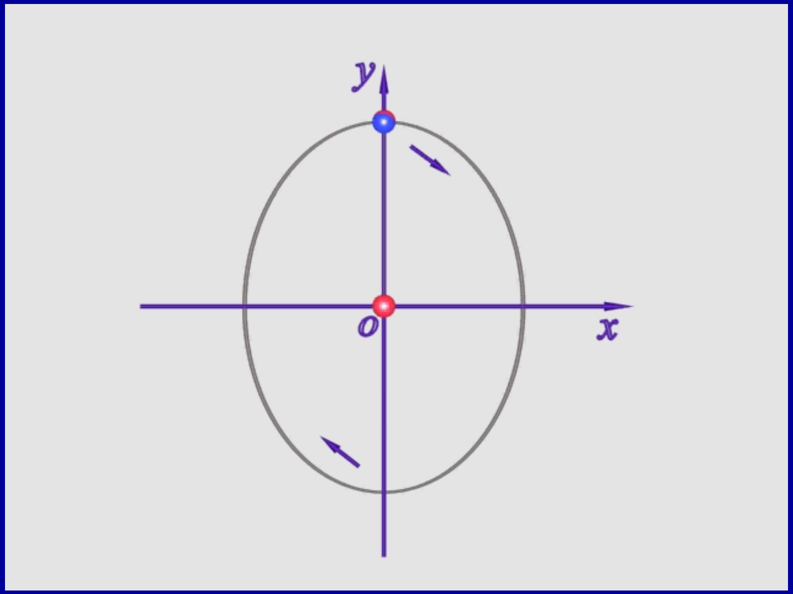
II、IV象限中直线

(3) $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi\pm\pi/2$ 时：

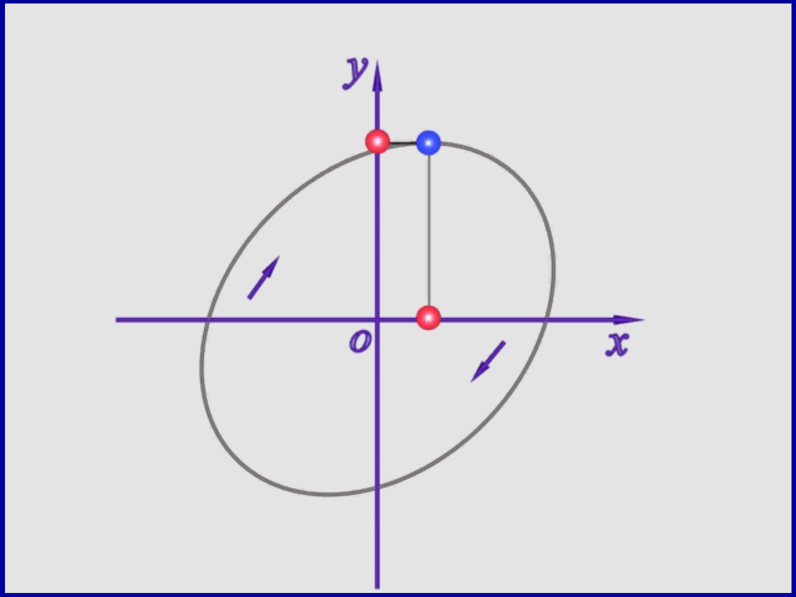
正椭圆

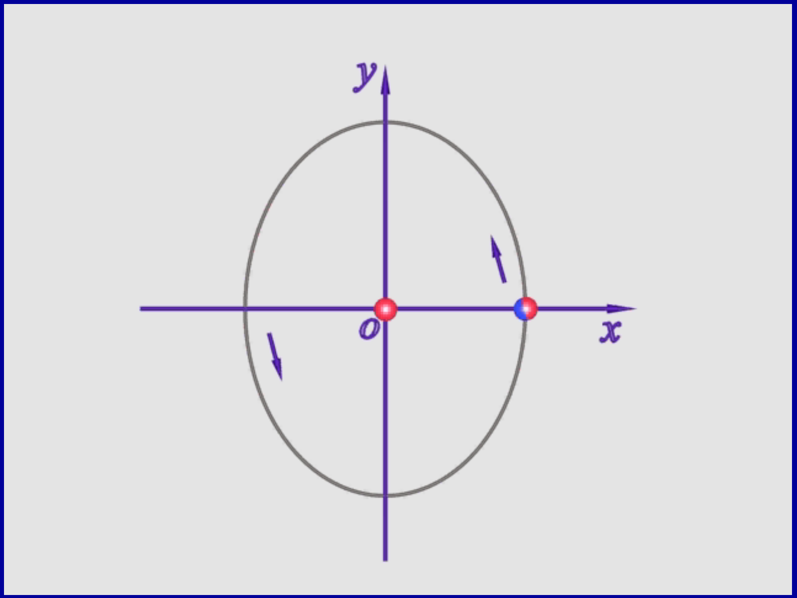
(4) 其他情况：

斜椭圆

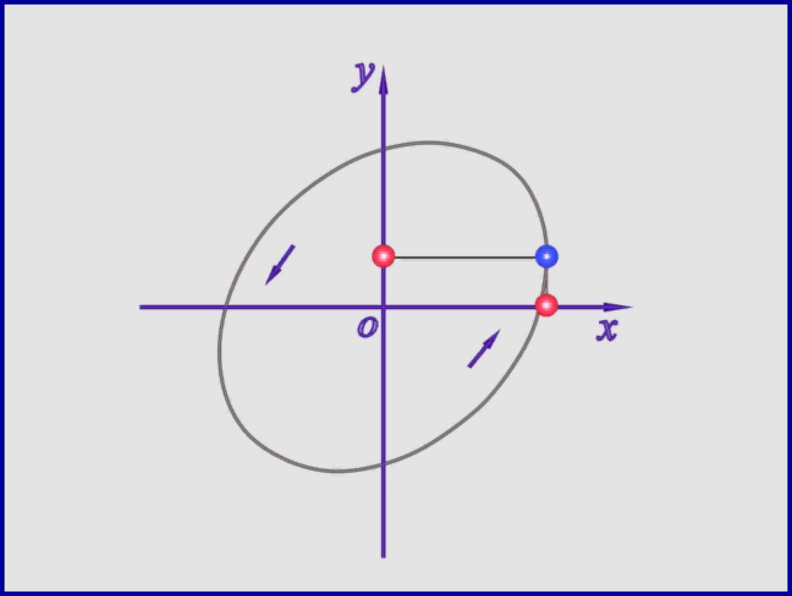


