06. 3　简谐运动的能量

一、如何确定简谐运动的运动方程

二、简谐运动的能量

一、如何确定简谐运动的运动方程?

- 先确定振动系统的平衡位置，并以平衡位置为坐标原点，建立坐标系；
- 然后分析物体偏离平衡位置的受力情况，根据牛顿运动定律，列出简谐运动的动力学方程，求出通解；
- 最后再由初始条件确定振幅和初相位。

由初始条件确定振幅A和初相位φ：

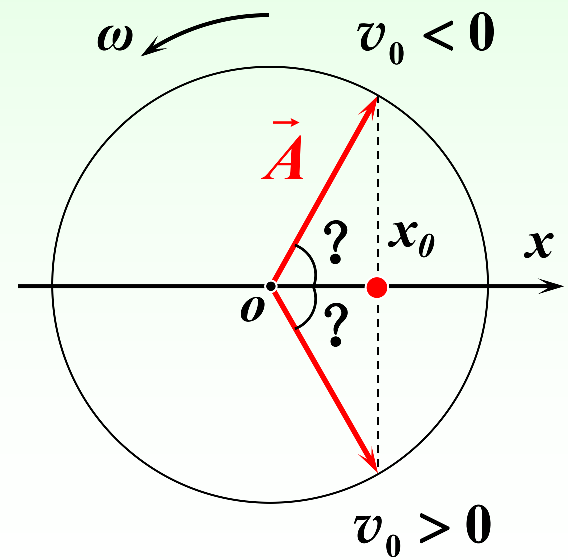
设 $t=0$ 时，$x=x_0$、$v=v_0$，

则：$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases}$

得：$\begin{cases} \boxed{A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{v_0^2}{\omega^2}}} \\ \boxed{\tan\varphi = -\dfrac{v_0}{\omega x_0}} \end{cases}$

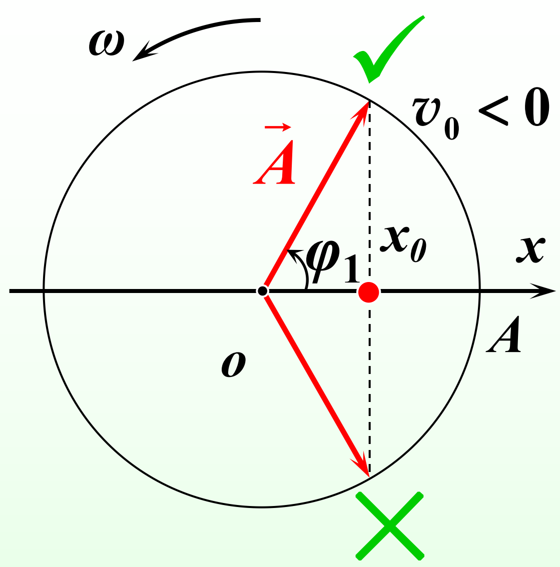
因正切函数和余弦函数的周期不同，故初相位φ的值还要根据x_0和v_0的具体情况做进一步的确定。

由参考圆知，除了速度为零的两个最远端外，对于同一个初位移x_0，都会有2个速度、也就是有两个相位角与之对应。 φ=?

