

第3章

机械能守恒

功和能是物理学中两个重要的概念,两者有着密切的关系,但意义并不相同.功是力对空间的积累效果,力对物体做功可以改变物体的运动状态.在力学中与物体的机械运动状态相关的能量有动能和势能,其中,动能与质点的运动速度相关,而势能与质点在力场中的位置相关.本章首先讨论功的概念和计算,并由力对质点做功与质点运动速度变化的关系引入动能定理.有些力(如重力、弹性力和万有引力)对质点所做的功与质点运动的具体过程无关,而只与质点运动的始、末位置有关,这一类力称为保守力.在保守力场中可以引入势能(重力势能、弹性势能和引力势能)的概念.本章在引入势能的概念后,由质点系的动能定理引出了功能原理,并从功能原理出发,得到机械能守恒定律.机械能守恒定律是普遍的能量转化与守恒定律的一种特殊形式.碰撞过程是经常遇到的一种重要现象,本章最后讨论了动量守恒和机械能守恒在碰撞过程中的应用.

3.1 功 功率

► 3.1.1 功

考虑一质点,在力 \boldsymbol{F} 作用下沿路径 AB 运动,如图 3-1(a)所示.在质点发生位移 $d\boldsymbol{r}$ 的过程中,力 \boldsymbol{F} 对质点所做的功被定义为

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \quad (3.1-1)$$

用 ds 表示 $d\boldsymbol{r}$ 的大小, θ 表示 $d\boldsymbol{r}$ 与 \boldsymbol{F} 的夹角, (3.1-1) 式也可以表示为

$$dW = F \cos \theta ds. \quad (3.1-2)$$

因为 $F \cos \theta$ 是作用力 \boldsymbol{F} 沿路径切线方向的分量,因此,力在一个无限小位移中做的功等于力沿位移方向的分量与位移的乘积.

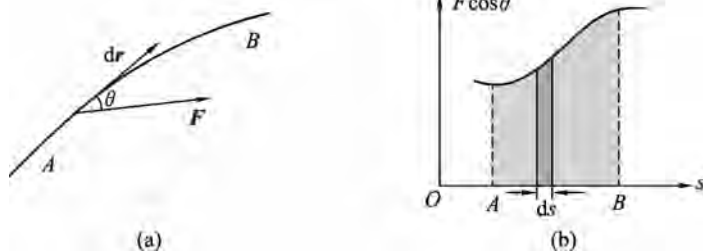


图 3-1 力沿一段曲线所做的功

对(3.1-1)式或(3.1-2)式积分,可以得到质点从位置 A 到位置 B 力 \mathbf{F} 做的功为

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.1-3)$$

或

$$W = \int_A^B F \cos \theta ds. \quad (3.1-4)$$

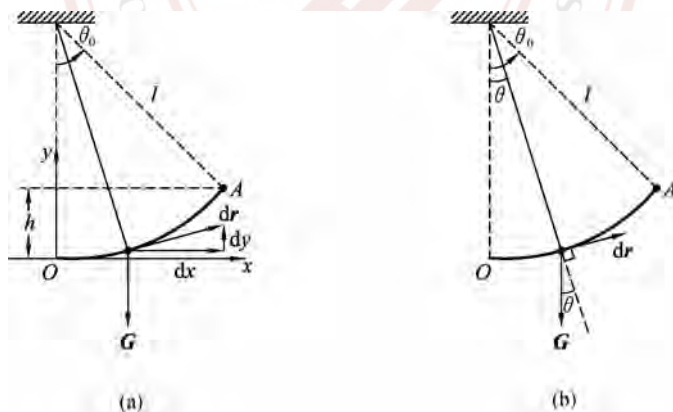
在图 3-1(b)中, \mathbf{F} 所做的功 W 就是整个阴影部分的面积.

如果 \mathbf{F} 是恒力且质点做直线运动,那么, \mathbf{F} 做的功为

$$W = F \cos \theta \int_A^B ds = F s \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}.$$

在 SI 制中,功的单位是牛·米($\text{N} \cdot \text{m}$),称为焦(J),量纲是 $\text{L}^2 \text{MT}^{-2}$.

例 3-1 一质量为 m 的小球,通过轻质细绳悬挂在天花板上(如图),小球沿圆弧从 O 点运动到 A 点,细绳与竖直方向夹角为 θ_0 . 求在此过程中重力 \mathbf{G} 所做的功.



例 3-1 图

解一 建立直角坐标系如图(a)所示,重力在 y 轴负方向,位移 $d\mathbf{r}$ 在 x, y 轴方向的投影分别为 dx 和 dy . 运用(3.1-3)式,重力做的功为

$$W = \int_0^A \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^A (-mg\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = -mg \int_0^A dy = -mgh.$$

式中 h 是 A 点相对于 O 点的高度.

*** 解二** 用角量处理,如图(b)所示,当质点位置与竖直方向夹角为 θ 时,重力 \mathbf{G} 与位移 $d\mathbf{r}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2} + \theta$,重力所做的功为

$$W = \int_0^A \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^A mg \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) ds = \int_0^A -mg \sin\theta ds.$$

式中 ds 是质点位移 $d\mathbf{r}$ 对应的圆弧. 设细绳长为 l , $ds = l d\theta$, 则

$$W = \int_0^{\theta_0} -mgl \sin\theta d\theta = mgl \cos\theta \Big|_0^{\theta_0} = mgl(\cos\theta_0 - 1) = -mgh.$$

► 3.1.2 功率

在实际问题中,除了要知道一个力做功的大小外,还要知道做功的快慢. 单位时间内所做的功称为**功率**. 如果在 Δt 时间内做功 ΔW , 则在这段时间内的平均功率为

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (3.1-5)$$

当 Δt 趋于 0 时 \bar{P} 的极限称某时刻的瞬时功率, 也称功率,

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (3.1-6)$$

由 (3.1-1) 式得

$$P = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.1-7)$$

因此, 瞬时功率也等于力与速度的标积. 通过功率可以求得在时间 $t \rightarrow t'$ 内做的功为

$$W = \int_t^{t'} P dt. \quad (3.1-8)$$

在 SI 制中, 功率的单位是焦/秒 (J/s), 称为瓦 (W).

例 3-2 方向不变的作用力 $F = 6t$ (F, t 的单位分别为 N 和 s), 作用在一质量为 2 kg 的物体上, 物体从静止开始运动. 试求此作用力的瞬时功率及前 2 s 内做的功.

解 \mathbf{F} 是一个方向恒定的力, 开始时物体静止, 所以物体做直线运动, \mathbf{F} 与物体的运动方向始终一致. 物体的加速度大小为

$$a = \frac{F}{m} = 3t \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

由匀变速直线运动的速度公式以及初始条件 $t=0$ 时, $v=0$, 物体的速度大小为

$$v = \int_0^t a dt = \int_0^t 3t dt = 1.5t^2 \text{ (m/s)}.$$

\mathbf{F} 的瞬时功率为

$$P = Fv = 6t \times 1.5t^2 = 9.0t^3 \text{ (W)}.$$

利用 $P = 9.0t^3$ 和 (3.1-8) 式, 可以直接求得 F 在开始 2 s 内做的功为

$$W = \int_0^2 P dt = \int_0^2 9.0t^3 dt = 36.0 \text{ (J)}.$$

或由 (3.1-4) 式可求得 \mathbf{F} 在 $t=0$ 到 $t=2$ s 时间内做的功为

$$\begin{aligned} W &= \int \mathbf{F} d\mathbf{x} = \int_0^2 Fv dt \\ &= \int_0^2 (6t \times 1.5t^2) dt \\ &= \int_0^2 9t^3 dt = 36.0 \text{ (J)}. \end{aligned}$$

3.2 动能 动能定理

3.2.1 动能、质点动能定理

考察一个物体,在合外力 F 作用下做匀加速直线运动(图 3-2). 设物体质量为 m , 加速度为 a , 如果物体经过位移 s 后速度由 v_0 变为 v , 则

$$v^2 = v_0^2 + 2as,$$

或者

$$as = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2.$$

在这期间, F 做的功为

$$W = Fs = mas = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

物理量 $\frac{1}{2}mv^2$ 被定义为物体的动能, 用 E_k 表示,

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2. \quad (3.2-1)$$

F 对物体做的功 W 可以用动能的增量来表示,

$$W = E_k - E_{k0}. \quad (3.2-2)$$

其中 E_k 是物体的末动能, E_{k0} 是物体的初动能. 上式说明, 作用在物体上的合外力做的功等于物体动能的增量. 这一结论称为质点的动能定理.

以上讨论的是 F 为恒力、物体做直线运动的特殊情况. 对于一般情况, 如图 3-3 所示, 设质点在变力 F 的作用下沿曲线 AB 运动, 对元位移 $d\mathbf{r}$, 根据定义(3.1-1)式或(3.1-2)式, 作用力 F 做的元功为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos \theta ds.$$

式中 $F \cos \theta$ 是力 F 在曲线上的切向分量. 根据牛顿第二定律, 有

$$F \cos \theta = ma_t = m \frac{dv}{dt},$$

ds 是 $d\mathbf{r}$ 在曲线上的路程元, $ds = vdt$, 所以, F 所做的功可表示为

$$dW = m \frac{dv}{dt} v dt = mv dv.$$

对上式积分, 可以得到质点沿曲线移动一段路程中力 F 所做的功为

$$W = \int_A^B dW = \int_{v_0}^v mv dv = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

其中 v_0, v 是物体在初、末两状态的速率. 积分中, 没有对作用力 F 和物体的运动路径作任何特别的规定, 因此, 动能定理是普遍适用的.

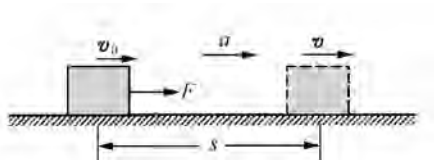


图 3-2 恒力做的功

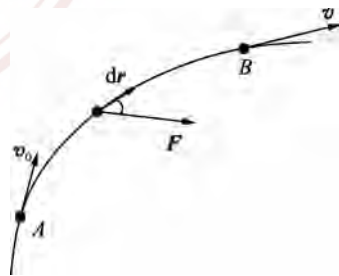


图 3-3 变力做的功

动能定理把质点动能的变化与力 \mathbf{F} 做的功联系起来. 上一章中的动量定理, 则把质点动量的变化与力 \mathbf{F} 的冲量联系起来. 冲量是力 \mathbf{F} 的时间积分, 体现力在时间过程的累积作用. 而功则是 \mathbf{F} 的空间积分, 体现力在空间过程的累积作用. 所以, 动能定理是牛顿第二定律的另一积分形式.

动能与功有相同的单位和量纲. 在 SI 制中, 动能的单位是牛·米 ($\text{N} \cdot \text{m}$), 称为焦 (J), 量纲是 $\text{L}^2 \text{MT}^{-2}$.

3.2.2 质点系动能定理

质点的动能定理可以推广到由若干个质点组成的质点系. 设某质点系由 n 个质点组成, 图 3-4 仅画出了该质点系内 3 个质点的受力情况. 质点系内的质点所受的力可以分为质点系内各质点间相互作用的内力 (如 \mathbf{F}_{ij}) 和质点系外物体对质点系内各质点作用的外力 (如 $\mathbf{F}_{i\text{外}}$), 质点系内第 i 个质点所受的合力为其所受的外力和内力之和,

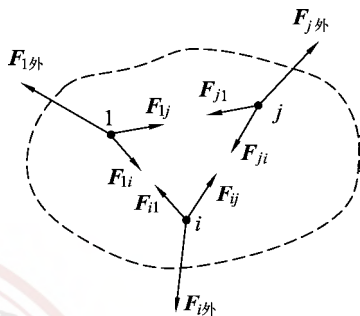


图 3-4 质点系动能定理

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i\text{外}} + \mathbf{F}_{i\text{内}} = \mathbf{F}_{i\text{外}} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \mathbf{F}_{ij}.$$

将质点的动能定理应用于质点 i , 有

$$W_i = \int_{A_i}^{B_i} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r} = \int_{A_i}^{B_i} \mathbf{F}_{i\text{外}} \cdot d\mathbf{r} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \int_{A_i}^{B_i} \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r} = \Delta E_{ki}, \quad (3.2-3)$$

所以, 外力和内力对整个质点系所做的功为

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \int_{A_i}^{B_i} \mathbf{F}_{i\text{外}} \cdot d\mathbf{r} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \int_{A_i}^{B_i} \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta E_{ki} = \Delta E_k. \end{aligned} \quad (3.2-4)$$

上式中, 令 $W_{\text{外力}} = \sum_{i=1}^n \int_{A_i}^{B_i} \mathbf{F}_{i\text{外}} \cdot d\mathbf{r}$ 为外力对质点系所做的总功, $W_{\text{内力}} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \int_{A_i}^{B_i} \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r} \right)$

为质点系的内力对质点系所做的总功, 而 $\Delta E_k = E_k - E_{k0}$ 为质点系总动能的增量. 则 (3.2-4) 式可以表示为

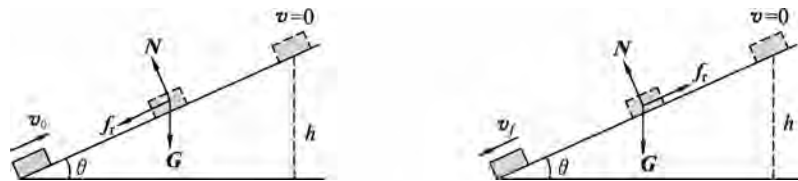
$$W_{\text{外力}} + W_{\text{内力}} = E_k - E_{k0}. \quad (3.2-5)$$

上式表明, 所有外力和内力对质点系所做的总功等于质点系总动能的增量, 这就是质点系的动能定理.

需要注意的是, 根据牛顿第三定律, 质点系内任意一对质点 (如质点 i 和质点 j) 间的作用力 \mathbf{F}_{ij} 和反作用力 \mathbf{F}_{ji} 总是成对出现并且大小相等、方向相反, 即质点系所有内力的矢量和等于零. 但是, 质点 i 和质点 j 的位移可以不同, 所以质点系内力做的功之和可以不为零, 因而内力的功可以改变质点系的总动能. 在第 2 章讨论质点系的动量定理时我们知道, 质点系的内力不能改变质点系的总动量, 这是需要特别加以区别的.

例 3-3 如图所示, 一物体由斜面底部以初速度 $v_0 = 10 \text{ m/s}$ 向斜面上方冲去, 到达最高处后又沿着斜面下滑. 由于物体与斜面之间的摩擦, 滑到底部时速度变为 $v_f = 8 \text{ m/s}$. 已知

斜面倾角为 $\theta=30^\circ$, 求物体冲上斜面最高处的高度及摩擦因数 μ .



例 3-3 图

解 物体在斜面上受重力 $G=mg$ 、斜面弹力 N 以及物体与斜面间的摩擦力 f_r 作用, 重力 mg 沿斜面法向的分量与 N 平衡,

$$N=mg\cos\theta.$$

摩擦力 f_r 的大小为

$$f_r=\mu N=\mu mg\cos\theta.$$

当物体上冲时, f_r 沿斜面向下; 物体下滑时, f_r 沿斜面向上. 设物体沿斜面上冲的最大距离为 l , 取沿斜面向上为正方向, 则上冲过程中, 物体所受合力做的功为

$$W_1=(-mg\sin\theta-\mu mg\cos\theta)l.$$

物体冲到最高处速度为零, 根据动能定理有,

$$W_1=0-\frac{1}{2}mv_0^2,$$

即

$$(mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta)l=\frac{1}{2}mv_0^2. \quad (1)$$

物体在下滑过程中合力做功为

$$W_2=(-mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta)(-l).$$

根据动能定理

$$W_2=\frac{1}{2}mv_f^2-0,$$

即

$$mgl\sin\theta-\mu mgl\cos\theta=\frac{1}{2}mv_f^2. \quad (2)$$

在①、②两式中消去 μ 得

$$l=\frac{v_0^2+v_f^2}{4g\sin\theta}=\frac{10^2+8^2}{4\times 9.8\times \sin 30^\circ}\text{ m}=8.4\text{ m}.$$

最高处高度为

$$h=l\sin\theta=8.4\times \sin 30^\circ\text{ m}=4.2\text{ m}.$$

由①式得

$$\mu=\frac{v_0^2}{2lg\cos\theta}-\tan\theta=\frac{10^2}{2\times 8.4\times 9.8\times \cos 30^\circ}-\tan 30^\circ=0.12.$$

3.3 势能 保守力

► 3.3.1 重力势能

设有一质量为 m 的质点, 在重力 G 的作用下, 沿任意形状的路径从位置 A 运动到 B (图 3-5). 在此过程中, 重力做的功为

$$W = \int_A^B \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}.$$

因为重力 \mathbf{G} 是恒力, 所以

$$W = \mathbf{G} \cdot \int_{r_0}^r d\mathbf{r} = \mathbf{G} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

其中 \mathbf{r}_0, \mathbf{r} 是质点在 A, B 处的位置矢量. 在直角坐标系中,

$$\mathbf{G} = -mg\mathbf{j},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) - (x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}) \\ &= (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

因此, 重力所做的功为

$$W = (-mg\mathbf{j}) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j}] = mgy_0 - mgy.$$

习惯上把物体的高度记作 h , 上式也常表示为

$$W = mgh_0 - mgh. \quad (3.3-1)$$

式中 h_0, h 分别是质点始末状态的高度. 这里, 质点运动的路径是任意的, 所以, 重力做的功与路径无关, 只与路径始末的位置有关. 物理量 mgh 定义为**重力势能**, 记作 E_p , 即

$$E_p = mgh. \quad (3.3-2)$$

其中, 高度 h 是一个相对量, 与参照平面 ($h=0$) 的选取有关. 也就是说, 参照平面选取不同, 重力势能的数值也不同. 不过, 两个状态之间重力势能的差值是个绝对量, 与参照平面的选取无关.

用势能表示(3.3-1)式,

$$W = E_{p0} - E_p = -(E_p - E_{p0}), \quad (3.3-3)$$

即重力对物体做的功, 等于重力势能增量的负值.

