冲量 动量定理

动量定理

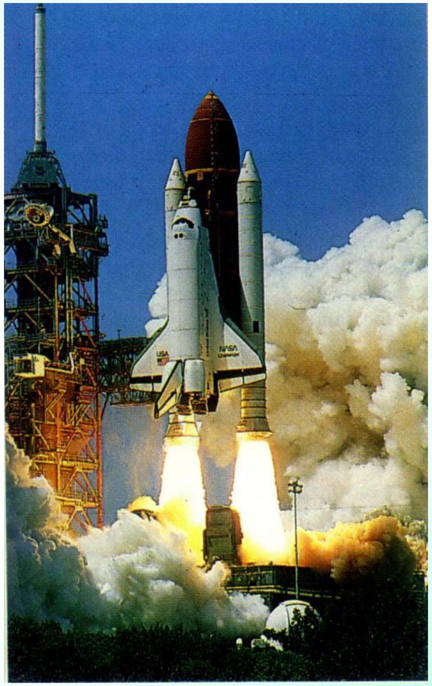
$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

重写牛顿第二定律的微分形式

$$\vec{F}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\,\vec{p}$$

考虑一过程，时间从 t_1-t_2，两端积分

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\,\vec{p}$$



航天飞机

左侧积分表示力对时间的累积量，叫做冲量。

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t$$

于是得到积分形式 $\vec{I}=\vec{p}_2-\vec{p}_1$

这就是动量定理：物体在运动过程中所受到的合外力的冲量，等于该物体动量的增量。

动量定理的几点说明：

(1)冲量的方向：

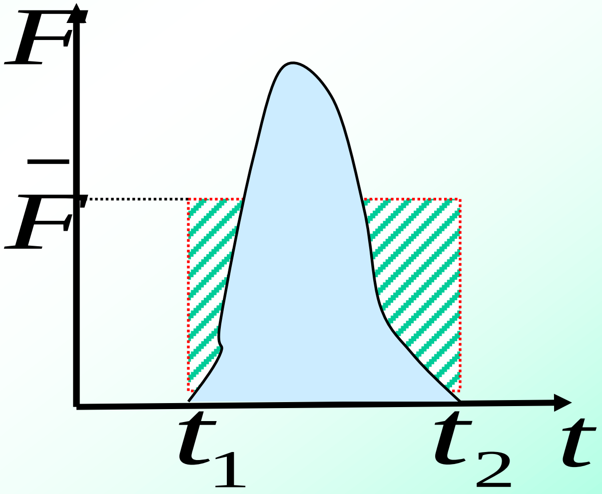
冲量 $\vec{I}$ 的方向一般不是某一瞬时力 $\vec{F}_i$ 的方向，而是所有元冲量 $\vec{F}\,\mathrm{d}t$ 的合矢量 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t$ 的方向。

(2)在直角坐标系中将矢量方程改为标量方程

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x\,\mathrm{d}t = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y\,\mathrm{d}t = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z\,\mathrm{d}t = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases}$$

动量定理在打击或碰撞问题中用来求平均力。

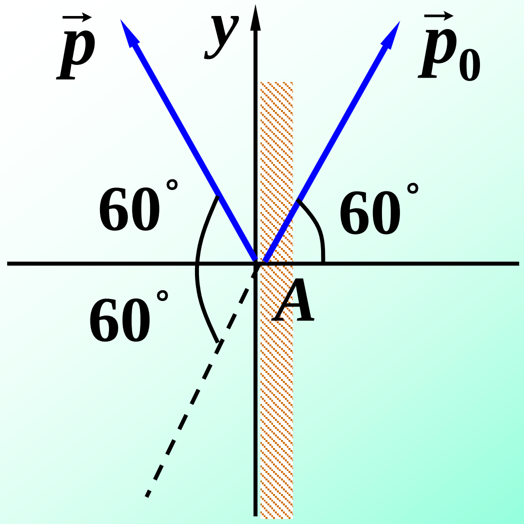
打击或碰撞，力 $\vec{F}$ 的方向保持不变，曲线与t轴所包围的面积就是t_1到t_2这段时间内力$\vec{F}$的冲量的大小，根据改变动量的等效性，得到平均力。



平均力定义 $$\bar{\vec{F}} = \int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}}{t-t_0} \mathrm{d}t$$

譬如，气体对容器壁的压强是由大量分子碰撞器壁产生的. 从分子运动角度研究气体压强，首先要考虑一个分子碰撞器壁的冲量.