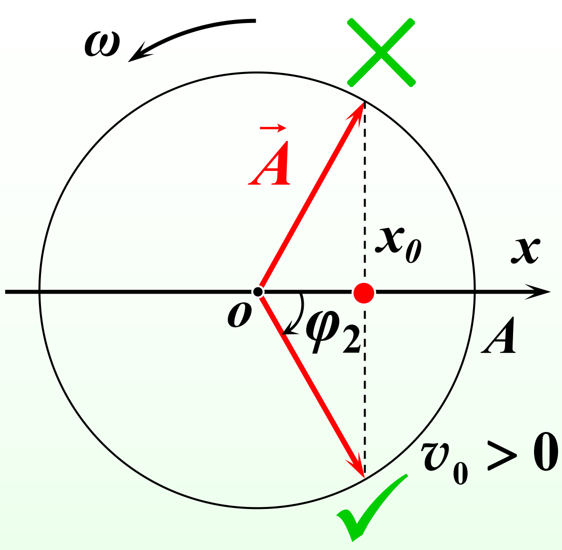


◆再用初速度的方向确定φ：

若 $v_0 < 0$ ， 则$\varphi=\varphi_1$

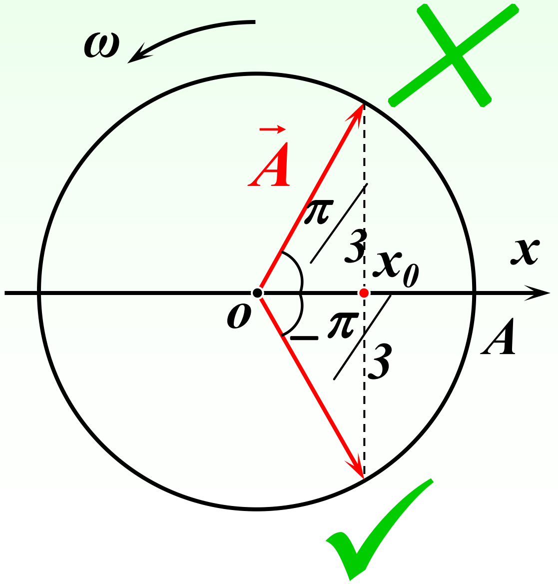


若$v_0 > 0$，则$\varphi=\varphi_2$



若 $t=0$ 时，$x_0 = A/2$，$v_0 > 0$

（1）由旋转矢量图得：$\varphi = -\pi/3$

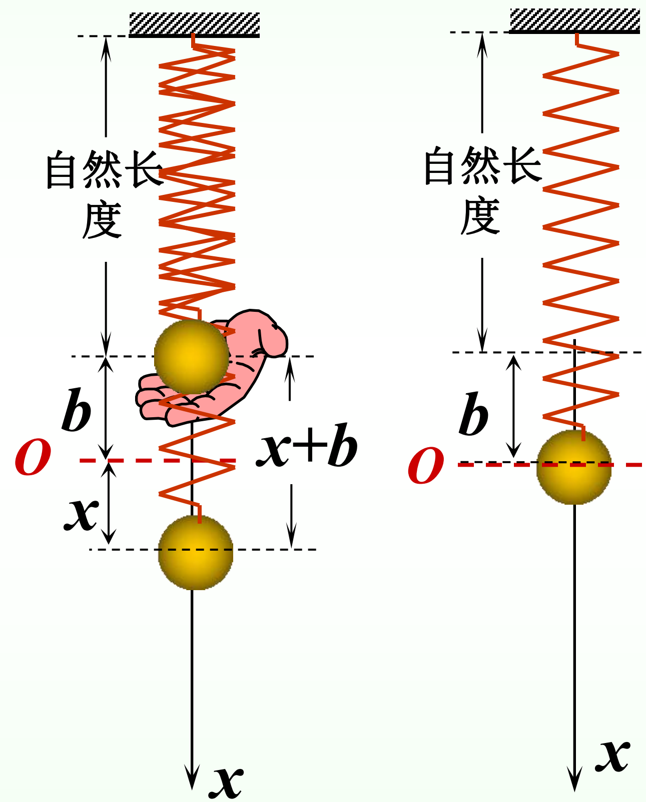


（2）由
$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi = \dfrac{A}{2} \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi > 0 \end{cases}$$

得：
$$\begin{cases} \varphi = \pm\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\varphi < 0 \end{cases}$$

$\therefore\ \varphi = -\dfrac{\pi}{3}$ （参见例6-1）

例题1：垂直悬挂的轻弹簧下端系一质量为m的小球，静止时弹簧伸长量为b 。用手将重物托起使弹簧保持自然长度后放手，（1）求证放手后小球作简谐振动；（2）写出其振动方程。



（1）此为竖直方向弹簧振子。

静止悬挂时， $mg = kb$

取小球静力平衡时的位置（平衡位置）为坐标原点O，

x轴向下为正，

小球由初始位置开始运动，当它相对于原点的位移为x时，

弹簧形变为x+b,

小球受力为 $F = mg - k(b + x) = -kx$

小球受到的是线性回复力的作用，因此它做的是简谐运动。

例题1：垂直悬挂的轻弹簧下端系一质量为m的小球，静止时弹簧伸长量为b 。用手将重物托起使弹簧保持自然长度后放手，（1）求证放手后小球作简谐振动；（2）写出其振动方程。

（2）由牛顿运动定律 $F=-kx=m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$

得小球运动的动力学方程为 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{k}{m}x=0$

令$\dfrac{k}{m}=\omega^2$ ，得 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$