► 3.3.2 弹性势能

弹力是物体因形变而产生的一种恢复力, 其大小与形变程度有关, 方向为形变恢复的方向. 以弹簧为例, 取弹簧自然伸长时的自由端为坐标原点, 在弹性限度内, 弹力可以表示成

$$f = -kx. \quad (3.3-4)$$

其中 k 为**弹性系数**, 也称**劲度系数**, 其值由弹簧的性质决定. x 是弹簧的形变量, 伸长为正, 缩短为负. 设有一质点受弹簧的弹力作用, 如图 3-6 所示. 在质点从 x_0 处运动到 x 的过程中, 弹力做的功为

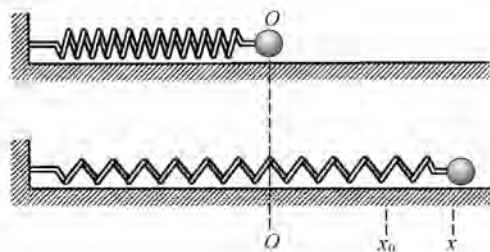


图 3-6 弹力做功

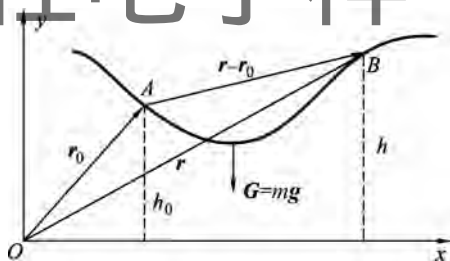


图 3-5 重力做功

$$W = \int_{x_0}^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_0^2 - \frac{1}{2} kx^2. \quad (3.3-5)$$

同重力做功一样,弹力做功,也只与质点的始末位置有关. $\frac{1}{2}kx^2$ 这个量定义为**弹性势能**,记作 E_p ,

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2. \quad (3.3-6)$$

用弹性势能可以把(3.3-5)式表示成

$$W = E_{p0} - E_p = -(E_p - E_{p0}), \quad (3.3-7)$$

即弹力做的功等于弹性势能增量的负值.

► 3.3.3 引力势能

质量为 m 的质点 P 在质量为 M 的质点 Q 的引力场中运动. 设 $M \gg m$, 在这种情况下, 可以认为 Q 是静止的, 取 Q 所在处为坐标原点 O , P 的位置可用矢径 r 表示(图 3-7). P 受 Q 的万有引力为

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}^0. \quad (3.3-8)$$

其中 \mathbf{r}^0 是 r 的单位矢量. 当 P 沿任一曲线从 A 点运动到 B 点时, 根据(3.1-3)式引力 \mathbf{F} 做的功为

$$W = \int_A^B -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{r}.$$

因为 $\mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{r} = dr$, 所以

$$W = \int_{r_A}^{r_B} -G \frac{Mm}{r^2} dr = -G \frac{Mm}{r_A} - \left(-G \frac{Mm}{r_B} \right). \quad (3.3-9)$$

上式表明, 万有引力做的功, 只与运动物体的始末位置有关, 与所经历的路径无关. 与之相应, 可以引入**引力势能**的概念. 取 $r = \infty$ 处为零势能点, 则当 Q, P 相距 r 时的引力势能为

$$E_p = -G \frac{Mm}{r}. \quad (3.3-10)$$

这样, (3.3-9)式就可以表示为

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}), \quad (3.3-11)$$

即万有引力做功等于引力势能增量的负值.

对于在地球重力场中的物体, 相应的引力势能也可以用(3.3-10)式表示. 其中 M 为地球质量 M_E , m 为物体质量. 设地球半径为 R , 则物体在地球表面的引力势能为

$$E_{p,R} = -\frac{GM_E m}{R}.$$

物体在地球表面上方 h 高度的引力势能为

$$E_{p,R+h} = -\frac{GM_E m}{R+h}.$$

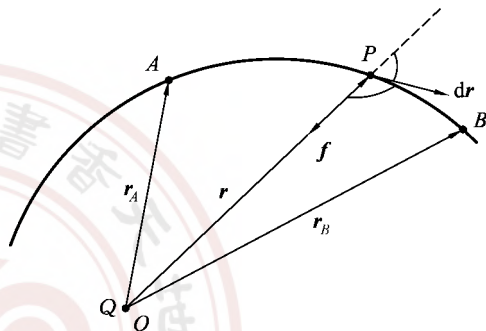


图 3-7 万有引力做功

以上两式之差为物体相对于地球表面的重力势能,

$$E_{p,h} = -\frac{GM_E m}{R+h} - \left(-\frac{GM_E m}{R}\right) = \frac{GM_E m h}{R(R+h)}.$$

$$\text{当 } R \gg h \text{ 时,} \quad E_{p,h} \approx \frac{GM_E m h}{R^2} = mgh. \quad (3.3-12)$$

其中 $g = \frac{GM_E}{R^2}$ 就是地球表面的重力加速度. 所以式(3.3-10)是反映重力势能的完整表达式, 而式(3.3-12)只对近地物体才适用.

► 3.3.4 保守力

重力做的功、弹簧弹力做的功和万有引力做的功, 都只与始末两点的位置有关, 与质点运动的路径无关. 具有这种性质的力, 称为**保守力**. 如果质点运动的路径是一闭合回路, 那么, 始末位置相同, 保守力做的功为零, 即

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (3.3-13)$$

因此, 保守力也可以定义为沿任意闭合回路做功为零的力, 否则就是非保守力.

重力、弹力和万有引力是保守力, 摩擦力不是保守力, 因为摩擦力沿闭合回路做功不为零, 且路径越长, 做功的绝对值越大.

由于保守力做的功都与路径无关, 只与始末位置有关, 可以对保守力统一地引进势能的概念. 用 E_p 表示势能, 那么, 保守力做的功为

$$W = E_{p0} - E_p = -(E_p - E_{p0}), \quad (3.3-14)$$

即保守力做的功, 等于势能增量的负值.

不同的保守力, 势能的表达式不同, 但它们都是位置的单值函数, 不同位置之间的势能差具有确定的值, 而某一位置的势能, 只有相对值. 零势能位置的选取, 具有相当的任意性, 可以根据不同的情况选取不同的零势能位置, 从而简化势能的表达形式. 例如, 通常取地球表面的重力势能为零, 那么, 高于地面 h 处的重力势能为 mgh ; 如果取弹簧无形变时的弹性势能为零, 那么当弹簧伸长或缩短 x 时的弹性势能就是 $\frac{1}{2}kx^2$.

保守力是物体之间的相互作用, 所以势能属于相互作用的物体组成的系统. 不能把势能看作属于某个孤立的物体. 重力势能属于物体和地球组成的系统, 弹性势能属于弹簧和受弹力作用的物体. 平时我们称某物体的重力势能, 实际意思是指该物体和地球组成的系统所具有的重力势能.

3.4 机械能守恒定律

► 3.4.1 质点系功能原理

对于若干个物体组成的系统来说, 总功 W 是所有外力的功和所有内力的功的总和. 而系统内力又可以分为保守内力和非保守内力两种, 因此

$$W = W_{\text{外力}} + W_{\text{保守内力}} + W_{\text{非保守内力}}.$$

这样,系统的动能定理就改写成下列形式

$$W_{\text{外力}} + W_{\text{保守内力}} + W_{\text{非保守内力}} = E_k - E_{k0}. \quad (3.4-1)$$

考虑到保守内力(如万有引力、重力、弹性力)做功等于系统势能(引力势能、重力势能、弹性势能)增量的负值,即有

$$W_{\text{保守内力}} = -(E_p - E_{p0}). \quad (3.4-2)$$

至于非保守内力做的功,可以是正功,也可以是负功.前者相当于系统内的爆炸冲力做功,后者相当于系统内的滑动摩擦力做功.将(3.4-2)式代入(3.4-1)式,得

$$W_{\text{外力}} + W_{\text{非保守内力}} - (E_p - E_{p0}) = E_k - E_{k0},$$

或

$$W_{\text{外力}} + W_{\text{非保守内力}} = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0}). \quad (3.4-3)$$

动能和势能统称为机械能.(3.4-3)式表明外力的功和非保守内力的功的总和等于系统机械能的增量,这就是系统的功能原理.

► 3.4.2 机械能守恒定律

显然,如果外力和非保守内力都不做功,或所做的总功为零,或者根本没有外力和非保守内力的作用,在此情形下,由(3.4-3)式可得到

$$E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0}, \quad (3.4-4)$$

亦即系统的机械能保持不变.这就是**机械能守恒定律**.我们把它完整叙述如下:对于由若干个物体所组成的系统,如果系统内有保守力做功,而其他非保守内力和所有外力所做的总功为零,那么,系统内各物体的动能与各种势能之间虽然可以互相转换,但是它们的总和保持不变.

有时我们把所有非保守内力都不做功的系统,叫作**保守系**.以上内容表明,一个保守系的总机械能的增量等于外力对它所做的功;如果这部分外力做功为零,则该系统的机械能保持不变.

机械能守恒定律是自然界最普遍规律之一的能量守恒定律的特殊情形.

*** 例 3-4** 质量为 M 的很短的试管用长 L 、质量可以忽略的硬直杆如图悬挂.试管内盛有乙醚液滴,管口用质量为 m 的软木塞封闭,当加热试管时软木塞在乙醚蒸气的压力下飞出.要使试管绕悬点 O 在竖直平面内做完整的圆运动,软木塞飞出的最小速度为多少?若将硬直杆换成细绳,结果又如何?

解 设软木塞飞出的速度为 v_1 ,试管反冲的速度为 v_2 ,取试管反冲方向为正方向.根据动量守恒,有

$$Mv_2 - mv_1 = 0, \text{ 解得 } v_1 = \frac{M}{m}v_2.$$

试管由硬直杆悬挂时,试管做完整圆运动到达最高点时的速度最小为零.取试管竖直悬挂时为零势能点,由机械能守恒,有

$$\frac{1}{2}Mv_2^2 = Mg \cdot 2L, \text{ 得 } v_2 = 2\sqrt{gL}.$$

因此,木塞飞出速度为 $v_1 = \frac{M}{m}v_2 = \frac{2M}{m}\sqrt{gL}$.



例 3-4 图

若用轻绳悬挂,试管也能在竖直面内做一完整的圆运动,则试管在最高点的最小速度 v 应满足

$$Mg = \frac{Mv^2}{L}, \text{ 即 } v = \sqrt{gL}.$$

取试管在最低点位置的重力势能为零. 由机械能守恒,

$$\frac{1}{2}Mv_2^2 = Mg \cdot 2L + \frac{1}{2}Mv^2 = Mg \cdot 2L + \frac{1}{2}M \cdot gL = \frac{5}{2}MgL.$$

解得

$$v_2 = \sqrt{5gL}.$$

木塞飞出速度为

$$v_1 = \frac{M}{m}v_2 = \frac{M}{m}\sqrt{5gL}.$$

3.5 碰 撞

当两个或两个以上的物体相互接近时,由于物体之间的相互作用,它们的运动状态将发生变化,从而引起动能和动量的交换. 如果作用的时间极短,这种现象就称为**碰撞**. 物体相互撞击、锤打等都是碰撞. 分子、原子核等微观粒子的相互作用,尽管没有直接接触,也是碰撞过程. 由于碰撞中相互作用时间极短,外力的影响可以忽略,所以碰撞系统的总动量守恒,即

$$\sum_i \mathbf{p}_i = \text{常矢量}. \quad (3.5-1)$$

一般物体在碰撞过程中,有部分动能要转变为热能、形变能等其他形式的能. 如果碰撞中物体的动能完全没有损失,这种碰撞称为**弹性碰撞**,否则就称为**非弹性碰撞**. 如果碰撞后两个物体以相同速度运动,即合为一体,这种碰撞称为**完全非弹性碰撞**.

如果碰撞发生在两个物体之间,称两体碰撞. 以下以两个小球为例讨论两体碰撞的情况. 在两体碰撞中,(3.5-1)式为

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2',$$

或

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2'. \quad (3.5-2)$$

如果两球碰撞前后速度都在两球心的连线上,这种碰撞称**对心碰撞**或**正碰**. 在对心碰撞中,(3.5-2)式可以用标量形式表示

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \quad (3.5-3)$$

以下讨论对心碰撞中的几种情况.

(1) 弹性碰撞.

弹性碰撞中,碰撞前后两球的动能之和不变,即

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2. \quad (3.5-4)$$

由(3.5-3)式和(3.5-4)式可解得两球碰撞后的速度

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.5-5a)$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.5-5b)$$

由此可得
$$v_2' - v_1' = -(v_2 - v_1), \quad (3.5-6)$$

即对心弹性碰撞中,两球碰撞后相互分离的速度等于碰撞前相互趋近的速度.

如果两球质量相等,则

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1,$$

即质量相等的两球在对心弹性碰撞中,彼此交换速度.

(2) 完全非弹性碰撞.

两球发生完全非弹性碰撞后,两球成为一体,速度相同,即 $v_1' = v_2' = v$, 由(3.5-3)式得

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.5-7)$$

两球在碰撞前的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2,$$

碰撞后的动能为

$$E_k' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{(m_1v_1 + m_2v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

碰撞过程中动能的损失为

$$E_k - E_k' = \frac{m_1m_2(v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (3.5-8)$$

在完全非弹性碰撞中,损失的动能变为产生永久形变中耗散的能量.

(3) 非弹性碰撞.

一般的碰撞,既不是弹性的,也不是完全非弹性的,碰撞后形变部分恢复,两物体具有不同的速度,但系统动能不再守恒. 牛顿总结了各种碰撞实验的结果,引进了恢复系数 e 的概念. 在对心碰撞中 e 被定义为

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}. \quad (3.5-9)$$

可以看出,在弹性碰撞中, $e = 1$; 在完全非弹性碰撞中, $e = 0$; 一般的非弹性碰撞, $0 < e < 1$.

e 的值可由实验测定. 由(3.5-3)式与(3.5-9)式,可解得非弹性碰撞后两球的速度为

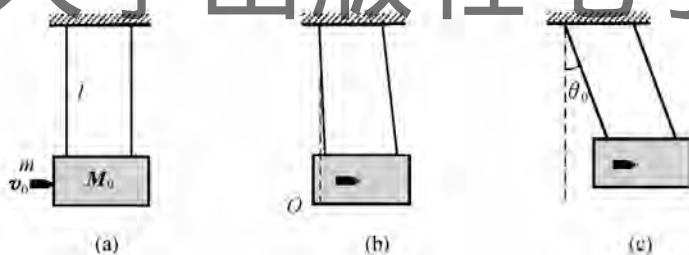
$$v_1' = v_1 - \frac{(1+e)m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}, \quad (3.5-10a)$$

$$v_2' = v_2 + \frac{(1+e)m_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \quad (3.5-10b)$$

从而可求得非弹性碰撞过程中损失的动能为

$$E_k - E_k' = \frac{1}{2}(1 - e^2) \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \quad (3.5-11)$$

例 3-5 冲击摆是一种用来测量子弹速度的装置(如图). 摆长为 l , 下端挂一静止的木块, 木块质量为 M . 质量为 m 的子弹射入木块后, 留在木块内, 与木块一起摆过角度 θ_0 . 求子弹击中木块时的速率 v_0 .



例 3-5 图

解 子弹射入木块的过程, 可以看成是一个完全非弹性碰撞. 设子弹射入木块后两者的速度是 v , 则

$$v = \frac{mv_0}{M+m}.$$

子弹射入木块后随木块一起摆动, 这个过程中, 绳子拉力与速度垂直, 并不做功, 而重力是保守力, 所以, 机械能守恒. 取木块在竖直悬垂时的重力势能为零, 摆动 θ_0 角度后的相对高度为 h , 则

$$(M+m)gh = \frac{1}{2}(M+m)v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 v_0^2}{M+m},$$

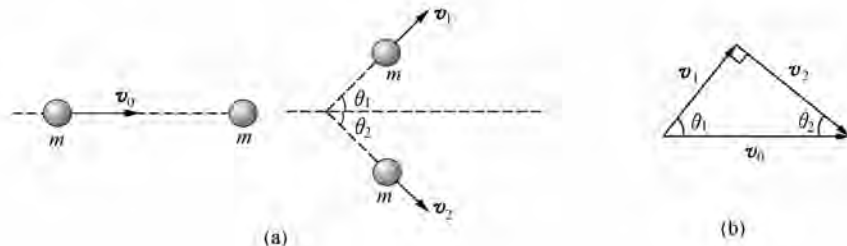
由此得

$$v_0 = \frac{M+m}{m} \sqrt{2gh}.$$

由于 $h = l(1 - \cos\theta_0)$, 所以

$$v_0 = \frac{M+m}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)}.$$

例 3-6 试证: 两个质量相等的粒子发生弹性的非对心碰撞, 如果其中有一个粒子原来处于静止, 则碰撞后, 它们总沿着相互垂直的方向散射(图示).



例 3-6 图

证明 这是一个二维的非对心碰撞问题. 设粒子质量为 m , 碰撞前后动量守恒, 写成矢量式为

$$mv_0 = mv_1 + mv_2. \quad (1)$$

其中 v_0 是入射粒子的速度, v_1 和 v_2 是两粒子碰撞后的速度, 由①式可得

$$v_0 = v_1 + v_2. \quad (2)$$

对②式平方, 有

$$v_0^2 = v_1^2 + 2v_1 \cdot v_2 + v_2^2. \quad (3)$$

按题意它是一个弹性碰撞, 有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2,$$

比较③、④两式,可得 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, 即 $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$. 应当指出, 我们只能证明碰撞后两粒子沿着相互垂直的方向散射, 而不能解出 v_1 和 v_2 的具体数值. (为什么?)

1923 年美国物理学家发现的康普顿散射(详见下册), 就是光子与静止的自由电子的非对心碰撞问题. 康普顿散射的理论和实验完全相符, 证明了光子和微观粒子的相互作用过程也是严格地遵守动量守恒定律和能量守恒定律的.

内容提要

1. 功: 力的空间积累效应. 物体间通过做功传递机械能,

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos \theta ds,$$

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

2. 动能定理: 质点所受合外力做功之和等于质点动能的增量, $W = E_k - E_{k0}$.

动能定理: 质点系一切外力与内力做功之和等于系统动能的增量, $W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = E_k - E_{k0}$.

3. 保守力: 做功与路径形状无关的力或沿闭合路径做功为零的力.

4. 势能: 对保守力可以引进势能的概念.

(1) 重力势能: $E_p = mgh$, h 为物体的相对高度.

