

## 第 2 篇 电磁学

---



电磁学是物理学的一个重要分支,它是研究物质电磁运动规律的学科,是许多物理理论和应用学科的基础.电磁现象是一种极为普遍的自然现象,自然界中几乎所有的变化过程都与电磁现象相关.电磁相互作用是物质间四种基本相互作用之一,电磁现象的研究使人类对物质世界的认识、对物质结构的了解更加深入.电磁能量的应用也极大地推动了社会的进步和发展,方便了人们的日常生活.比如,电磁能可以很容易地转变为机械能、光能、化学能等其他形式的能量;大功率的电磁能可以很方便地通过输电线路传至很远的地方;大量的信息可以通过电磁波的形式在空间传播,对人类的日常生活和对宇宙的探索提供了极大的方便;电磁能易于远距离控制和自动控制,便于实现生产和生活等各方面的自动化.

本篇共 8 章.第 8 章讨论静电场,第 9 章讨论电场中的导体和电解质,第 10 章讨论直流电路,第 11 章讨论恒定磁场,第 12 章讨论电磁感应,第 13 章讨论物质的磁性,第 14 章讨论交变电流,第 15 章讨论麦克斯韦方程组和电磁波.

## 第8章

## 静 电 场

相对于观察者静止的电荷激发的电场称为静电场。本章从两个实验事实,即库仑定律和叠加原理出发研究真空中静电场的基本性质和规律。从静电场对电荷的作用力,引入描述电场的重要物理量——电场强度。从电场力对在电场中移动的电荷做功的特点,证明电场是一种保守场,从而引入描述电场的另一个重要物理量——电势。静电场的高斯定理和环路定理是反映静电场基本性质的两个重要定理。本章除了讨论用库仑定律求静电场的方法之外,还介绍了用高斯定理求解具有某些对称性电场分布的方法,也简单介绍了由电势梯度求电场的方法。而电势既可以由其定义来求解,也可以由电场的积分来求解。另外,对称性分析已成为现代物理学的一种基本分析方法,利用对称性分析和求解电磁场问题,往往可以得到事半功倍的效果。本章所涉及的内容和思维方法,对整个物理学的学习具有典型的意义,希望读者认真学习、仔细体会。

## 8.1 电 荷

## ► 8.1.1 两种电荷

早在公元前 600 年,古希腊人就知道了经过摩擦之后的琥珀会吸引草屑。后来人们又发现两种不同材料构成的物体,如毛皮与硬橡胶棒,互相摩擦后都能吸引轻小物体。能够吸引轻小物体是因为这两个物体带了电荷处于带电状态。带有电荷的多少,称为电荷量,习惯上简称电量。

实验证明,电荷只有两种,电荷间有相互作用力:同种电荷相互排斥,异种电荷相互吸引。历史上由美国科学家富兰克林(B. Franklin 1706—1790)首先提出正电荷和负电荷的名称,并且规定丝绸摩擦过的玻璃棒上的电荷为正电荷,毛皮摩擦过的硬橡胶棒上的电荷为负电荷。

物质由分子组成,分子又由原子组成。原子由带负电的电子和带正电的原子核组成。原子核中有质子和中子,质子带正电,中子不带电。如果用  $e$  表示质子的电荷量,则电子的电荷量为  $-e$ 。正常状况下原子中电子总数和质子总数相等,原子呈电中性。这时物体中任何一部

分所包含的电子总数和质子总数相等,对外界不显示电性.如果由于某种原因,使物体失去了一部分电子或得到了一部分电子,这时物体对外呈电性,即所说的带电.失去电子的物体带正电,得到电子的物体带负电.起电或带电,从根本意义上来说就是创造条件使物体上正负电荷分离,并得到迁移(主要是电子的迁移).

### ► 8.1.2 电荷守恒定律 电荷的相对论不变性

实验表明,一个与外界没有电荷交换的系统,正负电荷的代数和在任何物理过程中保持不变,这就是**电荷守恒定律**.它在宏观现象和原子核范围两方面,都经得起实验的严格检验,从未发现过例外.

实验还证明,一个物体所带总电荷量不因带电体的运动而改变.电荷的这一性质称为**电荷的相对论不变性**.我们知道,质量不具有这样的性质,一个粒子的质量随着粒子的运动,按照

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ 而改变.}$$

### ► 8.1.3 电荷的量子化

密立根油滴实验和无数其他的实验表明,微小粒子带电荷量的变化是不连续的,它是某个基元电荷  $e$  的整数倍,这个基元电荷就是电子电荷量的绝对值,其 1998 年的推荐值为

$$e = 1.602\,176\,462 \times 10^{-19} \text{ C.}$$

自然界中,电荷总是以一个基元电荷  $e$  的整数倍出现,这就是电荷的量子化.但是,  $e$  是如此得小,以至宏观上电荷的量子性并不突出,带电体的电荷量仍可看作连续改变.

电荷量子化已经在相当高的精度下得到检验.1964 年提出的夸克模型认为质子和中子等强子由若干种夸克或反夸克组成,每一夸克或反夸克可能带有  $\pm \frac{1}{3}e$  或  $\pm \frac{2}{3}e$  的电荷量.然而这并不破坏电荷量子化的规律.由于夸克禁闭,至今还没有在实验上获得自由状态的夸克.

## 8.2 库仑定律

### ► 8.2.1 库仑定律

18 世纪末,法国科学家库仑(C. A. Coulomb 1736—1806)通过扭秤实验总结出真空中两个点电荷相互作用力的定量定律.

**点电荷**是指带电体本身的几何线度比起它到观察点的距离要小很多的带电体.这样,带电体的形状、大小以及带电体上电荷量分布诸因素均可忽略,因而把它抽象成带有电荷的“点”.点电荷是理想模型,是个相对的概念.

真空中两个静止点电荷的相互作用力与两个点电荷所带电荷量的乘积成正比,与它们的距离平方成反比,作用力的方向沿着两个点电荷的连线(图 8-1),这就是**库仑定律**.这一定律用矢量式表示为

$$f_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} r_{12}^0. \quad (8.2-1)$$

式中  $q_1$  和  $q_2$  表示两个点电荷的电荷量(带有正负号);  $r_{12}$  指两个点电荷间的距离,  $r_{12}^0$  表示从点电荷  $q_1$  指向点电荷  $q_2$  的单位矢量;  $k$  为比例系数, 由所用的单位制确定.  $f_{12}$  表示点电荷  $q_1$  对点电荷  $q_2$  的作用力,  $q_1$  和  $q_2$  同号时  $f_{12}$  与矢径  $r_{12}^0$  同方向, 表示斥力;  $q_1$  和  $q_2$  异号,  $f_{12}$  与矢径  $r_{12}^0$  方向相反, 表示引力.

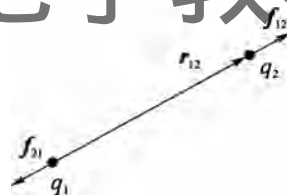


图 8-1

在国际单位制(SI)中, 电荷量的单位是库(C), 力的单位是牛(N), 长度的单位是米(m). 库仑定律中比例系数  $k$  应由实验测定, 通常引入恒量  $\epsilon_0$  代替  $k$ ,

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (8.2-2)$$

恒量  $\epsilon_0$  称为真空介电常数, 在国际单位制中它的测定值为

$$\epsilon_0 = 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2},$$

这样

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988\,0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}.$$

通常取  $k = 9.00 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ . (8.2-2) 式中引入  $4\pi$  因子是为了单位制的有理化. 这样做使库仑定律形式复杂一些, 但由此而推导出的一些常用公式中却不出现  $4\pi$  因子, 形式简单. 引入了真空介电常数  $\epsilon_0$  后, 真空中库仑定律写成

$$f_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} r_{12}^0. \quad (8.2-3)$$

由(8.2-1)式可以得出, 两个静止点电荷之间的相互作用力符合牛顿第三定律, 即

$$f_{12} = -f_{21}.$$

由库仑定律计算的力有时也称为库仑力, 或称静电力. 库仑定律的建立标志着电学定量研究的开始, 从此电学才真正成为一门科学. 现代量子电动力学指出, 库仑定律中分母  $r$  的指数与光子的静质量有关: 如果光子的静质量为零, 则  $r$  的指数严格为 2.

## ► 8.2.2 电力的叠加

两个静止点电荷的相互作用力由(8.2-1)式或(8.2-3)式计算. 如果有第三个点电荷存在, 这两个点电荷的相互作用力是否仍由(8.2-1)式或(8.2-3)式计算呢? 实验证明两个点电荷之间的作用力并不因第三个点电荷的存在而有所改变. 这一结论叫作电力的叠加原理.

按照电力的叠加原理, 当空间有若干点电荷  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , 它们对另一个点电荷  $q_0$  的静电力, 等于各点电荷  $q_1, q_2, \dots, q_n$  单独存在时作用在  $q_0$  上静电力的矢量和,

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{i0}^2} \mathbf{r}_{i0}^0. \quad (8.2-4)$$

式中  $r_{i0}$  为  $q_i$  到  $q_0$  点电荷的距离,  $\mathbf{r}_{i0}^0$  为  $q_i$  指向  $q_0$  的单位矢量.

应用库仑定律和电力的叠加原理原则上可以解决静电学的全部问题.

**例 8-1** 试比较两个  $\alpha$  粒子之间的静电斥力与它们之间的万有引力.

**解**  $\alpha$  粒子为氦核, 带电荷量  $q = 2e = 2 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , 质量  $m = 4 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .



静电斥力

$$F_e = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2};$$

万有引力

$$F = G \frac{m^2}{r^2}.$$

$$\frac{F_e}{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 G m^2} = \frac{9 \times 10^9}{6.67 \times 10^{-11}} \cdot \frac{(2 \times 1.6 \times 10^{-19})^2}{(4 \times 1.67 \times 10^{-27})^2} = 3.1 \times 10^{35}.$$

可见,万有引力与静电力相比,小得可以忽略.

## 8.3 电场 电场强度

### ► 8.3.1 电场

图 8-2 表示真空中两个带正电荷的物体 A 和 B,彼此之间存在电斥力  $f$ . 带电体 A 和 B 之间没有任何由原子、分子组成的物质作媒介,这种相互作用力是怎样传递的呢? 库仑定律并没有回答这个问题. 围绕这个问题,历史上曾有过长期的争论. 近代物理学的发展告诉我们:带电体 A 周围存在着电场. 带电体 A 的电场对处于电场中的带电体 B 有作用力,称为**电场力**. 同样带电体 B 在周围也存在着电场,是 B 的电场对带电体 A 有电场力.



图 8-2

凡是有电荷的地方四周就存在电场,即电荷在周围空间激发电场. 电场的基本性质是**对其他电荷有电场力的作用**. 因此电荷与电荷之间是通过电场相互作用的.

近代物理学的理论和实验完全证实了场的观点的正确性. 电场和磁场是客观存在的,电磁场的运动(传播)速度是有限的,这个速度就是光速.

本章讨论的是静止电荷的电场,即静电场的性质以及分布规律. 静止电荷指相对于观察者静止的电荷.

### ► 8.3.2 电场强度

电场的一个重要性质就是它对放入电场的电荷有电场力作用,我们就利用这一性质来研究电场. 为此,必须在电场中引入一个带电体以测量电场对它的作用力. 为了测量精确,带电体的电荷量应足够小,使它引入电场后不能显著地改变产生电场的原来电荷(称**场源电荷**)的分布. 同时,要求带电体的几何线度也要充分小,以至可以把它看成点电荷. 满足这些条件的带电体称为**试探电荷**.

电场是一矢量场,可以用电场力的大小和方向来描述. 空间任一点**电场强度**的定义为放在该点静止的试探电荷  $q_0$  受的力  $\mathbf{F}$  除以  $q_0$ ,即

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}. \quad (8.3-1)$$

因而,电场中任一点(场点)的电场强度在量值和方向上等于单位正电荷在该点所受的力.

在国际单位制中,场强的单位为牛/库(N/C). 以后可知,场强的单位也可用伏/米

(V/m)表示,而且这两种单位是相等的.

应该指出,电场强度的定义式(8.3-1)是一个与试探电荷本身无关的量,它是反映电场本身性质的,对静电场来说它完全由产生电场的电荷分布决定.一般来说,电场空间中不同点的场强,其大小和方向都可以不同.如果电场空间中各点的场强,其大小和方向都相同,这种电场叫作**均匀电场**.

如果在电场中各点电场强度  $\mathbf{E}$  为已知,由(8.3-1)式可算出处于其中任意一点的点电荷  $q_0$  受的电场力

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}.$$

### ► 8.3.3 点电荷的电场及电场的叠加

要计算静止点电荷  $q$  的电场分布,根据库仑定律先计算放在场点  $P$  的试探电荷  $q_0$  受的力

$$\mathbf{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0.$$

$\mathbf{r}^0$  是从源电荷  $q$  指向场点  $P$  的单位矢量.由电场强度定义式(8.3-1)得

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0,$$

写成

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0. \quad (8.3-2)$$

应用上式计算点电荷  $q$  的场强时, $q$  的正负应计及. $q > 0$ ,  $\mathbf{E}$  的方向沿  $\mathbf{r}^0$  方向; $q < 0$ ,  $\mathbf{E}$  的方向沿  $-\mathbf{r}^0$  方向,如图 8-3 所示.(8.3-2)式表明点电荷的电场具有球对称性.

对于由点电荷  $q_1, q_2, \dots, q_n$  组成的点电荷组在空间激发的电场,如果要计算其电场强度,也要在场点设置一试探电荷  $q_0$ .按电力叠加原理计算它受的电场力  $\mathbf{F}$ ,再由电场强度  $\mathbf{E}$  的定义式可得点电荷组的电场强度为

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{r}_i^0. \quad (8.3-3)$$

式中  $r_i$  为从点电荷  $q_i$  到场点的距离,  $\mathbf{r}_i^0$  为从  $q_i$  指向场点的单位矢量.

由此可见,点电荷组所产生的电场在某场点的场强等于各点电荷单独存在时所产生的电场在该点场强的矢量叠加,这叫作**电场强度的叠加原理**.

利用电场强度的叠加原理,可以计算带电体电场中的电场强度.任何带电体都可看成许多极小电荷元  $dq$  的集合,而每个电荷元  $dq$  都可以看成点电荷,其中任一电荷元  $dq$  在场点产生的电场  $d\mathbf{E}$  为

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0.$$

式中  $r$  是电荷元  $dq$  到场点的距离,  $\mathbf{r}^0$  为  $dq$  指向场点的单位矢量.整个带电体在场点的电

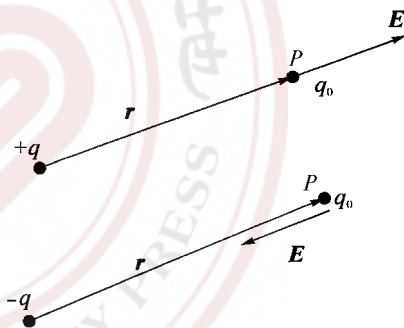


图 8-3

场,按照场强叠加原理为

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0. \quad (8.3-4)$$

上式中积分是对带电体积分(注意上式是矢量积分).

**例 8-2** 有一均匀带电直线,长为  $L$ , 线电荷密度为  $\lambda (\lambda > 0)$ , 求直线中垂线上任一点的场强.

**解** 如图所示,在带电直线上任取一长为  $dl$  的电荷元,其电荷量  $dq = \lambda dl$ . 该电荷元在带电直线中垂线上的  $P$  点产生的场强  $d\mathbf{E}$  的大小为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

$d\mathbf{E}$  沿  $x$  轴和  $y$  轴方向的两个分量分别为  $dE_x$  和  $dE_y$ . 由对称性分析可知,带电直线上所有电荷元在  $P$  点产生的电场强度的  $y$  分量全部抵消,即

$$E_y = \int dE_y = 0.$$

所以,  $P$  点总场强为所有电荷元产生的场强的  $x$  分量  $dE_x$  之和,即  $E = \int dE_x$ , 而

$$dE_x = dE \cos\theta = \frac{\lambda a dl}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

由于  $l = a \tan\theta$ , 从而  $dl = \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta$ , 由例 8-2 图可知  $r = \frac{a}{\cos\theta}$ , 所以

$$dE_x = \frac{\lambda a dl}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos\theta d\theta.$$

对整个带电直线,  $\theta$  的变化范围从  $-\theta_1$  到  $+\theta_1$ , 所以

$$E = \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda \sin\theta_1}{2\pi\epsilon_0 a}.$$

将  $\sin\theta_1 = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + a^2}}$  代入上式, 可得

$$E = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0 a (L^2 + 4a^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

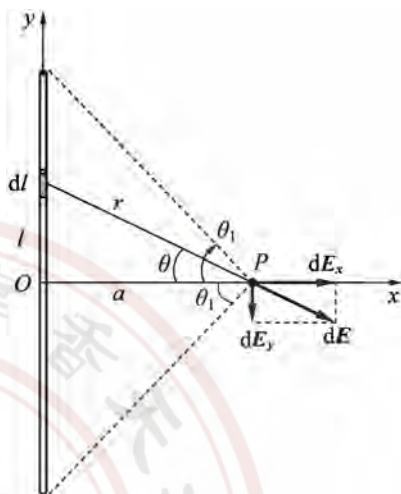
电场强度的方向沿  $x$  轴正方向, 即指向远离直线的方向. 若  $\lambda < 0$ , 则电场强度指向直线.