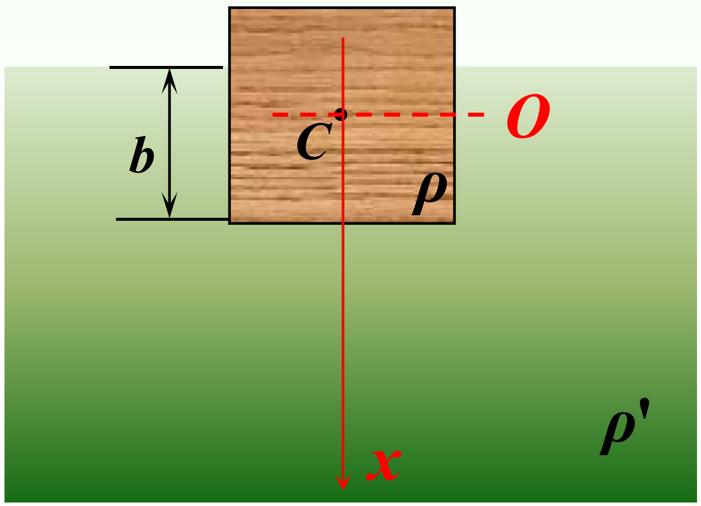
其通解为 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 其中 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{g}{b}}$

又t=0时，x_0= -b且v_0=0

$\therefore A=b,\quad \varphi=\pi$

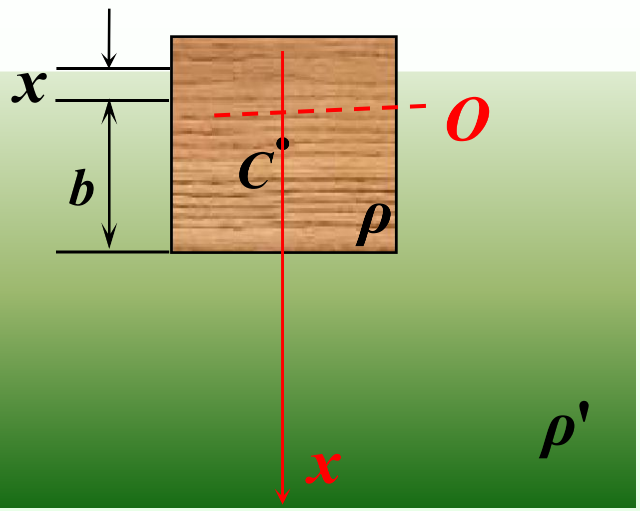
振动的运动学方程为 $x=b\cos(\sqrt{\dfrac{g}{b}}t+\pi)$

例2：一密度为ρ、边长为L的正方体木块浮在水面上，静止时水面以下高度为b。现用外力将木块慢慢地再压下h_0的深度后放手，若水的密度为ρ'，不计水的阻力，（1）求证木块作的是简谐运动，（2）写出其简谐运动方程。



静止时　$\rho L^3 g = \rho' L^2 b g$

将此时木块质心的位置C设为坐标原点O，x轴向下为正，



当木块相对于坐标原点的位移为x时，

$$\Sigma F = \rho L^3 g - \rho' L^2 (b + x) g$$
$$= -\rho' L^2 g x$$

木块所受合外力满足线性回复力的条件，因此木块作简谐运动

例2：一密度为ρ、边长为L的正方体木块浮在水面上，静止时水面以下高度为b。现用外力将木块慢慢地再压下h_0的深度后放手，若水的密度为ρ'，不计水的阻力，（1）求证木块作的是简谐运动，（2）写出其简谐运动方程。

（2）由 $\Sigma F = ma$

得 $\rho L^3 \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\rho' L^2 g x$ 　即 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\rho' g}{\rho L} x = 0$

令 $\dfrac{\rho' g}{\rho L} = \omega^2$ 　则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$

方程通解为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 　其中角频率 $\omega = \sqrt{\dfrac{\rho' g}{\rho L}}$

又t=0时，$x_0=h_0$，$v_0=0$，故$A=h_0$，$\varphi=0$，

木块作简谐运动的运动学方程为

$$x = h_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\rho' g}{\rho L}}\, t\right)$$