(2) 弹性势能: $E_p = \frac{1}{2} kx^2$, 以弹簧的自然伸长为零势能点.

(3) 引力势能: $E_p = \frac{-GMm}{r}$, 相距无穷远处为零势能点.

5. 机械能: 物体的宏观动能与势能之和, $E = E_k + E_p$.

功能原理: 系统机械能的增量等于系统所受外力做功与系统内非保守内力做功之和, $W_{\text{外力}} + W_{\text{非保守内力}} = E - E_0$.

6. 机械能守恒定律: 如果作用于质点系的外力做功和非保守内力做功的总和为零, 则质点系机械能守恒.

7. 两体碰撞: 碰撞中系统总动量守恒.

$$\text{恢复系数 } e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}.$$

$e=1$ 时, 为弹性碰撞(机械能守恒); $e=0$ 时, 为完全非弹性碰撞; $0 < e < 1$ 时, 为一般非弹性碰撞.

习 题

3-1 当几个力同时作用于一个物体时, 合力的功是否等于各个力做功的代数和?

3-2 力的功与参照系有无关系? 一对作用力和反作用力做功的代数和与参照系有没

有关系?

3-3 设某轮船航行时所受水的阻力与速度平方成正比,当轮船速度增加为原来的2倍时,发动机发出的功率是不是增加为原来的4倍?

3-4 动能与参照系有无关系?势能与参照系有无关系?

3-5 有两个同样的木块从同一高度自由落下,在落下途中,其中一块被水平飞来的子弹击中,子弹留在木块中,子弹质量不能忽略.问

(1) 被击木块的运动轨道怎样?

(2) 两木块能否同时到达地面?

(3) 到达地面时两木块的动能之差是否等于击中前子弹的动能?

3-6 从同一高度处以同样速度分别向上和向下抛出两个小球,忽略空气阻力,到达地面时,哪个小球的速度大?

3-7 根据动量定理,给物体以冲量作用,必引起物体动量的改变;根据动能定理,力对物体做了功,必引起物体动能的改变.

(1) 给物体以冲量作用,是否一定会引起动能的改变?

(2) 对物体做了功,是否一定会引起物体动量的变化?

3-8 系统内力不影响系统的总动量,但影响系统的总动能,为什么?

3-9 一力学系统由两个质点组成,它们之间只有引力作用.若两质点所受外力的矢量和为零,则有关此系统下列说法正确的是

(A) 动量、机械能以及对某一轴的角动量都守恒;

(B) 动量、机械能守恒,但角动量是否守恒不能断定;

(C) 动量守恒,但机械能和角动量是否守恒不能断定;

(D) 动量和角动量守恒,但机械能是否守恒不能断定.

3-10 一力作用在一质量为 3.0 kg 的质点上,已知质点的位置与时间的函数关系为 $x = 3t - 4t^2 + t^3$. 式中 x 单位为 m 、 t 单位为 s ,试求

(1) 作用力在最初 4.0 s 内所做的功;

(2) 在 $t = 1.0\text{ s}$ 时力对质点所做的瞬时功率.

3-11 一质量为 m 的物体,在时间 t_0 内由静止被均匀地加速到 v_0 ,求:

(1) 在此加速过程中,对物体所做的功与时间 t 的函数关系;

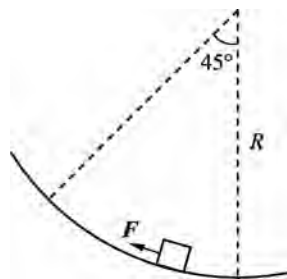
(2) 对物体所做的瞬时功率作为时间 t 的函数关系.

3-12 一质量为 4 kg 的物体,沿一与水平方向成 20° 角的斜面向上运动,施于这物体上的作用力如下:一个 80 N 的水平推力、一个 100 N 的平行于斜面向上的推力、一个 10 N 的摩擦力,物体在斜面上滑动 20 m . 求:

(1) 作用在物体上的合力做的总功;

(2) 每个力所做的功.

3-13 如图所示,一物体沿半径为 R 的圆弧形路面很缓慢地匀速运动,拉力 F 总是平行于路面.设物体的质量为 m ,物体与路面的动摩擦因数为 μ .当把物体由底端拉上 45° 圆弧时,拉力 F 对物体做了多少功?重力和摩擦力各做了多少功?



习题 3-13 图

3-14 一质量为 20 kg 的物体,在作用力 $F = 100t\text{ i}$ (F, t 的

单位分别为 N 和 s) 的作用下运动. 在 $t=2\text{ s}$ 时, 速度 $v=3t\text{ m/s}$, 试求 $t=2\text{ s}$ 到 $t=10\text{ s}$ 的时间间隔内, F 给予质点的冲量和所做的功.

3-15 一升降机载 10 人, 每人质量为 80 kg , 在 180 s 内上升 80 m , 升降机质量为 $1\,000\text{ kg}$, 试求升降机的功率.

3-16 一质量为 m 的物体, 系在细绳一端, 绳的另一端固定在平面上, 此物体在粗糙的水平桌面上做半径为 r 的圆周运动. 设物体的初速度是 v_0 , 当它运动一周时, 其速率为 $\frac{v_0}{2}$, 求

- (1) 摩擦力做的功;
- (2) 摩擦因数;
- (3) 物体在静止前运动的圈数.

3-17 一辆水平运动的装煤车, 以速率 v_0 从煤斗下面通过, 每秒内有质量为 m_0 的煤卸入煤车. 如果煤车的速率保持不变, 煤车与钢轨间摩擦忽略不计.

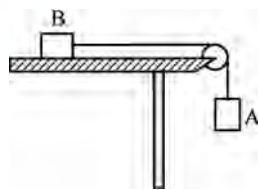
- (1) 求牵引煤车的力的大小;
- (2) 求牵引煤车所需功率的大小;
- (3) 牵引煤车所提供的能量中有多少转化为煤的动能?

3-18 质量为 m 的地球卫星, 在地球上空高度为 2 倍于地球半径的圆轨道上运动, 试用 m 、 R 、引力常量 G 和地球质量 m_E 来表示:

- (1) 卫星的动能;
- (2) 卫星的引力势能;
- (3) 卫星的总能量.

3-19 据说恐龙的灭绝是由于 6 500 万年前一颗小行星撞入地球而引起的. 设小行星的半径为 10 km , 密度为 $6.0 \times 10^3\text{ kg/m}^3$ (与地球密度相同). 此小行星撞入地球时能释放多少引力势能? 这能量是唐山地震释放能量的多少倍? (地球半径为 $6.4 \times 10^6\text{ m}$, 质量为 $6 \times 10^{24}\text{ kg}$, 唐山地震释放的能量约为 $1 \times 10^{18}\text{ J}$)

3-20 如图所示, A 和 B 两物体质量均为 m , 物体 B 与桌面间的动摩擦因数 $\mu=0.20$, 滑轮摩擦不计. 求物体 A 由静止落下 $h=1.0\text{ m}$ 时的速率.



习题 3-20 图

3-21 一根劲度系数为 k_1 的轻弹簧 A 的下端, 挂另一根劲度系数为 k_2 的轻弹簧 B, B 的下端又挂一质量为 M 的重物 C, 求这一系统静止时两弹簧的伸长量之比和弹性势能之比. 如果将此重物用手托起, 让两弹簧恢复原长, 然后放手任其下落, 弹簧可伸长多少? 弹簧对重物 C 的最大作用力有多大?

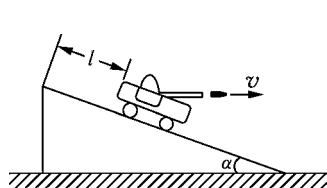
3-22 一质量为 72 kg 的人跳蹦极. 设弹性蹦极带原长为 20 m , 劲度系数为 60 N/m , 忽略空气阻力.

- (1) 此人自跳台跳出后, 落下多高时速度最大? 此最大速度是多少?
- (2) 已知跳台高于下面的水面 60 m , 此人跳下后会不会触到水面?

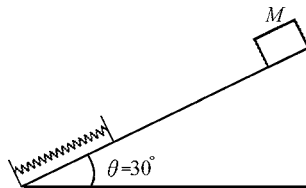
3-23 质量为 $M=0.08\text{ kg}$ 的木块放在光滑的水平面上, 有一质量为 $m=0.02\text{ kg}$ 的子弹, 以 $v=100\text{ m/s}$ 的速度水平射向木块. 如果用钉子将木块固定在水平面上, 则子弹穿过木块后的速度为 $v_1=50\text{ m/s}$.

- (1) 判断子弹能否穿过木块;
- (2) 如果木块没有被固定,子弹和木块最后的速度各为多少?

3-24 有一门质量为 M (含炮弹) 的大炮, 在一倾角为 α 的斜面上无摩擦地由静止开始下滑. 当滑下 l 距离时, 从炮内沿水平方向射出一发质量为 m 的炮弹. 要使炮车在发射炮弹后的瞬间停止滑动, 炮弹的初速率 v 应为多少?



习题 3-24 图



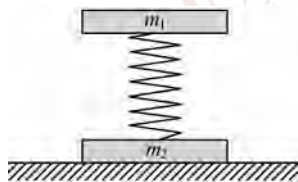
习题 3-25 图

3-25 一弹簧可被 100 N 的力压缩 1.0 m , 将这弹簧固定在无摩擦的斜面下端, 斜面倾角 $\theta=30^\circ$ (如图). 将一质量为 $M=10\text{ kg}$ 的物体由斜面顶部静止释放, 把弹簧压缩 2.0 m 后瞬时静止.

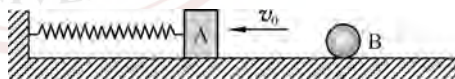
- (1) 物体在瞬时静止前, 在斜面上滑了多少距离?
- (2) 求物体与弹簧接触时的速率.

3-26 用一弹簧把质量各为 m_1 和 m_2 的两块木板连起来, 一起放在地面上 (如图), 弹簧质量不计, $m_2 > m_1$.

- (1) 对上面的木板必须施加多大的正压力 F , 才能使 F 突然撤去后上面的木块跳起来, 恰能使下面的木板脱离地面?
- (2) 如果两木板的位置交换, 结果是否变化?



习题 3-26 图



习题 3-27 图

3-27 一个质量为 $M=10\text{ kg}$ 的物体 A 放在光滑水平桌面上, 与一水平轻弹簧相连, 如图所示. 弹簧的劲度系数 $k=1\,000\text{ N/m}$. 有一质量为 $m=1\text{ kg}$ 的小球 B, 以水平速度 $v_0=4\text{ m/s}$ 飞来, 与物体 A 相撞后以 $v_1=2\text{ m/s}$ 的速度弹回.

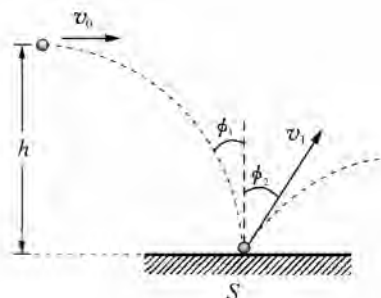
- (1) A 被撞后, 弹簧将被压缩多少?
- (2) 小球 B 和物体 A 的碰撞是否是弹性碰撞? 恢复系数是多少?
- (3) 如果小球与 A 相撞后粘在一起, 则 (1)、(2) 的结果又如何?

3-28 如图所示, 一轻质弹簧的劲度系数为 k , 两端各固定一质量为 M 的物块 A 和 B, 放在水平光滑桌面上静止. 今有一质量为 m 的子弹沿弹簧的轴线方向以速度 v_0 射入一物块而不飞出, 求此后弹簧的最大压缩距离.



习题 3-28 图

3-29 一小球从 h 高度处水平抛出, 初速度为 v_0 , 落地时小球撞在光滑的固定平面 S 上. 设恢复系数为 e , 求小球回跳速度 v_1 的大小和方向. 如以 ϕ_1 表示入射角, ϕ_2 表示反射角, 试证: $\tan\phi_2 = \frac{1}{e}\tan\phi_1$.



习题 3-29 图



习题 3-30 图

3-30 两个半径为 r 的光滑均质小棋子, 原为静止, 相靠如图. 现有另一半径为 $2r$ 的同样厚度的同质大棋子以速度 v_0 向两个小棋子飞来. v_0 的方向正好在小棋子中心连线的中垂线上. 求弹性碰撞后大棋子的速度.

第4章

刚体的运动

前面3章讨论的是质点和质点系的机械运动规律. 对质点运动规律的研究是讨论实际物体运动的基础, 质点的运动实际上只代表着物体的平动. 实际物体是有形状、大小和结构的, 其运动形式可以有平动、转动以及更为复杂的运动, 而且物体在运动过程中, 其形状也可能发生变化. 研究这些物体的运动时, 可以将它们看作是由无穷多质点组成的质点系, 因此, 前面得到的关于质点系的基本规律都适用. 本章讨论一种特殊的质点系——刚体所遵从的力学规律. 刚体是一个理想模型, 组成刚体的所有质点间的距离在运动过程中保持不变. 本章主要讨论刚体绕某一定轴转动(刚体定轴转动)的规律, 刚体做定轴转动时, 每一个质点都绕轴上的一个固定点做圆周运动, 所以用角量描述刚体的运动比用线量方便得多. 由第1章的讨论可知, 用角量描述质点的圆周运动和用线量描述质点的直线运动, 其运动规律有相似的形式. 同样, 描述刚体定轴转动的每一个转动量和每一条规律, 在平动中都可以找到对应, 在学习本章过程中, 充分运用这种对应关系, 一方面可以加深对刚体转动规律的理解, 同时, 对已学过的关于质点力学的知识也是很好的复习和巩固. 本章最后讨论了刚体非定轴转动的一种情况, 即刚体的平面平行运动.

4.1 刚体的运动

► 4.1.1 刚体

前面研究物体的运动规律时, 都把物体看作是只有质量而没有形状和大小的质点. 这样的简化, 在许多情况下是可行的. 例如, 地球绕太阳做公转时, 可以把地球当作质点来处理, 但是当研究地球的自转时, 由于纬度的不同以及与地心距离的不同, 地球上各点的运动情况各不相同, 因而不能再把地球当作质点来处理. 当对物体的运动规律作进一步的研究时, 有必要把研究的对象从质点扩大到有形状和大小的物体. 作为基础, 考虑一种比较简单的情況, 物体在外力作用下, 其形状和大小保持不变, 这样的物体称作**刚体**. 刚体是一种理想模型, 任何物体在外力作用下它的形状和大小都有一定程度的变化, 如果这种变化的影响可以忽略, 就可以把它看作刚体.

刚体可以看成是由无数质点构成的一个系统,这个系统的特征就是刚体内质点之间的距离在运动中保持不变.刚体最简单的运动形式是平动和转动.

► 4.1.2 刚体的平动

当刚体内任意两质点的连线的方向在运动中保持恒定时,这种运动称为**平动**[图 4-1(a)].刚体平动时,刚体内所有质点具有相同形状的运动轨道和相同的速度、加速度.因此,刚体内任何一点的运动都可代表整个刚体的平动.换句话说,平动的刚体可以简化为质点来处理.

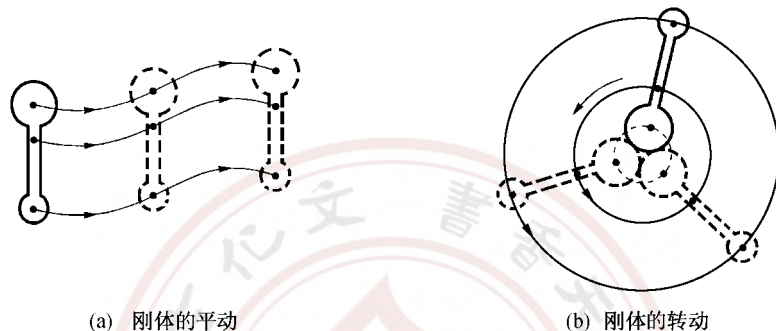


图 4-1 刚体的平动与转动

► 4.1.3 刚体的转动

当刚体中所有质点都绕同一直线做圆周运动时,这种运动称为**转动**[图 4-1(b)],这条直线称为**转轴**.门窗、钟表指针的运动以及行进中汽车的轮子都在做转动.如果转轴是固定不动的,则称为**定轴转动**.如果转轴也是运动的,则称为**非定轴转动**.刚体的一般运动,可以看成刚体对某一轴的转动和该轴在空间运动的合成.

* 4.2 质心 质心运动定理

► 4.2.1 质心

任何物体都可以看作由大量质点组成的质点系,而刚体则可以看作由大量通过刚性联系的质点组成的质点系统.在研究质点系运动时常引入质量中心的概念,质量中心简称**质心**.组成质点系的各个质点的质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n , 相对某坐标系各质点的位置矢量分别为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ (图 4-2), 则这一质点系质心 C 点的位置矢量 \mathbf{r}_C 定义为

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}. \quad (4.2-1)$$

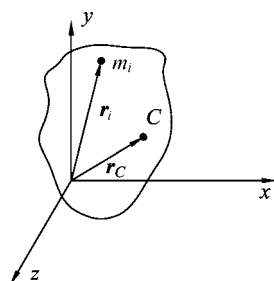


图 4-2 质心位置

式中 $M = \sum m_i$ 为质点系的总质量. (4.2-1) 式在直角坐标系中的分量形式为

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}, y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M}, z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}. \quad (4.2-2)$$

对于质量连续分布的物体,质心 C 的位置矢量 \mathbf{r}_c 表示为

$$\mathbf{r}_c = \frac{\int \mathbf{r} dm}{M}. \quad (4.2-3)$$

式中 \mathbf{r} 是质量元 dm 的矢径, $M = \int dm$. (4.2-3) 式在直角坐标系中的分量形式为

$$x_c = \frac{\int x dm}{M}, y_c = \frac{\int y dm}{M}, z_c = \frac{\int z dm}{M}. \quad (4.2-4)$$

可以证明,质心相对于刚体内各质点的位置是确定的.对于质量分布均匀、形状对称的物体,其质心位置就在它的几何中心.

应当注意,质心和重心是两个不同的概念,重心是指一个物体各部分受重力的合力作用点.只有物体比地球小得多时,它的重心和质心的位置是重合的.因而,在研究的实际问题中,把质心看成和重心重合是完全可以的.