上式中, 当  $a \ll L$  时, 即在带电直线中部附近的区域内, 有

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}. \quad (8.3-5)$$

此时相对于距离  $a$ , 带电直线可以看作“无限长”. 因此可以说, 在一无限长带电直线周围任一点场强的大小与该点到带电直线的距离成反比.

当  $a \gg L$  时, 即在远离带电直线的地方, 有



例 8-2 图

$$E \approx \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

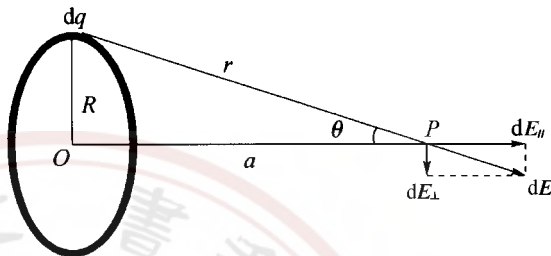
式中,  $q = \lambda L$  为带电直线的总电荷量. 此结果说明, 在离该带电直线很远的地方, 带电直线的电场相当于一个点电荷  $q$  的电场.

**例 8-3** 半径为  $R$  的均匀带电细圆环, 所带电荷量为  $q (q > 0)$ , 求圆环轴线上任一点的场强.

**解** 如图所示, 在圆环上取线元  $dl$ , 其带电荷量为  $dq$ ,  $dq$  在  $P$  点的场强为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

$dE$  沿平行和垂直于轴线的两个方向的分量分别为  $dE_{//}$  和  $dE_{\perp}$ . 由于圆环均匀带电, 圆环上全部  $dq$  的  $dE_{\perp}$  分量均抵消, 对总场强有贡献的是平行轴线的分量  $dE_{//}$ ,



例 8-3 图

$$dE_{//} = dE \cos\theta,$$

所以

$$E = \int dE_{//} = \int dE \cos\theta = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta = \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dq.$$

由  $\oint dq = q$  得

$$E = \frac{q \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

将  $\cos\theta = \frac{a}{r}$  代入即得

$$E = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (8.3-6)$$

$E$  的方向沿着轴线指向远方.

对于圆心,  $a = 0$ , 由 (8.3-6) 式得到均匀带电圆环的圆心处电场强度  $E = 0$ .

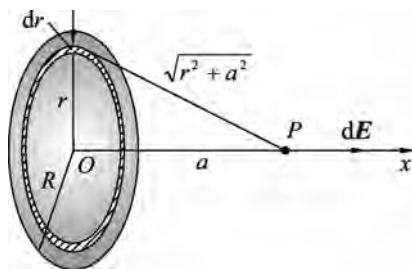
对于  $a \gg R$  的区域, 上式  $(R^2 + a^2)^{3/2} \approx a^3$ , 所以

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

结果表明, 远离圆环心的电场也相当于一个点电荷  $q$  产生的电场.

**例 8-4** 有一均匀带电圆平面, 半径为  $R$ , 面电荷密度为  $\sigma (\sigma > 0)$ , 求圆平面轴线上任一点的场强.

**解** 带电圆平面可以看成是由许多同心的带电细圆环组成. 现取一半径为  $r$ 、宽度为  $dr$  的细圆环, 如图所示, 其所带电荷量为  $\sigma \cdot 2\pi r dr$ . 由例 8-3 的结果可知, 此带电细圆环在轴线上  $P$  点产生的场强大小为



例 8-4 图

$$dE = \frac{a dq}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\sigma a dr}{2\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{3/2}},$$

方向沿  $x$  轴正方向. 由于组成圆平面的所有细圆环在  $P$  点产生的电场  $dE$  的方向都相同, 所



以  $P$  点的场强大小为

$$E = \int dE = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{a}{(R^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right],$$

其方向也沿  $x$  轴指向远离圆平面的方向. 若  $\sigma < 0$ , 则电场强度指向圆平面.

当  $a \ll R$  时, 即在圆心附近很靠近圆平面处

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (8.3-7)$$

此时相对于  $a$ , 可将该带电圆平面看作“无限大”带电平面. 因此可以说, 在一无限大均匀带电平面附近的电场是匀强电场, 其大小由 (8.3-7) 式给出.

当  $a \gg R$  时, 即在远离带电圆平面处

$$(R^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{R^2}{2a^2} + \cdots \right) \approx \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{R^2}{2a^2} \right),$$

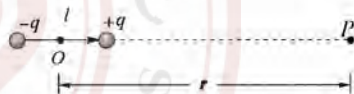
于是

$$E \approx \frac{\sigma \cdot \pi R^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

式中  $q = \sigma \cdot \pi R^2$  为圆平面所带的总电荷量. 这一结果也说明, 在远离带电圆平面处的电场与一个点电荷的电场相当.

**例 8-5** 两个等量异号点电荷, 当两者之间距离  $l$  比从它们到所讨论的场点的距离小得多, 这个带电系统就称为电偶极子如图(a)所示.

用  $l$  表示从  $-q$  到  $+q$  的矢量, 电荷量  $q$  与  $l$  的乘积称为电偶极矩或电矩, 用  $p$  表示,  $p = ql$ .  $p$  的单位为库·米( $C \cdot m$ ). 求:



例 8-5 图(a)

- (1) 电偶极子轴线上任一点的电场强度;
- (2) 电偶极子中垂线上任一点的电场强度.

**解** (1) 如图(a)所示, 设轴线上某场点  $P$  到电偶极子连线中点  $O$  的距离为  $r$ , 则  $+q$  和  $-q$  在  $P$  点产生的电场强度  $E_+$  和  $E_-$  同在轴线上, 其大小分别为

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{l}{2}\right)^2}, \quad E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2}.$$

$P$  点的总场强

$$E = E_+ - E_- = \frac{ql}{2\pi\epsilon_0 r^3 \left(1 - \frac{l}{2r}\right)^2 \left(1 + \frac{l}{2r}\right)^2}.$$

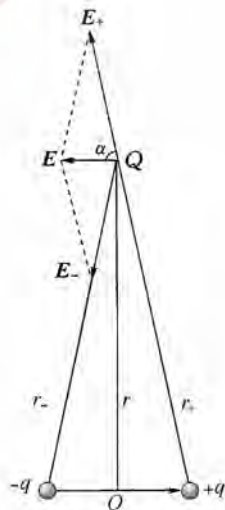
对于电偶极子, 有  $r \gg l$  条件, 所以上式成为

$$E = \frac{ql}{2\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}.$$

考虑到  $E$  的指向与电偶极矩  $p$  方向相同, 上式可以写成

$$E = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (8.3-8)$$

(2) 如图(b)所示, 设中垂线上某点  $Q$  到  $O$  点的距离为  $r$ ,  $Q$



例 8-5 图(b)

到 $+q$ 和 $-q$ 的距离分别为 $r_+$ 和 $r_-$ ,则 $+q$ 、 $-q$ 在 $Q$ 点产生的电场强度分别为 $E_+$ 和 $E_-$ ,其大小为

$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)}.$$

$E_+$ 和 $E_-$ 方向如图所示,总场强为

$$E = E_+ \cos\alpha + E_- \cos\alpha = 2 \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)} \cdot \frac{l}{2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}.$$

由 $r \gg l$ ,可得

$$E = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

考虑到 $E$ 的方向与电偶极矩 $p$ 方向相反,上式可以写成

$$E = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (8.3-9)$$

电偶极子是一个重要的物理模型,在研究电介质极化,电磁波的发射与吸收以及中性分子相互作用时,都要用到电偶极子模型.

**例 8-6** 求电偶极子在均匀电场中受的力矩.

**解** 以 $E$ 表示均匀电场场强,电偶极子的位置如图所示. $l$ 表示 $-q$ 到 $+q$ 的矢量.

电偶极子的正负点电荷受电场力 $F_+$ 和 $F_-$ 的大小相等、方向相反,

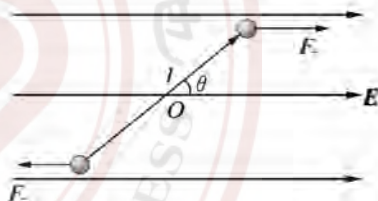
$$F_+ = F_- = qE.$$

$F_+$ 和 $F_-$ 组成一对力偶,它们对于中点 $O$ 的力矩相同,因而总力矩的大小为

$$M = \frac{l}{2} F_+ \sin\theta + \frac{l}{2} F_- \sin\theta = qlE \sin\theta = pE \sin\theta.$$

注意到力矩 $M$ 的方向是使 $l$ (也就是电矩 $p$ )转向场强 $E$ 的方向,用矢量式表示为

$$M = p \times E. \quad (8.3-10)$$



例 8-6 图

## 8.4 高斯定理

### ► 8.4.1 电场线

为了形象地描绘电场的分布,可以在电场中作许多曲线,使曲线上每一点的切线方向与该点的电场强度方向一致,这样作出的曲线,叫作**电场线**.要使电场线还能表示场强的大小,可以对电场线条数做出如下规定:在电场中某点,通过垂直于该处 $E$ 的方向的单位面积的电场线条数正比于该处 $E$ 的大小,即

$$\frac{\Delta N}{\Delta S} \propto E.$$

(8.4-1)

式中  $\Delta N$  为穿过与  $E$  方向垂直的面元  $\Delta S$  的电场线的条数. 这样, 电场线的疏密程度就反映了电场强度大小的分布. 因此, 电场线的分布反映了空间各点电场强度的大小和方向.

电场线是虚构的曲线, 客观并不存在. 但是, 可以借助一些实验方法, 把各种电荷分布的电场线显示出来. 图 8-4 是用实验手段显示的电场线分布图. 其中图(a)是两块带等量异号电荷的金属板间的电场线, 图(b)是带电的尖端金属导体与接地金属平板间的电场线, 图(c)是带电的金属圆柱面与接地金属平板间的电场线.

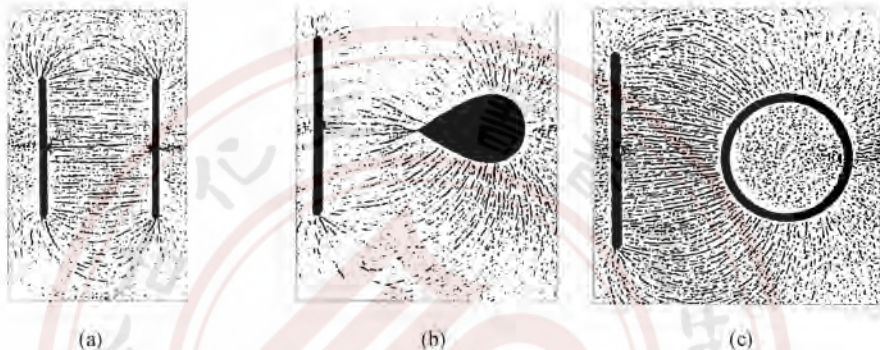


图 8-4

从这些电场线的图形可以清楚地看到, 静电场的电场线有两条重要性质: 电场线起于正电荷, 终止于负电荷; 电场线不形成闭合曲线. 静电场电场线的这些性质, 实质上是反映了静电场的重要特征, 即本节下面的内容——高斯定理以及下一节的静电场环路定理.

### ► 8.4.2 电通量

通量是描述矢量场性质的一个物理量. 描述电场的通量, 叫作**电场强度通量**, 简称**电通量**, 常用字母  $\Phi_E$  表示.

与任何一个矢量场通量定义的方法相同, 设电场中某一点  $P$  的场强为  $E$ , 包含  $P$  点在内作一面元  $\Delta S$ ,  $n$  为面元法向单位矢量,  $\theta$  为  $E$  与  $n$  的夹角, 如图 8-5 所示. 定义面元  $\Delta S$  的电通量为

$$\Delta\Phi_E = E \cdot \Delta S \cos\theta = E \cdot \Delta S, \quad (8.4-2)$$

即场强  $E$  的大小与面元  $\Delta S$  在垂直于场强方向上投影面积  $\Delta S \cos\theta$  的乘积, 就是面元  $\Delta S$  的电通量. 式中  $\Delta S$  称为面元矢量, 定义式为

$$\Delta S = \Delta S n.$$

如果在(8.4-1)式中把比例系数看作 1 的话, 就可以把电通量的定义式理解为穿过面元  $\Delta S$  的电场线条数.

如果要计算穿过任一非无限小的曲面的电通量  $\Phi_E$  (图 8-6), 可以把该曲面  $S$  分割成许

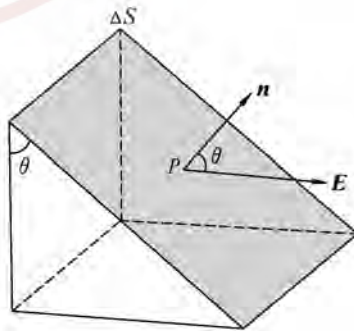


图 8-5

多小面元  $\Delta S_i$ , 利用(8.4-2)式对每一小面元计算电通量后, 再累加起来,

$$\Phi_E = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i,$$

即

$$\Phi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (8.4-3)$$

电通量是标量, 但是它有正有负, 这与面元  $\Delta \mathbf{S}$  的法线  $\mathbf{n}$  的取向有关. 对于闭合曲面, 规定面元  $\Delta \mathbf{S}$  的法线  $\mathbf{n}$  的方向由曲面内指向曲面外. 当电场线由内向外穿出  $\Delta \mathbf{S}$  时,  $\Delta \Phi_E$  为正值; 当电场线由外向内穿入  $\Delta \mathbf{S}$  时,  $\Delta \Phi_E$  为负值.

穿过整个闭合曲面的电通量为

$$\Phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (8.4-3')$$

由电通量定义式(8.4-2)可知, 国际单位制中, 电通量单位为  $(\text{牛/库}) \cdot \text{米}^2$  或  $(\text{伏/米}) \cdot \text{米}^2 = \text{伏} \cdot \text{米}$ , 即  $\text{V} \cdot \text{m}$ , 它没有专门的名称.

### ► 8.4.3 高斯定理

设空间分布有一组点电荷  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , 如图 8-7 所示. 如果在空间作一任意形状的闭合曲面, 则有的点电荷处于闭合曲面内, 有的点电荷处于闭合曲面外. 闭合曲面上任一点的电场  $\mathbf{E}$  应该是闭合曲面内外的电荷共同产生的, 这个闭合曲面的电通量等于多少呢? 法国科学家高斯(C. F. Gauss 1777—1855)指出: 静电场中任意闭合曲面  $S$  的电通量  $\Phi_E$ , 等于该曲面包围电荷的代数和除以  $\epsilon_0$ , 与闭合曲面外的电荷无关. 这就是**高斯定理**. 其数学表达式为

$$\Phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i. \quad (8.4-4)$$

式中  $\sum q_i$  指闭合曲面内电荷的代数和. 习惯上称闭合曲面为**高斯面**. 通常它是一个假想的曲面.

下面通过计算点电荷的电场中闭合曲面的电通量, 来导出高斯定理.

