06. 4 同方向简谐振动的合成

一、同方向同频率简谐振动的合成

二、同方向不同频率简谐振动的合成　拍

1、同方向、同频率简谐振动的合成：

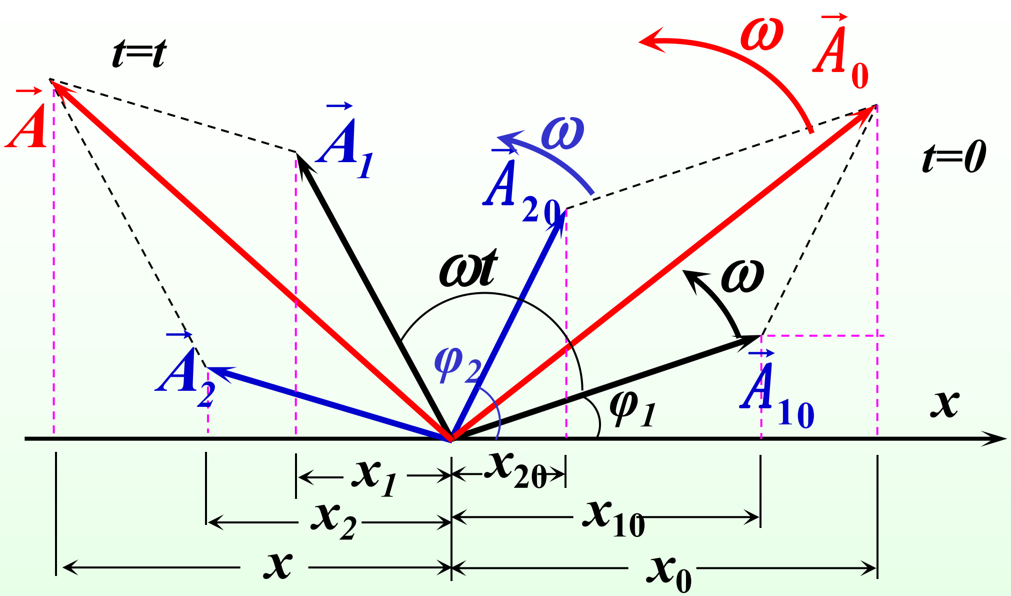
两同方向同频率分振动： $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

合位移：$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

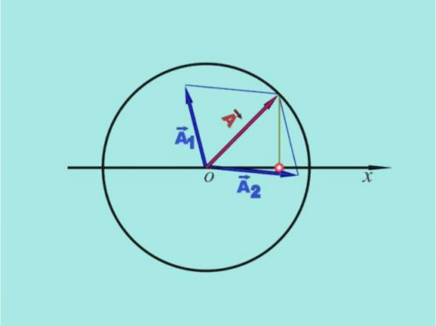
两分振动振幅矢量 $\vec{A}_1$和$\vec{A}_2$夹角 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 不变，