二、简谐运动的能量

以水平弹簧振子为例： $(\omega^2=\frac{k}{m})$

任意时刻 t：

弹性势能： $E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$

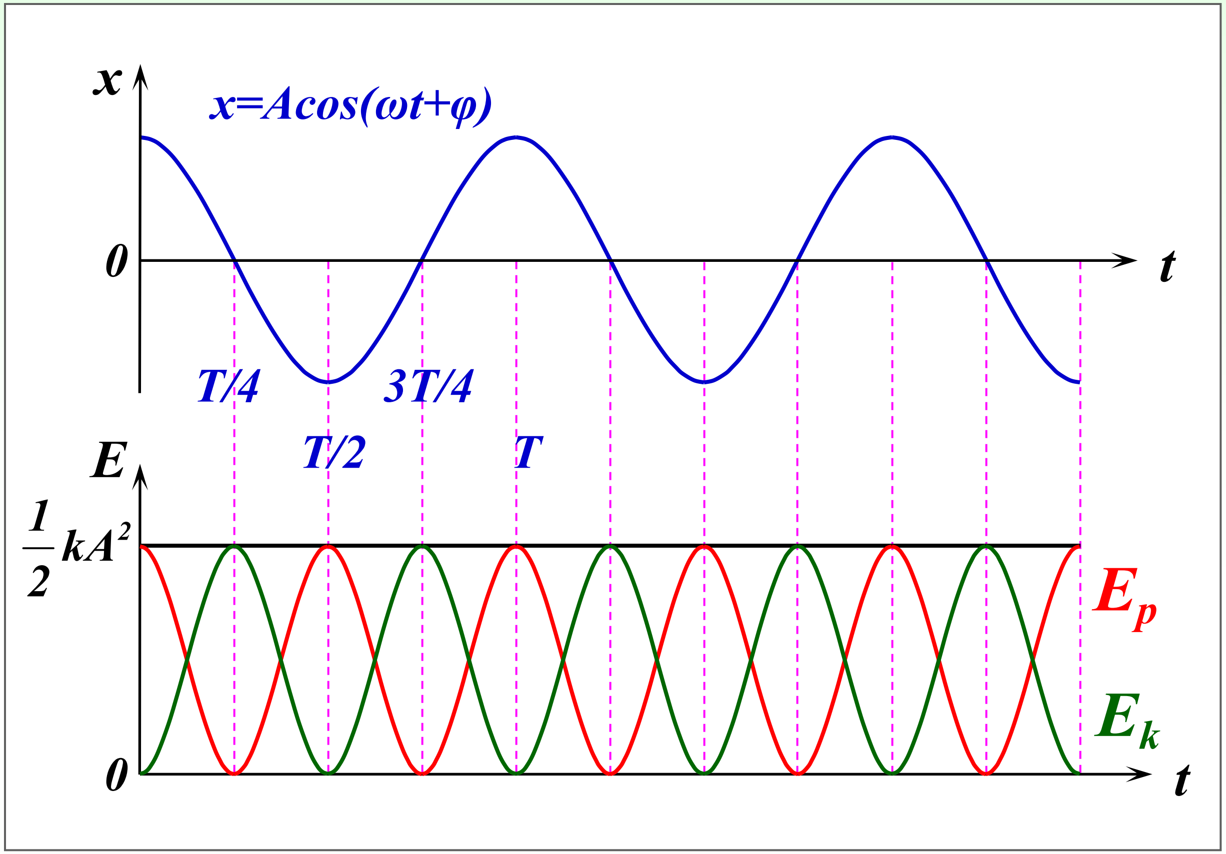
动 能： $E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

$$=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

总机械能：

$$\boxed{E=E_p+E_k=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}mv_m^2}$$

——机械能守恒



$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_k = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

(1) E_k、E_p周期性变化的频率为简谐振动的两倍。

(2) 总机械能 $E = E_k + E_p =$ 常量 。

(3) $\overline{E}_k = \overline{E}_p = \dfrac{1}{2}E$

例题3：一质量为0.25kg的物体在弹性力作用下作简谐运动，弹簧的劲度系数为25N/m。如果开始振动时系统具有势能0.06J和动能0.02J，求（1）振动的振幅；（2）动能等于势能时物体的位移；（3）经过平衡位置时物体的速度。

解：（1）简谐运动的总能量 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$

所以 $\frac{1}{2}kA^2 = 0.08\text{J}$

代入k的值解得A=0.08m。

（2）动能等于势能时，势能 $E_p = \frac{1}{2}E = 0.04\text{J}$

$\therefore \frac{1}{2}kx^2 = 0.04\text{J},$ 代入k的值解得位移x=±0.57m。

（3）过平衡位置时，势能为零，所以动能

$E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2 = 0.08\text{J},$ 代入质量的值得到v=±0.8m/s.

小 结

- 质点在线性回复力作用下围绕平衡位置的运动就是简谐振动，简谐运动的位移随时间的变化为$x=A\cos(\omega t+\varphi)$；
- 简谐运动的三个特征量中，振动周期决定于振动系统本身的性质，振幅决定于振动的能量，而初相则决定于时间原点的选择；
- 质点做简谐运动时，动能和势能都随时间变化，动能和势能在相互转换，但总能量保持不变。

思考题

在竖直方向弹簧振子的简谐运动中，除了有弹性势能的变化外，还有重力势能的变化，那它的势能是不是也能用 $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ 来表达（式子中x为质点相对于平衡位置的位移）？如果能，则重力势能的零点应选在哪里?