先计算包围点电荷  $q$  的同心球面  $S$  的电通量, 如图 8-8 所示. 设球面半径为  $r$ , 根据库仑定律可知球面上各点  $\mathbf{E}$  大小相等, 方向沿半径向外呈辐射状, 这样球面上面元  $d\mathbf{S}$  与所在处  $\mathbf{E}$  方向相同. 通过  $d\mathbf{S}$  的电通量为

$$d\Phi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS,$$

整个闭合面  $S$  的电通量为

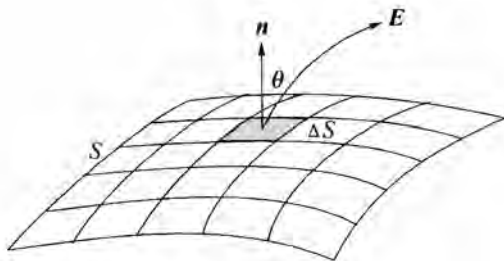


图 8-6

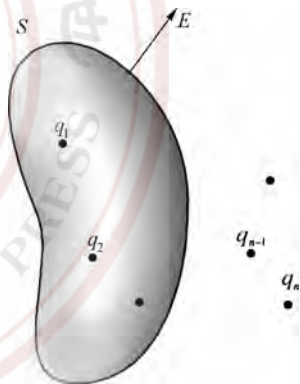


图 8-7

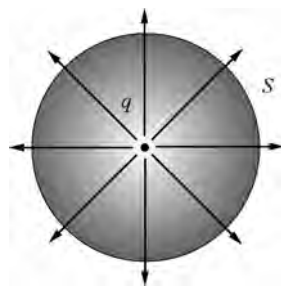


图 8-8



$$\Phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oiint dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q.$$

由此可见,球面电通量只与包围的点电荷的电荷量有关,而与所取高斯面球面的半径无关.显然得到这一结果是与库仑的反比平方定律分不开的.如果用电场线概念来理解的话,这表示通过半径不同的同心球面的电场线的总条数相等,从  $q$  点电荷发出的电场线是连续地伸向无穷远处的.

设想有另一个任意闭合曲面  $S_1$  包围该点电荷  $q$ ,如图 8-9 所示.由上所述电场线的连续性可以得知穿过  $S_1$  闭合面的总电场线条数也是  $\frac{q}{\epsilon_0}$ .因此,任意形状的闭合曲面  $S_1$  内只要包含点电荷  $q$ ,总有

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

对于不包围点电荷  $q$  的闭合曲面,如图 8-9 所示中的  $S_2$ .由电场线的连续性可知,它从  $S_2$  面一侧穿过的电场线必从另一侧穿出,所以净穿出闭合曲面  $S_2$  的电场线总条数为 0,即

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

以上是对单个点电荷电场的结论,可以由场强的叠加原理推广到对点电荷组的电场也成立,即可以得到高斯定理的表达式.

事实上高斯定理可以由库仑定律和叠加原理来导出.高斯定理表明电场线是从正电荷出发,终止于负电荷,即静电场是有源场,源就是电荷.高斯定理是静电场的两个基本定理之一,它与环路定理结合起来,可以完整地描述静电场.

应该指出,对于运动电荷的电场或者随时间变化的电场,库仑定律不再有效,而高斯定理仍然有效.高斯定理是关于电场的基本规律.

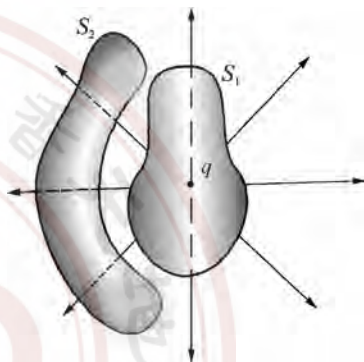


图 8-9

#### ► 8.4.4 高斯定理的应用

利用高斯定理可以方便地计算具有某些对称分布电场的场强.

##### 1. 均匀带电球面的电场分布

设该球面半径为  $R$ ,所带电荷量为  $q$ (设  $q > 0$ ).因为电荷是均匀分布在球面上的,所以球面内外的电场应该具有球对称性,即离球心等距离点上的电场强度大小相等,方向沿着球的半径方向.因此,作一半径  $r > R$  的同心球面作为高斯面,如图 8-10 所示.这样一个高斯面上电场  $E$  的电通量  $\Phi_E = 4\pi r^2 E$ .高斯面内包围电荷  $\sum q$  就是球带电荷总量  $q$ ,由高斯定理得

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0},$$

即

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r \geq R). \quad (8.4-5)$$

这说明均匀带电球面外的电场,如同全部电荷集中在球心的一个点电荷在该区域的电场分布一样.

要求球面内电场分布,可以作一个半径  $r < R$  的同心球面作为高斯面,此高斯面的电场  $E$  的通量  $\Phi_E = 4\pi r^2 E$ . 但是,高斯面内包围电荷  $\sum q = 0$ ,所以利用高斯定理可得

$$E = 0 \quad (r < R).$$

这说明均匀带电球面内电场强度处处为零.

上述结果的  $E-r$  曲线如图 8-10 所示. 从  $E-r$  曲线可以看出,场强在球面上是不连续的.

## 2. 均匀带电球体的电场分布

设球体半径为  $R$ , 带电荷总量为  $q$ , 与上例考虑相同,均匀带电球体内外电场也是球对称分布.

利用高斯定理可以求得球体外部电场  $E$  的分布与全部电荷量集中在球心时产生的电场一样,即

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r \geq R).$$

为了求球体内电场,在球体内作半径  $r < R$  的同心球面为高斯面(图 8-11),通过此高斯面的电场  $E$  的电通量

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E.$$

此高斯面包围的电荷为

$$\sum q = \frac{qr^3}{R^3},$$

利用高斯定理可以求得

$$E = \frac{rq}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (r \leq R). \quad (8.4-6)$$

如果引入体电荷密度  $\rho$ , 单位为库/米<sup>3</sup> (C/m<sup>3</sup>). 对于本例  $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ , 还可以把上式

化简成

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r. \quad (8.4-7)$$

这说明均匀带电球体内的电场强度大小是与场点离球心距离  $r$  的一次方成正比.

均匀带电球体的  $E-r$  曲线如图 8-11 所示. 注意在球体表面处,场强是连续的,其大小为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

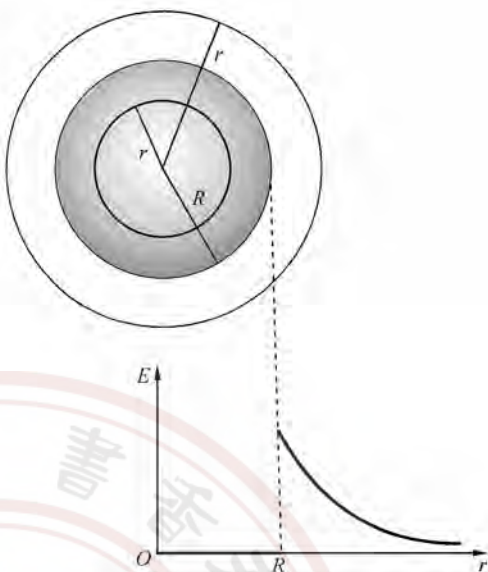


图 8-10

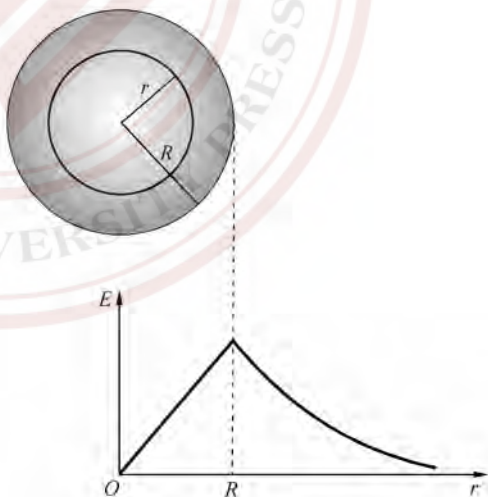


图 8-11

## 3. 无限长均匀带电圆柱体的电场分布

设带电圆柱体的线电荷密度为  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), 半径为  $R$ . 由电荷分布的轴对称性可知, 电场的分布也应该具有轴对称性, 即离开圆柱体轴线距离为  $r$  的所有点处, 电场强度的大小相等, 方向都沿径向向外. 为此, 作高为  $l$ 、底面半径为  $r$  的同轴圆柱形闭合面为高斯面, 如图 8-12 所示. 通过高斯面的电通量为

$$\Phi_E = \iint_{\text{侧面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{上底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{下底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

因为上、下底面上的场强  $\mathbf{E}$  与底面平行, 所以上、下底面的电通量均为零, 而侧面上的电通量为  $2\pi r l E$ , 所以

$$\Phi_E = 2\pi r l E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q,$$

圆柱体的体电荷密度为  $\rho = \frac{\lambda l}{\pi R^2 l} = \frac{\lambda}{\pi R^2}$ .

在圆柱体内,  $r < R$ ,  $\sum q = \rho \cdot \pi r^2 l = \frac{\lambda r^2}{R^2}$ , 所以

$$E = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2} \quad (r < R), \quad (8.4-8)$$

即圆柱体内的场强与场点到轴线的距离成正比.

在圆柱体外,  $r > R$ ,  $\sum q = \rho \cdot \pi R^2 l = \lambda l$ , 所以

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq R), \quad (8.4-9)$$

即圆柱体外的场强与场点到轴线的距离成反比, 与无限长带电直线的场强表达式相同.

## 4. 无限大均匀带电平面的电场分布

设带电平面的面电荷密度为  $\sigma$ , 单位为库/米<sup>2</sup> ( $\text{C}/\text{m}^2$ ). 由于电荷均匀分布在一无限大的平面上, 所以电场分布必然对带电平面对称, 平面两侧离开平面等距离处的场强  $E$  大小相等、方向垂直于平面. 选择图 8-13(a) 所示的高斯面, 使高斯面的两个底面到无限大带电平面的距离相等, 并设底面面积为  $S$ . 由于电场方向与高斯面侧面平行, 所以高斯面侧面的电通量为零. 由高斯定理

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2ES = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S,$$

即

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (8.4-10)$$

此式表明无限大均匀带电平面两侧的电场是均匀电场, 电场线如图 8-13(b) 所示. 此处得到的结果与例 8-4 中的 (8.3-7) 式相同, 但计算过程简单得多.

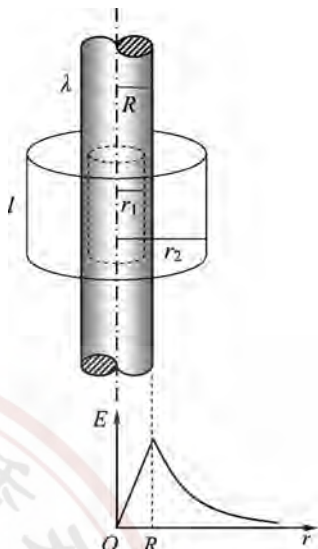


图 8-12

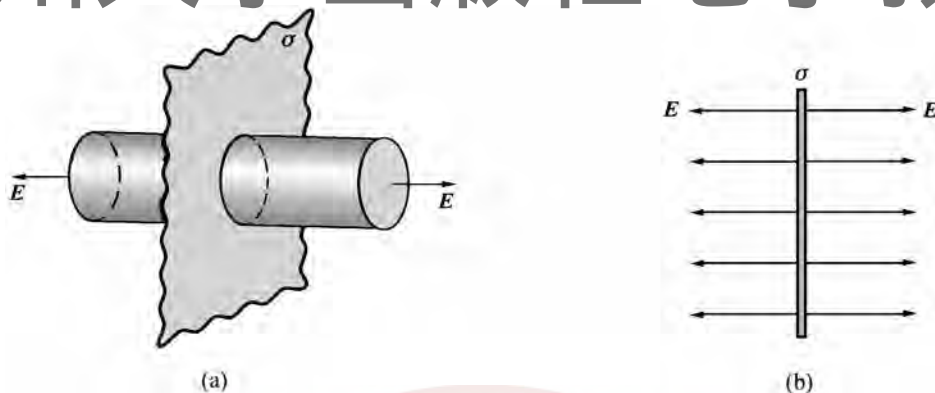
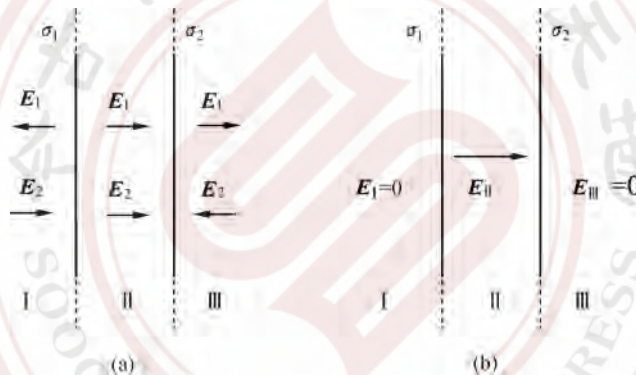


图 8-13

**例 8-7** 两个平行的无限大均匀带电平面,如图(a)所示,面电荷密度分别为  $\sigma_1 = +\sigma$  和  $\sigma_2 = -\sigma$ , 而  $\sigma = 4 \times 10^{-11} \text{ C/m}^2$ . 求这一带电系统的电场分布.



例 8-7 图

**解** 这两个带电平面的总电场不再具有前述的简单对称性,因而不能直接用高斯定理求解. 但根据上面关于无限大均匀带电平面电场的讨论,两个面各自在其两侧产生的场强方向如图(a)所示,其大小分别为

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{4 \times 10^{-11}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} \text{ V/m} = 2.26 \text{ V/m},$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{4 \times 10^{-11}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} \text{ V/m} = 2.26 \text{ V/m}.$$

根据电场强度叠加原理可得

$$\text{在 I 区: } E_I = E_1 - E_2 = 0;$$

$$\text{在 II 区: } E_{II} = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{4 \times 10^{-11}}{8.85 \times 10^{-12}} \text{ V/m} = 4.52 \text{ V/m}, \text{ 方向向右};$$

$$\text{在 III 区: } E_{III} = E_1 - E_2 = 0.$$

该带电系统的总场强分布如图(b)所示. 第 9 章 9.2 节所讨论的平行板电容器即为本例所讨论的带电系统.



## 8.5 静电场的环路定理 电势

## ► 8.5.1 静电场的环路定理

在静电场  $\mathbf{E}$  中移动试探电荷  $q_0$ , 电场力要做功. 从库仑定律和场强叠加原理出发可以证明静电场力做的功与路径无关.

设单个源点电荷  $q$  位于  $O$  点, 如图 8-14 所示. 在源点电荷  $q$  的电场中, 有试探电荷  $q_0$  从  $P$  点沿着某一路径移动到  $Q$  点. 路径上经过某元段  $d\mathbf{l}$ , 作用在  $q_0$  上的电场力  $q_0\mathbf{E}$  所做的元功为

$$dA = q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dl \cos\theta.$$

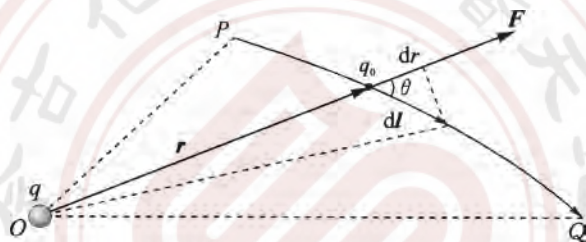


图 8-14

注意到  $dl \cos\theta = dr$ , 于是

$$dA = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr.$$

由此, 试探电荷  $q_0$  从  $P$  点移动到  $Q$  点, 电场力做功

$$A = \int dA = \int_P^Q \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq_0 \left( \frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q} \right).$$

上式表明, 点电荷的电场力对试探电荷做的功, 与路径无关, 与试探电荷起始末的位置有关. 当然还与试探电荷的电荷量  $q_0$  成正比.

利用电场叠加原理, 可以证明, 任何带电体的电场力对试探电荷做的功

$$A = q_0 \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (8.5-1)$$

也是与路径无关, 只与该试探电荷的始末位置有关.

静电场做功与路径无关, 表明静电力是保守力, 静电场是保守场.