合矢量 $\vec{A}$ 长度不变，并以角速度ω逆时针旋转，



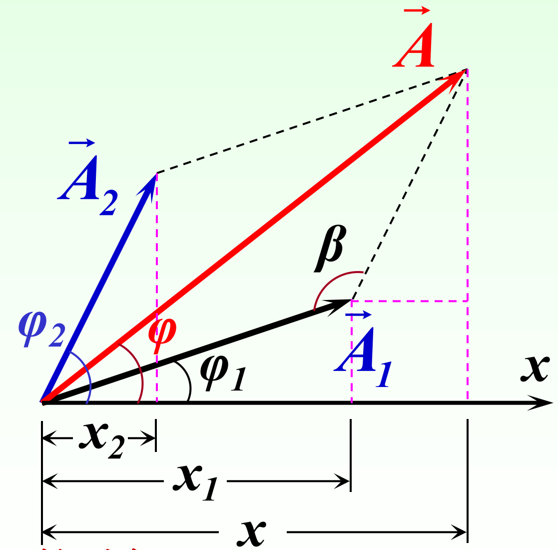
故合振动仍为简谐振动

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



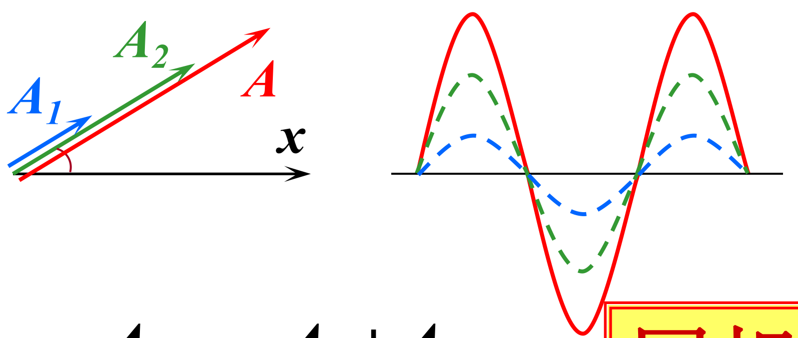
由 $t = 0$ 时的旋转矢量图可得：

$$
\begin{cases}
\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}} \\
\boxed{\tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}}
\end{cases}
$$



◆合振动振幅决定于分振动振幅和两分振动相位差。

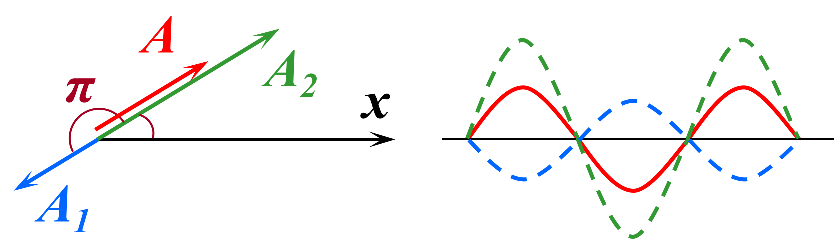
(1) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi$



$A_{max} = A_1 + A_2$

同相

(2) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2k+1)\pi$



$A_{min} = |A_1 - A_2|$

反相

(3)其余情况，$|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$

相位差起重要作用

N个同方向、同频率简谐振动合成的结果：是一个与分振动同方向同频率的简谐振动

例题1：已知两同方向、同频率谐振动为 $x_1 = 0.04\cos(2t + \frac{\pi}{6})\ m$，$x_2 = 0.03\cos(2t - \frac{5\pi}{6})\ m$，求它们合振动的方程。

解法一：设合振动方程为 $x = A\cos(2t + \varphi)$

由 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$

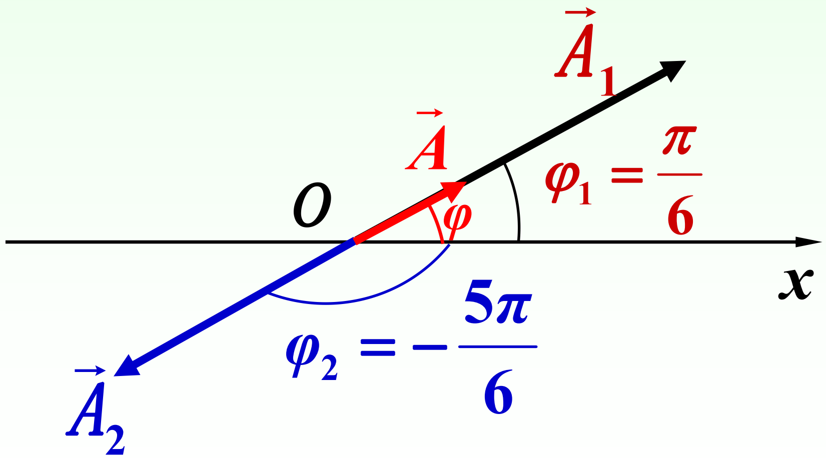
得 $A = 0.01\ m$

由 $\tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$ 得 $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