φ_2-φ_1 = + $\pi/2$





φ_2-φ_1 = - $\pi/2$



2、不同频率垂直简谐振动的合成：

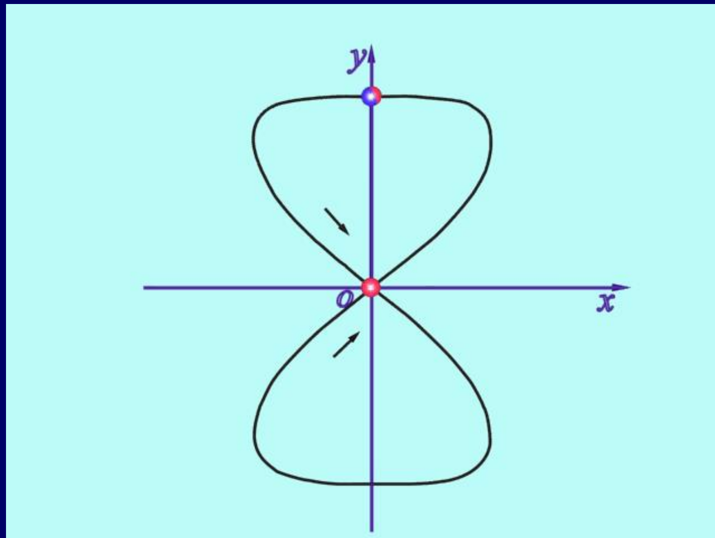
设两个频率不同的简谐振动分别沿 x 和 y 方向：

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega_1 t \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta) \end{cases}$$

