平面简谐波及其波动方程

波　动

平面简谐波及其波动方程

产生机械波的必要条件：

- **波源（振源）**：振动在空间的传播称为波动，
  激发波动的振动系统称为波源。
- **产生机械波的必要条件为：**

  1）做机械振动的物体——波源；

  2）要有具有弹性的介质。

波的种类--横波和纵波：

横波—介质中质元的振动方向垂直于波的传播方向。

如：绳波　　横波只能在固体中传播。

纵波—介质中质元的振动方向平行于波的传播方向。

如：声波　　纵波可在任何介质中传播。

水面波—水表面除受张（压）应力外，还受重力和表面张力的作用。水面波为横波和纵波的叠加。

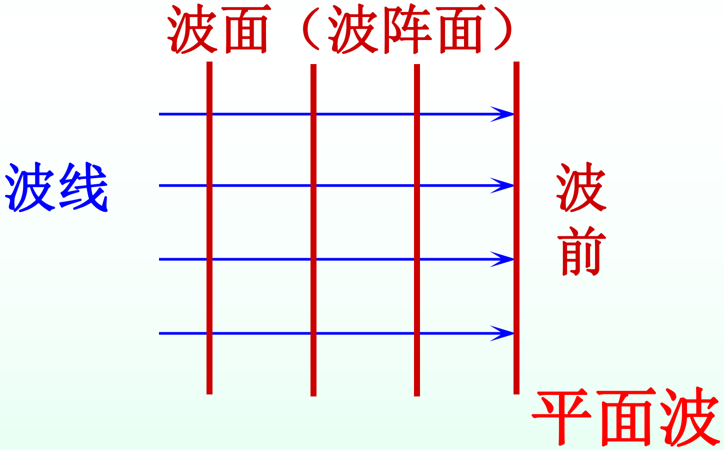
➢ 波传播的是振动的状态和能量，而不是质量。

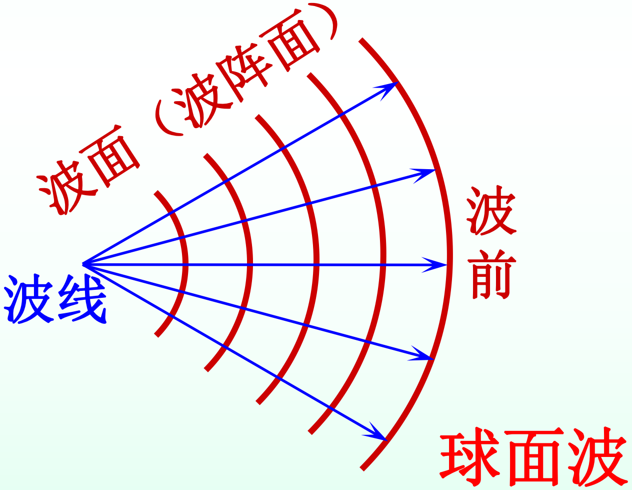
波线和波面:

波线—沿波的传播方向所画的射线。

波面—介质中振动相位相同的点所构成的面。

在各向同性的均匀介质中，波线恒与波面垂直。





球面波传到足够远时，在一小范围内可看作平面波。

（如：传到地球上的太阳光波）

波长、周期、频率、波速:

波长λ — 同一波线上相位差为2π的两质元间的距离。

周期T — 波传播一个波长的距离所需要的时间。

频率ν — 单位时间内传出的完整波形的个数。

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$$

波的周期、频率和波源的相同。

波速（相速）u — 单位时间内，某振动状态（相位）传播的距离。

$$\boxed{u = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T}}$$

波速的大小决定于弹性介质的性质，与波源无关。

固体中：
$$\begin{cases} u_{横} = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}} \\ u_{纵} = \sqrt{\dfrac{Y}{\rho}} \end{cases}$$

G：固体的切变弹性模量

Y：固体的杨氏弹性模量

张紧的软绳中：
$$u_{绳} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

T：张力；μ：质量线密度

流体中：
$$u = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

B：流体的容变弹性模量

空气中的声波：
$$u_{声} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \approx 331\, {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

波的频率决定于波源，波速决定于介质。所以：

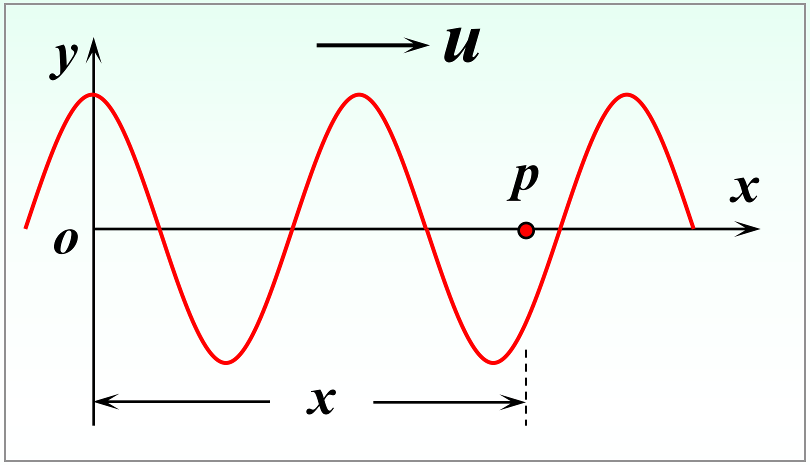
同一列波在不同介质中的波长不同。

平面简谐波方程：

设平面简谐波以波速 u 沿波线 x 传播。

波线上o点的振动方程为：

$$\boxed{y_o = A\cos\omega t}$$



波从o点传到 p 点需要时间：

$$\Delta t = \frac{x}{u}$$

即p点质元t 时刻的振动状态（相位）为o点质元t-Δt时刻的振动状态（相位）。

p点质元的振动方程：

$$\boxed{y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})}$$

称为（沿x正向传播的）平面简谐波方程或波函数。

若波沿x轴负方向传播，则波函数为：

$$y = A\cos\omega(t+\frac{x}{u})$$

若o点质元振动初相位$\varphi\neq 0$，则波函数为：

$$\boxed{y = A\cos[\omega(t\mp\frac{x}{u})+\phi]}$$

考虑到：$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ 和 $u = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T}$ 波函数还可写成：

$$\boxed{y = A\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})+\phi]}$$

$$\boxed{y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\phi]}$$

波动方程的运动学推导：

对$y = A\cos[\omega(t - x/u) + \phi_0]$求$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{t}$的二阶偏导数，得到

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right],$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\frac{\omega^2}{u^2} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right],$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

平面波的波动
微分方程

任何物理量y，若它与时间、坐标间的关系满足上式，则这一物理量就按波的形式传播。

思考题

①在波的传播方向，相距一个波长两点相位差是多少，相距Δx的任意两点的相位差是多少？

② 质点的振动速度和波的传播速度是一回事吗？为什么？