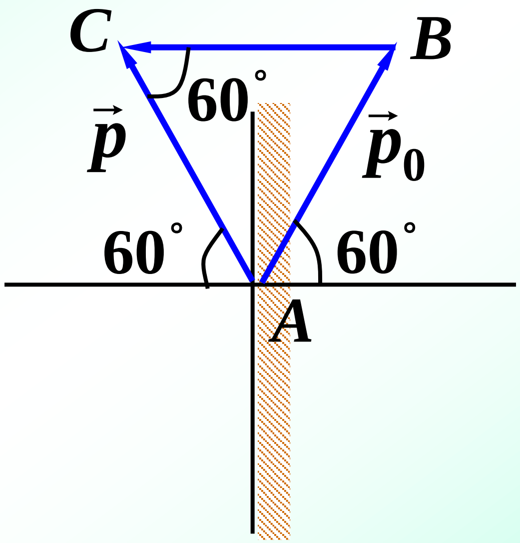
设某种气体分子质量为m，以速率 v 沿与器壁法线成60° 的方向运动与器壁碰撞，反射到容器内，沿与法线成60° 的另一方向以速率 v 运动，如图所示，求该气体分子作用于器壁的冲量.



将气体分子视为质点.

一个分子在一次碰撞器壁中动量的增量为

$$|\vec{p}-\vec{p}_0| = mv$$

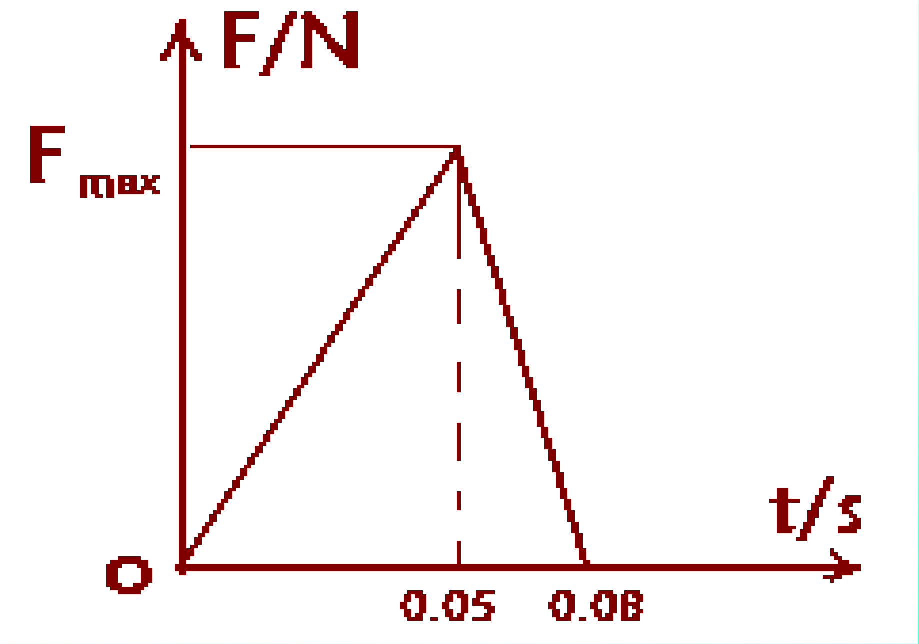


即分子一次碰撞施于器壁的冲量为

$$I = mv$$

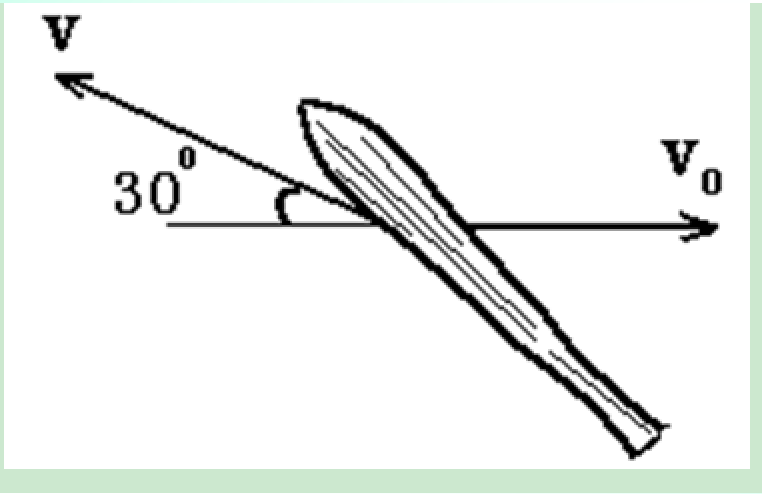
例题

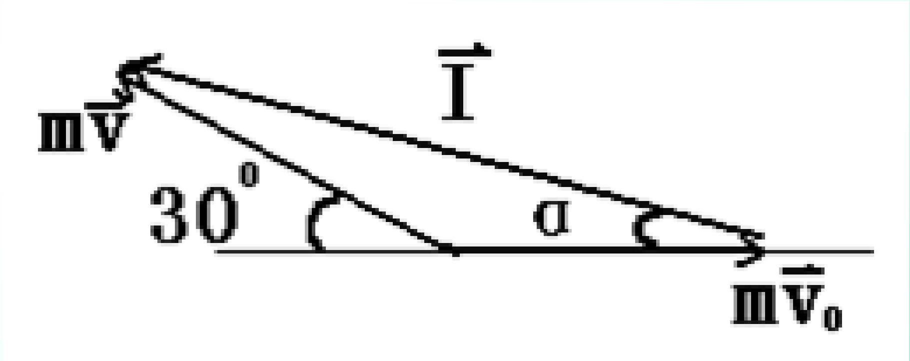
棒球的质量为 0.14kg，用棒击棒球的力随时间的变化如图所示。设棒球被击前后速度增量大小为 70m/s，求力的最大值（补充：和平均值）。打击时，不计重力。