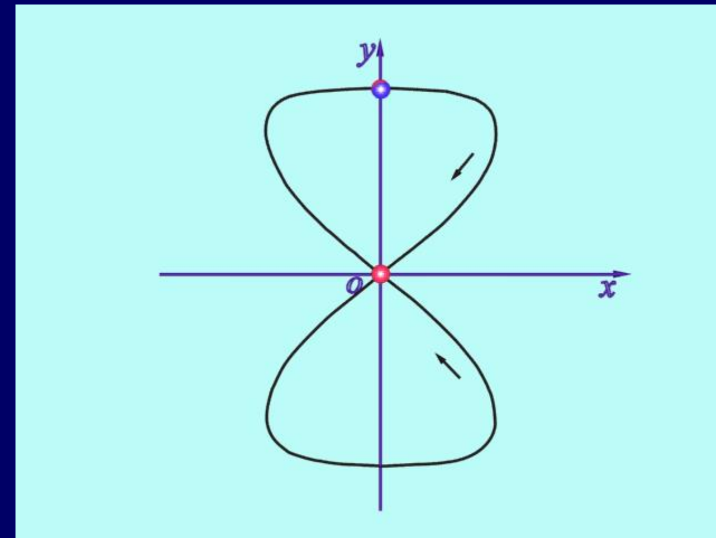
则相位差：

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t + \delta$$

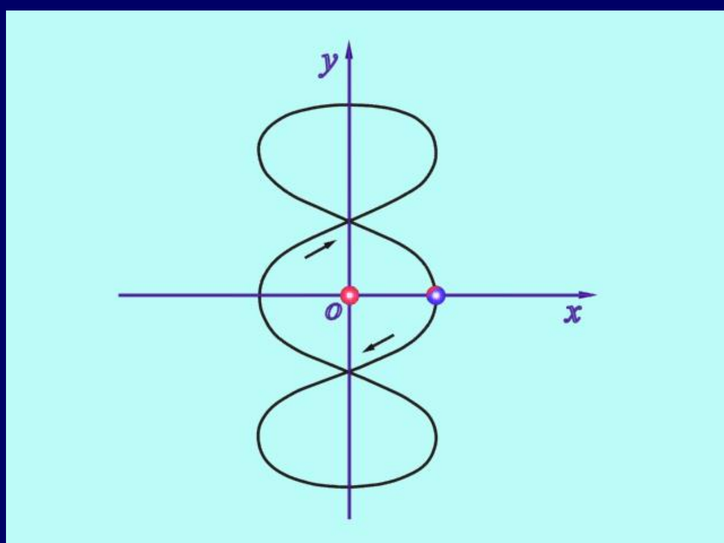
当两个分振动频率ω_1、ω_2成简单整数比时，合振动轨迹是稳定的封闭曲线。称为李萨如图线。