如果在电场中移动试探电荷  $q_0$ , 经过闭合路径又回到原来的位置 (图 8-15), 可由上式得知电场力做功为零, 即

$$q_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

因为试探电荷  $q_0$  不为零, 所以上式可写成

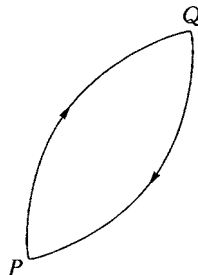


图 8-15

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

(8.5-2)

即静电场场强  $\mathbf{E}$  沿任意闭合环路的线积分恒等于零。(8.5-2)式称为静电场的环路定理,它与静电场是保守场的说法是等价的。

## ► 8.5.2 电势

静电场环路定理表明静电场是保守场,可以引进电势能的概念。

静电场中把试探电荷  $q_0$  从  $P$  点移到  $Q$  点,电场力对  $q_0$  做的功就定义为  $q_0$  在  $P, Q$  两点的电势能的减少  $W_P - W_Q$ ,

$$W_P - W_Q = q_0 \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (8.5-3)$$

上式中  $W_P - W_Q$  与  $q_0$  成正比,即比值  $\frac{W_P - W_Q}{q_0}$  与试探电荷无关,它反映了静电场本身在  $P, Q$  两点的性质,我们把这个量定义为电场中  $P, Q$  两点的电势差

$$U_P - U_Q = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (8.5-4)$$

由此,也可以把电势差理解为在静电场中移动单位正试探电荷电场力做的功。

有了电势差的定义式(8.5-4),就可以把试探电荷  $q_0$  在电场中两点的电势能差(8.5-3)式写成

$$W_P - W_Q = q_0(U_P - U_Q). \quad (8.5-5)$$

要确定静电场中某点的电势值,可以选定一参考点,设该点的电势为零,这样静电场中某点的电势值就是该点与零电势点的电势差。理论计算中,如果带电体系只分布在有限空间,常选无限远处为零电势参考点,这时空间任一点电势可以表示为

$$U_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (8.5-6)$$

这样,电场中某点的电势在数值上等于把单位正电荷从该点移至无穷远处电场力做的功。注意电势的值有赖于零电势参考点的选取,而电场中两点的电势差却与零电势参考点位置的选取无关。同样,试探电荷在某点的电势能按下式计算

$$W_P = q_0 U_P = q_0 \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (8.5-7)$$

显然,电势能的值也与零电势(能)参考点位置的选取有关,而电势能的差却与参考点的选取无关。实际工作中,常常取无限远处电势为零。

电势是标量,在国际单位制中,电势的单位是伏,符号为  $V$ 。

顺便指出,由(8.5-4)式可以看出电场线的指向就是电势降落的方向。

## ► 8.5.3 点电荷的电势及电势的叠加

利用点电荷电场的计算式(8.3-2)和电势的定义,可以算得点电荷  $q$  的电场中任一点  $P$  的电势

$$U_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_P}.$$

去掉角标  $P$  得

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (8.5-8)$$

式中  $r$  是点电荷  $q$  到场点的距离. 运用上式时应把电荷  $q$  的正负号一并计及.

利用场强的叠加原理和电势的定义式很容易证明, 点电荷组的电场中某点的电势, 是各点电荷单独存在时的电场在该点的电势的代数和, 这就是**电势叠加原理**, 即

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}. \quad (8.5-9)$$

式中  $r_i$  为第  $i$  个点电荷  $q_i$  到场点的距离.

对于电荷连续分布的带电体, 可以把带电体分成无数电荷元  $dq$  的集合, 按点电荷的电势计算式(8.5-8)计算  $dq$  在场点的电势, 再按照电势叠加原理来计算带电体在场点  $P$  的电势

$$U = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (8.5-10)$$

式中  $r$  是电荷元  $dq$  到场点的距离, 积分是对带电体积分.

**例 8-8** 求均匀带电球面电场的电势.

**解** 设均匀带电球面半径为  $R$ , 带电荷量为  $q(q>0)$ . 均匀带电球面的电场分布

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r \geq R;$$

$$E = 0, \quad r < R.$$

在利用(8.5-6)式计算电势时, 沿从球心发出的直线作为积分路径, 球面外结果与点电荷情形一样,

$$U = \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

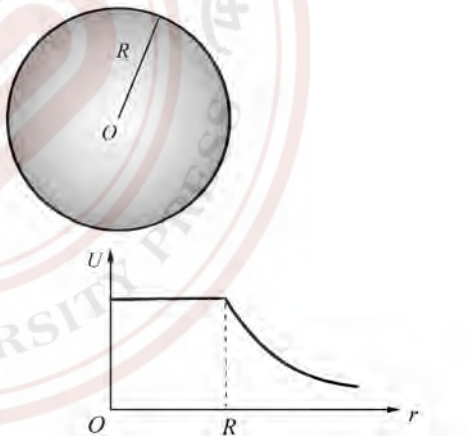
在球面内  $r < R$ , 积分要分两段进行, 一段在球面内( $E=0$ ), 一段在球面外.

$$\begin{aligned} U &= \int_r^\infty E dr = \int_r^R E dr + \int_R^\infty E dr \\ &= \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \end{aligned}$$

由此可见, 在球面内的空间电势与球面的电势值一样, 均匀带电球面内的空间是等势的,  $U-r$  曲线如图所示.

**例 8-9** 求均匀带电圆环轴线上一点的电势.

**解** 设圆环半径为  $R$ , 均匀带有电荷量  $q$ . 在圆环上取线元  $dl$ , 其带电荷量为  $dq$ ,  $dq$  在场点  $P$  的电势



例 8-8 图

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

整个带电圆环在  $P$  点的电势

$$U = \int dU = \oint \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \oint dq = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

因为  $r = \sqrt{R^2 + a^2}$ , 所以  $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + a^2}}$ .

把  $a=0$  代入上式, 得圆心  $O$  的电势  $U_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ .

可见, 均匀带电圆环中心的电场强度等于零, 而电势却不为零.

**例 8-10** 求电偶极子电场中的电势分布.

**解** 设电偶极子的两点电荷为  $+q$  和  $-q$ , 相距为  $l$ . 在纸面上建立图示的极坐标, 原点取在偶极子的中点, 场点  $P$  离  $l$  的中点  $O$  的距离为  $r$ ,  $r$  与  $l$  的夹角为  $\theta$ .

由电势叠加原理可得  $P$  点的电势

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\epsilon_0 r_+ r_-}.$$

由于  $l \ll r$ , 所以  $r_+ r_- = r^2$ ,  $r_- - r_+ \approx l \cos \theta$ , 从而可得

$$U = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

因为电偶极矩  $p = ql$ , 再利用矢量的点积, 上式可以写成

$$U = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (8.5-11)$$

## ► 8.5.4 等势面

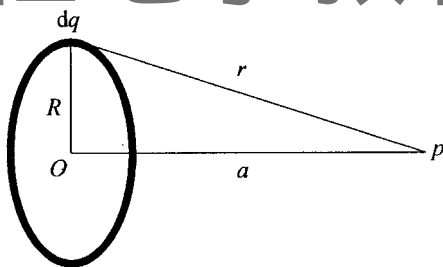
静电场中, 电势值是逐点变化的, 但是有些点的电势是相等的. 电势相等的点组成的面称为**等势面**. 图 8-16 给出了几种电场的等势面分布图. 其中不带箭头的线为等势面与纸面的交线, 带有箭头的线为电场线. 图(a)为均匀电场的等势面, 图(b)为点电荷电场的等势面, 图(c)为等量正负点电荷电场的等势面.

等势面满足方程

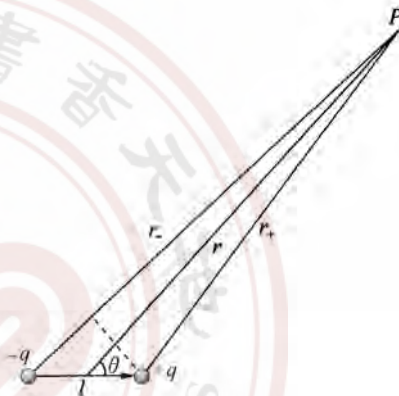
$$U(x, y, z) = C, \quad (8.5-12)$$

常量  $C$  的不同值, 对应着不同的等势面. 当常量  $C$  取等间隔的一系列数值时, 就可以得到一系列等势面. 这样画出的等势面, 密集的地方场强大, 较稀疏的地方场强较小.

可以证明, 等势面有两个重要性质: 它处处与电场线垂直; 在等势面上移动电荷时, 电场力不做功. 等势面的概念在实际工作中有重要意义.



例 8-9 图



例 8-10 图



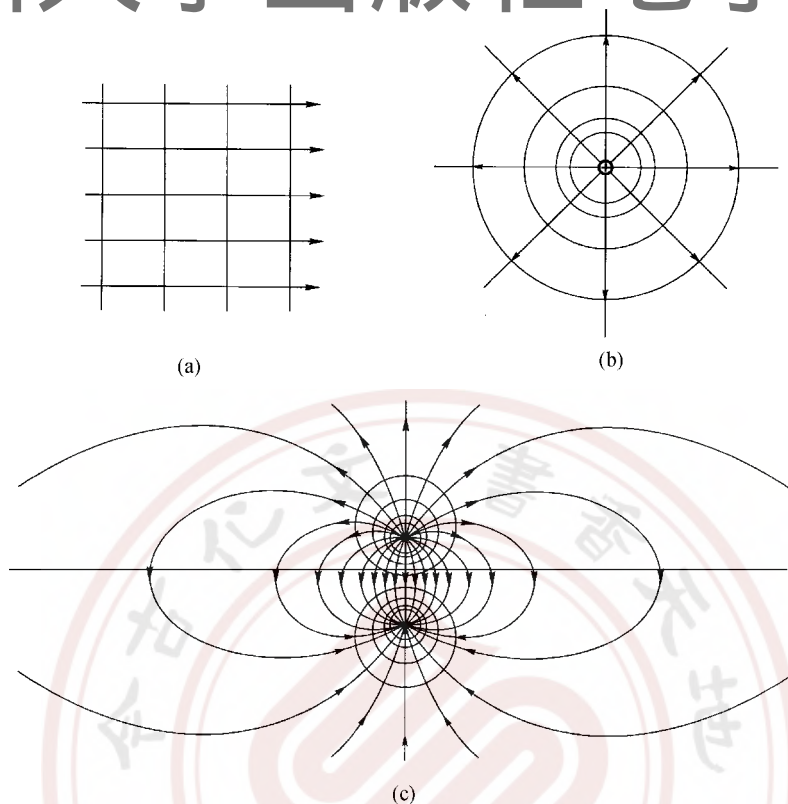


图 8-16

### ► 8.5.5 电势梯度

现在,我们来讨论电势与电场强度的关系. 设在静电场中,取两个靠得很近的等势面  $A$  和  $B$ , 电势分别为  $U$  和  $U+\Delta U$  (设  $\Delta U>0$ ), 如图 8-17 所示.  $P$  为等势面  $A$  上的一点, 在  $P$  点作等势面  $A$  的法线 (等势面的法线正方向规定为指向电势升高的方向), 以  $\Delta n$  表示两等势面在  $P$  点的法向距离  $PQ$ . 由于两个等势面是如此靠近, 可以把  $P$  点附近的电场看成均匀场,  $\Delta U = |E_P| \Delta n$ , 或

$$|E_P| = \frac{\Delta U}{\Delta n}.$$

注意到  $P$  点的电场强度方向是从高电势指向低电势, 与等势面在  $P$  点的正法线方向相反, 上式可以写成

$$\mathbf{E} = -\frac{dU}{dn}\mathbf{n}. \quad (8.5-13)$$

式中  $\mathbf{n}$  是等势面的单位法线矢量, 矢量  $\frac{dU}{dn}\mathbf{n}$  的大小是等势面法线方向上的电势增加率, 方向指向电势增加方向. 矢量  $\frac{dU}{dn}\mathbf{n}$  称为  $P$  点的电势梯度, 通常用符号  $\text{grad}U$  表示, 或者用  $\nabla U$  表示, 即

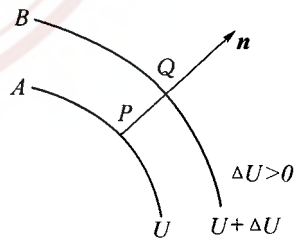


图 8-17

$$\nabla U = \text{grad}U = \frac{dU}{dn} \mathbf{n}.$$

(8.5-13)式表示,电场中各点的电场强度,等于该点电势梯度的负值.梯度在不同坐标系中有不同的运算形式,直角坐标系中梯度运算的形式最简单,(8.5-13)式为

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (8.5-13')$$

总之,电场强度和电势都是用来描述同一个静电场的分布, $\mathbf{E}$ 是矢量, $U$ 是标量,它们之间关系是微分和积分的关系,即

$$\mathbf{E} = -\text{grad}U, U_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (8.5-14)$$

应该指出,上述关系式表明了电场强度和电势的关系是一种分布对应着另一种分布,而不能说它们是一一对应.

**例 8-11** 利用电场强度与电势的关系  $\mathbf{E} = -\nabla U$ , 求均匀带电圆环轴线上任一点的场强大小.

**解** 均匀带电圆环轴线上任一点的电势,已在例 8-9 中求出,把式中的  $a$  换成  $x$  即得到

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}.$$

这是轴线上任一点的电势表达式,利用  $E = -\frac{\partial U}{\partial x}$  计算场强的大小

$$E = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} \right] = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

这一结果与例 8-3 中的结果相同.

## 内容提要

1. 两种电荷、电荷守恒定律、电荷的量子化、电荷的相对论不变性.
2. 库仑定律:  $\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}^0$ ,  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$ , 真空介电常数  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$ .

$$3. \text{高斯定理: } \Phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q.$$

静电场是有源场,源就是电荷;电场线从正电荷出发,终止于负电荷.

电通量:  $\Delta\Phi_E = E\Delta S \cos\theta$ ,  $\Phi_E = \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ ,  $\Phi_E$  的单位为  $\text{V} \cdot \text{m}$ .

$$4. \text{环路定理: } \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

静电场是保守场,有势场,无旋场;电场线不闭合.

$$5. \text{电场强度: } \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0, \mathbf{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{r}^0, \mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i.$$

$$6. \text{电势: } U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, U = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}, U = \sum U_i.$$

7. 电场强度与电势的关系:  $U_P - U_Q = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla U$ .

电场线处处与等势面垂直, 并指向电势减小的方向; 电场线密处等势面间距小.

8. 电荷在外电场中的电势能:  $W = qU$ .

移动电荷时电场力做的功:  $A_{12} = q(U_1 - U_2) = W_1 - W_2$ .

9. 一组公式.

电偶极子:  $\mathbf{p} = ql$ ,  $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mathbf{p}}{r^3}$ ,  $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\mathbf{p}}{r^3}$ ,  $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$ .

均匀带电球面:  $E = 0$ ,  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ ,  $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$ ,  $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ .

均匀带电球体:  $E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ ,  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ .

均匀带电直线:  $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$ .

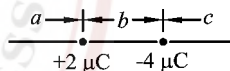
均匀带电平面:  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

10. 电偶极子在电场中受到的力矩:  $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ .

## 习 题

8-1 点电荷  $+2\mu\text{C}$  和  $-4\mu\text{C}$  位于图示中. 除了无穷远处, 两点电荷连线上可以找到电场强度为零和电势为零的区域为

- (A)  $a$  (B)  $b$  (C)  $c$   
(D)  $a$  和  $b$  (E)  $a$  和  $c$



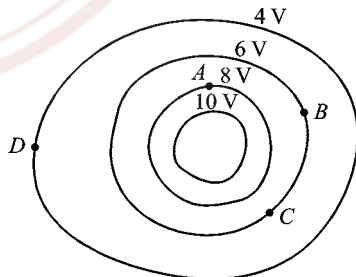
习题 8-1 图

8-2 上题中电势为零的点在

- (A) 区域  $a$  的某点  
(B) 区域  $b$  的某点  
(C) 区域  $c$  的某点  
(D) 区域  $a$  的某点以及区域  $b$  的某点  
(E) 区域  $a$  的某点以及区域  $c$  的某点

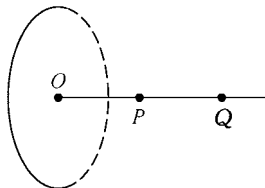
8-3 如图所示, 纸面上显示一组等势面, 在哪点电子受到向下的电场力的作用

- (A) A  
(B) B  
(C) C  
(D) D



习题 8-3 图

8-4 半径为  $R$  的均匀带电圆环, 环的中心轴线上的两点  $P$  和  $Q$  分别离开环心距离为  $R$  和  $2R$ , 则它们的电势之比  $\frac{U_P}{U_Q}$  为



习题 8-4 图

(A) 4

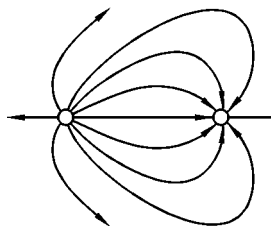
(B) 2

 (C)  $\sqrt{\frac{2}{5}}$ 

 (D)  $\sqrt{\frac{5}{2}}$ 

8-5 图示的电场线分布,相当于

- (A) 两相等的正电荷
- (B) 两电荷分别为 $+Q$ 和 $-Q$
- (C) 两个符号不同的电荷,且正电荷电荷量大些
- (D) 两个符号不同的电荷,且负电荷电荷量大些



习题 8-5 图

8-6 高斯定理

- (A) 适用于一切电场
- (B) 只适用于真空中静电场
- (C) 只适用于具有球对称、轴对称和面对称的静电场
- (D) 高斯面上的电场只与高斯面内的电荷有关

8-7 玻尔氢原子模型中,质量为  $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$  的电子沿半径为  $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$  的圆轨道绕核运动,求:

- (1) 电子的加速度的大小;
- (2) 电子的速度的大小;
- (3) 电子的角速度的大小.

