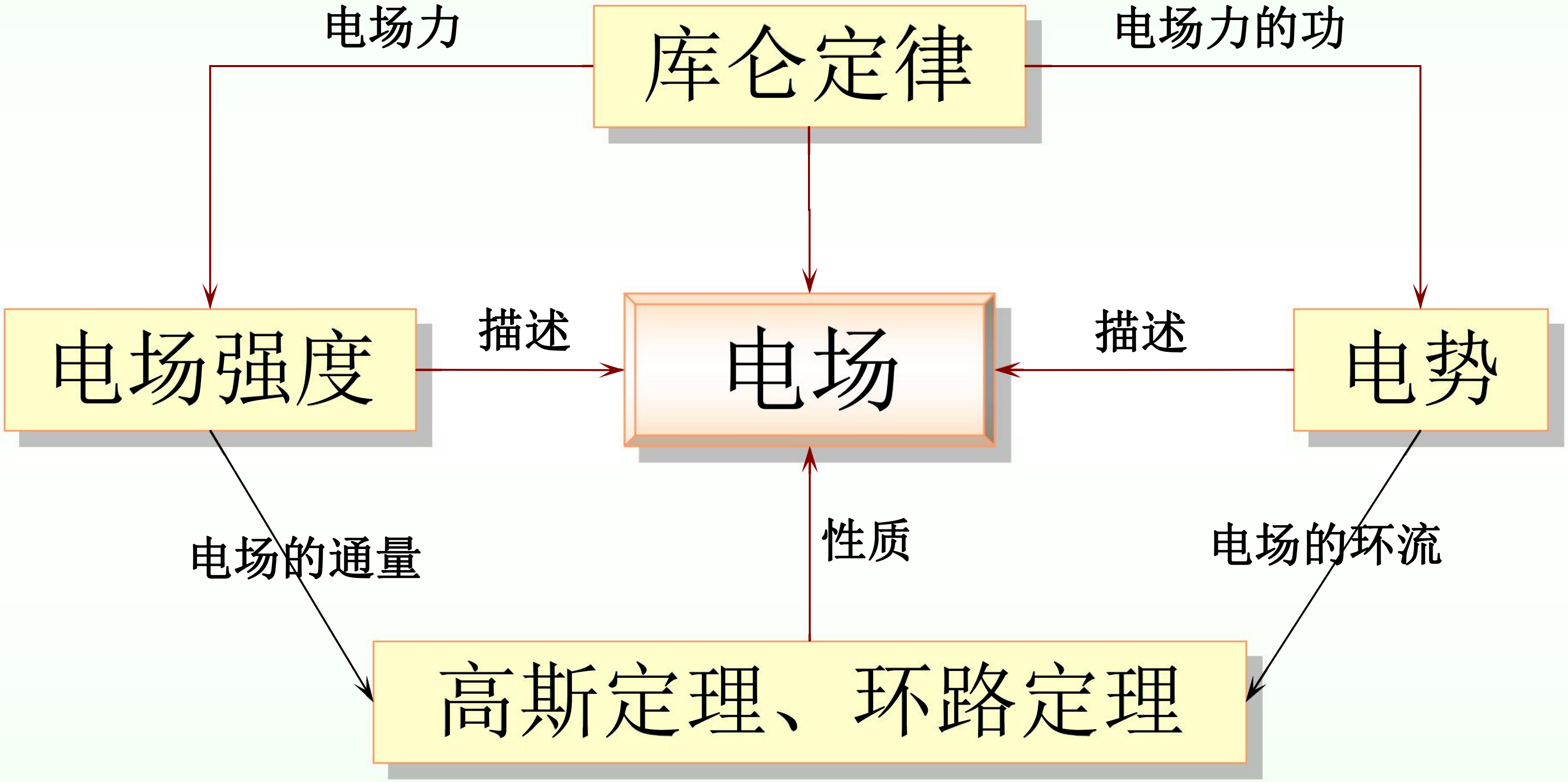
静　电　场



主要内容

(1) 库仑定律；

(2) 电场力和电场强度；

(3) 电场力的功和电势；

(4) 高斯定理和环路定理；

(5) 电场强度和电势的计算。

例题1：求电偶极子延长线上和中垂线上任一点的电场强度。

一对等量异号点电荷，当 $l << r$ 时称为**电偶极子**。

$\vec{p} = q\vec{l}$ 称为**电偶极矩**。$\vec{l}$ 由负电荷指向正电荷。

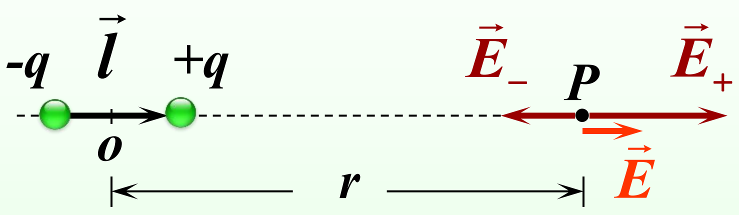
(1) 延长线上：

$$E = E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r-\frac{l}{2})^2} - \frac{1}{(r+\frac{l}{2})^2}\right]$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2lr}{r^4} = \frac{ql}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$\vec{E}$，$\vec{p}$ 始终同方向，所以：