由于两振动反相且A_1大于A_2，所以 $\varphi = \pi/6$

合振动方程为 $x = 0.01\cos(2t + \pi/6)\ m$

解法二：用旋转矢量法：



两振动反相。

合矢量长度即合振幅， $A = A_1 - A_2 = 0.01\ m$

t=0时合矢量和x轴夹角即初相位， $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$

所以合振动方程为： $x = 0.01\cos(2t + \pi/6)\ m$

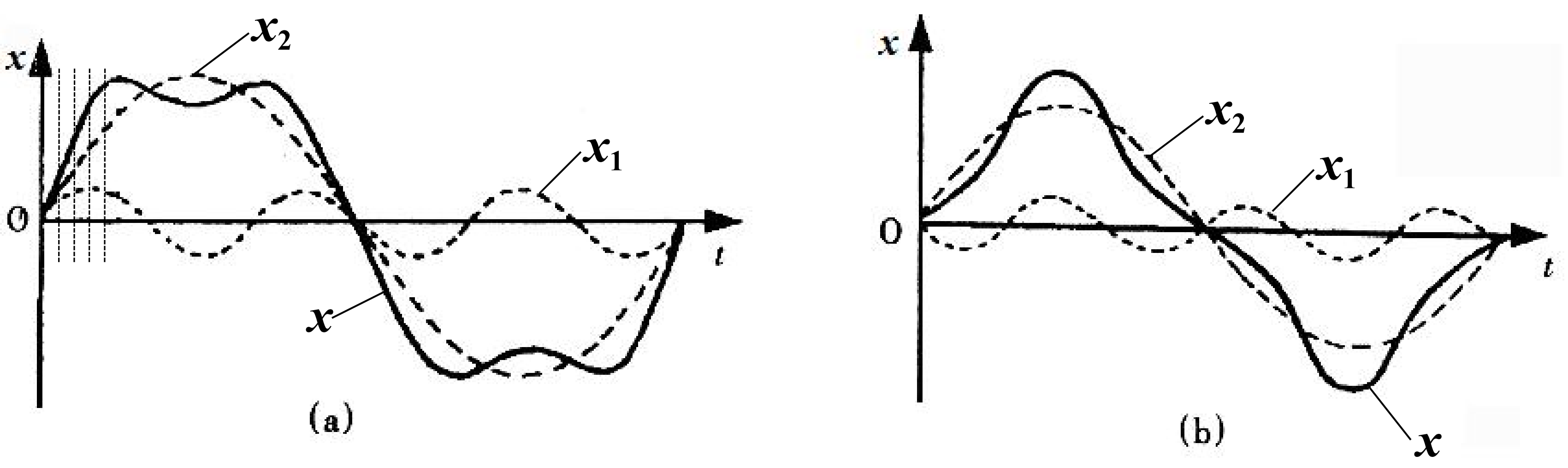
2、同方向、不同频率简谐振动的合成：

设两分振动：
$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

合振动：
$$x = x_1 + x_2$$
$$= A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

因为两分振动振幅矢量旋转的角速度不同，它们的夹角随时间变化，因此合矢量的长度不再恒定，$|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$，合振动不再是简谐振动，而是一种复杂的振动。

