06.2 简谐运动的动力学

简谐运动的运动学方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

加速度 $a = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

因此 $\boxed{a = -\omega^2 x}$

简谐运动的质点在运动中所受的力为

$$f = ma = -m\omega^2 x$$

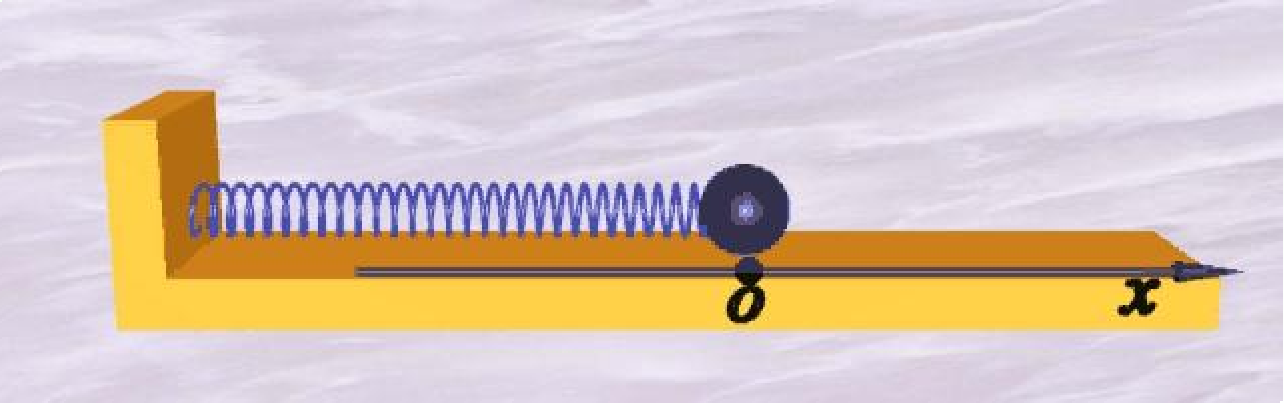
与位移x大小成正比，方向相反——线性回复力

质点在线性回复力作用下围绕平衡位置的运动就是简谐运动。

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0}$$

简谐运动的动力学方程

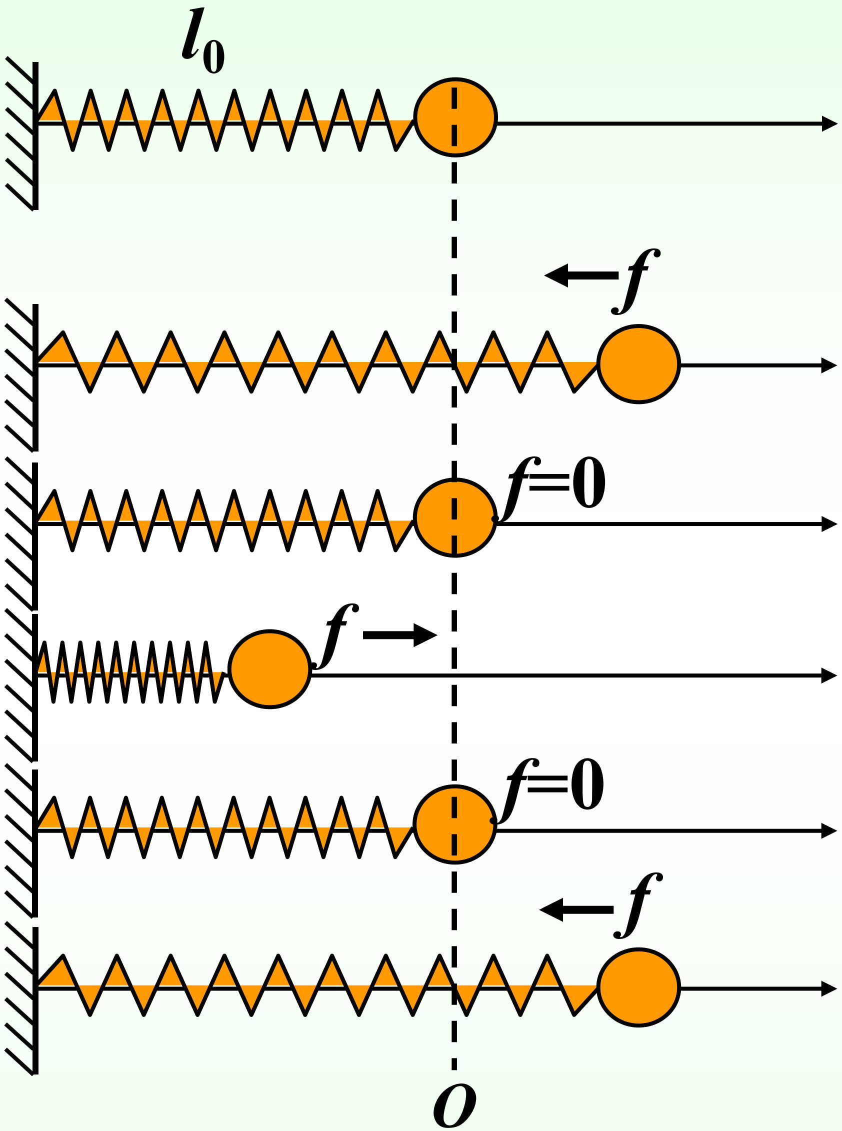
1、弹簧振子：



弹簧质量不计，小球与水平面间无摩擦。

小球仅在弹性力和惯性作用下运动

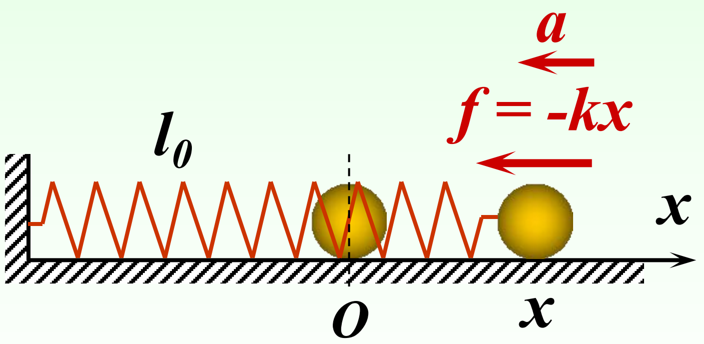
—— 无阻尼自由振动 —— 简谐振动。



O:平衡位置

物体所受的合外力是弹性力

由胡克定律和牛顿第二定律：



$$f=-kx=ma$$

令 $\omega^2=\dfrac{k}{m}$

得 $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0}$ 弹簧振子的动力学方程

此微分方程的解即为简谐振动的运动学方程：

$$\boxed{x=A\cos(\omega t+\varphi)}$$

ω即为角频率 $\boxed{\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$ ——固有角频率

弹簧振子的周期和频率：

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

——固有周期

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

——固有频率

