同学们好！今天我们来学习静电场的第三讲场强叠加原理及其应用

在上一讲我们已经知道点电荷系在某点产生的场强等于各点电荷单独存在时在该点产生的场强的矢量和，并把它称为场强叠加原理

有了场强叠加原理，就可以计算任意带电体所激发的场强是所有电荷元所激发的场强 **dE** 的矢量和，是矢量的积分式，实际在具体运算时，通常必须把 **dE** 在 **x**、**y**、**z** 三个坐标轴方向上的分量式写出，然后再积分。

下面，我们通过几个典型的实例来说明如何应用场强叠加原理计算场强。

例 1　计算电偶极子轴线的延长线上和中垂线上任一点的电场强度。

如图两个等量异号点电荷，当两者之间距离 l 比所讨论的场点到二者的距离小得多时，这个带电系统就称为电偶极子。

用 $\boldsymbol{l}$ 表示从负电荷到正电荷的矢量，电荷量 q 与 $\boldsymbol{l}$ 的乘积称为电偶极矩，简称电矩，用 **P** 表示，**P** 是矢量，方向与矢量 $\boldsymbol{l}$ 相同。

我们首先计算电偶极子轴线的延长线上某点 P 的场强，设 P 点到电偶极子连线中点 O 的距离为 r，则+q 和-q 在 P 点产生的电场强度 E+和 E-同在轴线上，方向相反，其大小分别为

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(r-\frac{l}{2})^2}$$

$$E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(r+\frac{l}{2})^2}$$

根据场强叠加原理 P 点的总场强为

$$E = E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r-\frac{l}{2})^2} - \frac{1}{(r+\frac{l}{2})^2}\right]$$

对于电偶极子，有 r 远大于 l 的条件，所以约等于

$$\frac{ql}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

插入

总场强 E 的方向与电偶极矩 p 的方向相同。

$$\boldsymbol{\vec{E}=\frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

如图，计算电偶极子中垂线上某点 Q 的场强。设 Q 到 O 点的距离为 r，Q 到+q 和-q 的距离分别为 r_+和 r_-，则+q 和-q 分别在 Q 点所激发的电场强度 E_+和 E_-的大小相等，其值为

$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+\frac{l^2}{4})}\cdot$$

E+和 E-的方向如图所示，则总场强为

$$E = E_+\cos\alpha + E_-\cos\alpha$$

$$= 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+\frac{l^2}{4})}\cdot\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+\frac{l^2}{4}}}$$

由于 r 远大于 l， 可得

$$E \approx \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

如图，总场强 E 的方向与电偶极矩 p 的方向相反。

$$\boldsymbol{\vec{E}=-\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

由上述结果可见，在远离电偶极子处的场强与距离的三次方成反比，与电偶极子的电偶极矩 p=ql 成正比。插入

因此，能够表征电偶极子电性质的量，既不单是电荷量 q，也不单是距离 l，而是它的电偶极矩 p=ql。

电偶极子是一个重要的物理模型，在研究电介质的极化、电磁波的发射和吸收、大气电学、人体探测技术等问题时，都要用到电偶极子的模型。

下面来讨论例 2 计算长为 L，线电荷密度为 λ（λ＞0）的均匀带电直线中垂线上任一点的场强。

如图，在带电直线上任取一长为 dl 的电荷元，其电荷量 dq= λ dl。该电荷元在带电直线中垂线上的 P 点产生的场强 dE 的大小为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

dE 沿 x 轴和 y 轴方向的两个分量分别为 dE_x 和 dE_y。由对称性分析可知，带电直线上所有电荷元在 P 点产生的电场强度的 y 分量全部抵消，即

$$E_y = \int dE_y = 0$$

所以，P 点总场强为所有电荷元产生的场强的 x 分量 dE_x 之和，即

$$E_x = \int dE_x$$

而，$dE_x = dE\cos\theta = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$

$$= \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

由于 $l = a\tan\theta$，从而 $dl = \dfrac{a d\theta}{\cos^2\theta}$

由图可知： $r = \dfrac{a}{\cos\theta}$

所以， $dE_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta d\theta$

$$E = \int dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{-\theta_1}^{\theta_1}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda\sin\theta_1}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