► 4.2.2 质心运动定理

现在利用质心的概念来进一步研究质点系的动量定理(2.4-7)式,即 $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$. 质点系的总动量 \mathbf{p} 为组成质点系的各质点动量的矢量和, $\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i$. 如 \mathbf{r}_i 表示第 i 个质点的位置矢量, $\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$, 可以把(2.4-7)式写成

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\sum m_i \mathbf{v}_i \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum m_i \mathbf{r}_i \right).$$

利用质心位置矢量 \mathbf{r}_c 的表示式(4.2-1),上式可以改写成

$$\mathbf{F} = M \frac{d^2 \mathbf{r}_c}{dt^2}.$$

式中 $\mathbf{a}_c = \frac{d^2 \mathbf{r}_c}{dt^2}$, 称为质心加速度.由此,上式变成

$$\mathbf{F} = M \mathbf{a}_c. \quad (4.2-5)$$

注意,(4.2-5)式具有与牛顿第二定律相同的形式.它表明无论质点怎样运动,质点系的总质量与质心加速度的乘积总等于质点系所受全部外力的矢量和.(4.2-5)式称作**质点系的质心运动定理**,它对刚体运动也适用,又称为**刚体的质心运动定理**.

► 4.2.3 刚体的重力势能

对于一个不太大的质量为 M 的刚体,它的重力势能等于组成刚体的所有质元重力势能的总和,即

$$E_p = \sum_i m_i g h_i = g \sum_i m_i h_i.$$

根据质心的定义(4.2-1)式,刚体质心的高度 h_C 为

$$h_C = \frac{\sum_i m_i h_i}{M},$$

从而

$$E_p = M g h_C.$$

这一结果表明,一个不太大的刚体的重力势能与将该刚体全部质量集中在其质心时所具有的重力势能一样,如图 4-3 所示.

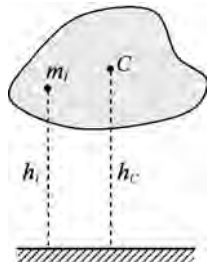


图 4-3 刚体的重力势能

4.3 刚体的角动量 转动惯量

► 4.3.1 角速度矢量

刚体做定轴转动时,刚体的每一个质点都各自在垂直于转轴的平面内做圆周运动,这个平面称作转动平面,虽然它们所在的转动平面不同,各质点与转轴的距离也可能不同,但都有相同的角位移、角速度和角加速度.因此,可以用角速度矢量来描述刚体转动的快慢和方向.角速度矢量用字母 ω 表示, ω 的大小就是刚体角位移的时间变化率,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

(4.3-1)

ω 的方向规定为与刚体转动方向构成右手螺旋系,垂直于转动平面(图 4-4).对于定轴转动,角速度矢量 ω 总是画在转轴上.

考虑刚体上有一质点 P ,与转轴相距 r_i ,它在转动平面内以角速度 ω 绕轴做圆周运动,圆心为 O ,质点 P 在转动平面内的位置矢量为 \mathbf{r}_i (图 4-5).质点在任一时刻的线速度 \mathbf{v}_i 与角速度 ω 和位置矢量 \mathbf{r}_i 有以下关系,

$$\mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{r}_i. \quad (4.3-2)$$

三个矢量也构成右手螺旋系.数值上 $v_i = r_i \omega$.

► 4.3.2 刚体的角动量

图 4-5 中的质点 P 在刚体定轴转动中,它在转动平面内做半径为 r_i 的圆周运动.如果质点 P 的质量为 m_i ,则它的动量为

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i.$$

做圆周运动的质点 P 对于转轴的角动量 L_i 定义为

$$L_i = m_i r_i v_i. \quad (4.3-3)$$

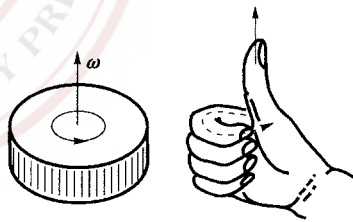


图 4-4 角速度矢量

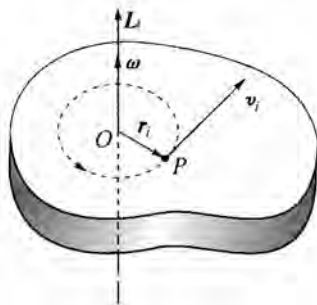


图 4-5 刚体的角动量

由于 $v_i = r_i \omega$, 所以

$$L_i = m_i r_i^2 \omega. \quad (4.3-4)$$

把角动量 L_i 定义为矢量, 它的方向就是角速度 ω 的方向, 因此用矢量表示

$$\mathbf{L}_i = m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (4.3-5)$$

整个刚体的角动量为组成刚体的全部质点的角动量之和, 因为对于定轴转动刚体, 所有质点都以相同的角速度 ω 绕同一转轴转动, 所以定轴转动刚体的角动量为

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \boldsymbol{\omega}. \quad (4.3-6)$$

上式中括号内为刚体中所有质点质量与其到转轴距离平方的乘积之和, 称为**刚体对转轴的转动惯量**, 用 I 表示,

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \quad (4.3-7)$$

用转动惯量表示刚体对转轴的角动量为

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}. \quad (4.3-8)$$

在 SI 制中, 角动量的单位是千克·米²/秒(kg·m²/s).

► 4.3.3 转动惯量

转动惯量与刚体的质量分布以及转轴的位置有关, 刚体质量越大、质量分布得离转轴越远, 转动惯量越大. 在 4.4.2 节我们将看到, 转动惯量相当于物体平动中的惯性质量, 是物体在转动中惯性大小的量度.

在 SI 制中, 转动惯量的单位是千克·米²(kg·m²), 量纲为 L²M.

如果刚体的质量是连续分布的, 则(4.3-7)式需变为

$$I = \int r^2 dm. \quad (4.3-9)$$

用 ρ 表示刚体的密度, dV 表示体积元, $dm = \rho dV$, 则

$$I = \int \rho r^2 dV. \quad (4.3-10)$$

如果刚体是均匀的, 则密度是常量, 上式可以改写为

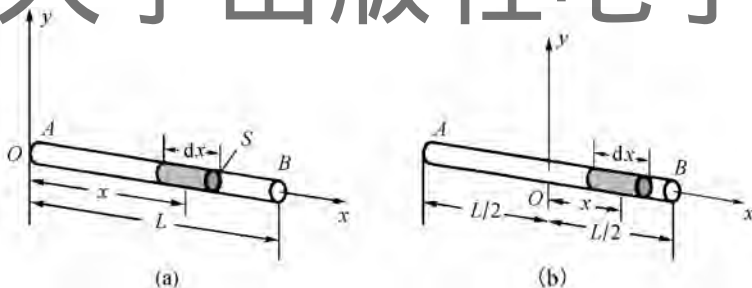
$$I = \rho \int r^2 dV.$$

例 4-1 (1) 求一均匀细棒对垂直于细棒且通过细棒一端的转轴的转动惯量.

(2) 求一均匀细棒对于垂直于细棒且通过细棒中心的转轴的转动惯量.

解 (1) 设细棒 AB 长 L , S 为横截面积, 取坐标系如图(a)所示. 在棒上任取一长为 dx 的体积元 $dV = Sdx$, 体积元与转动轴相距 x . 当转轴垂直于细棒且通过细棒一端时,

$$I = \rho \int_0^L x^2 (Sdx) = \rho S \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} \rho L^3 S.$$



例 4-1 图

设细棒质量为 M , $M = \rho V = \rho LS$, 则

$$I = \frac{1}{3} ML^2.$$

(2) 求细棒对于通过中心的转轴的转动惯量时, 设坐标原点在棒中心, 如图(b)所示. 可把积分区间定义为 $-\frac{L}{2} \rightarrow \frac{L}{2}$.

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho x^2 dV = 2\rho S \int_0^{\frac{L}{2}} x^2 dx = 2\rho S \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} \rho SL^3 = \frac{1}{12} ML^2.$$

显然, 同一刚体, 转动轴的位置不同, 转动惯量也不同.

例 4-2 求圆环、圆盘的转动惯量. 转轴通过中心且与圆环、圆盘平面垂直.

解 设圆环质量为 M , 均匀分布在半径为 R 的圆周上,

$$I = \int R^2 dm = MR^2.$$

设圆盘质量为 M , 质量均匀分布在半径为 R 的圆盘内, 面密度为 σ . 取一同心圆环, 半径为 r , 宽为 dr , 如图所示. 圆环质量为 dm , 则圆环对于转轴的转动惯量为

$$dI = r^2 dm.$$

由于圆环面积为 $2\pi r dr$, 所以 $dm = 2\pi \sigma r dr$. 圆盘转动惯量为

$$I = \int r^2 dm = 2\pi \sigma \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} \sigma R^4.$$

因为 $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$, 所以

$$I = \frac{1}{2} MR^2.$$

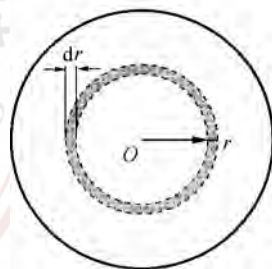
计算刚体的转动惯量, 往往由于刚体的形状和转动轴的位置的不同而变得复杂. 以下介绍的两个定理可以帮助简化转动惯量的计算. (两个定理的证明, 可参考相关力学教科书)

1. 平行轴定理

若质量为 m 的刚体绕通过质心的转轴的转动惯量为 I_C , 若将轴朝任何方向平行移动距离 d (图 4-6), 则绕此轴的转动惯量为

$$I = I_C + md^2.$$

(4.3-11)



例 4-2 图

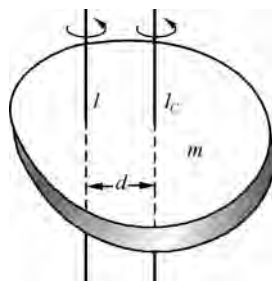


图 4-6 平行轴定理

2. 正交轴定理

薄板型刚体对于板内两条正交的转动轴的转动惯量之和等于刚体对于过两轴交点且垂直于板面的转轴的转动惯量(图 4-7).

$$I_z = I_x + I_y. \quad (4.3-12)$$

几种常见的形状简单的刚体对不同转轴的转动惯量如表 4-1 所示.

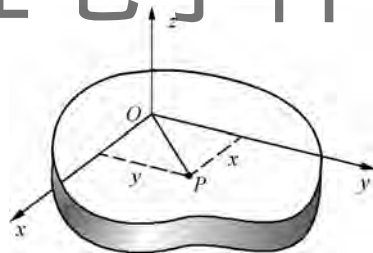


图 4-7 正交轴定理

表 4-1 常见简单物体对不同转轴的转动惯量

<p>圆环 转轴通过中心 与环面垂直</p> $I = mr^2$	<p>圆环 转轴沿直径</p> $I = \frac{mr^2}{2}$
<p>薄圆盘 转轴通过中心 与盘面垂直</p> $I = \frac{mr^2}{2}$	<p>圆筒 转轴沿几何轴</p> $I = \frac{m}{2} (r_1^2 + r_2^2)$
<p>圆柱体 转轴沿几何轴</p> $I = \frac{mr^2}{2}$	<p>圆柱体 转轴通过中心 与几何轴垂直</p> $I = \frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$
<p>细棒 转轴通过中点 与棒垂直</p> $I = \frac{ml^2}{12}$	<p>细棒 转轴通过端点 与棒垂直</p> $I = \frac{ml^2}{3}$
<p>球体 转轴沿直径</p> $I = \frac{2mr^2}{5}$	<p>球壳 转轴沿直径</p> $I = \frac{2mr^2}{3}$

例 4-3 用平行轴定理求例 4-1 中的(2)。

解 细棒的质心在杆中间,与棒端相距 $\frac{L}{2}$,利用例 4-1(1)中结果

$$I_c = I - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 - \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{12}ML^2.$$

* 例 4-4 求半径为 R 、质量为 M 的圆盘对于以任一直径为转轴的转动惯量。

解 如果直接用转动惯量的定义式进行积分,计算将很复杂,利用正交轴定理和例 4-2 的结果,可以简化本题的解答。

考虑圆盘内任意两条相互垂直的直径,以它们为转轴,圆盘的转动惯量应相等,即

$$I_x = I_y = I_d.$$

根据正交轴定理,圆盘对于垂直于圆盘的转轴的转动惯量 I_z 与 I_x, I_y 的关系为

$$I_z = I_x + I_y = 2I_d.$$

根据例 4-2 有

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2.$$

所以

$$I_d = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{4}MR^2.$$

4.4 刚体的转动定理

► 4.4.1 力矩

一个具有固定转轴的物体,在外力作用下,可能发生转动,也可能不发生转动. 物体的转动效果,不仅与力的大小有关,还与力的作用点以及作用力的方向有关。

设刚体所受外力 f 在垂直于转轴的转动平面内(图 4-8),作用点位置 P ,在转动平面内相对于转轴的位置矢量是 r ,作用力 f 相对于转轴的力矩 M 定义为

$$M = r \times f. \quad (4.4-1)$$

M 是矢量,它与矢量 r, f 组成右手螺旋系. 在定轴转动中,力矩的方向沿着转轴的方向. M 的量值为

$$M = fr \sin \phi. \quad (4.4-2)$$

其中 ϕ 是 f 和 r 的夹角。

如果外力不在垂直于转轴的转动平面内,可以把外力分解为两个分力 f_{\parallel} 和 f_{\perp} . f_{\parallel} 位于转动平面内, f_{\perp} 垂直于转动平面. f_{\perp} 对于刚体的定轴转动不起作用,力矩表达式(4.4-1)、(4.4-2)中的 f 应理解为外力在转动平面内的分力。

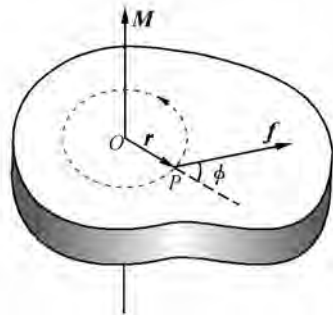


图 4-8 作用力对转轴的力矩

► 4.4.2 刚体的转动定理

实验指出,一个绕定轴转动的刚体,当它所受的对于转轴的合外力矩等于零时,它将保持原有的角速度不变,或保持静止状态,或做匀角速转动. 这反映了任何转动的物体都具有

转动惯性,就像物体在平动中具有惯性一样.

实验还指出,一个做定轴转动的刚体,当它所受的对于转轴的合外力矩不等于零时,它将获得角加速度,角加速度的方向与合外力矩的方向相同,角加速度 β 的量值和它所受的合外力矩 M 的量值成正比,并与它的转动惯量 I 成反比.可以证明,它们之间有以下的关系式

$$M=I\beta. \quad (4.4-3)$$

这一关系就是转动刚体的转动定理.显然,这个定理在转动中的地位 and 牛顿第二定律在平动中的地位相当.转动惯量 I 和惯性质量 m 相当,它反映了刚体做定轴转动时转动惯性的大小.

综上所述,转动定理 $M=I\beta$ 是表述刚体做定轴转动时转动规律的基本方程.转动定理可用矢量表示为

$$\mathbf{M}=I\boldsymbol{\beta}. \quad (4.4-4)$$

► * 4.4.3 刚体转动定理的推导

当刚体做定轴转动时,根据(4.3-3)式,刚体中第 i 个质点对于转轴的角动量 $L_i = m_i \mathbf{v}_i \mathbf{r}_i = p_i \mathbf{r}_i$,可用矢量式表示为

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i.$$

对上式求时间的导数

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i).$$

根据矢量导数法则, $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$, 有

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

因为 $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$, $\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{f}_i$, 且 \mathbf{v}_i 与 \mathbf{p}_i 同向, $\mathbf{v}_i \times \mathbf{p}_i = 0$, 所以

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i, \quad (4.4-5)$$

其中 \mathbf{r}_i 是第 i 个质点在转动平面内对于转轴的位置矢量, \mathbf{f}_i 是质点所受的全部作用力, 而 $\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i$ 就是质点所受的作用力 \mathbf{f}_i 对于转轴的力矩 \mathbf{M}_i , 即

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i.$$

这样, (4.4-5)式可以表示为

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \mathbf{M}_i.$$

对于整个刚体

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{M}_i.$$

其中 \mathbf{M}_i 是刚体中第 i 个质点所受作用力对转轴的力矩, 这里作用力包括刚体所受的外力, 也包括刚体中质点之间相互作用的内力. 由于刚体中任意两个质点之间的相互作用的内力对于转轴产生的力矩大小相等、方向相反, 所以 $\sum_i \mathbf{M}_i$ 就是刚体所受外力对转轴的力矩之和 \mathbf{M} , 即

$$\frac{dL}{dt} = M.$$

(4.4-6)

上式说明,刚体做定轴转动时,刚体角动量的时间变化率,等于刚体所受的对于同一转轴的合外力矩.这就是**刚体的转动定理**.

因为 $L = I\omega$, 对于刚体 I 是常量, 所以 $\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\beta$, (4.4-6) 式又可表达为

$$M = I\beta,$$

即刚体所受的合外力矩, 等于刚体转动惯量与角加速度之积.

例 4-5 一轻绳跨过一定滑轮, 两端分别挂质量为 m_1, m_2 的重物 A 和 B, 如图所示. 设 $m_1 > m_2$, 定滑轮是个均质圆盘, 质量为 M , 半径为 r . 细绳与滑轮无相对运动, 滑轮摩擦力为零. 求两重物的加速度及细绳中的张力.