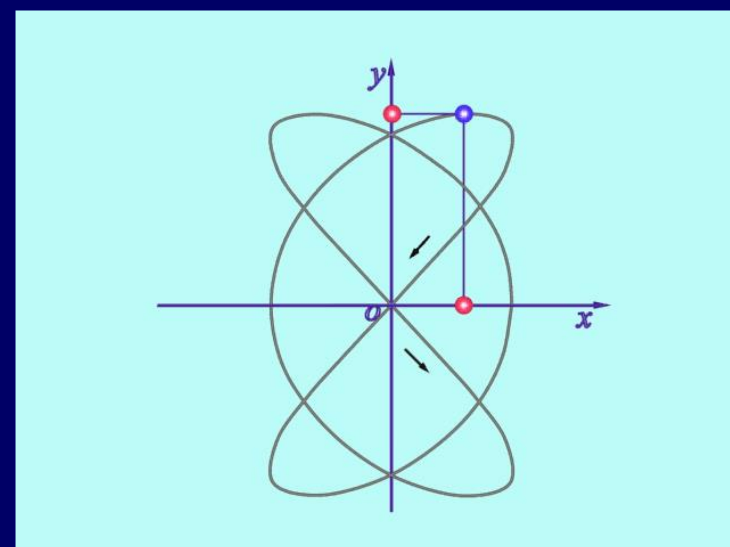
$f_y : f_x = 1 : 2$



$f_y : f_x = 1 : 2$

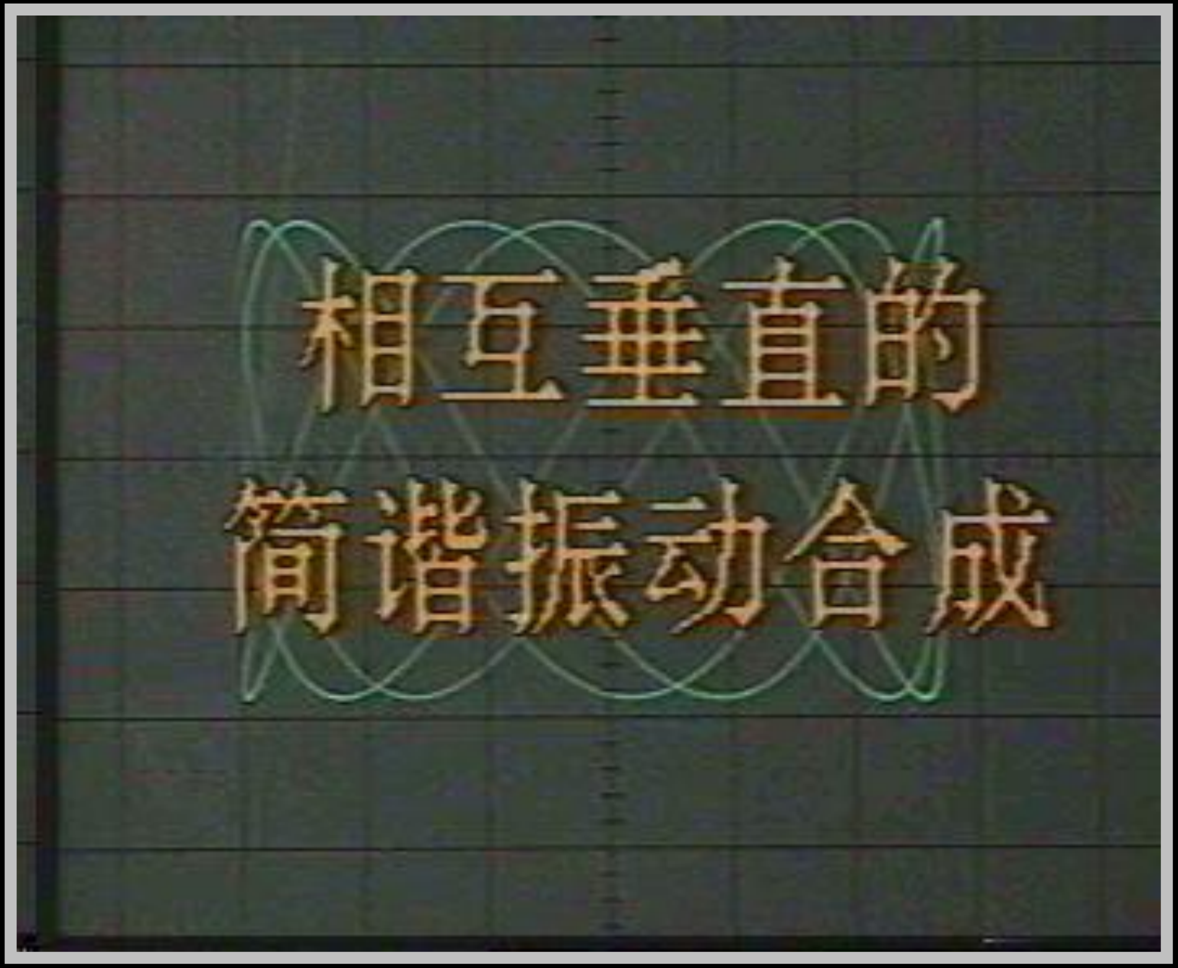


$f_y : f_x = 1 : 3$



$f_y : f_x = 2 : 3$

相互垂直简谐振动的合成



返回

§6-6 阻 尼 振 动

振动系统在阻尼力作用下，振幅（能量）不断减小的振动称为阻尼振动。

阻尼的两种形式：摩擦阻尼、辐射阻尼。

振动物体速度不太大时，阻尼力与速度成正比。

$$f=-\gamma\upsilon=-\gamma\frac{dx}{dt}$$ γ：阻力系数

动力学方程：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\gamma\frac{dx}{dt}-kx$$

令：$\boxed{\omega_0^2=\frac{k}{m}}$ ω_0:固有圆频率；$\boxed{\beta=\frac{\gamma}{2m}}$ 阻尼因数

阻尼振动方程：