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}}$$



(2) 中垂线上：

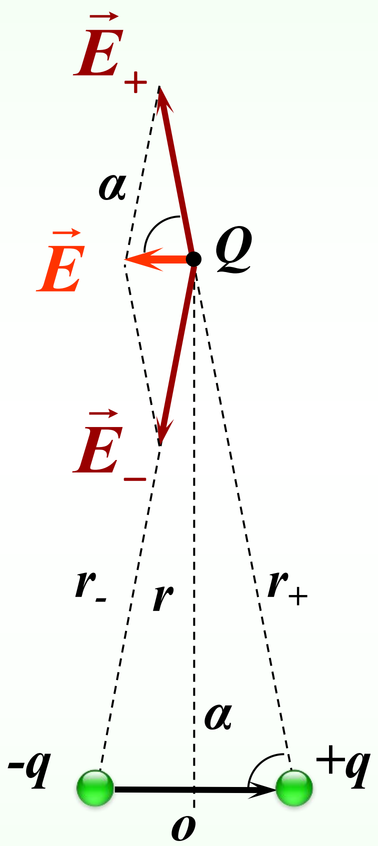
$$E = E_{+}\cos\alpha + E_{-}\cos\alpha$$

$$= 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)}\cdot\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+\frac{l^2}{4}}}$$

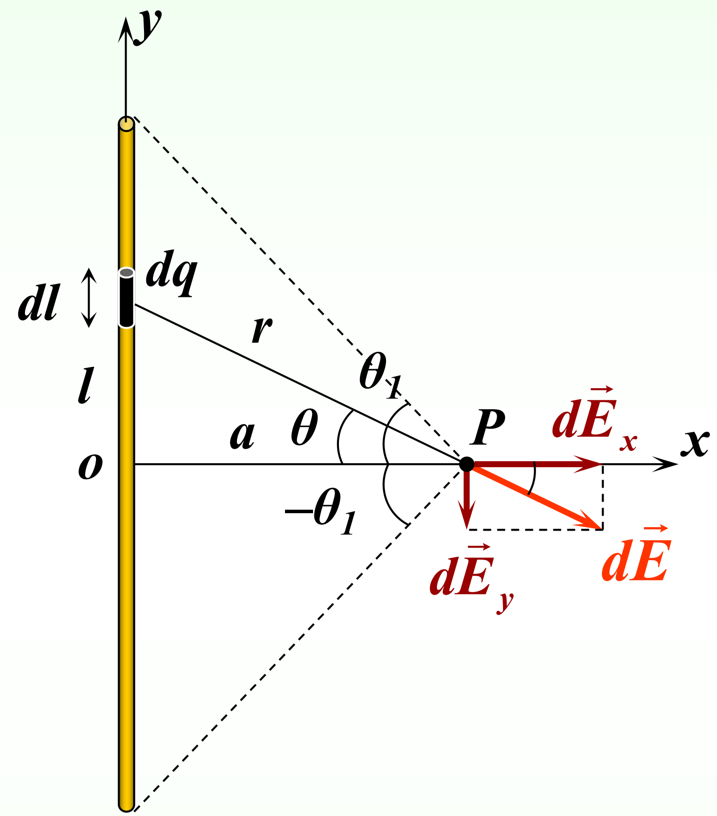
$$\approx \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$\vec{E}$，$\vec{p}$始终反方向，所以：