解 因为 $m_1 > m_2$, 重物 A 将下降, B 将上升, 滑轮做顺时针转动. 设重物的加速度为 a , 滑轮角加速度为 β , 有

$$a = r\beta.$$

设滑轮两边细绳的张力为 T_1 和 T_2 , 则运用牛顿第二定律和刚体转动定理, 并考虑到滑轮转动惯量 $I = \frac{1}{2}Mr^2$ 得方程

$$m_1 g - T_1 = m_1 a,$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a,$$

$$T_1 r - T_2 r = \frac{1}{2} M r^2 \beta.$$

由上述四个方程可解得

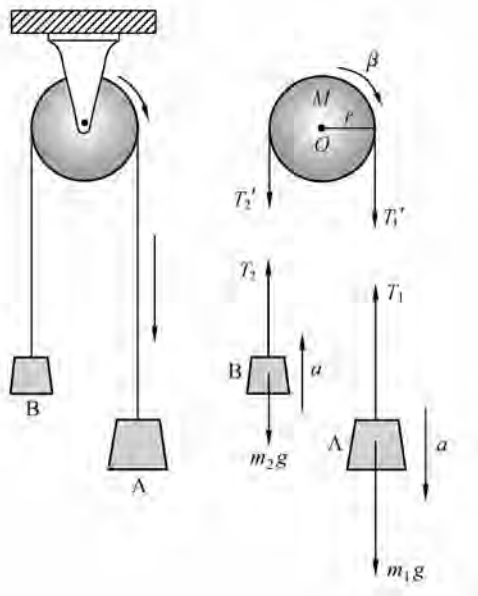
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2} g,$$

$$T_1 = \frac{m_1 (2m_2 + M/2)}{m_1 + m_2 + M/2} g,$$

$$T_2 = \frac{m_2 (2m_1 + M/2)}{m_1 + m_2 + M/2} g.$$

显然, 如果圆盘的质量可略去, 即 $M \approx 0$, 从上面的式子, 可以得到两边绳子张力相等, $T_1 =$

$$T_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g, \text{ 而加速度 } a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$



例 4-5 图

4.5 刚体的角动量定理和角动量守恒定律

► 4.5.1 刚体的角动量定理

刚体转动定理的(4.4-6)式可以改写为

$$\mathbf{M}dt = d\mathbf{L}.$$

对上式积分,得

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}dt = \int_{L_1}^{L_2} d\mathbf{L} = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1. \quad (4.5-1)$$

上式中, $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}dt$ 称为合外力矩 \mathbf{M} 在 $t_2 - t_1$ 时间间隔内的冲量矩. 上式说明: 刚体所受合外力矩的冲量矩, 等于刚体在这段时间间隔内刚体的角动量的增量, 这就是刚体的角动量定理.

在国际单位制中, 冲量矩的单位为牛·米·秒($\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$).

► 4.5.2 角动量守恒定律

因为 $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, 刚体角动量定理(4.5-1)式也可以表达为

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}dt = I\boldsymbol{\omega}_2 - I\boldsymbol{\omega}_1. \quad (4.5-2a)$$

如果转动物体的转动惯量不是恒量, 角动量定理可以更一般地表达为

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}dt = I_2\boldsymbol{\omega}_2 - I_1\boldsymbol{\omega}_1. \quad (4.5-2b)$$

如果刚体所受合外力矩为零, 则 $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$,

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} = \text{常量}. \quad (4.5-3)$$

上式说明, 若刚体所受合外力矩为零时, 刚体的角动量保持不变, 这就是角动量守恒定律. 可以证明, 这个定律对转动惯量 I 会变化的物体, 或绕定轴转动的任一力学系统仍然成立. 例如, 花样滑冰运动员在旋转时, 往往先把两臂张开, 然后迅速把两臂收回抱紧, 使自己的转动惯量迅速减小, 因而旋转速度加快.

角动量守恒定律同前面介绍的动量守恒定律和能量守恒定律一样, 是自然界中的普遍规律.

例 4-6 质量为 M 、半径为 R 的转台, 可绕通过中心的竖直轴无摩擦地转动. 质量为 m 的人, 站在转台边缘, 人和转盘开始静止, 如果人沿转台边缘走动 1 周, 相对地面, 人和转台分别转动了多少角度?

解 转台绕转轴转动的转动惯量 $I = \frac{1}{2}MR^2$, 人沿转台边缘走动, 可以看作绕轴转动, 转动惯量 $I' = mR^2$.



例 4-6 图

设人相对于地的角速度是 ω' , 转台相对于地的角速度为 ω , 则转台和人对于转轴的角动量分别为

$$L = I\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega,$$

$$L' = I'\omega' = mR^2\omega'.$$

把转台和人看作一个系统, 由于无外力矩作用, 系统角动量守恒. 因为开始时系统静止, 角动量为零, 所以有

$$\frac{1}{2}MR^2\omega + mR^2\omega' = 0.$$

解得

$$\omega = -\frac{2m}{M}\omega'.$$

人相对于转台角速度为

$$\omega_{\text{rel}} = \omega' - \omega = \omega' - \left(-\frac{2m}{M}\omega'\right) = \frac{M+2m}{M}\omega'.$$

设人在转台上走 1 周所用时间为 T , 有

$$2\pi = \int_0^T \omega_{\text{rel}} dt = \int_0^T \frac{M+2m}{M} \omega' dt = \frac{M+2m}{M} \int_0^T \omega' dt.$$

因此, 在此时间内, 人相对于地面转动的角度为

$$\int_0^T \omega' dt = \frac{2\pi M}{M+2m}.$$

转台相对于地面转动的角度为

$$\begin{aligned} \int_0^T \omega dt &= \int_0^T \left(-\frac{2m}{M} \omega'\right) dt = -\frac{2m}{M} \int_0^T \omega' dt \\ &= -\frac{2m}{M} \cdot \frac{M}{M+2m} \cdot 2\pi = -\frac{4\pi m}{M+2m}. \end{aligned}$$

负号说明转台的转动方向和人的走动方向相反.

4.6 刚体的动能定理

► 4.6.1 刚体的转动动能

刚体做定轴转动时, 刚体中第 i 个质点的动能为 $E_{ki} = \frac{1}{2}m_i v_i^2$, 刚体的总动能为

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2.$$

其中 $v_i = r_i \omega$, 于是有

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2.$$

根据转动惯量的定义, 上式可表达为

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

(4.6-1)

这是刚体绕定轴以角速度 ω 转动时的转动动能.

► 4.6.2 力矩做的功

设刚体受合外力 f 作用, f 位于转动平面内, 刚体相对于转轴有极小的角位移 $d\theta$ (图 4-9), 作用点 P 的位移为 ds , $ds=r d\theta$. 若 f 与 r 的夹角为 α , 则 f 与 ds 的夹角为 $\frac{\pi}{2}-\alpha$, 在这期间 f 对刚体做功

$$dW = f \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) ds = f r \sin\alpha d\theta.$$

而 $f r \sin\alpha$ 就是 f 对于转轴的力矩 M , 所以

$$dW = M d\theta. \quad (4.6-2)$$

上式表明, 力矩所做的元功等于力矩与角位移的乘积. 如果 M 是恒力矩, 则刚体在力矩作用下转过 θ 角时, 力矩做的功为

$$W = M\theta. \quad (4.6-3)$$

如果 M 是变力矩, 则

$$W = \int M d\theta. \quad (4.6-4)$$

以上讨论的是刚体所受外力做的功, 同样, 刚体内力所做的功可以表示为所有内力矩所做的功的和. 由于刚体内任何一对内力都大小相等、方向相反, 对于转动轴的力矩之和为零, 因而定轴转动刚体中所有内力矩的总功必为零. 所以, 只需考虑定轴转动刚体所受合外力矩做的功.

► 4.6.3 刚体的动能定理

在刚体的转动定理 $M = I\beta$ 中, 对 β 作变换,

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta},$$

有

$$M d\theta = I \omega d\omega.$$

设刚体在力矩 M 作用下, 角速度由 ω_0 变化到 ω , 角位置由 θ_0 变化到 θ , 则

$$\int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} I \omega d\omega = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2. \quad (4.6-5)$$

式中等式左边是外力矩对刚体做的功, 等式右边是刚体动能的变化, 这就是刚体定轴转动的动能定理, 即刚体动能的增量等于所受外力矩做的功.

现将平动和转动的一些重要公式列于表 4-2 中, 供参考.

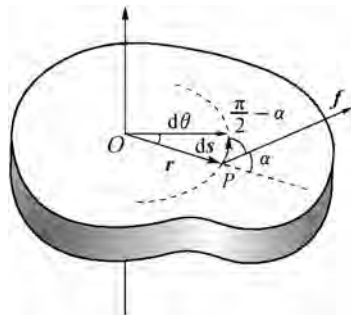


图 4-9 力矩做功

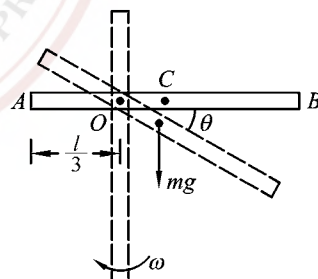
表 4-2

质点的直线运动(刚体平动)	刚体的定轴转动
速度 $v = \frac{ds}{dt}$	角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度 $a = \frac{dv}{dt}$	角加速度 $\beta = \frac{d\omega}{dt}$
匀速直线运动 $s = vt$	匀角速转动 $\theta = \omega t$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \beta t$
匀变速直线运动 $s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	匀变速转动 $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2as$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta\theta$
力 f , 质量 m , 牛顿第二定律 $f = ma$	力矩 M , 转动惯量 I , 转动定理 $M = I\beta$
动量 mv , 冲量 ft , 动量定理 $ft = mv - mv_0$ (恒力)	角动量 $I\omega$, 冲量矩 Mt , 角动量定理 $Mt = I\omega - I\omega_0$ (恒力矩)
动量守恒定律 $\sum mv = \text{常量}$	角动量守恒定律 $\sum I\omega = \text{常量}$
平动动能 $\frac{1}{2}mv^2$; 恒力做功 fs	转动动能 $\frac{1}{2}I\omega^2$; 恒力矩做功 $M\theta$
动能定理 $fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ (恒力)	动能定理 $M\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$ (恒力矩)

例 4-7 有一质量为 m 、长为 l 的均匀细杆, 可绕一水平转轴 O 在竖直平面内无摩擦旋转, O 离杆一端距离 $\frac{l}{3}$, 如图所示. 设杆在水平位置自由转下, 求:

- (1) 杆在水平位置时的角加速度;
- (2) 杆转到竖直位置时的角速度和角加速度;
- (3) 杆在竖直位置时, 杆的两端和中点的速度和加速度;
- (4) 杆在竖直位置时杆对转轴的作用力.

解 杆在转动中, 受重力 mg 和转轴支承力 N 作用, N 对转轴的力矩为零. 重力作用点在杆中心(即质心) C 处, 当杆转到图中位置(与水平方向夹角 θ), 重力对转轴的力矩为



例 4-7 图

$$M = \frac{l}{6} mg \cos\theta.$$

细杆对于转轴的转动惯量为

$$I_0 = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{1}{6} l \right)^2 = \frac{1}{9} ml^2.$$

- (1) 当杆在水平位置起动时, $\theta = 0$, $M = \frac{1}{6} mgl$,

$$\beta = \frac{M}{I_0} = \frac{\frac{1}{6} mgl}{\frac{1}{9} ml^2} = \frac{3g}{2l}.$$

(2) 取杆水平位置时为零势能点, 则杆在竖直位置时的重力势能为

$$E_p = -mg\overline{OC} = -mg\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right) = -\frac{1}{6}mgl.$$

杆起始静止, $\omega_0 = 0$, 转到竖直位置时角速度为 ω , 根据机械能守恒有

$$\left(-\frac{1}{6}mgl\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}ml^2\right)\omega^2 = 0.$$

由此解得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

在竖直位置时, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $M = 0$, 因而角加速度 $\beta = 0$.

(3) 杆在竖直位置时, 杆的两端 A, B 和中点 C 的速度及加速度分别为

$$v_C = \omega r_C = \frac{l}{6} \sqrt{\frac{3g}{l}} = \frac{\sqrt{3lg}}{6} \quad (\text{方向向左}),$$

$$v_A = \omega r_A = \frac{l}{3} \sqrt{\frac{3g}{l}} = \frac{\sqrt{3lg}}{3} \quad (\text{方向向右}),$$

$$v_B = \omega r_B = \frac{2l}{3} \sqrt{\frac{3g}{l}} = \frac{2\sqrt{3lg}}{3} \quad (\text{方向向左});$$

$$a_C = \omega^2 r_C = \frac{l}{6} \cdot \frac{3g}{l} = \frac{g}{2} \quad (\text{方向向上, 指向 } O \text{ 点}),$$

$$a_A = \omega^2 r_A = \frac{l}{3} \cdot \frac{3g}{l} = g \quad (\text{方向向下, 指向 } O \text{ 点}),$$

$$a_B = \omega^2 r_B = \frac{2l}{3} \cdot \frac{3g}{l} = 2g \quad (\text{方向向上, 指向 } O \text{ 点}).$$

(4) 当杆位于竖直位置时, 质心 C 具有向心加速度 $a_n = \frac{g}{2}$. 设转轴对杆作用力为 N (向上). 由质心运动定理(4.2-5)式,

$$N - mg = ma_n,$$

$$N = mg + m \cdot \frac{g}{2} = \frac{3}{2}mg.$$

杆对转轴施于向下的作用力 $\frac{3}{2}mg$.

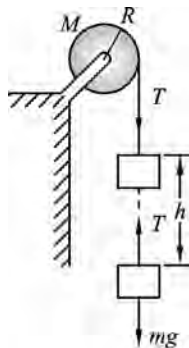
例 4-8 如图所示, 一均匀圆盘半径为 R , 质量为 M , 其中心轴装在两个光滑的固定轴承上. 在圆盘的边缘上绕一轻绳, 绳上挂一个质量为 m 的物体. 证明对这个系统的机械能是守恒的.

解 作用在这个系统上的合力就是作用在悬挂物体上的重力 mg , 而重力是保守力. 就整个系统而言, 当物体下降竖直距离 h 时, 物体减少的势能为

$$\Delta E_p = mgh. \quad ①$$

在下降的同时, 悬挂物体得到平动动能, 圆盘得到转动动能, 两者的总动能为

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad ②$$



例 4-8 图

考虑到作用在悬挂物的外力为重力 mg 以及绳子对它的张力 T , 应用动能定理有

$$(mg - T)h = \frac{1}{2}mv^2. \quad (3)$$

对于滑轮应用转动刚体的动能定理

$$TR\Delta\theta = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

上式左边就是恒力矩 TR 做的功, 而角位移 $\Delta\theta = \frac{h}{R}$, 因此上式可写为

$$Th = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (4)$$

③式加上④式有

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (5)$$

⑤式表明物体下降距离 h 减少的势能, 等于物体得到的平动动能以及圆盘得到转动动能的总和, 因此该系统的机械能是守恒的.

4.7 刚体的平面平行运动

到目前为止, 我们只讨论了刚体绕固定轴的转动, 但在很多情况下, 刚体的运动要比定轴转动复杂得多, 本节将讨论刚体的平面平行运动.

当刚体运动时, 它的质心始终在某一平面上运动, 而且刚体上各点绕之转动的转轴既通过质心, 又始终和该平面平行, 这种运动就称为刚体的平面平行运动. 比如, 汽车在平直的道路沿直线行驶时, 其车轮的运动就是平面平行运动. 这时车轮的运动可以看作是车轮轴的平动和车轮绕轴转动的叠加. 关于刚体的平动可由其质心的运动来确定. 假设刚体的质心在 xOy 平面内运动, 则根据(4.2-5)式, 可以得到下列两个平动方程:

$$\begin{aligned} F_x &= ma_{Cx}, \\ F_y &= ma_{Cy}. \end{aligned} \quad (4.7-1)$$

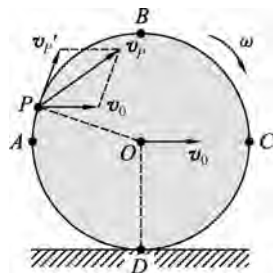
式中, F_x 和 F_y 是刚体在 x 轴和 y 轴方向所受合外力的大小, m 是刚体的质量, a_{Cx} 和 a_{Cy} 是质心加速度在 x 轴和 y 轴方向分量的大小. 关于刚体绕通过质心轴的转动, 可以证明, 也遵守定轴转动的转动定理, 即

$$M = I\beta. \quad (4.7-2)$$

式中, M , I 和 β 分别是刚体所受的合外力矩、刚体的转动惯量和角加速度的大小, 三者都是对于通过质心的转轴而言的, 所以刚体的平面平行运动就可以由(4.7-1)式和(4.7-2)式联合求解.