弹簧振子的运动学方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 中：

ω决定于系统本身的m和k，

A和φ决定于初始条件。

由初始条件确定振幅A和初相位φ：

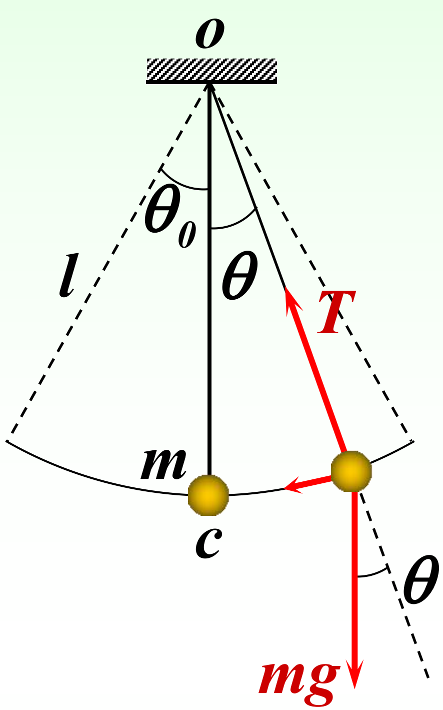
设 $t=0$ 时，$x=x_0$、$v=v_0$，

则：
$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases}$$

得：
$$\begin{cases} \boxed{A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{v_0^2}{\omega^2}}} \\ \boxed{\tan\varphi = -\dfrac{v_0}{\omega x_0}} \end{cases}$$


昵图网 nipic.com/风之雨


2、单摆（数学摆）：



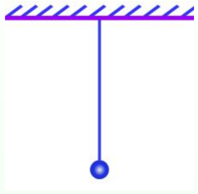
(1) 绳长 $l >>$ 小球直径，绳质量不计

(2) 忽略所有阻尼作用。

重力产生的恢复力矩：

$$M = -mgl\sin\theta$$

"–"号表示力矩与角位移方向相反。



由转动定理：$ml^2\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta$

得：$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$ 单摆的动力学方程

当单摆做小角度摆动（$\theta < 5°$）时： $\sin\theta \approx \theta$

得： $\boxed{\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0}$ $\boxed{\omega^2 = \dfrac{g}{l}}$

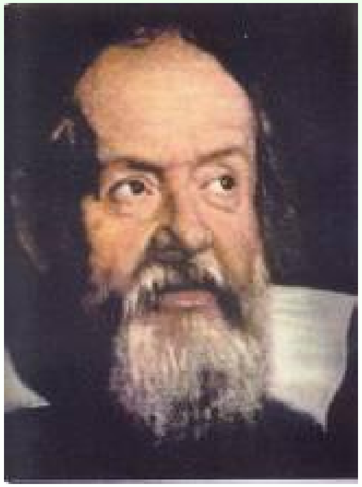
方程的解：$\boxed{\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)}$