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$



例题2： 求长为L，线电荷密度为 λ 的均匀带电直线中垂面上一点的场强。



由对称性： $E_y = \int dE_y = 0$

$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$\because l = a\tan\theta\,,\quad \therefore dl = \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2}$$

得：$dE_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\, d\theta$

$$E = \int dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{-\theta_1}^{\theta_1}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda \sin\theta_1}{2\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{L}{\sqrt{L^2+(2a)^2}}$$

$$E = \frac{\lambda \sin\theta_1}{2\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{L}{\sqrt{L^2 + (2a)^2}}$$

讨论：(1) 当 $a << L$ 时，带电细棒可当作无限长。

此时：$\theta_1 \to \pi/2$，$\sin\theta_1 \to 1$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$

(2) 当 $a >> L$ 时，带电细棒可当作点电荷。

此时：$\theta_1 \to 0$，$\sin\theta_1 \to L/2a$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} \cdot \frac{L}{2a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

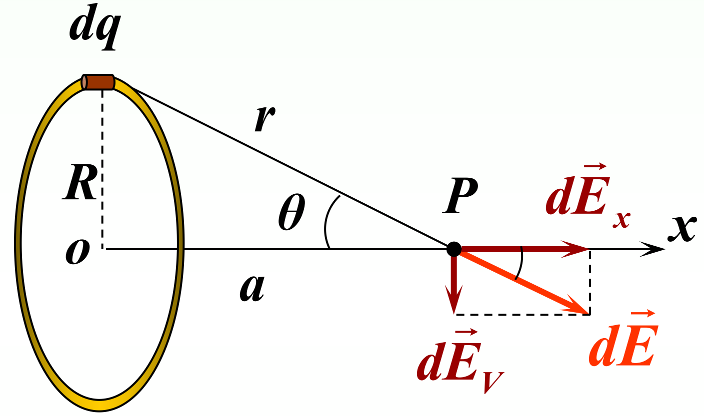
例题3：求半径为R，带电量为$q\ (q>0)$的均匀带电圆环轴线上一点的场强。

由对称性：$E_V=\int dE_V=0$

$$dE_x=dE\cdot\cos\theta=\frac{a\,dq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E=\int dE_x=\frac{a}{4\pi\varepsilon_0(R^2+a^2)^{3/2}}\oint dq$$