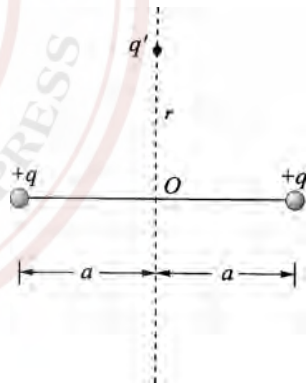
8-8 在正方形的两个相对角上各放一电荷  $Q$ ,其他两个相对角上各放一电荷  $q$ .

- (1) 如果作用在  $Q$  上的合力为零,求  $Q$  和  $q$  的关系;
- (2) 能否选择  $q$  使每个电荷上所受合力均为零?

8-9 两个点电荷 $+q$ 和 $+4q$ ,相距为 $l$ ,现放上第三个点电荷,使整个系统处于平衡状态.求第三个点电荷的位置、电荷量以及符号.

8-10 图示两个固定的点电荷,电荷量都是 $+q$ ,相距 $2a$ ,现在它们的中垂线上离 $O$ 点为 $r$ 处放一点电荷 $q'$ .

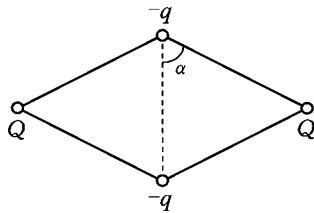
- (1) 求  $q'$  所受的力.
- (2)  $r$  取何值时,  $q'$  受的力最大?
- (3) 若  $q'$  在所放的位置上从静止释放,任其自由运动,试分别就  $q'$  与  $q$  同号或异号两种情形讨论  $q'$  的运动.



习题 8-10 图

8-11 正方形顶点上四个点电荷的电荷量都是 $+Q$ ,在正方形的中心放点电荷 $Q'$ ,使每个电荷都达到平衡,求 $Q'$ .这样的平衡与正方形的边长有无关系?这样的平衡是否是稳定平衡?

8-12 用四根长度相等的线连接四个带电小球,如图所示.试证明当此系统处于平衡时,  $\tan^3 \alpha = Q^2 / q^2$ .



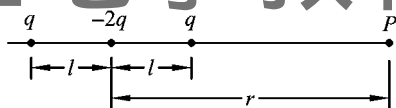
习题 8-12 图

8-13 两块带有等量异号电荷的平行板间有一均匀电场,在带负电的板面上有一个电子从静止被释放出来,经  $1.5 \times 10^{-8} \text{ s}$  的时间间隔后,到达相距  $2 \text{ cm}$  的带正电的板上,求两板间的电场强度.

8-14 图示为一个重要的电学模型:电四极子.它由两个相同的电偶极子  $p=ql$  组成.

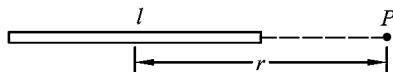


这两个电偶极子在同一直线上,但方向相反,而且它们的负电荷重合在一起,则当  $r \gg l$  时,在其延长线上离中心为  $r$  的  $P$  点的电场强度的大小为多少?



习题 8-14 图

**8-15** 一均匀带电的细线弯成半径为  $R$  的圆环,带有电荷量  $q$ ,过圆环中心的轴线上任一点(离开中心距离  $r$ )的电场强度在  $\frac{r}{R}$  取什么值时,场强  $E$  为最大?



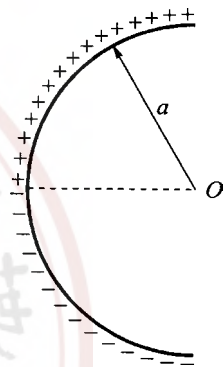
习题 8-16 图

**8-16** 如图所示,电荷  $q$  均匀分布在长为  $l$  的细棒上,求在棒的延长线上离棒的中点距离为  $r$  ( $r > \frac{l}{2}$ ) 的  $P$  点的电场强度.

**8-17** 电荷  $q$  均匀分布在弯成半径为  $R$  的半圆的细棒上,求圆心处的电场强度  $E$  的大小和方向.

**8-18** 总电荷量为  $q$  的均匀带电细棒,弯成半径为  $a$  的圆弧,设圆弧对中心所张的角为  $\theta_0$ ,求圆心处的电场强度.

**8-19** 一细绝缘棒弯成半径为  $a$  的半圆,沿其上半部分均匀分布有电荷  $+q$ ,沿下半部分均匀分布有电荷  $-q$ ,如图所示.求圆心  $O$  的电场强度  $E$  的大小和方向.

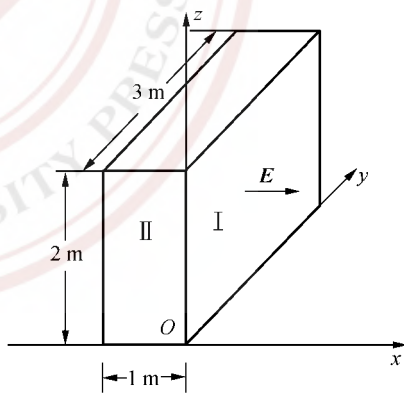


习题 8-19 图

**8-20** 半径为  $a$  的薄圆盘,均匀带有电荷量  $q$ ,试求在圆盘轴线上且距中心为  $x$  处的电场强度.(提示:将圆盘分成许多同心圆环,求每一带电圆环的电场,再积分求总电场)

**8-21** 一无限大的均匀带电平面,开有一个半径为  $a$  的圆洞.设电荷面密度为  $\sigma$ .求这洞的轴线上离洞心距离为  $r$  处的电场强度.

**8-22** 图示空间的电场强度  $E$  处处平行于  $x$  轴且  $E$  在垂直于  $x$  轴的任一平面上各点都具有相同的量值.已知在  $yOz$  平面内  $E=400 \text{ V/m}$ .



习题 8-22 图

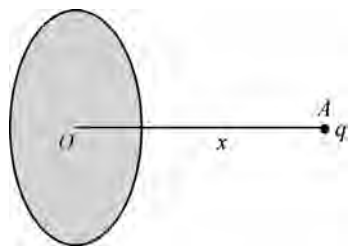
(1) 求图中面 I 以及面 II 的电通量的大小.

(2) 在此闭合面内,有  $26.6 \times 10^{-9} \text{ C}$  的正电荷,求与面 I 相对的面上  $E$  的大小和方向.

**8-23** (1) 一点电荷  $q$  位于边长为  $a$  的立方体的中心,求通过该立方体的一个面的电通量的大小;

(2) 如果该电荷移到立方体的一个角顶上,这时通过立方体每一面的电通量各多少?

**8-24** 如图所示,点电荷  $q$  的电场中,有一个半径为  $R$  的圆平面, $q$  就在圆平面的轴线上  $A$  点.设  $\overline{AO}=x$ ,试计算通过该圆平面的电通量.



习题 8-24 图

**8-25** (1) 地球表面附近的电场强度约为  $200 \text{ V/m}$ ,方向指向地球中心,求地球带电的总量;

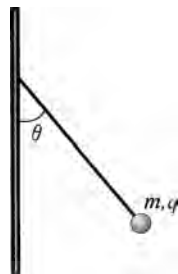
(2) 离地面  $1400 \text{ m}$  处的高空,测得电场强度为

20 V/m, 方向仍指向地球中心, 试计算在1400 m下大气层的平均体电荷密度.

**8-26** 电荷均匀分布在半径为  $R$  的无限长圆柱体内, 设电荷体密度为  $\rho$ , 求证: 离柱轴  $r$  远处 ( $r < R$ ) 的电场  $E$  由下式给出

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}.$$

**8-27** 如图所示, 小球的质量  $m = 1.0 \times 10^{-3}$  g, 带有电荷量  $q = 2.0 \times 10^{-8}$  C, 悬线与一块充分大的带电平板成  $\theta = 30^\circ$  的角, 试求带电平板的电荷面密度.



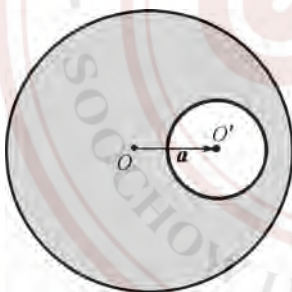
习题 8-27 图

**8-28** 两根无限长的细直导线相互平行, 相距  $2a$ , 它们都均匀带电, 电荷线密度分别为  $+\lambda$  和  $-\lambda$ , 求单位长导线受的吸引力.

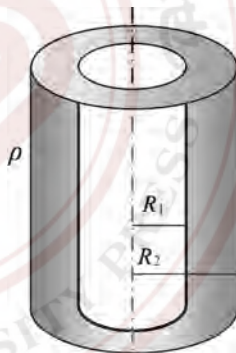
**8-29** 均匀带电球体, 电荷体密度为  $\rho$ . 设  $r$  是从球心指向球内一点  $P$  的矢径.

(1) 证明  $P$  处的电场  $\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}$ ;

(2) 从该球体内挖去一球形空腔, 如图所示. 应用场强叠加原理, 证明空腔内所有点的电场为  $\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{a}$ , 即空腔内为均匀电场. 其中矢量  $\mathbf{a}$  是从球心指向空腔中心的矢径.



习题 8-29 图



习题 8-30 图

**8-30** 一均匀带电无限长圆柱壳 (图中只画出了一部分), 体电荷密度为  $\rho$ , 内半径为  $R_1$ , 外半径为  $R_2$ . 求下列三个区域内, 距离该圆柱壳为  $r$  的一点的电场强度:

(1)  $r < R_1$ ;

(2)  $R_1 < r < R_2$ ;

(3)  $r > R_2$ .

**8-31** 质子的电荷并非集中于一点, 而是分布在一定的空间内. 实验测得, 质子的电荷体密度可用指数函数表示为

$$\rho = \frac{e}{8\pi b^3} e^{-\frac{r}{b}}.$$

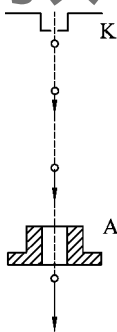
式中  $b$  为一常量,  $b = 0.23 \times 10^{-15}$  m. 求电场强度随  $r$  变化的表达式和  $r = 1.0 \times 10^{-15}$  m 处电场强度的大小.

**8-32** 一次闪电的放电电压大约是  $1.0 \times 10^9$  V, 而被中和的电荷量约为 30 C.

(1) 一次放电所释放的能量是多大?

(2) 若平均每个家庭每天消耗的电能是  $10 \text{ kW} \cdot \text{h}$ , 上述一次放电所释放的电能够多少户家庭使用一天?

**8-33** 电子束焊接机中的电子枪如图所示, 图中 K 为阴极, A 为带小孔的阳极. 电子束在阴极和阳极间电场的作用下, 以极高的速率穿过阳极上的小孔, 射到被焊接的金属上, 使两块金属熔化而焊接在一起. 已知阴极和阳极间的电势差为  $2.5 \times 10^4 \text{ V}$ , 并设电子从阴极发射时的初速率为零. 求:



习题 8-33 图

(1) 电子到达被焊接的金属时具有的动能(用 eV 表示);

(2) 电子射到金属上时的速率.

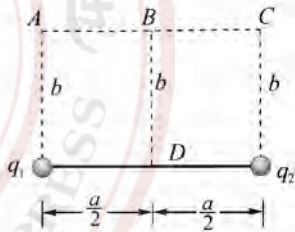
**8-34** 固定于  $y$  轴上两点  $y = +a$  和  $y = -a$  的两个正点电荷, 电荷量均为  $q$ .

(1) 假设将带正电  $q'$ 、质量为  $m$  的粒子从原点沿  $x$  轴方向稍许移动一下, 则在无穷远处粒子的速度是多少?

(2) 上述粒子在  $x$  轴上任意位置的速度是多少?

(3) 如果将该粒子从无穷远处以(1)中速度的  $\frac{1}{2}$  沿  $x$  轴向原点射出, 则这个粒子能运动到离原点多远处?

**8-35** 如图放置两点电荷,  $q_1 = 3.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ ,  $q_2 = -3.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ , A, B, C, D 为电场中四个位置, 图中  $a = 8.0 \text{ cm}$ ,  $b = 6.0 \text{ cm}$ .



习题 8-35 图

(1) 将点电荷  $q_3 = 2.0 \times 10^{-9} \text{ C}$  从无穷远处移到 A 点, 电场力做多少功? 电势能增加多少?

(2) 将此点电荷从 C 移到 D, 电场力做功多少? 电势能增加多少?

(3) 将此点电荷从 A 移到 B, 电场力做功多少? 电势能增加多少?

(4)  $q_1, q_2$  这对点电荷原有电势能为多少?

**8-36** 一均匀带电细杆, 长  $l = 15.0 \text{ cm}$ , 线电荷密度  $\lambda = 2.0 \times 10^{-7} \text{ C/m}$ , 求:

(1) 细杆延长线上与细杆的一端相距  $a = 5.0 \text{ cm}$  处的电势;

(2) 细杆中垂线上与细杆相距  $b = 5.0 \text{ cm}$  处的电势.

**8-37** 两个同轴安置的金属薄圆筒, 内筒半径为  $r_a$ , 外筒半径为  $r_b$ . 设它们长度均可以作为无穷长, 内筒上单位长度的正电荷为  $+\lambda$ , 外筒上单位长度的负电荷为  $-\lambda$ , 试证明两个

圆筒的电势差为  $U = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda \ln \frac{r_b}{r_a}$ .

**8-38** 一台电子加速器通过  $6.5 \times 10^9 \text{ V}$  的电势差来加速电子, 使其获得动能.

(1) 利用相对论来计算该电子的速率.

(2) 如果按照经典力学计算, 电子的速率为多大?

**8-39** 具有  $10 \text{ MeV}$  动能的  $\alpha$  粒子与静止的金原子核(原子序数为 79)正碰. 这两个粒子所能达到的最接近距离为多少?

8-40 均匀带电圆盘,半径为  $R$ ,电荷面密度为  $\sigma$ .

(1) 证明轴线上任一点的电势为

$$U = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + x^2} - |x|),$$

其中  $x$  为离圆盘中心的距离;

(2) 从电场强度和电势梯度的关系,求该点的电场强度.





## 第9章

## 静电场中的导体和电介质

上一章我们讨论了真空中的静电场,即空间除了有确定的电荷分布之外,在电场中不存在其他物质.当电场中有其他物体存在时,物体中的电荷受电场的作用而重新分布,使空间的电场分布发生变化.绝大部分物质按其导电能力大致可分为两类:内有大量自由电荷,导电能力极强的导体;内部几乎没有自由电荷,不能导电的绝缘体(或称电介质).导体处于电场中时,会因静电感应现象而在导体表面出现感应电荷,当导体达到静电平衡状态时,感应电荷产生的电场与原来的电场叠加的结果使导体内场强处处为零.电介质内虽然几乎没有自由电荷,但在电场的作用下电介质会被极化,在电介质中出现极化电荷.在静电平衡条件下,电介质内部的场强并不为零,但极化电荷产生的电场与原电场叠加的结果使电介质内的电场有所减弱.导体和绝缘体有着完全不同的静电特性,研究导体和电介质的静电特性以及导体和电介质内外电场分布的图像,具有很重要的实际意义.本章首先讨论金属导体在静电场中的静电平衡条件及导体的电荷和电场的分布;其次讨论电容器的组成、电容器的串并联和电容的计算;然后讨论电介质的静电特性及其对电容器电容的影响.电场也是物质存在的一种形式,本章最后讨论静电场的能量,从一个侧面来反映静电场的物质性.

## 9.1 静电场中的导体

## ► 9.1.1 导体的静电平衡条件

物质的电结构告诉我们,金属导体具有大量的自由电子,自由电子做无规则热运动.由于电子没有宏观的定向运动,金属导体内的任一部分都是电中性的.