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$$

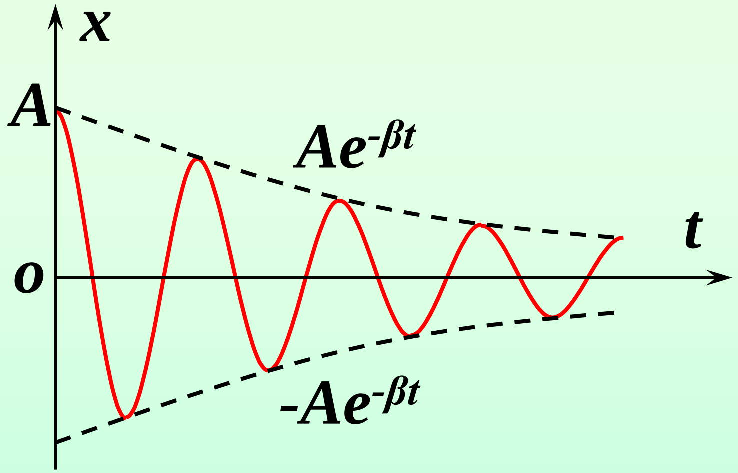
(1) 欠阻尼状态（阻尼较小）： $\beta<\omega_0$

$$\boxed{x=Ae^{-\beta t}\cos(\omega' t+\varphi)}$$

其中：

$$\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}<\omega_0$$

$$\therefore\quad T=\frac{2\pi}{\omega'}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}>T_0$$



阻尼越大，振幅衰减越快，周期越长。

(2) 过阻尼状态（阻尼较大）： $\beta > \omega_0$

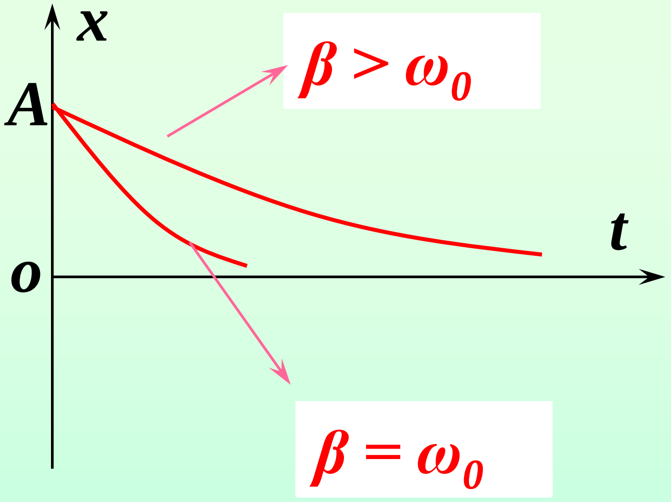
$$x = C_1 e^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}$$