图解法求合振动：$x = x_1 + x_2$



合振动不再是简谐振动

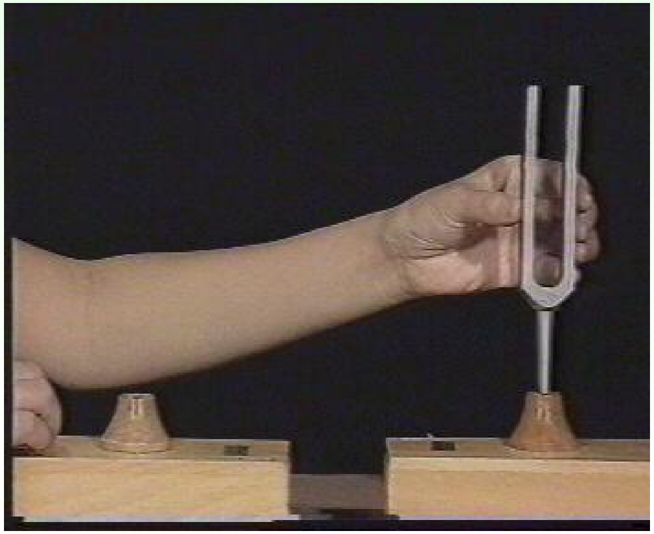
➢拍

若两分振动

$$x_1 = A\cos(\omega_1 t)$$

$$x_2 = A\cos(\omega_2 t)$$

角频率 ω_1 和 ω_2 非常接近。



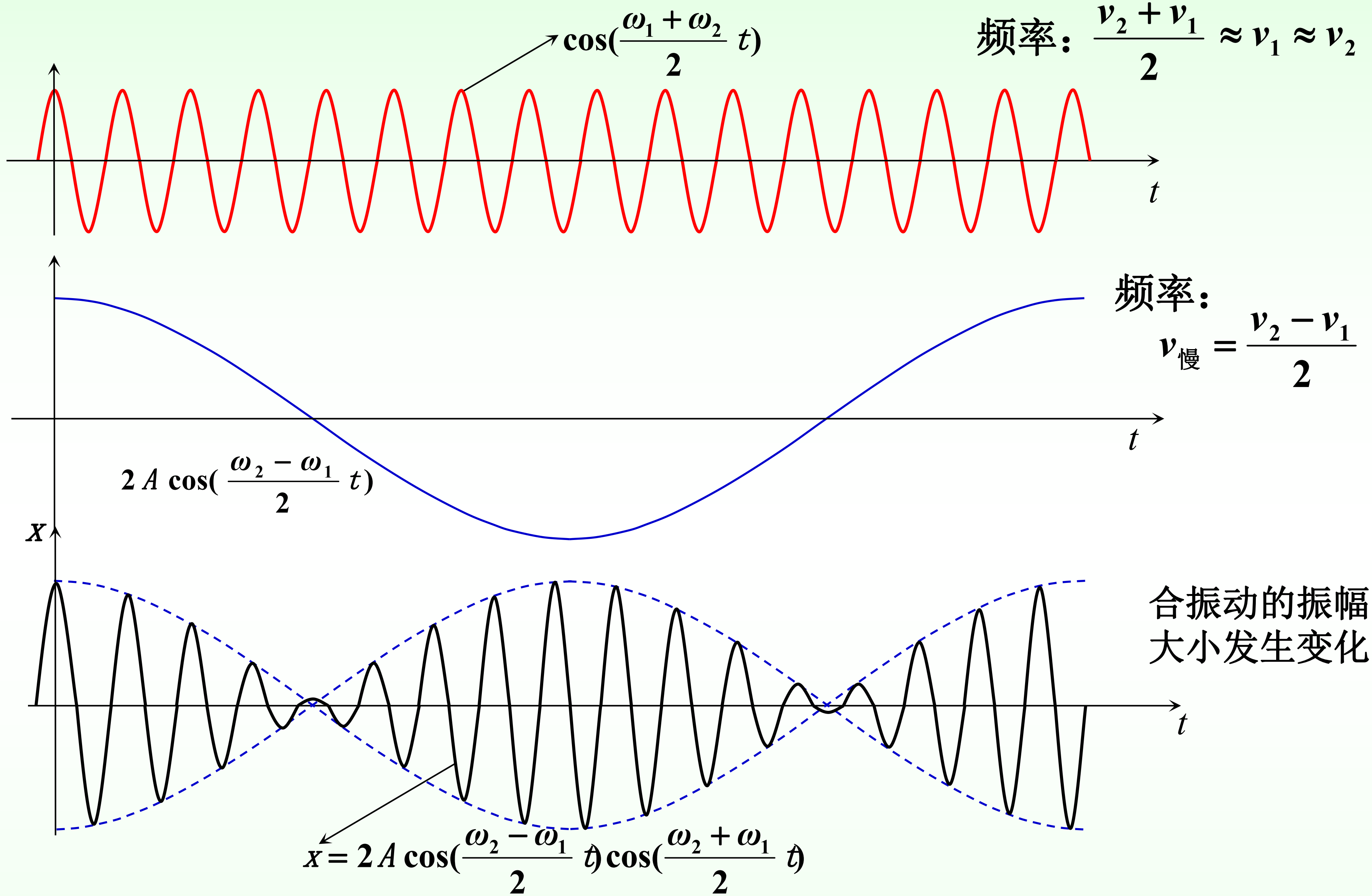