$$\boxed{=\frac{aq}{4\pi\varepsilon_0(R^2+a^2)^{3/2}}}$$



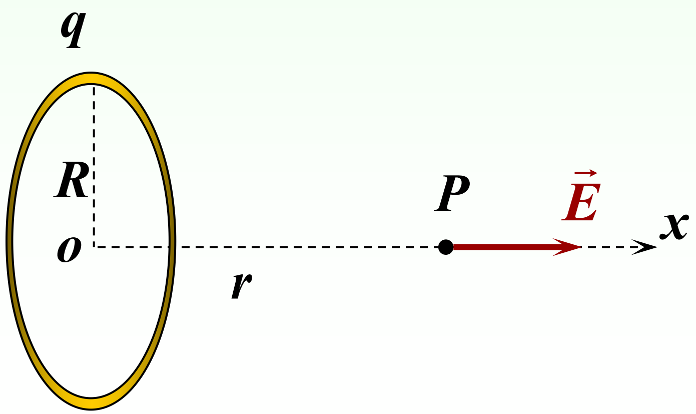
讨论：

(1) $a\gg R$ 时：$E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$

(2) $a=0$ 时：$E_0=0$

例题4：求半径为R，带电量为q 的均匀带电圆环轴线上任一点的场强在 r/R 取什么值时为最大？

由例题9-2：



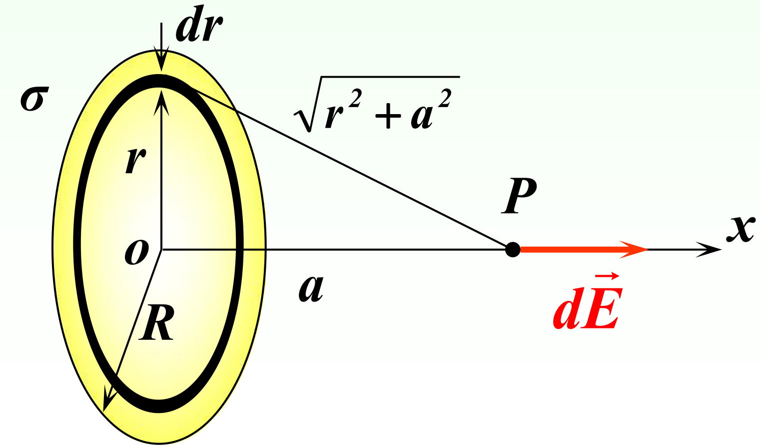
$$E=\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0(R^2+r^2)^{3/2}}$$

令：$$\frac{dE}{dr}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(R^2+r^2)^{3/2}-r\cdot\frac{3}{2}(R^2+r^2)^{1/2}\cdot 2r}{(R^2+r^2)^3}=0$$

即：$R^2=2r^2$

所以，当 $\frac{r}{R}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，E 最大。

例题5：求半径为R，面电荷密度为σ的均匀带电薄圆板轴线上一点的场强。



将圆板看作由许多细圆环组成。

半径为r的细圆环的电量为：

$$dq = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$$

该细圆环在P点产生的电场：

$$dE = \frac{a\,dq}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+a^2)^{3/2}} = \frac{a\sigma\, r\,dr}{2\varepsilon_0 (r^2+a^2)^{3/2}}$$

整个圆板在P点产生的电场：

$$E = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+a^2)^{3/2}} = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

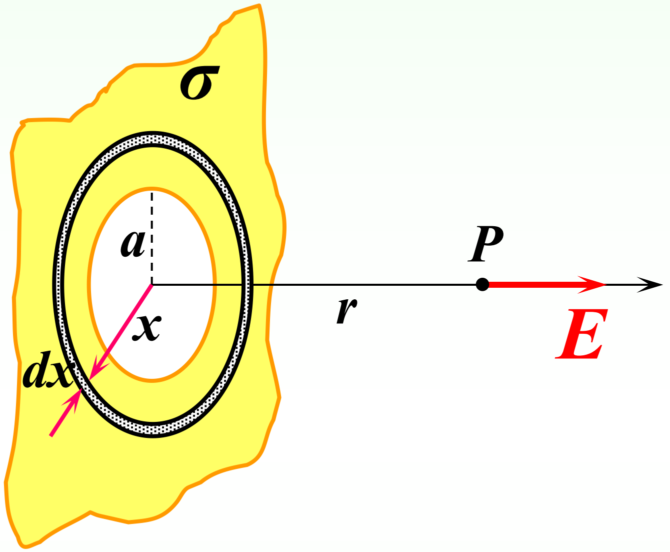
$$E=\frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

讨论：当 $R>>a$ 时，此圆板可视为“无限大”。

$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

可见：无限大均匀带电平板附近的电场是匀强电场。当$\sigma>0$ 时，电场方向指离平板；当$\sigma<0$ 时，电场方向指向平板。

例题6：一无限大均匀带电平面，开有一个半径为a的圆洞。设电荷面密度为 σ 。求轴线上离洞心为r处的电场强度。（提示）



积分法：$$dE = \frac{r\,dq}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0} \frac{x\,dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

叠加法：

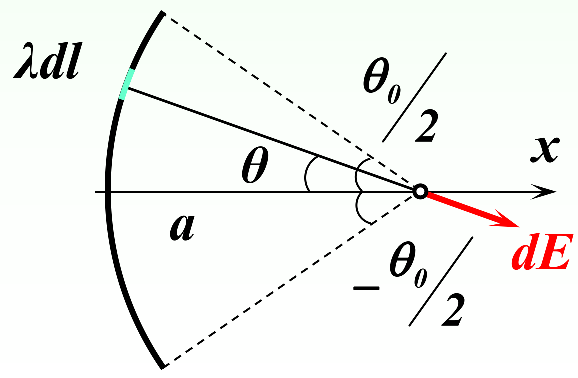
无限大平面：$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