振动不会发生，物体缓慢回到平衡位置。

(3) 临界阻尼状态： $\beta = \omega_0$

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\beta t}$$

振动不会发生，物体很快回到平衡位置。



阻尼的应用：阻尼天平、灵敏检流计 *etc.*。

返回

§6-7 受迫振动、共振

阻尼的存在使振幅减小，若对系统施加一持续的周期性外力，则系统将做振幅不变的振动—受迫振动。

设周期性外力：$F(t)=F_0\cos\omega t$

则：$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\gamma\frac{dx}{dt}-kx+F_0\cos\omega t$$

令：$$\omega_0^2=\frac{k}{m},\quad 2\beta=\frac{\gamma}{m},\quad f_0=\frac{F_0}{m}$$

得：$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t}$$

解：$$\boxed{x=A_0e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi')+A\cos(\omega t+\varphi)}$$

即：受迫振动为阻尼振动和简谐振动之和。

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi')+A\cos(\omega t+\varphi)$$

(1) 经足够长时间，受迫振动为稳定振动，其周期即为外力的周期。

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

(2) 稳定受迫振动与周期性外力有一相位差 φ 。

(3) $$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)+4\beta^2\omega^2}},\quad \tan\varphi=-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

位移共振：

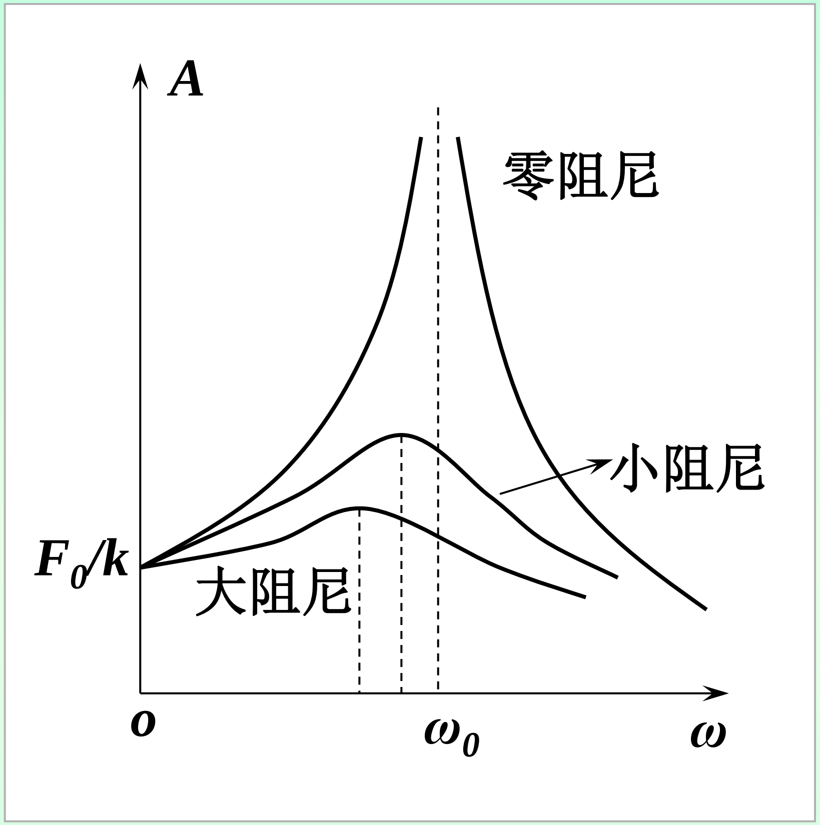
令：$$\frac{dA}{d\omega}=0$$

得：当周期性外力圆频率为

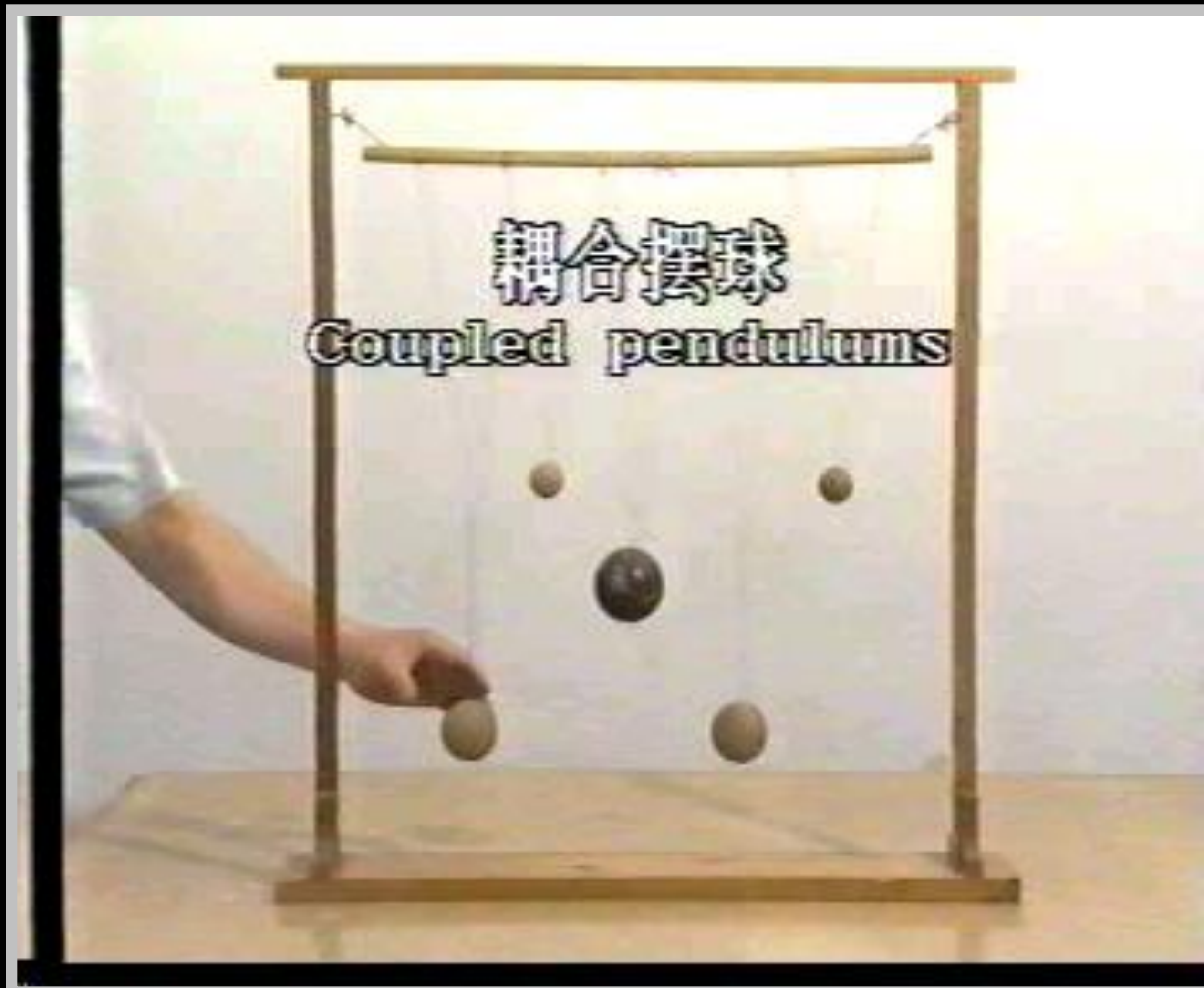
$$\boxed{\omega_m=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$$