例 4-9 一车轮在地面上沿直线作纯滚动(即车轮与地面间无滑动), 假设车轮半径为 R , 车轮中心以匀速 v_0 前进, 如图(a)所示. 求:

- (1) 车轮边缘各点的运动速度;
- (2) 任意时刻车轮边缘与车轮中心等高的点 A, C 和与车轮



例 4-9 图(a)

中心处于同一竖直线上的两点 B, D 的速度。

解 (1) 车轮的运动可以看作是整个车轮以速度 v_0 随车轮中心运动和车轮以角速度 ω 绕车轮中心转动的合成。所以, 车轮边缘某点 P 的速度等于平动速度 v_0 和 P 点相对于车轮中心速度 v_P' 的矢量和。由于车轮与地面间无相对滑动, 所以车轮中心前进的距离 x 和车轮相对轮心转过的角度 θ 有如下关系

$$x = R\theta.$$

上式对时间 t 求导数得

$$\frac{dx}{dt} = R \frac{d\theta}{dt},$$

即

$$v_0 = R\omega.$$

上式就是车轮作纯滚动时, 车轮中心的速度 v_0 和车轮相对于轮心转动的角速度 ω 之间的关系式。 P 点相对于车轮中心转动的角速度 $v_P' = \omega \times r$ (r 是轮心到 P 点的矢径)。由于 ω 垂直纸面向里, 并与 r 垂直, 因此 v_P' 的大小与 v_0 相等, 也等于 $R\omega$ 。所以车轮在滚动时轮边缘上任一点的速度是

$$v_P = v_0 + v_P' = v_0 + \omega \times r. \quad (4.7-3)$$

(2) A, B, C 和 D 各点任意时刻的速度各由两个速度叠加而成。首先, 考虑整个车轮随轮心一起做平动, 此时 A, B, C 和 D 各点的平动速度与轮心速度 v_0 相同, 如图(b)所示。其次, 考虑车轮绕轮心 O 的转动, 这时 A, B, C 和 D 各点绕 O 点转动的速度 v_A', v_B', v_C' 和 v_D' 都沿轮边缘的切线方向, 如图(c)所示, 它们的大小也都为 $v_0 = R\omega$ 。在车轮与地面接触的 D 点, v_0 和 v_D' 大小相等、方向相反, 因此

$$v_D = v_0 + v_D' = 0,$$

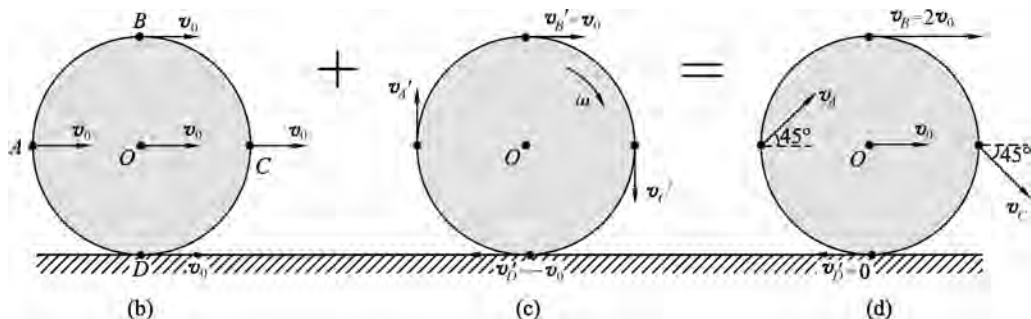
即 D 点是瞬时静止的, 说明车轮与地面没有相对滑动, 车轮在地面上做纯滚动。同理, 在 B 点, v_0 和 v_B' 大小相等、方向相同, 所以 v_B 的方向与 v_0 相同, 其大小

$$v_B = v_0 + v_B' = 2v_0.$$

在 A, C 两点, v_0 和 v_A', v_C' 互相垂直, 所以

$$v_A = v_C = \sqrt{v_0^2 + (\omega R)^2} = \sqrt{2}v_0,$$

v_A 的方向与 v_0 成 45° 角, 而 v_C 的方向与 v_0 成 -45° 角, 如图(d)所示。



例 4-9 图

在研究刚体的平面平行运动时, 选转轴通过质心, 可以证明其运动的动能可以简单地表示为质心运动的平动动能和刚体对转轴的转动动能之和, 即

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2.$$

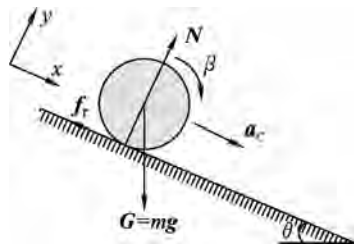
(4.7-4)

式中, v_C 为质心的运动速度, I_C 为刚体绕通过质心轴的转动惯量, 而刚体运动的机械能应该包括平动动能、转动动能和重力势能等.

例 4-10 一质量为 m 、半径为 R 的匀质实心圆柱体沿倾角为 θ 的斜面无滑动地向下滚动. 求:

(1) 圆柱体质心的加速度 a_C 、圆柱体绕质心的角加速度 β 和斜面作用于圆柱体的摩擦力的大小 f_r ;

(2) 设圆柱体由静止开始向下滚动, 当其质心下降高度 h 时, 其质心速度的大小 v_C .



例 4-10 图

解 (1) 圆柱体共受三个力的作用: 重力 mg 、斜面对圆柱体的支持力 N 和摩擦力 f_r . 取直角坐标系的 x 轴沿斜面向下, y 轴垂直于斜面向上, 如图所示, 根据 (4.7-1) 式和 (4.7-2) 式, 并考虑到 $a_{Cx} = a_C$, $a_{Cy} = 0$, 有

$$mg\sin\theta - f_r = ma_{Cx},$$

$$N - mg\cos\theta = ma_{Cy} = 0,$$

$$f_r R = I\beta.$$

由于圆柱体在斜面上做纯滚动, 所以

$$a_C = a_{Cx} = R\beta,$$

圆柱体的转动惯量为

$$I = \frac{1}{2}mR^2.$$

联立求解上面的五个方程, 得

$$a_C = \frac{2g\sin\theta}{3}, \quad \beta = \frac{2g\sin\theta}{3R}, \quad f_r = \frac{mg\sin\theta}{3}.$$

(2) 由上面的结果可见, 圆柱体的质心沿斜面向下做匀加速直线运动, 当圆柱体的质心下降 h 时, 其在斜面上滚动的距离为 $x = \frac{h}{\sin\theta}$, 所以

$$v_C^2 = 2a_C x = 2 \cdot \frac{2}{3}g\sin\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta} = \frac{4}{3}gh,$$

即

$$v_C = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

这一结果也可由机械能守恒定律来求解. 因圆柱体做纯滚动, 其与斜面接触处相对于斜面无运动, 所以 f_r 不做功, 支持力 N 与质心运动方向垂直, 也不做功. 圆柱体的动能

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2 \cdot \left(\frac{v_C}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mv_C^2 \end{aligned}$$

由 $E_k = mgh$ 得

$$v_C = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

内容提要

1. 刚体: 内部质点没有相对运动, 形状和大小不变. 刚体的一般运动可分解为平动和转动.

平动: 固联在刚体上的任一条直线在各时刻的位置始终保持平行, 任一点的运动都可代表整体的平动.

转动: 刚体上所有各点都绕同一条直线(转轴)做圆周运动, 各点具有共同的角速度.

2. 角动量.

(1) 质点角动量: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ (特例: 圆周运动 $L = mr^2\omega$).

(2) 刚体角动量(定轴转动): $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$.

3. 转动惯量: $I = \sum \Delta m_i r_i^2$ 或 $I = \int r^2 dm$.

平行轴定理: $I = I_C + md^2$.

正交轴定理: $I_z = I_x + I_y$ (适用于平行 xOy 面的薄板).

4. 力矩: 质点受力矩 $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$, 刚体受力矩 $\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{i\text{外}}$.

5. 力矩做功: $W = \int M d\theta$; 恒力矩做功: $W = M\theta$.

6. 转动定理: $\mathbf{M}_{\text{外}} = I\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$.

7. 转动动能: $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$.

动能定理: $\int M_{\text{外}} d\theta = \frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} I\omega_0^2$.

8. 角动量定理: $\int_1^2 \mathbf{M}_{\text{外}} dt = \int_1^2 d\mathbf{L} = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1$.

角动量守恒定律: 条件 $\mathbf{M}_{\text{外}} = 0$, $\mathbf{L} = \text{常矢量}$, 或系统 $\sum \mathbf{L}_i = \text{常矢量}$.

9. 质心位矢: $\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}$ 或 $\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r} dm}{M}$.

质心运动定理: 刚体(或质点系)所受合外力等于其总质量与质心加速度之积,

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}_C.$$

10. 刚体的重力势能: $E_p = Mgh_C$.

11. 刚体的平面平行运动: $\left\{ \begin{array}{l} \text{平动: } F_x = ma_{Cx}, F_g = ma_{Cy}. \\ \text{转动: } M = I\beta. \\ \text{动能: } E_k = \frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{1}{2} I\omega^2. \end{array} \right.$

习 题

4-1 当飞轮做加速转动时,在飞轮上半径不同的两个质点,切向加速度是否相同?法向加速度是否相同?

4-2 计算一个刚体对于某转轴的转动惯量时,能不能把它的质量看作集中在其质心,然后计算这个质点对该转轴的转动惯量?

4-3 设有两个圆盘用密度不同的金属制成,质量和厚度都相同.哪个圆盘绕其中心轴的转动惯量较大?

4-4 能不能把刚体对某转轴的转动惯量看作是刚体各部分对同一转轴的转动惯量之和?

4-5 一个水平圆盘以一定的角速度绕通过中心的竖直轴转动,今再放上另一个原来不动的圆盘,两盘的平面平行且同心.由于接触面之间的摩擦力,使两盘合二为一,以相同的角速度转动.问放置前后两盘的总动能是否相同?总角动量是否相同?为什么?

4-6 把一根细杆的一端固定,并使它能绕固定点在竖直平面内自由转动,把杆拉到水平位置,挂上一重物,然后释放.第一次把重物挂在杆的中点,第二次把重物挂在杆的自由端,杆由水平位置转到竖直位置时哪种情况所用的时间较短?

4-7 在一个系统中,如果角动量守恒,动量是否也一定守恒?反之,如果该系统的动量守恒,角动量是否也一定守恒?

*4-8 一根细杆长 L ,在杆两端和中心各固定一相同质量 m 的小物体,转轴和棒垂直并通过距杆一端 $\frac{L}{4}$ 处.

(1) 如果不计杆的质量,求系统质心的位置和对轴的转动惯量;

(2) 如果杆的质量为 M ,求系统质心的位置和对轴的转动惯量.

*4-9 有一长方形的薄板,长为 a ,宽为 b ,质量为 m ,试分别求此薄板绕长边、宽边、过中心且垂直于板面的转轴的转动惯量.

4-10 一个无质量的刚性等边三角形,边长 0.10 m ,三个顶点分别放置 $m=2\text{ kg}$ 的小物体.试计算这系统相对于一垂直于这三角形平面且通过下列各点的转轴的转动惯量:

(1) 一个顶点;

(2) 一边的中点;

(3) 质心.

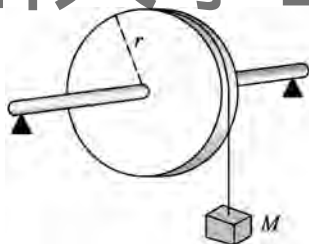
4-11 一轮子半径 $r=0.5\text{ m}$,质量 $m=25\text{ kg}$,能绕其水平轴转动(如图),一细绳绕在轮上,自由端挂一质量 $M=10\text{ kg}$ 的重物,试求

(1) 轮子的角加速度;

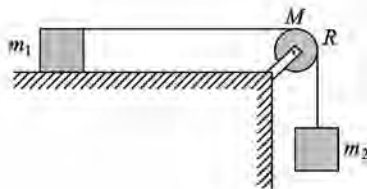
(2) 重物的加速度;

(3) 细绳的张力;

(4) 若用 98 N 的向下拉力取代重物,上述轮子的角加速度是否改变?



习题 4-11 图



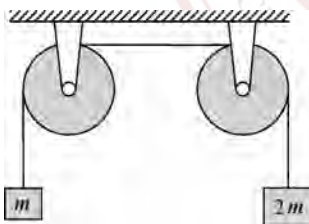
习题 4-12 图

4-12 如图所示,滑轮半径 $R=0.10\text{ m}$,质量 $M=15\text{ kg}$,一细绳跨过滑轮,可带动滑轮绕水平轴转动,重物 $m_1=50\text{ kg}$, $m_2=200\text{ kg}$. 不考虑摩擦,求重物的加速度和细绳的张力.

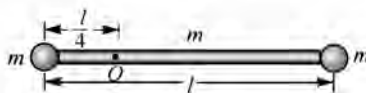
4-13 如图所示,一个组合轮是由两个匀质圆盘固结而成,小盘质量 $m_A=4\text{ kg}$,半径 $r_A=0.05\text{ m}$,大盘质量 $m_B=6\text{ kg}$,半径 $r_B=0.10\text{ m}$. 两盘边缘上分别绕有细绳,细绳的下端各挂有质量为 $m_1=m_2=2\text{ kg}$ 的物体,离地均为 $h=2\text{ m}$. 这一系统由静止开始运动. 求

- (1) 组合轮的转动惯量;
- (2) 两物体 1 和 2 的加速度大小和下降物体着地的时间;
- (3) 两绳中张力的大小.

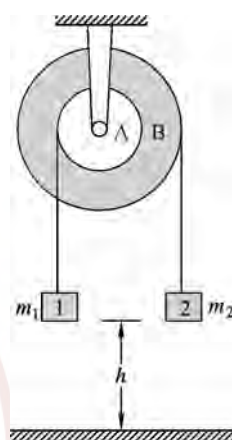
4-14 一轻绳跨过两个质量均为 m 、半径均为 r 的匀质圆盘状定滑轮,绳的两端分别挂着质量为 m 和 $2m$ 的重物,如图所示. 绳与滑轮间无相对滑动,滑轮轴光滑. 将整个系统由静止释放,求两滑轮之间绳的张力.



习题 4-14 图



习题 4-15 图



习题 4-13 图

4-15 有一根长 l 、质量为 m 的均质细杆,两端各牢固地连结一个质量也为 m 的小球,整个系统可绕一过 O 点并垂直于杆的水平轴无摩擦地转动(如图). 当系统转过水平位置时,试求:

- (1) 系统所受的合外力矩;
- (2) 系统对转动轴的转动惯量;
- (3) 系统的角加速度.

4-16 以 $20\text{ N}\cdot\text{m}$ 的不变力矩作用在一转轮上,在 10 s 内该轮的角速度由零增大到 100 r/min ,然后移去此力矩,转轮因受轴承的摩擦经 100 s 后停止,试求:

- (1) 转轮的转动惯量;

(2) 摩擦力矩;

(3) 从开始转动到停止转动的总转数.

4-17 一电机在达到 20 r/s 的转速时关闭电源. 若令它仅在摩擦力矩作用下减速, 需要时间 240 s 才停止下来; 若加上阻滞力矩 $500 \text{ N} \cdot \text{m}$, 则在 40 s 内可停止下来. 试求该电机的转动惯量.

4-18 一磨轮半径为 0.10 m , 质量为 25 kg , 以 50 r/s 的转速转动, 用工具以 200 N 的正压力作用在轮边上, 使它在 10 s 内停止转动, 求工具与磨轮之间的摩擦因数.

4-19 质量为 0.03 kg 、长为 0.2 m 的均匀棒, 在一水平面内绕通过棒质心并与棒垂直的定轴转动, 棒上套着两个可沿棒滑动的小物体, 它们的质量均为 0.02 kg . 开始时, 两小物体分别用夹子固定在棒两边, 各距质心 0.05 m , 系统以 15 r/min 的转速绕轴转动, 然后松开夹子, 让小物块沿棒向外滑去, 直至滑离棒端. 问:

(1) 当两小物体达到棒端时, 系统角速度是多少?

(2) 当两小物体滑离棒后, 棒的角速度是多少?

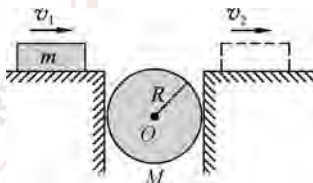
4-20 一人质量为 100 kg , 站在半径为 2 m 的转台边沿, 转台的轴光滑且竖直通过台心, 转台转动惯量为 $4000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. 开始时系统静止, 然后人以相对于地面 1 m/s 的速度沿转台边沿走动.

(1) 转台以多大角速度向哪一方向转动?

(2) 当人在台上走完 1 周, 转台转过多少角度?

(3) 当人到达相对于地面原来位置时, 转台转过多少角度?

4-21 一半径为 R 、质量为 M 的圆柱体, 可绕水平固定中心轴无摩擦地转动. 开始时圆柱体静止, 一质量为 m 的木块以速度 v_1 在光滑平面上向右滑动, 并擦过圆柱体的上表面跃上另一同高度的光滑平面, 如图所示. 设木块和圆柱体脱离接触之前, 它们之间无相对滑动, 求木块最后速度的大小 v_2 .



习题 4-21 图

4-22 光滑的水平桌面上有一长 $2l$ 、质量为 m 的均质细杆, 可绕过其中点、垂直于杆的竖直轴自由转动. 开始杆静止在桌面上. 有一质量为 m 的小球沿桌面以速度 v 垂直射向杆一端, 与杆发生完全非弹性碰撞后, 粘在杆端与杆一起转动. 求碰撞后系统的角速度.

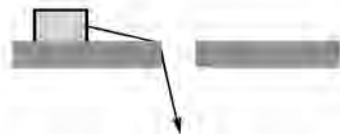
4-23 一人坐在转椅上, 双手各持哑铃, 哑铃与转轴的距离各为 0.6 m . 先让人以 5 rad/s 的角速度随转椅旋转, 然后, 人将哑铃拉回至与转轴相距 0.2 m . 假如人对转轴的转动惯量恒定为 $5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 每个哑铃质量为 5 kg , 可视为质点, 不计转动中的摩擦, 问:

(1) 系统的初角动量是多少?

(2) 哑铃被拉回后, 系统的角速度是多少?

(3) 哑铃拉回前后系统的动能各为多少? 有无不同? 试说明原因.

4-24 一质量为 0.05 kg 的物块系于绳的一端, 绳的另一端则由光滑水平面上的小孔穿过(如图), 物块和小孔的距离原为 0.2 m 并以角速度 3 rad/s 绕小孔旋转. 现向下拉绳使物块运动的圆周半径缩小为 0.1 m , 求:



习题 4-24 图

(1) 物块旋转的角速度的大小;

(2) 物块动能的变化.

4-25 有一质量 $m_1=100\text{ g}$ 、半径 $r_1=8\text{ cm}$ 的均质圆板,每分钟匀速地转 $n_1=120\text{ r}$. 另有一质量为 $m_2=150\text{ g}$ 、半径为 $r_2=12\text{ cm}$ 的均质圆板,每分钟匀速地转 $n_2=40\text{ r}$,两个圆板的转轴在同一直线上,转动方向相同. 若将两板沿转轴方向推进,合二为一,求:

- (1) 结合前各圆板的角动量和转动动能;
- (2) 结合后系统的角速度和转动动能;
- (3) 如果原来两圆板转动方向相反,再做(2).

4-26 一长 $l=0.40\text{ m}$ 的均匀木棒,质量 $M=1.00\text{ kg}$,可绕水平轴 O 在竖直平面内转动,开始时棒自然地竖直悬垂. 现有质量 $m=8\text{ g}$ 的子弹以 $v=200\text{ m/s}$ 的速率从 A 点射入棒中, A 点与 O 点相距 $\frac{3}{4}l$ (如图),求:

- (1) 棒开始运动时的角速度;
- (2) 棒的最大偏转角.

4-27 空心圆环可绕光滑的竖直固定轴 AC 自由转动,转动惯量为 I_0 ,环的半径为 R ,初始时环的角速度为 ω_0 . 质量为 m 的小球静止在环内最高处 A 点,由于某种微小干扰,小球沿环向下滑动,问小球滑到与环心 O 同一高度的 B 点和环的最低处 C 点时,环的角速度及小球相对于环的速度各为多大? (设环内壁和小球都是光滑的,小球可视为质点,环截面半径 $r \ll R$)

***4-28** 质量为 m 、长为 l 的均质杆, B 端放在桌边缘. A 端用手支住,使杆成水平. 突然释放 A 端,在此瞬间,求:

- (1) 杆质心的加速度;
- (2) 杆 B 端所受的力.