圆盘：$E_2 = \frac{r\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}}\right)$

$\Rightarrow \quad E = E_1 - E_2$

例题7：总电量为q的均匀带电细棒，弯成半径为a的圆弧，圆弧对中心的张角为θ_0，求圆心处的场强。

由对称性：场强沿x方向。



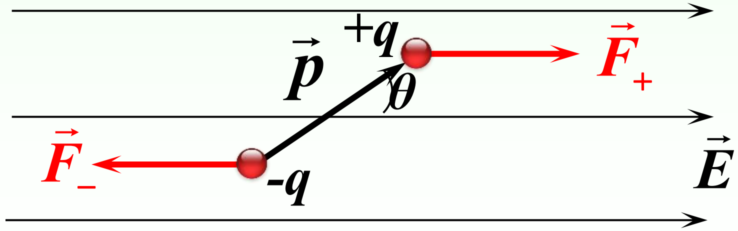
$$dE_x = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\frac{q}{\theta_0 a}\cos\theta\cdot a d\theta = \frac{q\cos\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^2\theta_0}$$

$$E = \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} dE_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2\theta_0}\left(\sin\frac{\theta_0}{2}+\sin\frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{q\sin\frac{\theta_0}{2}}{2\pi\varepsilon_0 a^2\theta_0}$$

例题8：求电偶极子在均匀电场中所受的力和力矩。

电偶极子所受合力：



$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E}_+ - q\vec{E}_- = 0$$

所受合外力矩：

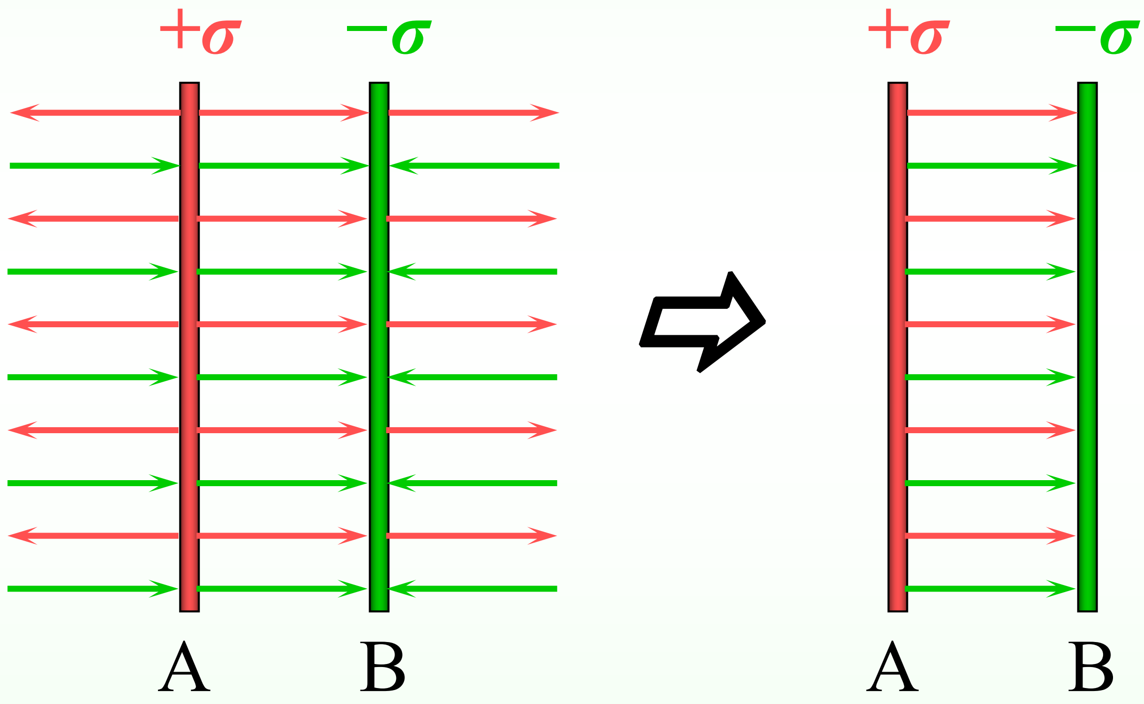
$$M = 2qE \cdot \frac{l}{2} \sin\theta = qlE \sin\theta = pE \sin\theta$$