✓拍现象视频

设 $\omega_2 > \omega_1$， 则 $\omega_2 - \omega_1 << \omega_2 + \omega_1$

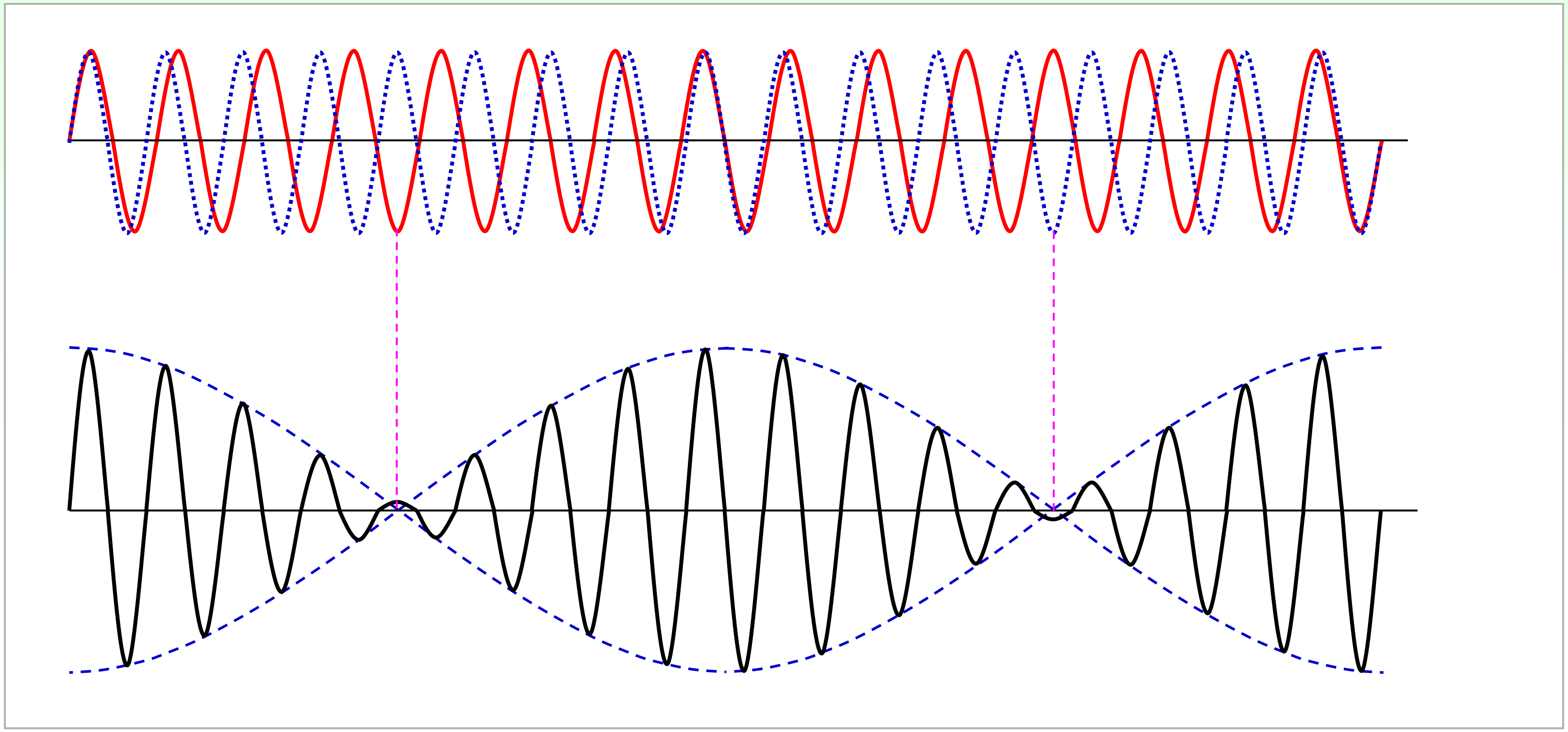
合振动： $x = x_1 + x_2 = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$