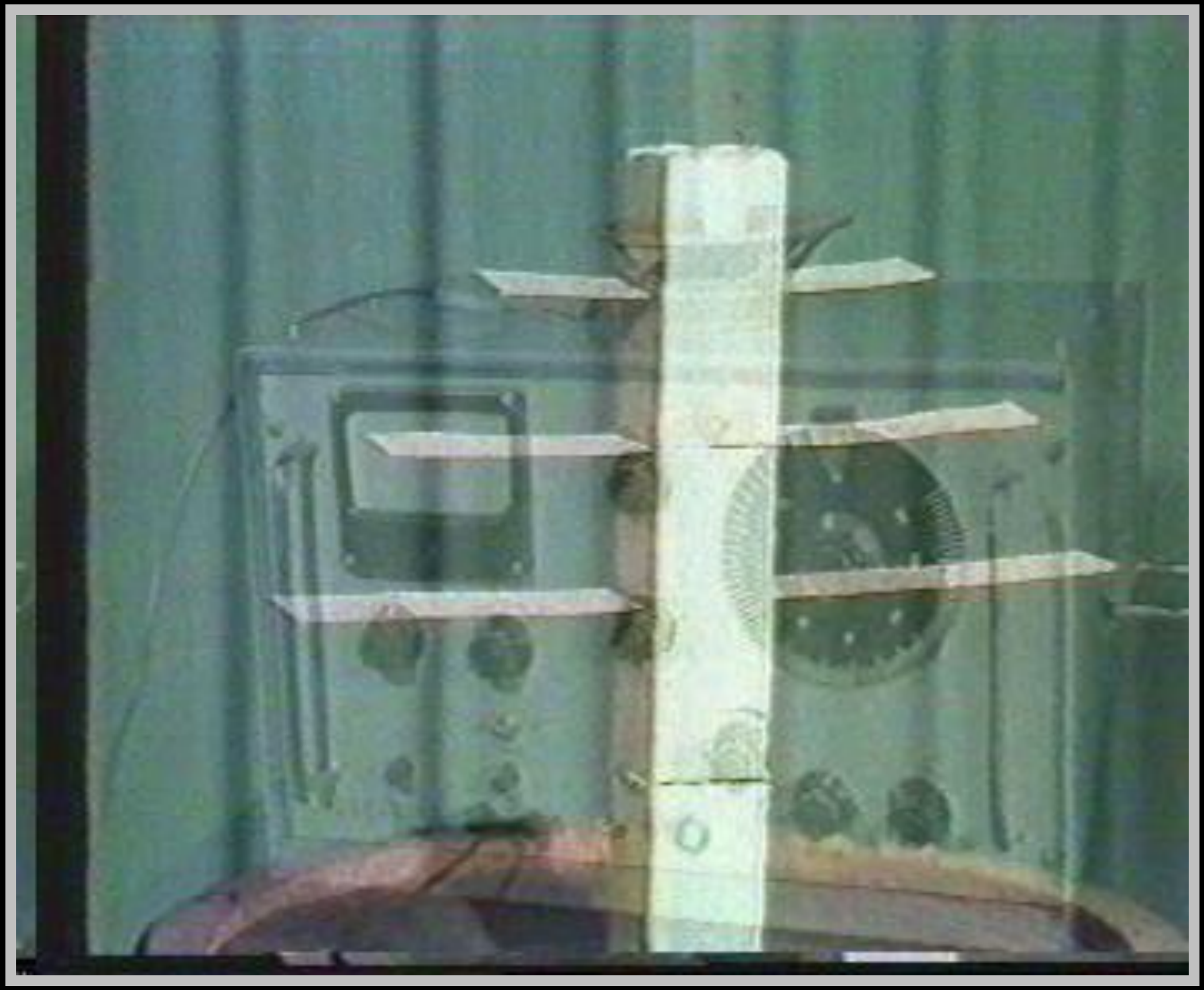
时，振幅有最大值：

$$\boxed{A_m=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}}$$



当：$\beta\to 0$时，$\omega_m\to\omega_0$，$A_m\to\infty$ 。


耦合摆球
Coupled pendulums



返回

作业

6-14

6-15

6-16

6-17

6-23

6-24

6-28

6-29