用矢量式表示为：$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}}$

该力矩**总是**使电偶极矩指向外电场的方向。

➢ 处于非均匀电场中的电偶极子所受的合力及合力矩一般都不等于零。

例题9：两块无限大带等量异号电荷的平行平面间的电场分布。



两板外：

$$E = 0$$

两板间：

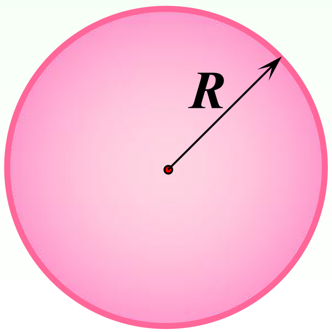
$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

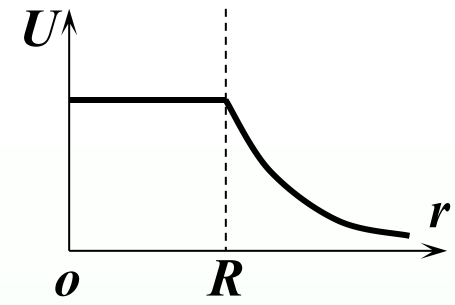
例题10：求均匀带电球面电场的电势。（R、q）

用场势法求解。

❶ 球面外：　$r > R$

$$U = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$





❷ 球面内：　$r < R$

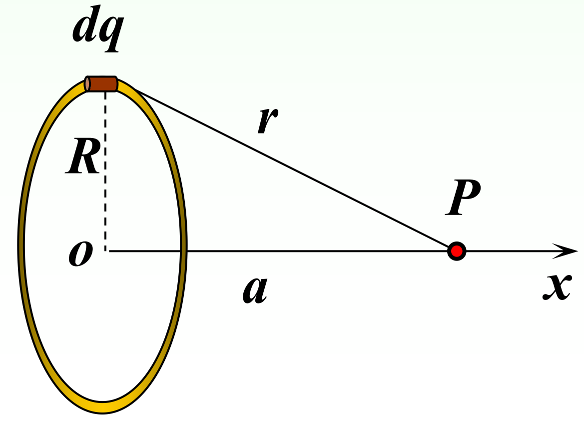
$$U = \int_r^{R} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

➢ 均匀带电球面内、外场强不连续，但电势连续。

例题11：求均匀带电圆环轴线上一点的电势。（R、q）

直接积分法：

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\oint dq=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+a^2}}$$



场势法：

$$U=\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{x}=\int_a^{\infty}\frac{xq}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot dx=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+a^2}}$$

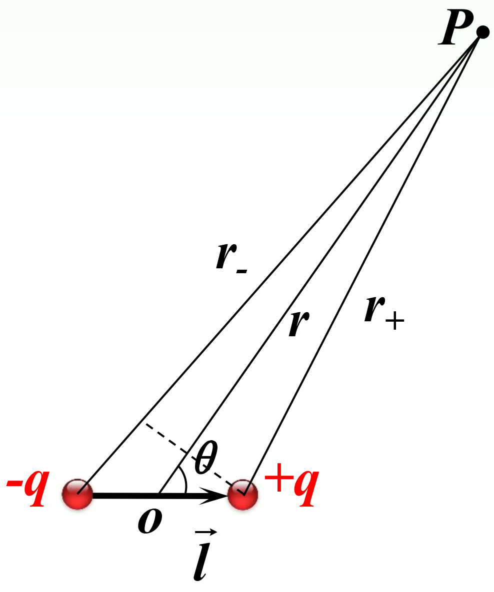
- $a=0$ 时，$U_0=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$，但 $E_0=0$。

例题12：求电偶极子电场中的电势分布。

电势叠加法：

$$U = U_+ + U_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

$$= \frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\varepsilon_0 r_+ r_-}$$



当$r >> l$时：$r_+ r_- \approx r^2$， $r_- - r_+ \approx l\cos\theta$

$$\therefore \quad U = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$