同学们好！今天我们来学习静电场的第五讲高斯定理的应用

一般情况下，当电荷分布给定时，从高斯定理只能求出通过某一闭合曲面的电通量，并不能把电场中各点的场强确定下来。

但是，当电荷分布具有某些特殊的对称性，从而使相应的电场分布也具有一定的对称性时，应用高斯定理来计算场强，却要比用场强叠加原理简便的多。对电场对称性的要求：（1）高斯面上场强大小处处相等；（2）场强方向与高斯面上单位法线矢量的夹角处处相等。

下面举几个电荷分布具有对称性的电场来说明如何应用高斯定理计算场强。

1：均匀带电球面的电场分布

设该球面半径为 R，所带电荷量为 q(q＞0)。因为电荷是均匀分布在球面上的，所以球面内外的电场应该具有球对称性，即离球心等距离点上的电场强度大小相等，方向沿着球的半径方向。如图，作一半径 r＞带电球面半径 R 的同心球面作为高斯面，则通过这一高斯面的电通量为

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2$$

$$\text{由高斯定理得} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\text{所以，} E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

与点电荷的场强公式完全相同，这说明均匀带电球面外的电场，如同全部电荷集中在球心处的一个点电荷所激发的场强一样。

要求球面内的电场分布，可以作一个半径 r＜带电球面半径 R 的同心球面作为高斯面，此高斯面的电通量

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2$$

但是，高斯面内包围的电荷量等于零，所以利用高斯定理可得 E=0。这说明均匀带电球面内电场强度处处为零。从均匀带电球面的电场分布曲线，可以看出，场强在球面上是不连续的。

插入

2：均匀带电球体的电场分布

设球体半径为 R，所带电荷总量为 q(q > 0)，与上例考虑相同，均匀带电球体内外电场也是球对称性分布。利用高斯定理

$$\Phi_E = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

得到：$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

我们看到球体外部场强 E 的分布与全部电荷量集中在球心时产生的电场是一样的。

为了求球体内的电场，如图，在球体内作半径 $r_1 < R$ 的同心球面作为高斯面，此高斯面的电通量

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2$$

此高斯面包围的电荷为：总电量除以球体的总体积再乘以高斯面内的体积等于

$$\sum q = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{R^3}$$

利用高斯定理得

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{qr^3}{R^3}$$

最后得：$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

从均匀带电球体的电场分布曲线可以看出，场强在球体表面处是连续的。其大小为

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

3：无限长均匀带电圆柱体的电场分布（λ、R)：

设圆柱体的半径为R，单位长度所带电的电荷量为λ(λ > 0)。由电荷分布的轴对称性可知，电场的分布也应该具有轴对称性，即离开圆柱体轴线距离为r的所有点处，电场强度的大小相等，方向都沿径向向外。如图，作高为L、底面半径为r的同轴圆柱形闭合曲面为高斯面，.通过高斯面的电通量为

$$\Phi_E = \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= E\iint_{侧} dS + E\iint_{上底} dS + E\iint_{下底} dS$$

因为上、下底面上的场强E与底面平行，所以上、下底面的电通量均为零，而在高斯面的侧面上各点场强的大小相等、方向处处与曲面正交，所以通过高斯面侧面的电通量为，

$$\Phi_E = E\cdot 周长 2\pi r\cdot 高 l$$

如果在圆柱体外如图，高斯面的半径r > 圆柱体的半径R，则高斯面所包围的电荷量为λl 。根据高斯定理

$$E\cdot 2\pi r\cdot l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

可得圆柱体外任一点的场强为，

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

在圆柱体内如图，高斯面的半径r < 圆柱体的半径R，则高斯面所包围的电荷量为：总电量除以圆柱体的总体积再乘以高斯面内的体积

$$\Sigma q = \frac{\lambda l}{\pi R^2 l}\cdot \pi r^2 l$$

根据高斯定理得

$$E\cdot 2\pi r\cdot l = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda l}{\pi R^2 l}\cdot \pi r^2 l$$

于是可求得圆柱体内任一点的场强为

$$E = \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$$

根据上述结果，可以画出无限长均匀带电圆柱体，空间各点的场强 E，随各点到带电圆柱体轴线的距离 r 的变化曲线图。

圆柱体内的场强与场点到轴线的距离成正比。圆柱体外的场强与场点到轴线的距离成反比。

插入

最后我们来分析无限大均匀带电平面的电场分布：

设带电平面的面电荷密度为σ，单位为库/米^2. 由于电荷均匀分布在一无限大的平面上，所以电场分布必然对带电平面对称，平面两侧离开平面等距离处的场强 E 大小相等、方向垂直于平面，并指向两侧。

选择如图所示的高斯面，使高斯面的两个底面到无限大带电平面的距离相等，并设底面面积为 S。由于电场线与高斯面侧面平行，所以通过高斯面侧面的电通量为零。

电场线都垂直穿过左、右两个底面，由高斯定理可得通过两个底面的电通量为：

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2ES = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$$

所以场强 $$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

上式表明，无限大带电平面所激发的场强与离开平面的距离无关，即在平面的两侧的电场是均匀电场。

从今天的几个例子可以看出，只有当电荷所激发的电场具有高度的对称性，我们再根据具体的对称性特点，找出合适的闭合面，使电场强度都垂直于这个闭合面，而且大小处处相等；或者使闭合面的一部分上场强处处与该面垂直，且大小相等，另一部分上场强与该面平行，因而通过该面的电通量为零。找到这样的闭合面，再根据高斯定理就能很方便地求出场强。一般情况下，如果带电系统不具有这样的对称性，高斯定理就不能用来计算场强。

最后请同学们用场强叠加原理思考一个问题：两块无限大带等量异号电荷的平行平面的电场分布。

今天的这一讲就到这里，同学们再见。