当导体受到外电场  $E_0$  的作用,导体中的自由电子将逆着电场方向做宏观运动,引起导体中电荷的重新分布,这就是**静电感应**.重新分布的电荷产生附加电场  $E'$ ,它要叠加到原来的电场  $E_0$  上,即总场强  $E = E_0 + E'$ .导体内附加场  $E'$  与外场  $E_0$  方向相反,所以它对  $E_0$  起削弱作用.只要导体内总场  $E$  不为零,自由电子的宏观运动就不停止,重新分布的电荷继续增强,附加场  $E'$  增强,直至导体内  $E$  为零,这时导体内自由电子的宏观运动就停止,导体达到静电平衡.这种重新分布的电荷称为**感应电荷**.

一个带电体系的电荷分布不再变化,从而电场分布也不随时间变化,该带电体系达到了**静电平衡**.从上述分析来看,导体达到静电平衡的条件就是其内部场强处处为零.如果导体内某处场强不为零,该处附近的自由电子就会有宏观运动.同时,导体表面附近的电场强度也必定和导体表面垂直,否则,电场强度的表面分量将使表面的电荷做宏观运动.因此导体处于静电平衡状态的条件是  $E_{\text{内}}$  为零,  $E_{\text{表面}}$  垂直导体表面.

图 9-1 画出了两个导体球处于静电平衡时的电荷分布和电场分布情形.导体球 A 原来是均匀带有正电的.当把不带电的导体球 B 靠近 A, B 球两边出现了等量异号的感应电荷,与此同时 A 球上电荷分布也不均匀了.它们电荷分布的改变一直进行到两个导体内的合场强都为零.

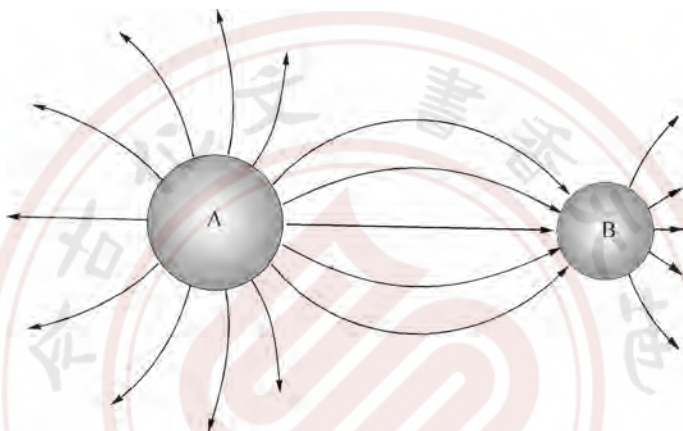


图 9-1

从导体的静电平衡条件出发,可以得知导体内部以及导体表面上任意两点的电势差为零.所以导体处于静电平衡条件的另一个说法就是**导体是等势体,表面是等势面**.

## ► 9.1.2 导体上电荷的分布

达到静电平衡的导体上电荷分布在何处,分三种情形来讨论.

对于实心导体情形,在达到静电平衡后,导体内处处没有净电荷.为了证明这一点,在实心导体内任选一闭合曲面  $S$ ,如图 9-2 所示.因为达到静电平衡,导体内场强  $E$  为零,所以  $S$  曲面的电通量  $\oint E \cdot dS = 0$ .按照高斯定理,  $S$  面内电荷的代数和为零,即净电荷为零.由于这个封闭曲面可以很小,而且其位置是任意的,所以在达到静电平衡后,导体内处处没有净电荷.电荷只能分布在导体表面.

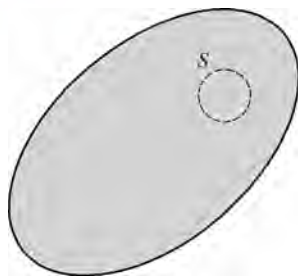


图 9-2

对于空心导体(导体壳)可以证明,达到静电平衡后内表面上也无电荷分布.为了证明这一点,在导体内取一闭合曲面  $S$ ,将内表面包围起来,如图 9-3 所示.因为  $S$  面上  $E$  处处为零,根据高斯定理,  $S$  面内,实际上就是内表面上电荷的代数和为零.内表面上电荷代数和为零,内表面上仍可能某点面电荷  $\sigma > 0$ ,而另一点  $\sigma < 0$ ,只要总量为零.利用电场线从正电荷出发,终止于负电荷的性质,就可

画出图示的一条电场线.但是,电场线两端必存在电势差,即内表面上某些地方的电势要高于内表面上的另一些地方.这与空心导体已达到静电平衡相违背.所以内表面上面电荷 $\sigma$ 必处处为零,即达到静电平衡,空心导体上的电荷也只分布在外表面.

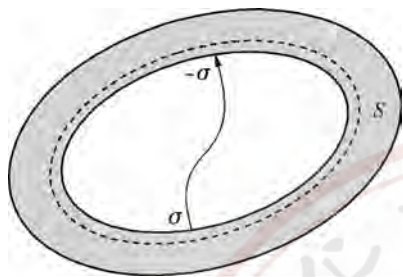


图 9-3

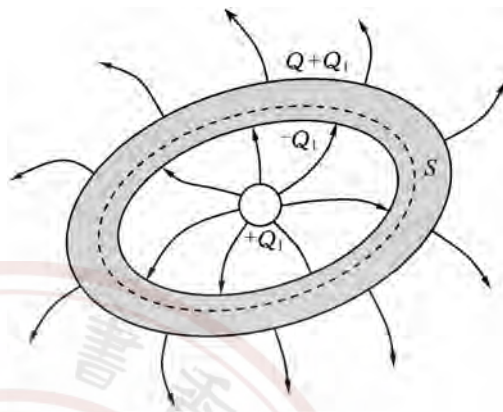


图 9-4

对于空心导体内有其他带电体的情况,设空心导体内带电体的带电荷量为 $+Q_1$ ,空心导体带电荷量为 $Q$ ,如图 9-4 所示.在空心导体内、外表面间取高斯面 $S$ ,根据导体的静电平衡条件,空心导体内的电场强度处处为零,所以通过此高斯面的电通量 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ ,说明高斯面 $S$ 内电荷的代数和为零.因此空心导体的内表面将感应出电荷量 $-Q_1$ ,使空心导体内带电体发出的电场线全部终止于空心导体的内表面而不能穿过空心导体.

由以上三种情况的讨论可见,实心导体或空心导体在达到静电平衡时,电荷只能分布在表面上.

电荷在导体表面是如何分布的?这个问题的定量研究比较复杂,它不仅与导体的形状有关,而且与它附近其他导体或带电体有关.对于孤立带电导体来说,导体表面凸出而尖锐的地方曲率较大,面电荷密度 $\sigma$ 较大;表面较平坦的地方曲率较小, $\sigma$ 较小;表面凹进去的地方曲率为负,则 $\sigma$ 更小,如图 9-5 所示.

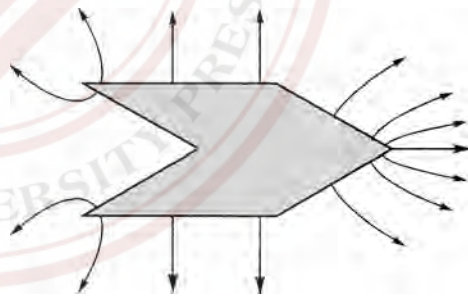


图 9-5

### ► 9.1.3 导体表面附近的场强 尖端放电

导体表面附近的场强 $E$ 与该点处的电荷面密度 $\sigma$ 有定量关系.利用高斯定理和导体达到静电平衡的条件,可以证明

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (9.1-1)$$

前面讲过,孤立导体带电后,表面上曲率大处,电荷的面密度也大,(9.1-1)式指出了带电体表面附近的场强和电荷的面密度成正比,因此,在导体表面曲率较大处,场强也较大.对于具有尖端的带电体,尖端处的场强特别大,往往导致尖端放电.

图 9-6 是尖端放电的演示. 由于针尖处场强很大, 空气中残留的离子受尖端强电场作用发生剧烈运动, 并与空气分子碰撞使空气分子电离, 产生大量离子. 与针尖电荷异号的离子被拉向尖端, 和针尖上的电荷相中和, 而与针尖电荷同号的离子被排斥, 离开尖端做加速运动, 形成“电风”, 把火焰吹向一边. 从外表看, 好像电荷从尖端“喷放”出.

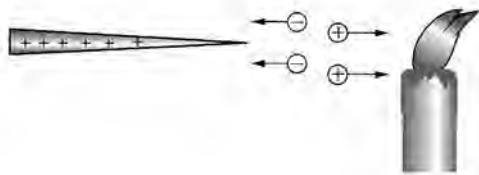


图 9-6

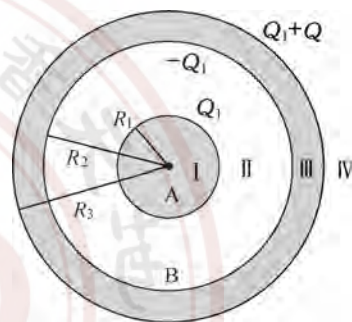
尖端放电会使高压输电线浪费电能, 为此高压输电线表面应尽量做得光滑些. 一些高压设备的电极常做成光滑的球面, 这也是为了避免尖端放电, 以维持高电压.

尖端放电也有可利用的一面, 避雷针就是利用金属尖端的缓慢放电而避免雷击.

**例 9-1** 半径  $R_1$ 、带电荷量  $Q_1$  的金属球 A, 外面有一带电荷量  $Q$  的金属同心球壳 B, B 的内、外半径分别为  $R_2$ ,  $R_3$ . 求:

- (1) 电场和电势的分布;
- (2) 球与球壳间的电势差.

**解** (1) 根据导体的静电平衡条件, 电荷  $Q_1$  分布在金属球 A 的表面, 金属球壳 B 的内表面将感应出电荷量  $-Q_1$ , 于是金属球壳的外表面带电  $Q_1 + Q$ . 根据高斯定理, 容易求得电场在各区域内的分布:



例 9-1 图

$$\begin{cases} E_{\text{I}} = 0 & (r < R_1), \\ E_{\text{II}} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (R_1 < r < R_2), \\ E_{\text{III}} = 0 & (R_2 < r < R_3), \\ E_{\text{IV}} = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > R_3). \end{cases}$$

电势分布解法一(场势法): 利用电势的定义求各区域电势的分布.

$$\begin{aligned} r < R_1: \quad U_{\text{I}} &= \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_{\text{II}} \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_3}^{\infty} \mathbf{E}_{\text{IV}} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}; \\ R_1 < r < R_2: \quad U_{\text{II}} &= \int_r^{R_2} \mathbf{E}_{\text{II}} \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_3}^{\infty} \mathbf{E}_{\text{IV}} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}; \\ R_2 < r < R_3: \quad U_{\text{III}} &= \int_{R_3}^{\infty} \mathbf{E}_{\text{IV}} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_3}^{\infty} \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}; \\ r > R_3: \quad U_{\text{IV}} &= \int_r^{\infty} \mathbf{E}_{\text{IV}} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned}$$

可见, 电场强度为零处, 电势不一定为零.

电势分布解法二(电势叠加法): 由各带电球面的电势分布(见例 8-8), 利用电势叠加原



理求各区域电势的分布.

金属球 A 单独存在时的电势:

$$U_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad (r < R_1), \quad U_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R_1).$$

金属球壳 B 的内表面单独存在时的电势:

$$U_2 = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (r < R_2), \quad U_2 = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R_2).$$

金属球壳 B 的外表面单独存在时的电势:

$$U_3 = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} \quad (r < R_3), \quad U_3 = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R_3).$$

利用电势叠加原理:

$$\begin{aligned} r < R_1: \quad U_{\text{I}} &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}; \\ R_1 < r < R_2: \quad U_{\text{II}} &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}; \\ R_2 < r < R_3: \quad U_{\text{III}} &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}; \\ r > R_3: \quad U_{\text{IV}} &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned}$$

(2) 球与球壳间的电势差

$$U_{\text{AB}} = U_{\text{I}} - U_{\text{III}} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

或由场势法:

$$U_{\text{AB}} = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_{\text{II}} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

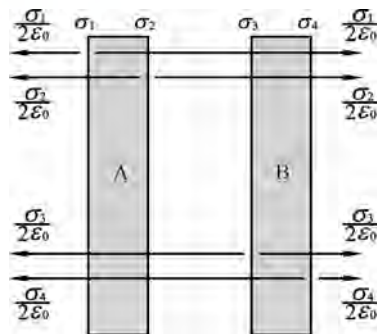
注意  $U_{\text{AB}}$  与球壳 B 所带电荷量无关. 如果把金属球 A 与金属球壳 B 用导线连起来, 则金属球的电荷量  $Q_1$  与球壳内表面电荷量  $-Q_1$  中和, 使得二者之间电场变为零, 即  $E=0$  ( $r < R_3$ ). 球壳外表面仍保持电荷量  $Q_1 + Q$ , 且仍为均匀分布, 外面的电场分布仍为  $E = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .

**例 9-2** 平行放置的两大金属平板 A 和 B, 面积都是  $S$ , 金属板 A 带有总电荷  $Q$ , 金属板 B 不带电. 求静电平衡时, 两金属板上的电荷分布. (忽略金属板的边缘效应)

**解** 两金属板达到静电平衡, 电荷分布在其表面, 因为忽略边缘效应, 这些电荷可以看作均匀分布. 设四个表面上电荷面密度分别为  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  和  $\sigma_4$ , 如图所示.

应用无限大均匀带电平面两边的电场计算式(8.4-10), 电场强度的叠加原理, 以及金属板内的电场为零, 可以得到以下两个方程

$$E_A = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0, \quad \textcircled{1}$$



例 9-2 图

$$E_B = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0. \quad (2)$$

①、②方程联立,可以解得

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_4, \\ \sigma_2 &= -\sigma_3, \end{aligned} \quad (9.1-2)$$

即背向的两面,面电荷密度总是大小相等并且符号相同;相向的两面,面电荷密度总是大小相等而符号相反.

由电荷守恒定律可知

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 &= \frac{Q}{S}, \\ \sigma_3 + \sigma_4 &= 0. \end{aligned}$$

由此可以解得

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2S}, \sigma_2 = \frac{Q}{2S}, \sigma_3 = -\frac{Q}{2S}, \sigma_4 = \frac{Q}{2S}.$$

请思考:(1)如果把B板接地结果又如何?

$$(\text{答案: } \sigma_1 = \sigma_4 = 0, \sigma_2 = \frac{Q}{S}, \sigma_3 = -\frac{Q}{S})$$

(2)如果A板带电+Q,B板带电-Q,结果如何?

$$(\text{答案: } \sigma_1 = \sigma_4 = 0, \sigma_2 = \frac{Q}{S}, \sigma_3 = -\frac{Q}{S})$$

## ► 9.1.4 静电屏蔽

静电屏蔽指对静电场的屏蔽.利用静电平衡时导体内部电场为零,可以达到静电屏蔽的目的.下面分两种情形来讨论.

如果要使空间某一特定区域不受其他带电体电场的影响,可以用一导体壳把该区域包围起来,如图9-7所示.导体壳达到静电平衡后,内部的场强  $E=0$ ,这表明壳外表面上分布的感应电荷在壳内产生的附加场完全抵消了带电体在壳内的电场,即导体壳外表面以内的空间均不受外电场的影响.

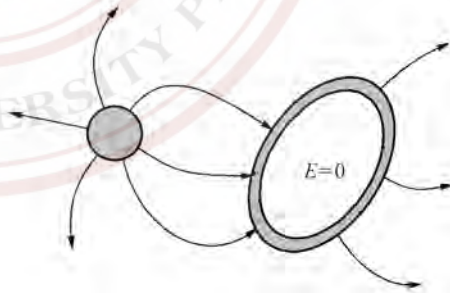


图 9-7

如果要把某个带电体产生的电场屏蔽掉,可把带电体用导体壳包起来,如图9-8(a)所示.若带电体A带有电荷量  $q$ ,则壳内表面有  $-q$  感应电荷出现,外表面亦有  $+q$  的感应电荷,这时壳外仍有电场.如果再把导体壳接地,导体壳外表面上感应电荷与地球上等量异号电荷中和,外表面的  $+q$  感应电荷消失.这样,接地导体壳内表面以外的空间不受带电体A的影响,如图9-8(b)所示.