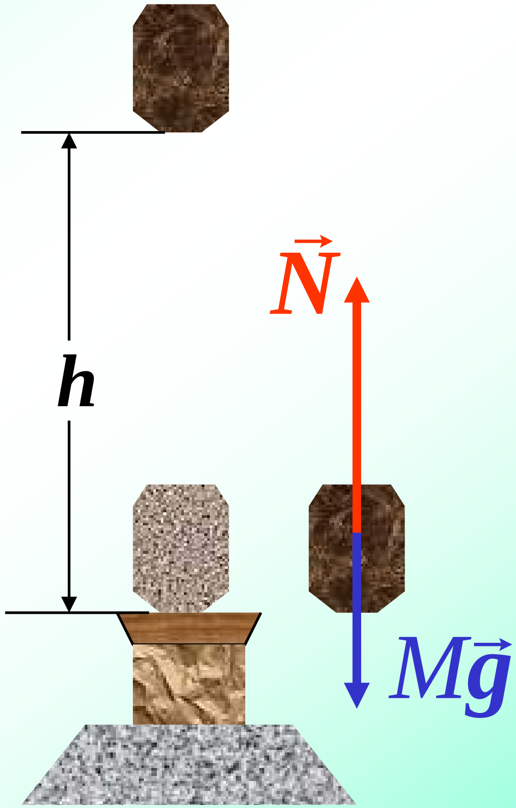
例题

棒球的质量为 0.14kg。棒球沿水平方向以速率 50m/s 投来，经棒击球后，球沿与水平成 30^0 飞出，速率为80m/s，球与棒接触时间为 0.02s，求棒击球的平均力。





例题　质量M=3t的重锤，从高度h=1.5m处自由落到受锻压的工件上，工件发生形变。如果作用的时间(1)τ=0.1s，(2)τ=0.01s。试求锤对工件的平均冲力。



解：以重锤为研究对象，分析受力，作受力图：

解法一：锤对工件的冲力变化范围很大，采用平均冲力计算，其反作用力用平均支持力代替。

在竖直方向利用动量定理，取竖直向上为正。

$$(\overline{N}-Mg)\tau = Mv - Mv_0$$

初状态动量为 $M\sqrt{2gh}$ 末状态动量为0

得到$(\overline{N}-Mg)\tau=-M\sqrt{2gh}$

解得 $\overline{N}=Mg+M\sqrt{2gh}/\tau$

代入$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{h}$、$\boldsymbol{\tau}$的值，求得：

$$\overline{N}=3\times10^{3}\times(9.8+\sqrt{2\times9.8\times1.5}/0.1)$$
$$=1.92\times10^{5}\text{牛顿}$$

（1） $$\overline{N}=3\times10^{3}\times(9.8+\sqrt{2\times9.8\times1.5}/0.1)$$
$$=1.92\times10^{5}\text{牛顿}$$

（2） $$\overline{N}=3\times10^{3}\times(9.8+\sqrt{2\times9.8\times1.5}/0.01)$$

$$=1.9\times10^{6}\text{牛顿}$$

例题

一股水流从水管中喷射到墙上，如果水的速率为5.0m/s，水管每秒喷出水量300cm^3，假定水喷到墙上不溅回来，试估计水流作用于墙上的平均作用力有多大?

每秒喷射到墙上的水的 质量

$$\mathrm{m} = \rho\mathrm{V} = 1\times 10^{3}\times 300\times 10^{-6} = 0.3\mathrm{kg}$$

$$\overline{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m\cdot\Delta v}{\Delta t} = 0.3\times 5 = 1.5\text{牛}$$

例题

机枪每分钟发射120发子弹，每颗子弹的质量为20g，子弹发射速度为800m/s，求射击时的平均后座力

$$\overline{F}=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{120\times 20\times 10^{-3}\times 800}{60}=32\text{牛}$$

动量定理是牛顿第二定律的积分形式，因此其适用范围是惯性系。

动量定理在处理变质量问题时很方便。

一辆装煤车以**3m/s**的速度从煤斗下面通过，煤粉通过煤斗以 每秒**5**吨的速度竖直注入车厢，如果车厢的速度保持不变，车厢与钢轨间摩擦忽略不计，求牵引力的大小。

$$F=\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{p}}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(mv)$$

$$=m\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}+v\frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,t}$$

$$=1.5\times10^{4}N$$