$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)$$

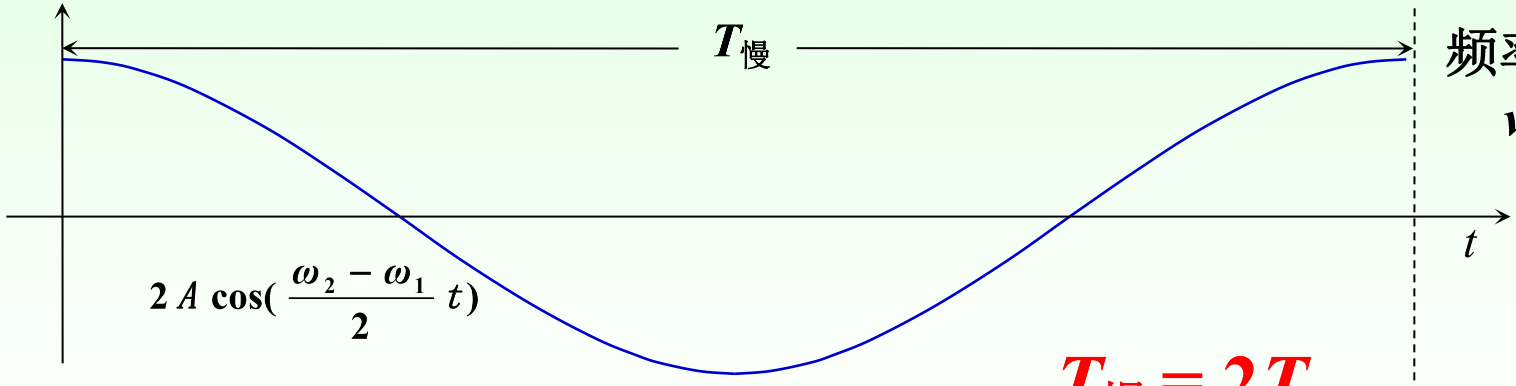
随 t 缓慢变化　　　随 t 较快变化



将$\left|2A\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\right|$作为合振动的振幅，则其在 $0\sim 2A$ 之间变化



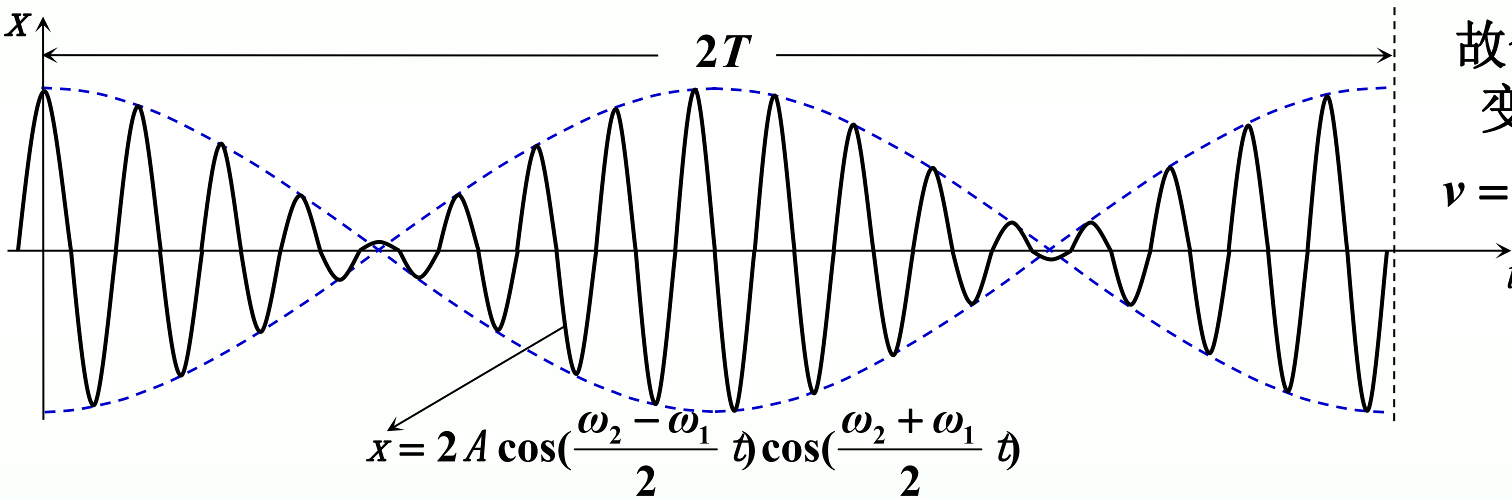
因两个分振动频率不同而使合振动振幅时而加强，时而减弱的现象称为**拍**，合振幅变化的频率称为**拍频**。



频率：

$$\nu_{慢}=\frac{\nu_2-\nu_1}{2}$$

$$T_{慢}=2T$$



故合振幅大小变化频率：

$$\nu=2\nu_{慢}=\nu_2-\nu_1$$

合振幅变化的频率即拍频：

$$\boxed{\nu=\left|\nu_2-\nu_1\right|}$$

438Hz和442Hz的声振动，合成后的声音具有440Hz的振动频率，和442-438等于4Hz的拍频。