总之,导体壳不论接地与否,其外表面以内的空间不受壳外带电体电场的影响,而接地导体壳内表面以外的空间不受壳内带电体的影响,这就是**静电屏蔽**.要彻底理解静电屏蔽问题,需要用到静电学边值问题的唯一性定理.

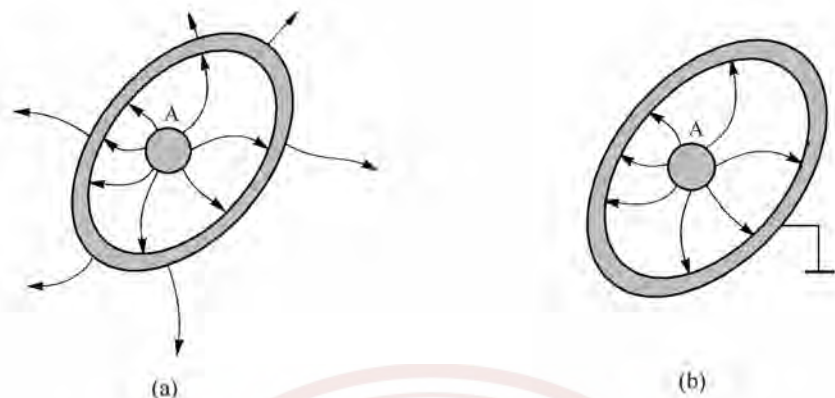


图 9-8

任何金属导体都可以作为屏蔽材料,而且屏蔽“壁”的厚薄对屏蔽效果无影响.工程技术上常用接地金属网罩来实现静电屏蔽.

### ► \* 9.1.5 范德格拉夫静电起电机

在例 9-1 的解题过程中,已看到将一个带电体引入空心导体壳内部并与之接触,结果带电体上的电荷全部转移到空心导体壳.这一过程与原先空心导体壳是否带电,或者带何种电均无关.因此,只要不断地重复这一过程,导体壳的电荷将会不断增加,它的电势也会不断升高.

范德格拉夫(Robert J. Van de Graff)所发明的起电机就是采用了上面的原理.

图 9-9 是小型范德格拉夫起电机的示意图.球形空心金属导体 A,由绝缘管 B 支撑. B 安装在接地的金属底座 C 上. 橡胶布制成的传送带 D 跨过两个滑轮 E 和 F. F 由小型电动机 M 驱动.

传送带的下端附近有一排尖针 H,尖针与电压为几万伏的直流电源的正极相连. 由于尖端放电,正电荷被喷射到传送带上,并随传送带一起向上升. 金属球罩内侧也装有一排与 A 相连的金属针 G. 当传送带上的正电荷与 G 靠近时,针尖上就感应出负电荷,负电荷因为尖端放电,和传送带上的正电荷中和,过滑轮 E 后,传送带就不带电,而球壳 A 也带上了正电荷,并且正电荷很快分布在外表面上. 这样,由于传送带的运送,正电荷就源源不断从直流电源传送到金属球 A 的外表面,从而使金属球与大地间产生了高电压.

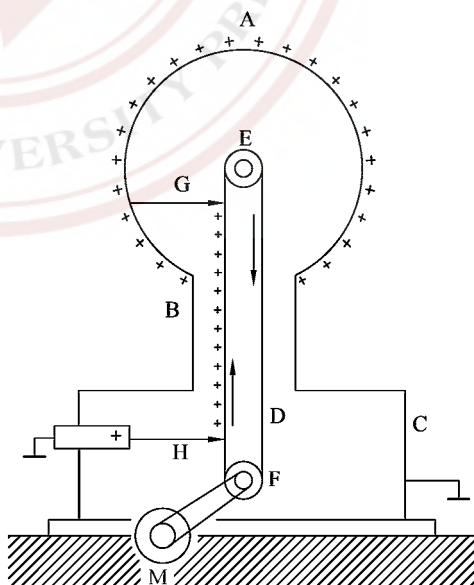


图 9-9

范德格拉夫起电机可以产生  $10^6$  V 数量级的高电压. 它在原子物理中是用来加速带电粒子的. 有的起电机一次就能把质子加速到 10 MeV 的能量. 用这种方法获得的高能带电粒子流, 可以用来做“原子轰击”实验.

## 9.2 电容和电容器

### ► 9.2.1 孤立导体的电容

理论和实验表明, 孤立导体所带的电荷量  $q$  与它本身的电势  $U$  成正比, 这个比例关系式可以写成

$$C = \frac{q}{U}. \quad (9.2-1)$$

系数  $C$  称为**孤立导体的电容**, 它与导体的形状、尺寸有关, 而与  $q$  和  $U$  无关. 它的物理意义是使导体升高单位电势所需要的电荷量. 从这点意义上来说, 电容  $C$  反映了导体储存电荷的能力.

在国际单位制中, 电容的单位是库/伏(C/V), 叫作法拉, 简称法, 用 F 表示. 实用上法单位太大, 常用微法( $\mu\text{F}$ )和皮法(pF)等,

$$1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}, \quad 1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}.$$

采用(9.2-1)式, 就可算出半径为  $R$  的孤立导体球电容

$$C = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (9.2-2)$$

### ► 9.2.2 电容器电容

实际上孤立导体并不存在, 导体附近往往有其他导体存在. 为了消除其他导体的影响, 可以用一个封闭的导体壳 B 将 A 包围起来. B 接地与否均可以, 如图 9-10 所示. 由前面讨论可知, 当 A 带上  $+q$  电荷时, 由于静电感应, B 的内表面将带  $-q$  电荷, 这时 A, B 间电场完全不受外界的影响, 导体 A 所带电荷  $q$  仍将与  $U_A - U_B$  成正比. 把导体 A 与导体壳 B 内表面组成的导体系统称为**电容器**. 组成电容器的两个导体叫作**电容器的两个极板**. 电容器电容  $C$  的定义为

$$C = \frac{q}{U_A - U_B}. \quad (9.2-3)$$

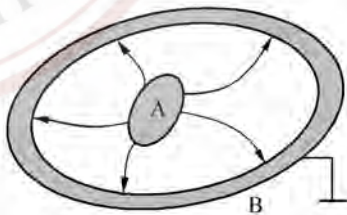


图 9-10

它与两导体极板的尺寸、形状和相对位置有关, 以及两导体极板间所充填的电介质有关. 本节都把极板间看成真空,  $C$  与  $q$  和  $U_A - U_B$  无关.

实际上对电容器的要求并不像上面所定义的那样严格, 只要从一极板发出的电场线能几乎全部终止于另一个极板, 这两个导体极板就构成了一个电容器.

根据电容器电容的定义来计算平行板电容器的电容, 如图 9-11(a) 所示. 平行板电容器是由两块平行金属板组成的. 设极板面积为  $S$ , 极板间距为  $d$ . 如果给两极板分别带上  $\pm Q$



电荷量, 电场线如图 9-11(b) 所示. 在板间中央部分是均匀电场, 而在边缘电场线发生弯曲, 称为**边缘效应**. 但是, 在极板线度远大于极板间距时, 可以忽略边缘效应, 把电场线分布近似为图 9-11(c) 所示. 这样, 极板间电场

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}.$$

两极板间电势差

$$U_A - U_B = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}.$$

由定义式(9.2-3)得平板电容器的电容  $C$  的计算式

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (9.2-4)$$

此式表明平行板电容器的电容  $C$  正比于极板面积, 反比于极板间距.

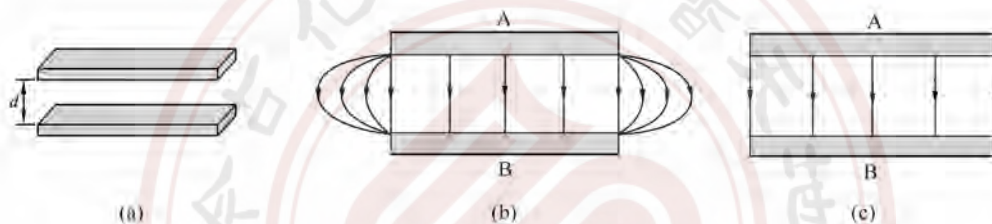


图 9-11

对于由半径分别为  $R_A$  和  $R_B$  的两个同心金属球面组成的球形电容器, 如图 9-12 所示, 可以计算其电容为

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A}. \quad (9.2-5)$$

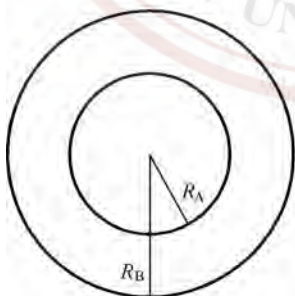


图 9-12

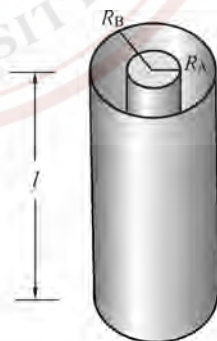


图 9-13

对于由两个同轴金属圆柱面组成极板的圆柱电容器, 如图 9-13 所示, 可以计算其电容  $C$  为

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_B}{R_A}}. \quad (9.2-6)$$

其中  $l$  为柱形电容器的长度,  $R_A, R_B$  为两圆柱面的半径.

大多数的电容器两极板间充以某种称为电介质的非导电材料,这样做有以下优点:能从结构上保证两极板有十分小的间隔而又不接触;能提高电容器承受的电压;能增大电容.关于电介质的知识留待下节讨论.

电容器是一个很有用的电子器件,电容器可用来建立电场;电容器可用于储存能量;电容器和其他一些器件联合起来使用,可减小电压起伏、发生脉冲信号以及提供时间延迟等.

## ► 9.2.3 电容器的串并联

电容器的性能规格中有两个重要指标:电容值及耐压值.使用电容器时,两极板所加的电压不能超过规定的耐压值,否则电容器内的电介质有被击穿的危险.

实际工作中,当一个电容器在电容值或耐压值不符合设计的要求时,可以把几个电容器串联或并联起来使用.

串联电容器组如图 9-14 所示.设想各电容器原来都未带电,现把它串联后接上电压  $U$ ,这时各电容器所带电荷量相等.这个电荷量也是电容器组的电荷量  $q$ .每个电容器上的电压分别为

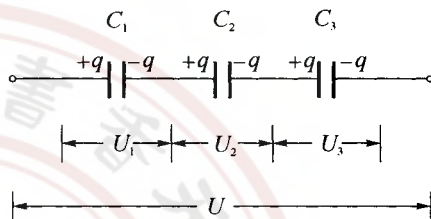


图 9-14

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, U_2 = \frac{q}{C_2}, U_3 = \frac{q}{C_3}.$$

这表明串联电容器,电压与电容成反比地分配在各电容器上,即

$$U_1 : U_2 : U_3 = \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2} : \frac{1}{C_3}.$$

串联电容器组的等值电容  $C$  的倒数

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3},$$

即串联电容器组的等值电容  $C$  的倒数

$$\frac{1}{C} = \sum_i^n \frac{1}{C_i}. \quad (9.2-7)$$

电容器串联后,总电容的倒数是各电容倒数之和,总电容比其中任何一个电容都小.

图 9-15 所示为并联电容器组.接上电源后每一个电容器两极板上的电势差都为  $U$ ,即并联时每一电容器上的电压都相同,等于电源电压  $U$ ,但是,分配在每个电容器上的电荷量是不同的,

$$q_1 = C_1 U, q_2 = C_2 U, q_3 = C_3 U.$$

这表明,电容器并联时,电荷量与电容成正比地分配在各电容器上,即

$$q_1 : q_2 : q_3 = C_1 : C_2 : C_3.$$

并联电容器组的等值电容

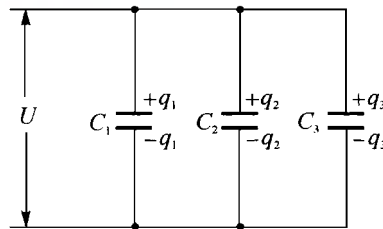


图 9-15

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{U} = C_1 + C_2 + C_3,$$

即

$$C = \sum_i^n C_i.$$

(9.2-8)

电容器并联后,总电容等于各个电容器电容之和,总电容比其中任何一个电容大.

电容器的并联和串联比较起来,并联时总电容增大了,但电容器组的耐压受到耐压最低的那个电容器的限制;串联时,总电容比每个电容器的电容都小,但是电容器组的耐压能力提高了.

**例 9-3** 两个电容器  $C_1$  与  $C_2$  分别标明 200 pF、500 V 与 300 pF、900 V,把它们串联起来.

(1) 其等值电容为多大?

(2) 两端加上 1 000 V 的电压,是否会被击穿?

(3) 如果要使这电容器组不被击穿,最大可加多大电压?

**解** (1) 等值电容

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{200 \times 300}{200 + 300} \text{ pF} = 120 \text{ pF}.$$

(2) 加上  $U = 1\,000 \text{ V}$  电压,各电容器两端电压,

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{300}{200} = \frac{3}{2}.$$

而  $U_1 + U_2 = 1\,000 \text{ V}$ ,由此得

$$U_1 = 600 \text{ V}, U_2 = 400 \text{ V}.$$

电容器  $C_1$  上电压 600 V 超过其耐压值 500 V,这样  $C_1$  被击穿,接着  $C_2$  也将被击穿.

(3) 要回答这个问题,可以先计算各电容器由耐压所决定的最大带电荷量  $Q_m$ .

对于电容器  $C_1$ :  $Q_{1m} = 200 \times 10^{-12} \times 500 \text{ C} = 0.1 \times 10^{-6} \text{ C};$

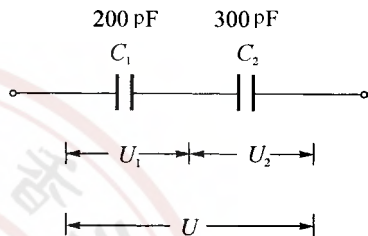
对于电容器  $C_2$ :  $Q_{2m} = 300 \times 10^{-12} \times 900 \text{ C} = 0.27 \times 10^{-6} \text{ C}.$

电容器  $C_1$  的最大带电荷量小于电容器  $C_2$  的,考虑到各个串联的电容器带电荷量相等,这样  $C_2$  上的最大电压  $U_2'$  按  $C_1$  的最大带电荷量  $Q_{1m} = 0.1 \times 10^{-6} \text{ C}$  来推算.

$$U_2' = \frac{Q_{1m}}{C_2} = \frac{0.1 \times 10^{-6}}{300 \times 10^{-12}} \text{ V} \approx 333 \text{ V}.$$

串联电容器组最大可加电压

$$U = U_1' + U_2' = 500 \text{ V} + 333 \text{ V} = 833 \text{ V}.$$



例 9-3 图

## 9.3 静电场中的电介质

### ► 9.3.1 电介质效应 相对介电常数

电介质是由大量电中性的分子组成的绝缘体,1837 年法拉第首先研究了平行板电容器

两极板之间充满电介质(如云母)时引起的效应. 他用两个相同的平板电容器, 一个电容器充满电介质, 而另一个电容器中是标准状态下的空气. 当这两个电容器并联接在同一电池上, 如图 9-16 所示, 实验发现, 含有电介质的电容器上电荷量比另一个电容器上电荷量多.

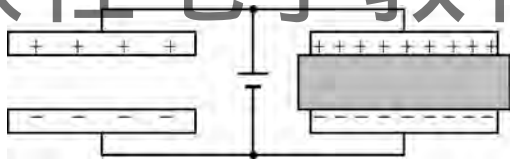


图 9-16

由电容的定义得知, 对于相同的电势差  $U$ , 电荷量大, 表明电容大. 上述实验证明, 如果在电容器两极板间放入电介质, 则这个电容器的电容要增大. 充满电介质的电容器的电容  $C$  (即电介质充满极板之间的电场空间) 与不放电介质(严格说是真空)时的电容  $C_0$  之比, 叫作电介质的相对介电常数, 用字母  $\epsilon_r$  表示,

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0}.$$

(9.3-1)

$\epsilon_r$  是没有单位的纯数. 一些材料的相对介电常数见表 9-1.

表 9-1 材料的相对介电常数

材 料	相对介电常数 $\epsilon_r$	介电强度/ $10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$
真 空	1.000 00	
空 气	1.000 59	3
石 英	3.78	8
硬质玻璃	5.6	14
聚苯乙烯	2.56	24
聚四氟乙烯	2.1	60
聚氯乙烯	6.7	12
尼 龙	3.4	14
纸	3.7	16
钛 酸 钽	233	8
水	80	
硅 油	2.5	15

注: 介质材料所能承受的最大电场强度, 称为介电强度, 或称击穿场强.