4-29 质量为 m 、半径为 R 的一个圆盘,可以绕通过盘心、垂直于盘面的水平轴转动. 一个小物体,质量也是 m ,附在圆盘边缘上. 当小物体所在半径处于水平时,将圆盘释放. 求小物体到达最低位置时圆盘的角速度.

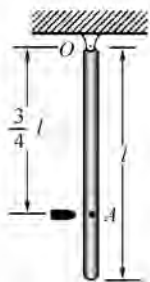
4-30 一质量为 M 、半径为 R 的飞轮,以角速度 ω 绕通过中心的水平轴转动. 在某瞬间,有一质量为 m 的碎片从轮缘上飞出,碎片飞出时的飞行方向竖直向上.

- (1) 求碎片的飞行高度;
- (2) 求缺损的飞轮的角速度、角动量和转动动能.

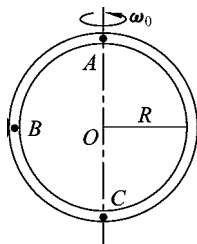
4-31 一质量为 M 、半径为 R 的匀质圆柱体,放在粗糙水平面上,上面绕着细绳,绳与圆柱体之间无滑动. 现用水平力 F_0 拉动细绳,使圆柱体在水平面上做无滑动的滚动. 如图所示,求:

- (1) 圆柱体质心加速度的大小;
- (2) 水平面对圆柱体摩擦力的大小.

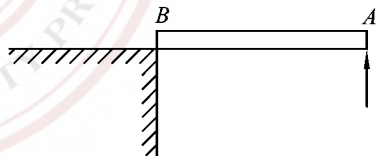
4-32 一绕有电缆的大木轮,质量 $M=1\,000\text{ kg}$,绕中心轴的



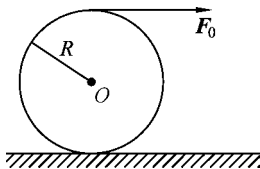
习题 4-26 图



习题 4-27 图

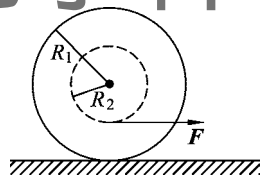


习题 4-28 图



习题 4-31 图

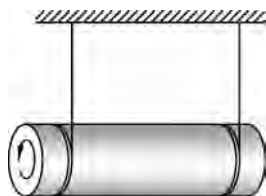
转动惯量 $I = 300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $R_1 = 1.00 \text{ m}$, $R_2 = 0.40 \text{ m}$, 如图所示. 设大木轮与地面间无相对滑动, 当用 $F = 9\,800 \text{ N}$ 的水平力拉电缆时, 问:



习题 4-32 图

- (1) 木轮将向左还是向右运动?
- (2) 轴心的加速度多大? 木轮受地面的摩擦力多大?
- (3) 为保证木轮与地面间无相对滑动, 摩擦因数至少为多大?

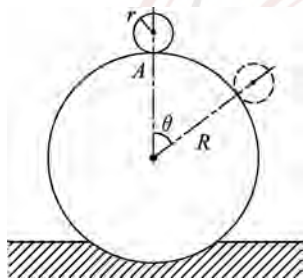
4-33 如图所示, 一根质量为 M 、半径为 R 的长圆柱体两端附近用两根轻软的绳子对称环绕, 两绳的另一端固定在天花板上. 开始时水平托住这根圆柱体, 并使两绳竖直拉紧, 然后释放. 求:



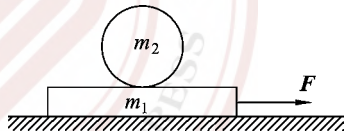
习题 4-33 图

- (1) 圆柱体向下运动时平动加速度的大小;
- (2) 每根绳子中张力的大小.

4-34 半径为 R 的大球固定不动, 有一半径为 r 、质量为 m 的小球沿大球表面从顶点 A 由静止无滑动地滚下. 当两球刚开始分离时, 求两球球心的连线与竖直线的夹角 θ .



习题 4-34 图



习题 4-35 图

4-35 一质量为 m_1 的木板, 在水平力 F 的作用下沿水平面运动, 木板与水平面间的摩擦因数为 μ . 在木板上有一质量为 m_2 的圆柱体, 如图所示. 假设此圆柱体在木板上做纯滚动, 求木板加速度的大小.

第5章

流体力学

流体力学是人类在与自然界的斗争和生产实践中逐步发展起来的,中国古代就有大禹治水疏通江河的传说.物质通常可分为固体和流体,流体是指能够流动的物质,包括液体和气体.流体力学是研究流体的力学行为的科学,按照流体的运动方式又可分为流体静力学和流体动力学.通常,流体流动性的好坏、流体的密度和黏滞性等除了与流体的种类有关外,还与温度等因素有关(如沥青).最简单的流体模型称为理想流体,是指完全不可压缩和无黏滞(无内摩擦)的流体.本章首先讨论流体静力学,之后以理想流体为对象,从质量守恒和能量守恒出发,得到流体的连续性原理和伯努利方程等规律,最后简单讨论黏滞流体的力学规律.

5.1 流体静力学

► 5.1.1 静止流体中的压强

液体和气体都是具有流动性的连续介质,统称**流体**.流体内部不同部分之间存在着相互作用力,设想流体内有一面积元 ΔS ,面积元两边的流体之间存在着相互作用力.如果作用力沿面积元的表面有切向分量,那么,面积元两侧的相邻的流层之间将要发生滑动.对于静止流体,流体中的任何一个部分都处于静止状态.所以静止流体中任何一个面积元受到的作用力不存在切向分量,作用力必沿面积元的法线方向,且指向 ΔS ,是一种压力.面积元 ΔS 上所受压力的大小定义为该面积元上的平均压强,

$$\bar{p} = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \quad (5.1-1)$$

当 $\Delta S \rightarrow 0$ 时,平均压强的极限就是液体中该点处的压强,

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}. \quad (5.1-2)$$

在 SI 制中,压强的单位是牛/米² (N/m²),称帕斯卡,简称帕,记作 Pa,量纲是 L⁻¹MT⁻².

通过流体中某一点,可以有不同的小面元,与这些小面元相应的压强之间有什么关系呢?设想在流体中某一点周围作一个三棱直角体元[图 5-1(a)],体元侧面受到的压强如

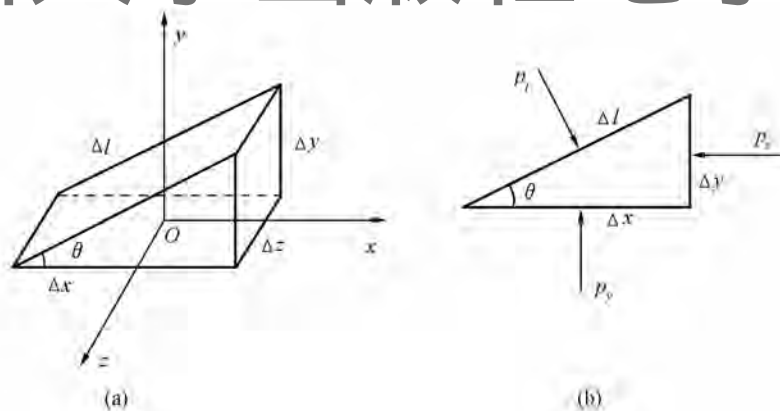


图 5-1 流体内压强各向同性

图 5-1(b) 所示. 若流体密度为 ρ , 体元重 $\Delta G = \rho g \Delta V = \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta y \Delta z$. 因为体积元处于平衡状态, 在 x, y 轴方向, 有

$$\begin{aligned} p_l \Delta l \Delta z \sin \theta &= p_x \Delta y \Delta z, \\ p_y \Delta x \Delta z &= p_l \Delta l \Delta z \cos \theta + \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

因为 $\Delta l \sin \theta = \Delta y$, $\Delta l \cos \theta = \Delta x$, 两式化简, 有

$$p_l = p_x, \quad p_y = p_l + \frac{1}{2} \rho g \Delta y.$$

当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时, $\Delta y \rightarrow 0$, 所以

$$p_x = p_y = p_l.$$

同理可证,

$$p_x = p_y = p_z.$$

因此, 静止流体中任一点处的压强有一定值, 与所取面元的方位无关, 它是各向同性的. 无论对于静止或流动的流体, 这结论都成立.



图 5-2 同一水平面上各点压强相等

在静止流体中, 取一水平柱体 (图 5-2). 设柱体截面积 ΔS 极小, 两端的压强分别为 p_A 和 p_B . 由于流体静止, 所以柱体两端的作用力平衡, 有 $p_A \Delta S = p_B \Delta S$, 即

$$p_A = p_B.$$

上式说明, 在静止流体中, 同一水平面上各点的压强相等.

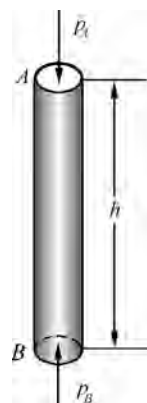
如果上面取的柱体在竖直方向, 两端相距 h (图 5-3), 柱体上端受向下的压力 $p_A \Delta S$, 下端受向上的压力 $p_B \Delta S$, 柱体重 $\rho g \Delta V = \rho g \Delta S h$. 柱体静止时, 三个力平衡, 有

$$p_A \Delta S + \rho g \Delta S h = p_B \Delta S.$$

化简得

$$p_B - p_A = \rho g h. \quad (5.1-3)$$

就是说, 静止流体中同一竖直线上相距 h 的两点之间的压强差为 $\rho g h$. 如果液柱上端面为自由液面, 则 p_A 即为大气压强 p_0 , 于是液面下深度

图 5-3 竖直相距 h 两点的压强

h 处的压强为

$$p = p_0 + \rho gh.$$

(5.1-4)

► 5.1.2 帕斯卡原理

如果一个装有流体的容器上方用一个可以移动的轻活塞封住,活塞上除受大气压强 p_0 作用外,如果还附加一个压强 Δp (图 5-4),则活塞下深度 h 处的压强变为

$$p' = p_0 + \Delta p + \rho gh.$$

(5.1-5)

就是说,通过活塞作用在液体表面的压强 $p_0 + \Delta p$,被等量地传到流体中,这就是**帕斯卡原理**,即作用在密封容器中流体上的压强,被等量地传到流体中各处及器壁上.



图 5-4 帕斯卡原理



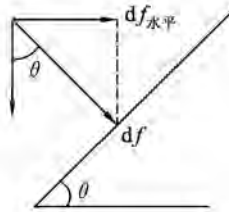
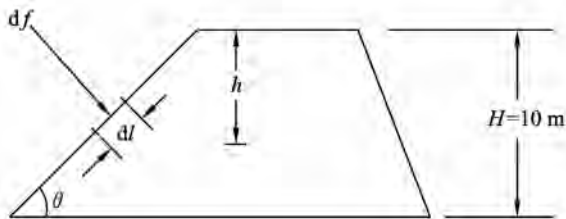
图 5-5 液压机原理

帕斯卡原理的一个重要应用是液压机(图 5-5),一个 U 形容器的两端用活塞密封,活塞面积分别是 S_1, S_2 . 若 S_1 上有作用力 F_1 ,在液体中产生压强 $p = \frac{F_1}{S_1}$. 此压强等量地传到另一端活塞 S_2 上,产生一个向上的作用力 F_2 ,

$$F_2 = pS_2 = \frac{F_1}{S_1} S_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1.$$

如果 $S_2 \gg S_1$, 则 $F_2 \gg F_1$. 所以,可以通过液压机,用较小的作用力产生巨大的动力.

例 5-1 一大坝迎水一面与水平方向夹角 θ ,水深 10 m. 每米长大坝受水的压力有多大?



例 5-1 图

解 设大坝横截面如图所示,在迎水的坝面上取面元 dS . 面元长为 1 m,宽 dl ,离水面距离 h ,则面元上受作用力

$$df = p dS = \rho gh dl.$$

此作用力与坝面垂直,水平分量为

$$df_{\text{水平}} = df \sin \theta = \rho gh dl \sin \theta.$$

因为 $dl \sin \theta = dh$, 所以

$$df_{\text{水平}} = \rho gh dh.$$

大坝每米长度受水平压力为

$$f_{\text{水平}} = \int df_{\text{水平}} = \int_0^H \rho g h dh = \frac{1}{2} \rho g H^2.$$

代入数据得

$$f_{\text{水平}} = 4.9 \times 10^5 \text{ N}.$$

► 5.1.3 流体中的浮力 阿基米德原理

考虑一个形状不规则的物体浸没在流体中,物体表面将受到液体的压力.由于液体中的压强随着深度的增加而增加,因此,液体作用在物体下方的向上的压力要大于作用在物体上方的向下的压力,总的效果是有一个向上的作用力,这个作用力称作**浮力**.

如果浸没在流体中的物体与流体是同种物质,具有相同的密度,那么,物体将在流体中保持静止,也就是说,作用在物体上的浮力就等于物体所受的重力,即

$$F = \rho g V. \quad (5.1-6)$$

其中 ρ 是流体密度, V 是物体浸没在流体中的体积,也是物体排开液体的体积.上式表明,物体在流体中所受的浮力,相当于物体浸没在流体中同体积液体受的重力,而且只与流体密度、物体浸没在流体中的体积有关,与物体的材料和形状无关.因此,上式也是任何物体在流体中浮力的表达式.物体在流体中所受的浮力等于该物体排开同体积流体受的重力,这就是**阿基米德原理**.它是公元前3世纪由希腊的阿基米德(Archimedes)提出的.

5.2 流体的流动

► 5.2.1 理想流体

流体的运动往往是非常复杂的,为了便于讨论,有必要对流体作一些简化.

首先,假定流体是不可压缩的,即流体的密度是个常量.实际上任何流体都是可以压缩的.液体的可压缩性较小,可以近似地看作不可压缩.气体的可压缩性较大,流动性也大,只要有很小的压强差,就可以使气体迅速地流动起来,从而使各处的密度差减小到最小.因此,在研究气体流动时,也可以把气体近似地看作是**不可压缩的**.其次,假定流体内部的摩擦力为零,即流体流动中没有能量的损耗.实际的流体由于内部各部分的流速不同,存在内摩擦力,从而阻碍流体内部各部分之间的相对运动,这种性质称作**黏滞性**.有些流体,像水、酒精等,内摩擦力很小,气体的内摩擦力更小.我们把不可压缩的、无黏滞性的流体,称作**理想流体**.

流体的运动,可以看成是组成流体的所有质点的运动总和.在流体流动的过程中,流体流过空间某一点的速度,通常随时间而变化,是时间的函数.如果这个速度不随时间而变,那么,流体的这种流动称作**稳定流动**,或**定常流动**.因此,流体做稳定流动时,虽然空间各点的流速各不相同,但流速的空间分布是不随时间变化的.流速的空间分布称**流速场**.

► 5.2.2 流线和流管

为了形象地描述流体的流动情况,设想流体流动的区域中有这样的一些曲线,在每一时刻,线上每一点的切线方向都是该处流体质点的速度方向,这种曲线称作**流线**.对于稳定流动,流线的形状和分布不随时间改变,并且流线和流体质点的运动径迹重合.如图5-6所示

是流体流过圆筒管道和球形物体以及流线型物体时的流线。

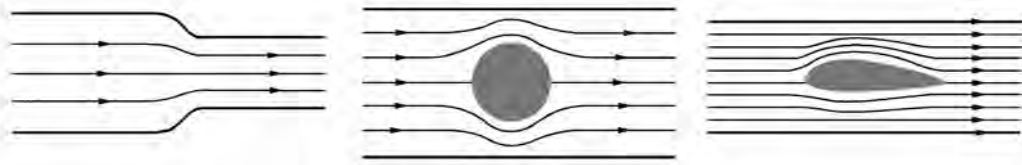


图 5-6 流线

如果在流体内取一个面元,该面元的法向与流经面元的流线平行.过面元周界上各点的流线就在流体内形成一根流管(图 5-7).对于稳定流动,流管内的流体不会流出管外,同样,流管外的流体也不会流入管内.因此,稳定流动的流管形状不随时间而改变.整个流体可以看作由若干流管组成,流体在流管中的流动规律代表了整个流体的运动规律,这就为研究流体的运动提供了方便.

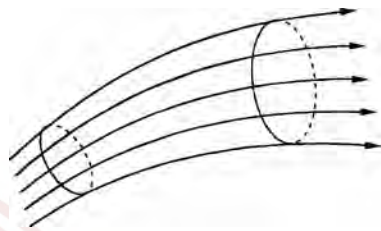


图 5-7 流管

► 5.2.3 流体的连续性原理

在做稳定流动的流体中取一流管(图 5-8),假定流管两端的横截面积分别为 $\Delta S_1, \Delta S_2$, 两端的流速分别为 v_1, v_2 . 由于流体的不可压缩性,故在任何一个时间间隔 Δt 内,从一端流入的流体等于从另一端流出的流体,即

$$\rho v_1 \Delta S_1 \Delta t = \rho v_2 \Delta S_2 \Delta t = \text{常量}.$$

化简得

$$v_1 \Delta S_1 = v_2 \Delta S_2 = \text{常量},$$

$$(5.2-1)$$

即理想流体做稳定流动时,流管中任一横截面积与该处流速之积是个常量,这就是流体的连续性原理.式中 $v\Delta S$ 表示单位时间内流过某截面的流体体积,称为流量.上式也表示,沿同一流管流量守恒.

SI 制中流量的单位为米³/秒(m³/s).流量的单位也可以用千克/秒(kg/s).

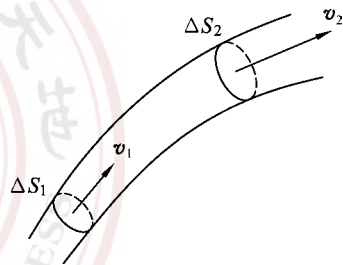


图 5-8 连续性原理

5.3 伯努利方程

伯努利方程是惯性系中研究理想流体在重力场中做定常流动时,一流管(或流线)上的压强、流速和高度的关系.