将 $\sin\theta_1 = \dfrac{\frac{L}{2}}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + a^2}}$ 代入后

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{L}{\sqrt{L^2 + (2a)^2}}$$

电场强度的方向沿 x 轴正方向，即指向背离直线的方向。若电荷线密度 $\lambda < 0$，则电场强度指向直线。

上式中，当 $a << L$ 时，带电直线可当作无限长。

此时： $\theta_1 \to \pi/2,\quad \sin\theta_1 \to 1$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$

因此可以说，在一无限长带电直线周围任一点场强的大小与该点到带电直线的垂直距离成反比。

当 $a >> L$ **时，**即在远离直线的地方，

此时： $\theta_1 \to 0$ ， $\sin\theta_1 \to L/2a$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{L}{2a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

式中，$q=\lambda L$ 为带电直线的总电荷量。此结果说明，在离该带电直线很远的地方，带电直线的电场相当于一个点电荷的电场。

例 3　我们来计算半径为 R，带电量为 q (q>0)的均匀带电圆环轴线上任一点的场强。

如图，在圆环上取线元 d***l***，其带电量为 dq，dq 在 P 点的场强为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

dE 沿平行和垂直于轴线的两个方向的分量分别为 dE_x 和 dE_y。由对称性分析可知，带电圆环上所有电荷元在 P 点产生的电场强度的 y 分量全部抵消，即

$$E_y = \int dE_y = 0$$

所以，P 点总场强为所有电荷元产生的场强的 x 分量 dE_x 之和，即

$$E = \int dE_x$$

$$\text{而，}\ dE_x = dE \cdot \cos\theta = \frac{adq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\text{其中}\cos\theta = \frac{a}{r},\quad r^2 = R^2 + a^2$$

$$\text{则，}\ E = \int dE_x = \frac{a}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + a^2)^{3/2}} \oint dq$$

$$\boxed{\text{得到，}\ E = \frac{aq}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + a^2)^{3/2}}}$$

如图，E 的方向沿着轴线指向远处。

如果 $a >> R$ ，也就是 P 点距离圆环很远时，$(R^2 + a^2)^{3/2} \approx a^3$

则上式可写作

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

此结果说明，远离圆环心的电场也相当于一个点电荷 q 产生的电场。

对于圆心处，$a=0$ 由上式可得电场强度 E=0

刚才我们学习了带电圆环轴线上一点的场强，接下来我们讨论带电圆板轴线上一点的场强

如图，可以将带电圆板看作是由许多同心的带电细圆环所组成。现取一半径为 r、宽度为 dr 的细圆环，其所带电量为

$$dq=\text{面电荷密度}\,\sigma\cdot\text{圆环周长}\,2\pi r\cdot\text{圆环宽度}\,dr$$

由例 3 的结果可知，该带电细圆环在轴线上 P 点产生的场强大小为

$$dE=\frac{adq}{4\pi\varepsilon_0(r^2+a^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{a\sigma rdr}{2\varepsilon_0(r^2+a^2)^{3/2}}$$

方向沿 x 轴正方向。由于组成圆板的所有细圆环在 P 点产生的电场 dE 的方向都相同，所以 P 点的场强大小为

$$E=\int dE=\frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{rdr}{(r^2+a^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

当带电圆板的半径 R 远大于 a 时，可将带电圆板看作无限大，由上式可得到

$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

因此可以说，在一无限大均匀带电平板附近的电场是匀强电场。当σ ＞0 时，电场方向背离平板；当σ ＜0 时，电场方向指向平板。

最后，给大家布置一道思考题：一无限大均匀带电平面，开有一个半径为 a 的圆洞。设电荷面密度为σ。

如何利用例 3 的结果去求轴线上离洞心为 r 处的电场强度？

如何利用例 4 的结果去求轴线上离洞心为 r 处的电场强度？

今天的这一讲就到这里，同学们再见。