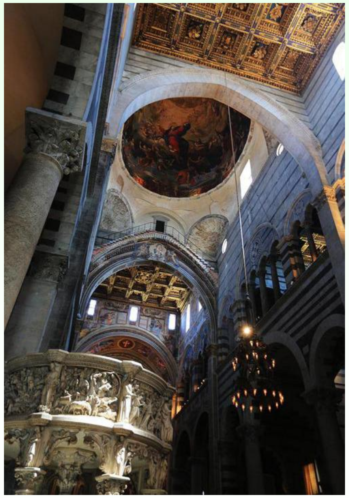
可见：当摆角很小时，单摆的运动近似为简谐运动。

振动的周期：$\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$

——单摆振动周期与摆锤质量无关，只和摆线长度及当地重力加速度有关。

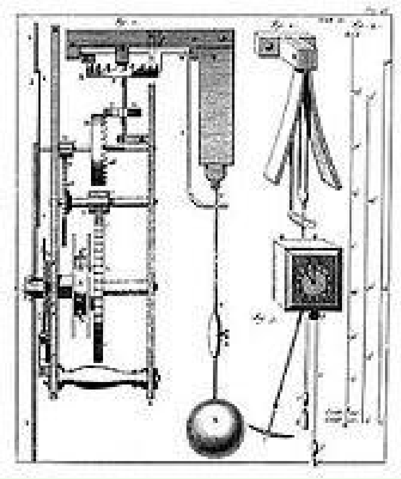
摆角 $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$





伽利略第一个发现

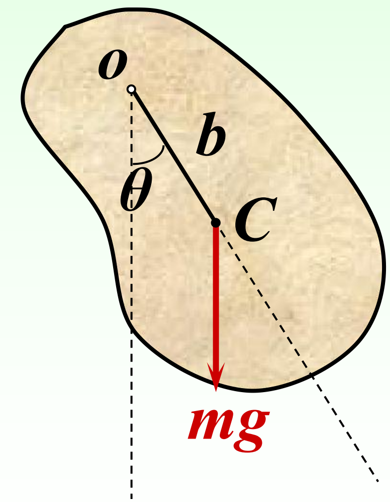
摆的振动的等时性



惠更斯制成了

第一个摆钟

3、复摆（物理摆）：



重力产生的恢复力矩：

$$M = -mgb\sin\theta$$

由转动定理，并考虑小角度摆动（$\theta<5°$）：

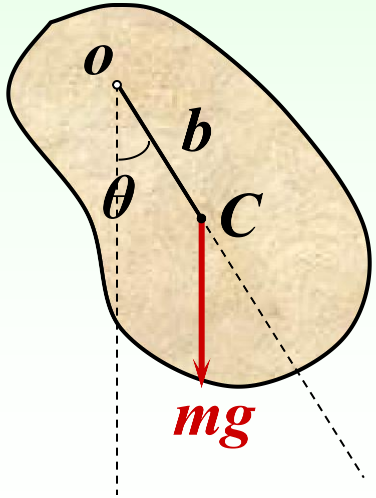
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgb\sin\theta \approx -mgb\theta$$

或：

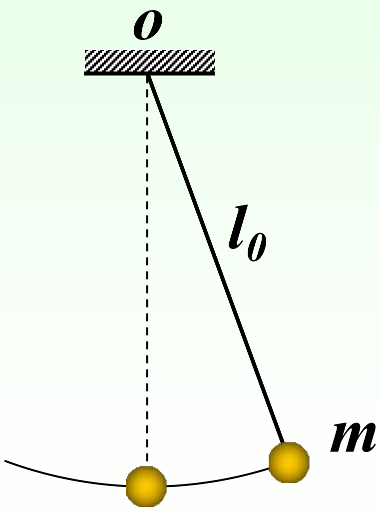
$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0}$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{mbg}{I}}$$

当摆角很小时，复摆的运动近似为简谐运动。



等效 $\Rightarrow$



复摆： $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mbg}}$

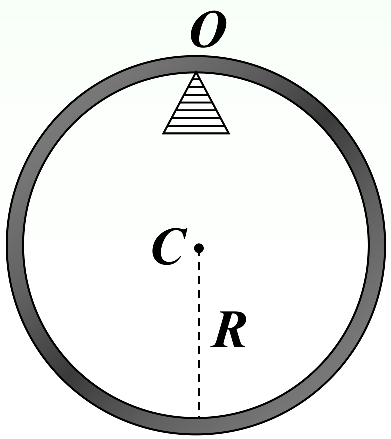
单摆： $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}$

$l_0 = \dfrac{I}{mb}$ 等值摆长

例题6-4： 半径为R的圆环悬挂在一细杆上，求圆环的振动周期和等值摆长。

圆环对垂直中心轴C的转动惯量为：

$$I_C = mR^2$$



由平行轴定理，圆环对O点的转动惯量为：

$$I = I_C + mR^2 = 2mR^2$$

所以，圆环对O点摆动时的周期为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

等值摆长为：$l_0 = \dfrac{I}{mb} = \dfrac{2mR^2}{mR} = 2R$