在流体中取一流管(图 5-9),设在 A, B 两处的横截面积分别是 S_1, S_2 . 流速分别是 v_1, v_2 , 压强分别是 p_1, p_2 . 对于同一参照平面,它们的高度分别是 h_1, h_2 . 经过一时间间隔,位于 A, B 处的流体分别流到 A', B' 处. 在

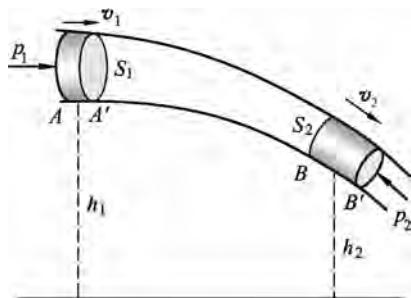


图 5-9 伯努利方程

所考虑的时间间隔前后,管内的流体有了变化,位于 A, A' 之间的流体流入管内,位于 B, B' 之间的流体流出管外. 但对于 $A'B$ 这一段流管,流体的运动状态没有变化,流体的质量也没有发生变化,因而动能和势能都没有变化. 所以,此时间间隔前后 AB 段流体能量的变化,只要考虑此间流出管外的流体和流入管内的流体的能量变化.

令 $\overline{AA'} = \Delta l_1$, $\overline{BB'} = \Delta l_2$, 流出管外的流体的体积 $\Delta V_2 = S_2 \Delta l_2$, 流入管内的流体的体积 $\Delta V_1 = S_1 \Delta l_1$. 由于理想流体不可压缩, $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$. 流出和流入的流体动能的差值为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \rho \Delta V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \Delta V v_1^2.$$

重力势能的差值为

$$\Delta E_p = \rho g \Delta V h_2 - \rho g \Delta V h_1.$$

外力对流入流体做的功为

$$W_1 = f_1 \Delta l_1 = p_1 S_1 \Delta l_1 = p_1 \Delta V.$$

外力对流出流体做的功为

$$W_2 = -f_2 \Delta l_2 = -p_2 S_2 \Delta l_2 = -p_2 \Delta V.$$

根据功能原理, $W_1 + W_2 = \Delta E_k + \Delta E_p$, 即

$$p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \frac{1}{2} \rho \Delta V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \Delta V v_1^2 + \rho g \Delta V h_2 - \rho g \Delta V h_1.$$

整理得

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2,$$

或

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{常量}. \quad (5.3-1)$$

这就是**伯努利方程**. 从上面的推导过程可以看出, (5.3-1) 式中等式左边的三项分别是单位体积流体所受压力所做的功, 以及单位体积流体的动能和势能. 因此, 伯努利方程是机械能守恒定律应用在流体力学中的一种形式. 伯努利方程还可表达为

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = \text{常量}. \quad (5.3-2)$$

式中 $\frac{p}{\rho g}$, $\frac{v^2}{2g}$ 和 h 都具有长度的量纲, 分别称作压力头、速度头和水头(高度头).

在上面的推导中, 我们选取一定流体并沿一流管运动, 所涉及的压强 p 和流速 v 实际上是流管截面上的平均值. 如果令流管的截面积 S_1, S_2 缩小, 使流管变为流线, 则(5.3-1)式和(5.3-2)式仍然成立. 因此, 伯努利方程可以表述为理想流体做稳定流动时, 在同一流线上任一点 $p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h$ 为一常量.

伯努利方程在水利工程、化工工程以及造船、航空等领域有广泛的应用.

例 5-2 设有一大容器装满水, 在水面下方 h 处的器壁上有一个小孔, 水从孔中流出, 试求水的流速.

解 由于容器较大, 水从小孔流出, 液面下降极慢, 可以看作是稳定流动. 取任一流线, 一端在液面上 A 处, 该处压强是大气压强 p_0 , 流速为零. 若以小孔处作为参照面, 高度为 h , 流线另一端取小孔 B 处, 该处压强也是 p_0 , 高度为零, 流速为 v , 则

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2.$$

由此解得

$$v = \sqrt{2gh}.$$

结果表明,小孔处流速和物体自高度 h 处自由下落得到的速度是相同的.

例 5-3 图示是文丘里流量计示意图,若管道入口处和窄口处的截面积分别为 S_1 和 S_2 ,压强分别是 p_1 和 p_2 ;U 形管中水银密度为 ρ' ,两端高度差为 h ;流量计管中流体密度为 ρ . 设管道中流体是理想流体,求其流量.

解 取管道为流管,在图中 1 和 2 处,

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

根据连续性方程

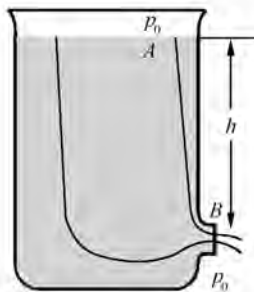
$$v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

U 形管中水银柱高度差 h 与两端压强 p_1 和 p_2 有关,

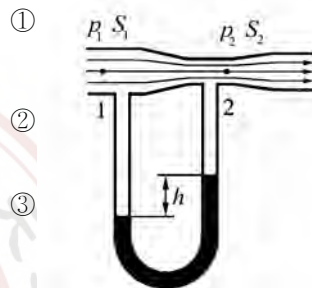
$$p_1 - p_2 = (\rho' - \rho) gh.$$

由①、②、③式,可解得流量

$$Q = v_1 S_1 = v_2 S_2 = \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho) gh}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} S_1 S_2.$$



例 5-2 图



例 5-3 图

* 5.4 黏滯流体

► 5.4.1 流体的黏滯性

在以上的讨论中,流体都被当作理想流体来处理.实际上,流动的流体或多或少地存在内摩擦力.例如,在圆形管道中流动的流体,在管道的横截面上,各点的流速并不都相同.通常离中心轴越近,流速越快;离中心轴越远,流速越慢.于是,在管道中流动的流体出现了分层流动,各层流体只做相对滑动而彼此不相混合,这种流动称为层流.在任意两个流层之间,流速快的要带动流速慢的,流速慢的要阻碍流速快的,这就是内摩擦力.内摩擦力与流层平行,是切向力.流体内部具有内摩擦力的性质,就是流体的黏滯性.

假定流体流层沿 x 轴方向,层面与 z 轴正交,有不同 z 值的流层具有不同的流速(图 5-10).若 z 层的流速为 v , $z + dz$ 层的流速为 $v + dv$,那么, $\frac{dv}{dz}$ 称为 z 层的速度梯度,它表示流速沿 z 方向的变化率.实验证明,两层流体之间的内摩擦力和流层的面积 ΔS 以及该处的速度梯度成正比,即

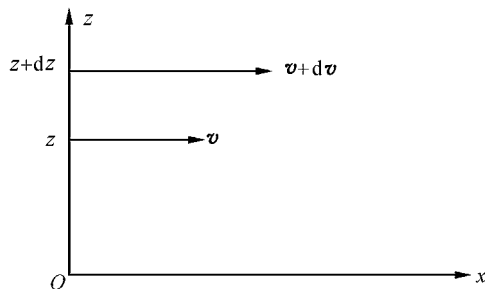


图 5-10 层流的速度梯度

$$f = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S. \quad (5.4-1)$$

其中 η 称流体的黏滞系数, 也称流体的黏度, 在 SI 制中, 它的单位为帕·秒 ($\text{Pa} \cdot \text{s}$), 量纲为 $\text{L}^{-1} \text{MT}^{-1}$. 黏滞系数除了与流体的性质有关外, 还与温度有关. 表 5-1 给出了几种流体在不同温度时的黏滞系数.

表 5-1 几种流体在不同温度下的黏滞系数

液体	温度/ $^{\circ}\text{C}$	$\eta/10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$	气体	温度/ $^{\circ}\text{C}$	$\eta/10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
水	0	1.79	空气	20	1.82
	20	1.01		671	4.2
	50	0.55	水蒸气	0	0.9
	100	0.25		100	1.27
水银	0	1.69	CO_2	20	1.47
	20	1.55		302	2.7
酒精	0	1.84	氢	20	0.89
	20	1.20		251	1.30
轻机油	15	11.3	氮	20	1.96
重机油	15	66	CH_4	20	1.10

► 5.4.2 湍流和雷诺数

流体在管道中流动并不总是保持层流, 由于流速和其他条件的不同, 流动会出现沿垂直于管轴方向的不规则流动. 层流被破坏, 流动呈现混杂、紊乱的特征, 这样的流动称作湍流.

实验表明, 发出湍流的临界流速与一个无量纲的量 R_e 相对应. R_e 由下式表示

$$R_e = \frac{\rho v r}{\eta}. \quad (5.4-2)$$

式中 ρ , η 和 v 分别是流体的密度、黏滞系数和速度, r 是流管半径, R_e 称作雷诺数. 由层流过渡到湍流的雷诺数, 称为临界雷诺数, 记作 R_{ec} .

在光滑的金属圆管中, R_{ec} 在 2 000 ~ 2 300 范围内, 当 $R_e < R_{ec}$ 时, 流动表现为层流; 当 $R_e > R_{ec}$ 时, 流动表现为湍流.

► 5.4.3 泊肃叶公式

在流速不大或管径较小、流体做分层流动的条件下, 可以证明, 流体流经长为 l 的水平细管时, 离中心轴 r 处的流速是

$$v = \frac{1}{4\eta l} (p_1 - p_2) (R^2 - r^2).$$

式中 R 是管径, p_1 和 p_2 是细管两端流体的压强. 通过细管的流量为

$$Q = \int v dS = \int_0^R 2\pi v r dr = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr,$$

可得

$$Q = \frac{1}{8\eta l} \pi R^4 (p_1 - p_2). \quad (5.4-3)$$

此式即泊肃叶公式. 根据 (5.4-3) 式测定了 l , R , p_1 , p_2 和 Q , 就可以求得 η . 这里提供了一个测定黏滞系数的方法.

► 5.4.4 斯托克斯公式

固体在黏滞流体中运动时, 会有两种阻力: 一种是附在固体表面的流体与邻层流体之

间的内摩擦力,称黏滞阻力;另一种是固体运动时,固体前后压力差引起的压差阻力.当固体运动速度较小时,压差阻力可以忽略.在这种情况下,半径为 r 的球形物体在黏滞系数为 η 的流体中以速度 v 运动时所受的阻力 f 为

$$f=6\pi\eta rv. \quad (5.4-4)$$

这就是斯托克斯公式.

例 5-4 有一半径为 r 、密度为 ρ 的小球,在密度为 ρ_0 ($\rho_0 < \rho$)、黏滞系数为 η 的静止流体中下落.若所受阻力满足斯托克斯公式,试求小球在流体中的收尾速度.

解 小球重 $G=\frac{4}{3}\pi r^3\rho g$,在流体中所受浮力 $F=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0 g$,因 $G>F$,小球在流体中加速下落,随着速度的增大,黏滞阻力 f 也增大.当三力平衡时,即 $G=F+f$ 时小球不再加速,以速度 v_T 下落,此即收尾速度.

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho g=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0 g+6\pi\eta rv_T,$$

由此解得

$$v_T=\frac{2(\rho-\rho_0)}{9\eta}gr^2.$$

内容提要

1. 流体静力学.

压强分布:各向同性(无论对静止流体或流动流体该结论都成立),高度相差 h 的两点压强差为 $\Delta p=\rho gh$.

帕斯卡原理:作用在密闭容器中流体上的压强等值地传到流体各处和器壁上.

阿基米德原理:物体在流体中所受的浮力等于该物体排开同体积流体所受的重力.

2. 理想流体:不可压缩、无黏滞性.

定常流动:流体流过空间任一点的速度不随时间而变,流场可用流线或流管描绘.

流量:体积流量(m^3/s)、质量流量(kg/s).

3. 连续性原理:流体不可压缩,定常流动时,通过流管横截面的流量相等,

$$v\Delta S=\text{常量}.$$

4. 伯努利方程:在理想流体的定常流动中沿任一流线有

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh=\text{常量}, \text{或} \frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}+h=\text{常量}.$$

习 题

5-1 有一水平管子,由左向右横截面积逐渐缩小,液体由左向右做稳定流动.流速沿管子如何变化?加速度在什么方向?如果在流体中分隔出一个小方块部分,左、右两边哪边压力大?压强沿管轴如何变化?

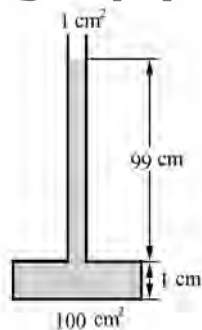
5-2 把题 5-1 中的管子竖直放置,截面积上大下小,水由上向下流.流速如何变化?压

强怎样变化? 如果截面上小下大, 情况又怎样?

5-3 用手拉住一根细绳, 细绳另一端系住一细棒的一端, 慢慢把细棒放入水中. 如果是木棒, 棒在水中要倾斜, 最后横着浮在水面上; 如果是铁棒, 它就竖直浸入水中, 直到与水底接触. 为什么?

5-4 自来水龙头流出的水流, 水流往下是越来越粗还是越来越细? 为什么?

5-5 一根横截面积为 1 cm^2 的管子, 连在一个容器上面, 容器高度为 1 cm , 横截面积为 100 cm^2 . 往管内注水, 使水对容器底部的深度为 100 cm (如图).



习题 5-5 图

(1) 水对容器底面的作用力是多少?

(2) 系统内水受的重力是多少?

(3) 解释(1)、(2)求得的数值为什么不同?

5-6 在弹簧测力计 D 下端系一物块 A, 使 A 浸没在烧杯 B 的液体 C 中 (如图), 烧杯重 7.3 N , 液体重 11.0 N , 弹簧测力计的读数是 18.3 N , 台秤 E 的读数是 54.8 N , 物块 A 的体积是 $2.83 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, 问:

(1) 液体的密度是多少?

(2) 把物块 A 拉到液体之外, 弹簧测力计 D 的读数是多少?

5-7 一水坝闸门的上边缘与水面齐平, 闸门宽度 $L=3 \text{ m}$, 高 $H=5 \text{ m}$.

(1) 水对闸门的压力是多少?

(2) 如果闸门转轴安装在闸门下底边上, 水压对闸门转轴的力矩是多少?

(3) 如果闸门转轴安装在过闸门中心的水平线上, 水压对转轴的力矩是多少?

(4) 如果闸门转轴安装在闸门的一个竖直边上, 水压对闸门的力矩是多少?

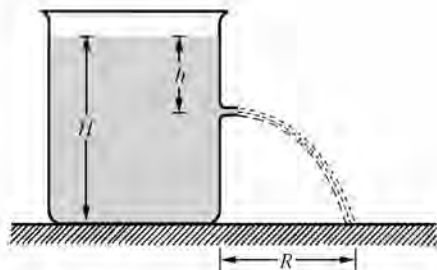
5-8 均匀地将水注入一容器中, 注入的流量为 $Q=150 \text{ cm}^3/\text{s}$, 容器底有个面积为 $S=0.5 \text{ cm}^2$ 的小孔, 使水不断流出, 求达到稳定状态时, 容器中水的深度.

5-9 一个开口的柱形水池, 水深 H , 在水池一侧水面下 h 处开一小孔 (如图).

(1) 从小孔射出的水流到地面后距池壁的距离 R 是多少?

(2) 在池壁上多高处开一个小孔, 使射出的水流与(1)有相同的射程?

(3) 在什么地方开孔, 可以使水流有最大的射程? 最大射程是多少?



习题 5-9 图

5-10 一水平管子, 其中一段的横截面积为 0.1 m^2 , 另一段的横截面积为 0.05 m^2 , 第一段中水的流速为 5 m/s , 第二段中的压强为 $2 \times 10^5 \text{ Pa}$, 求:

(1) 第二段中水的流速和第一段中水的压强;

(2) 通过管子的流量.

*5-11 在一直径为 0.10 m 、高为 0.20 m 的圆筒形容器的底上,开一个截面积为 1 cm^2 的小孔,水注入容器内的流量为 $1.4\times 10^{-4}\text{ m}^3/\text{s}$.

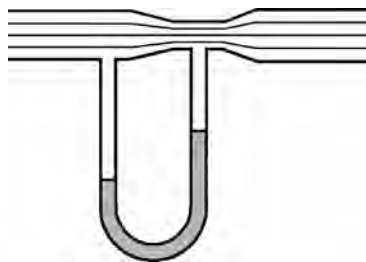
- (1) 容器内水面能上升多高?
- (2) 达到这个高度后,停止向容器内注水,容器内水全部流出所需时间是多少?

5-12 在一横截面积为 10 cm^2 的水平管内有水流动,在管的另一段横截面积减小为 5 cm^2 ,两处压力差为 300 Pa ,问 60 s 内从管中流出多少立方米水?

5-13 从一水平管中排水的流量是 $0.004\text{ m}^3/\text{s}$,管的横截面积是 0.001 m^2 ,该处压强是 $1.2\times 10^5\text{ Pa}$,要使压强减小为 $1.0\times 10^5\text{ Pa}$,管的横截面积应为多少?

5-14 水管的横截面积在粗处为 40 cm^2 ,细处为 10 cm^2 (如图),流量为 $3\ 000\text{ cm}^3/\text{s}$,求:

- (1) 粗处和细处水的流速;
- (2) 粗处和细处的压强差;
- (3) U形管中水银柱高度差.



习题 5-14 图

*5-15 $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ 的水在半径为 1.0 cm 的管内流动,如果在管的中心处流速为 10 cm/s ,则由于黏滞性使得沿管长为 2 m 的两个截面间的压强下降多少? 已知 $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时水的黏滞系数为 $\eta=1.005\times 10^{-3}\text{ Pa}\cdot\text{s}$.

*5-16 有一黏滞流体以层流流过一管子,试证明该流体中的流量与截面各点速度均为轴线处速度一半时的流量相等.

*5-17 在液体中有一个空气泡,直径为 1 mm ,设液体黏滞系数为 $0.15\text{ Pa}\cdot\text{s}$,密度为 $0.9\times 10^3\text{ kg/m}^3$,求空气泡在该液体中上升的收尾速度的大小.如果这个气泡在水中上升,收尾速度是多少?

*5-18 一个半径为 1 mm 的钢球在盛有甘油的容器中下落,在某一时刻,钢球的加速度恰好为自由落体加速度的一半.求:

- (1) 这时钢球的速度大小;
- (2) 钢球在甘油中的收尾速度的大小.(钢球的密度是 $8.5\times 10^3\text{ kg/m}^3$,甘油密度是 $1.32\times 10^3\text{ kg/m}^3$,甘油黏滞系数取 $0.83\text{ Pa}\cdot\text{s}$)