从表 9-1 可知空气的相对介电常数接近 1, 所以一般情形下空气电容器就作为真空电容器来讨论.

对于电介质效应还可以作进一步的研究. 当两只相同的平行板电容器带有相等的电荷量时, 实验发现, 插有电介质板的电容器有较低的电势差. 这意味着电介质内电场强度要减小, 如图 9-17 所示.

设板间为真空(或空气)时, 电场强度为  $E_0$ , 板间充满电介质时, 电介质内场强为  $E$ . 利用 (9.3-1) 式, 来研究图 9-17 中的  $E$  和  $E_0$  的关系,

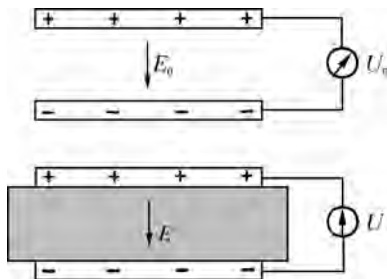


图 9-17



$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0} = \frac{\frac{Q}{U}}{\frac{Q}{U_0}} = \frac{U_0}{U} = \frac{E_0 d}{E d} = \frac{E_0}{E}.$$

这样有

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r}.$$

(9.3-2)

这说明,在极板上带电荷量不变的条件下,介质内场强只是真空情形的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ .

**例 9-4** 带有一定电荷量的平行板电容器极板面积  $S=0.2 \text{ m}^2$ , 间距  $d=0.01 \text{ m}$ , 两极板原来电势差  $U_0=3\ 000 \text{ V}$ . 板间插入厚度与极板间距相同的电介质板后, 其电势差降为  $U=1\ 000 \text{ V}$ . 求:

- (1) 原来的电容  $C_0$ ;
- (2) 极板上带有的电荷量;
- (3) 插入电介质板后的电容;
- (4) 介质板的相对介电常数;
- (5) 两极板间原来的电场;
- (6) 插入电介质板后的电场.

**解** (1)  $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 0.2}{0.01} \text{ F} = 177 \text{ pF}.$

- (2) 极板上电荷量

$$Q_0 = C_0 U_0 = 177 \times 10^{-12} \times 3\ 000 \text{ C} = 0.531 \times 10^{-6} \text{ C}.$$

- (3) 插入电介质板后

$$C = \frac{Q_0}{U} = \frac{0.531 \times 10^{-6} \text{ C}}{1\ 000 \text{ V}} = 531 \text{ pF}.$$

- (4) 相对介电常数

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0} = \frac{531}{177} = 3.$$

- (5) 两极板间原来的电场

$$E_0 = \frac{U_0}{d} = \frac{3\ 000 \text{ V}}{1 \times 10^{-2} \text{ m}} = 3 \times 10^5 \text{ V/m}.$$

- (6) 插入电介质板后

$$E = \frac{U}{d} = \frac{1\ 000 \text{ V}}{1 \times 10^{-2} \text{ m}} = 1 \times 10^5 \text{ V/m}.$$

或可用公式  $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$  来计算, 结果相同.

### ► 9.3.2 电介质的极化

虽然电介质分子从整体上来说是中性的, 但是离开比分子线度足够远的地方来考察电介质分子的电效应时, 可以认为带正电荷的原子核是集中于一点, 而带负电荷的电子也集中于另一点. 它们分别称为正电荷重心和负电荷重心. 电介质分子按照结构的不同, 可以分

为有极分子和无极分子两类. 在无极分子中, 正电的重心与负电的重心通常是重合在一起的, 如  $\text{H}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$  等具有对称分子就属于无极分子一类. 在  $\text{N}_2\text{O}$  和  $\text{H}_2\text{O}$  的分子中, 两个氮原子或氢原子都在氧原子的同一边, 使得正负电荷重心不重合, 这种分子属于有极分子. 每一个有极分子都是一个电偶极子, 它们的电矩称为**分子电矩**, 或称**分子固有电矩**. 一些有极分子的电矩见表 9-2.

表 9-2 有极分子的电矩

材 料	电偶极矩/ $\text{C} \cdot \text{m}$
盐酸( $\text{HCl}$ )	$3.4 \times 10^{-30}$
铵( $\text{NH}_3$ )	$4.8 \times 10^{-30}$
一氧化碳( $\text{CO}$ )	$0.9 \times 10^{-30}$
水( $\text{H}_2\text{O}$ )	$6.1 \times 10^{-30}$

当电介质置于电场中时, 它的分子将受到电场作用而发生变化, 这时就称**电介质被极化**.

在外电场  $E_0$  作用下, 无极分子中正负电荷重心将分开, 形成一个电偶极子. 这种在外电场作用下产生的分子电偶极矩称为**分子感生电矩**. 它的方向沿电场方向, 它的大小正比于所在电场的大小, 如图 9-18 所示.

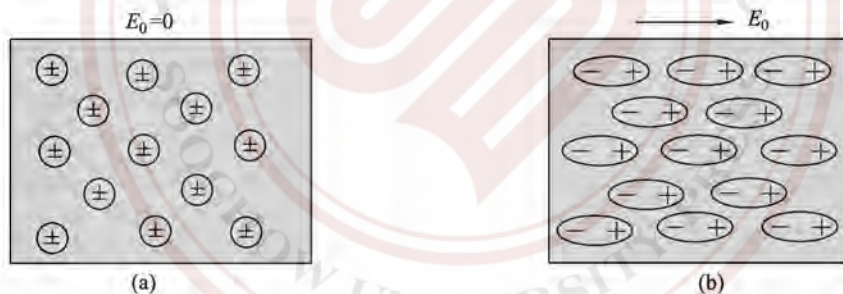


图 9-18

对于一块均匀的无极分子电介质来说, 极化后介质中每个分子都形成一个电偶极子, 而且方向相同. 虽然它的内部各处仍是电中性, 但是在和外场垂直的界面上出现了电荷分布. 图 9-18(b) 所示的左端表面出现负电荷, 右端表面出现正电荷, 这种电荷分布称为**极化电荷**, 又称为**束缚电荷**. 因为该极化电荷处在表面, 又称**面极化电荷**. 由于电子质量比原子核质量小得多, 外场作用下无极分子正负电荷重心的分开主要是电子的位移, 所以无极分子极化机制称为**电子位移极化**.

有极分子电介质在没有外电场时, 分子热运动使有极分子的电偶极矩取向杂乱, 电介质内各处呈电中性, 如图 9-19(a) 所示. 在外电场作用下, 每个有极分子都要受到力矩的作用, 使分子电矩方向转向外场. 由于分子的热运动, 这种转向并不完全, 但是对整块均匀电介质来说, 在垂直于电场方向的两端面也会出现极化电荷[图 9-19(b)], 这种极化机制称为**有极分子的取向极化**.

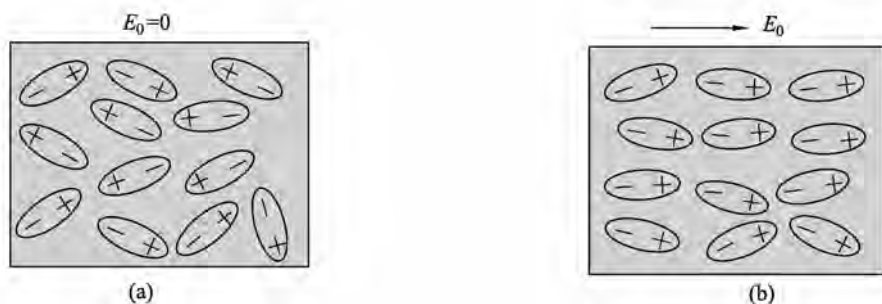


图 9-19

应当指出电介质极化后出现的极化电荷与导体中自由电荷是有区别的. 极化电荷不能有宏观移动, 它只是在原子或分子线度范围内有微小的位移, 它不能从电介质内转移出去, 也不能在电介质内部有自由运动. 每一个电荷束缚于一个原子或分子.

无极分子电介质和有极分子电介质的极化机制不同, 但是宏观结果, 即出现极化电荷这一点是相同的. 在对电介质极化作宏观描述时, 有时就不去区分这两种极化了.

对于不均匀电介质, 极化后电介质内部也会有未被抵消的极化电荷, 称为**体极化电荷**. 有关体极化电荷本书不再讨论.

电介质极化时出现的极化电荷, 也要产生电场. 极化电荷的电场称为**附加场**. 因此, 有电介质存在时, 空间任一点的场强  $\mathbf{E}$  是外电场  $\mathbf{E}_0$  和极化电荷的附加场  $\mathbf{E}'$  的矢量和,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'.$$

一般来说, 在电介质内部  $\mathbf{E}'$  处处和外场  $\mathbf{E}_0$  的方向相反. 结果是电介质内部的总电场  $\mathbf{E}$  要比原来的  $\mathbf{E}_0$  减弱, 这情形正如本节开始叙述的那样.

对于有电介质的电场计算, 要用到有介质时的高斯定理.

### ► 9.3.3 有介质时的高斯定理

仍以充满相对介电常数  $\epsilon_r$  的电介质的平行板电容器来讨论有介质时的高斯定理.

图 9-20 所示为没有电介质和有电介质的两个相同的平行板电容器. 设两电容器带有相同电荷量, 为了清楚起见, 电容器两极板厚度被夸大了. 图中所示闭合虚线为闭合高斯面.

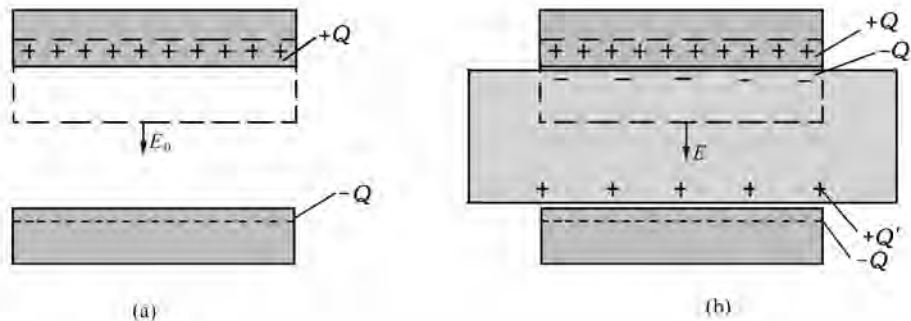


图 9-20

对于电介质不存在的电容器[图 9-20(a)], 虚线所示的高斯面, 高斯定理可以写成

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = Q.$$

由此得到

$$\epsilon_0 E_0 S = Q, E_0 = \frac{Q}{\epsilon_0 S}.$$

其中  $S$  为极板面积.

因为极化电荷  $Q'$  与自由电荷  $Q$  产生电场的规律相同, 高斯定理中的  $\sum q$  应为高斯面内的自由电荷和极化电荷的代数和. 对于有电介质存在的图 9-20(b) 所示的高斯面, 高斯定理应该为

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q - Q'. \quad (9.3-3)$$

由此得到介质内的电场强度

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} - \frac{Q'}{\epsilon_0 S}.$$

对于图(a)和(b)两情形,  $E_0$  与  $E$  应满足关系式(9.3-2), 即  $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$ . 将  $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$  代入上式得

$$\epsilon_r \left( \frac{Q}{\epsilon_0 S} - \frac{Q'}{\epsilon_0 S} \right) = \frac{Q}{\epsilon_0 S},$$

即求得极化电荷  $Q'$  为

$$Q' = Q \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right).$$

把上式代入(9.3-3)式消去极化电荷  $Q'$ , 得到重要关系式

$$\epsilon_0 \oint \epsilon_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q. \quad (9.3-4)$$

注意, 虽然有电介质存在, 但方程右边只包含了高斯面内的自由电荷, 而不包含极化电荷, 极化电荷的存在体现在方程左边的  $\epsilon_r$ .

电磁学中把  $\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$  定义为电位移矢量  $\mathbf{D}$ . 它是一个辅助矢量,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}. \quad (9.3-5)$$

由此, 有介质时高斯定理为

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q. \quad (9.3-6)$$

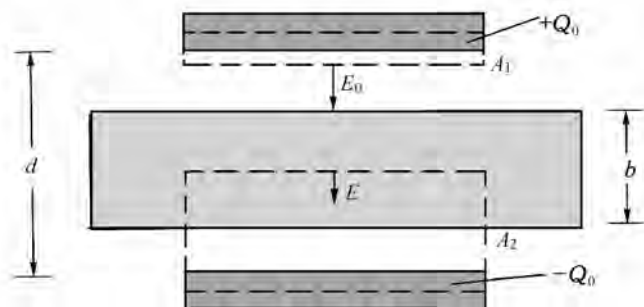
上式虽然是从平行板电容器导出的, 但却是普遍成立的. 静电场中任何闭合曲面的电位移通量等于所包围的自由电荷. 注意, 任意闭合曲面的电场强度  $\mathbf{E}$  的通量等于它所包围的自由电荷与极化电荷的总和除以  $\epsilon_0$ . 式(9.3-3)和式(9.3-6)是等价的.

从(9.3-6)式可以看出, 国际单位制中, 电位移  $\mathbf{D}$  的单位是库/米<sup>2</sup>, 记号表示为 C/m<sup>2</sup>, 它没有专门名称.

**例 9-5** 平行板电容器极板面积  $S=100 \text{ cm}^2$ , 间距  $d=1.0 \text{ cm}$ . 现将它充电至  $U_0=100 \text{ V}$ , 然后将电池断开, 再将厚度  $b=0.5 \text{ cm}$  的电介质板插入, 如图所示. 设电介质板的  $\epsilon_r=7$ , 求:

- (1) 电容器内部空隙间电场以及电介质板中的电场;
- (2) 插入电介质板后两极板的电势差;
- (3) 插入电介质板后的电容.





例 9-5 图(a)

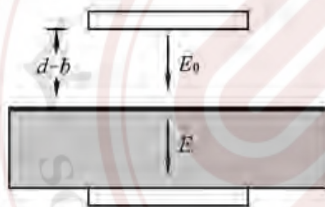
解 (1) 未插入电介质板时平行板电容器电容

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 100 \times 10^{-4}}{1 \times 10^{-2}} \text{ F} = 8.85 \text{ pF}.$$

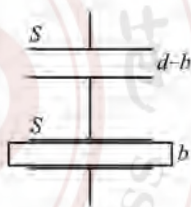
带电荷量

$$Q_0 = C_0 U_0 = 8.85 \times 10^{-12} \times 100 \text{ C} = 8.85 \times 10^{-10} \text{ C}.$$

由于电容器充电后, 电源已断开, 所以, 这个电荷量在电介质板插入后是保持不变的.



例 9-5 图(b)



例 9-5 图(c)

可以证明, 电介质板在平行板电容器内部的位置对结果没有影响. 因此我们可以把电介质板放在电容器的下极板上面, 并且设想在介质板的上表面放一块厚度可以忽略的薄金属板, 如图(b)所示. 由于静电感应, 薄金属板的上、下两个表面将出现  $Q_0$  的感应电荷. 因为薄金属板的厚度可以忽略, 因此薄金属板的放入并不影响解题的结果, 图(b)等效于图(c)的两个电容器串联. 对于空隙中的电场

$$E_0 = \frac{Q_0}{\epsilon_0 S} = \frac{8.85 \times 10^{-10}}{8.85 \times 10^{-12} \times 100 \times 10^{-4}} \text{ V/m} = 1.0 \times 10^4 \text{ V/m}.$$

对于介质中的场强  $E$ , 可以用(9.3-2)式求得

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{1.0 \times 10^4}{7} \text{ V/m} = 0.14 \times 10^4 \text{ V/m}.$$

如果读者熟悉有介质时的高斯定理, 也可以通过图(a)中的两个高斯面  $A_1, A_2$  求出  $E_0$  和  $E$ .

(2) 插入电介质板后两极板的电势差

$$U = E_0(d-b) + Eb = 1.0 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-3} \text{ V} + 0.14 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-3} \text{ V} = 57 \text{ V}.$$

(3) 插入电介质板后的电容

$$C = \frac{Q_0}{U} = \frac{8.85 \times 10^{-10}}{57} \text{ F} = 15.5 \text{ pF}.$$

如用图(c)来求,  $\frac{1}{C} = \frac{a-b}{\epsilon_0 S} + \frac{b}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$ , 也可以求得  $C = 15.5 \text{ pF}$ .

注意, 如果电介质充满电容器内部, 电容  $C = \epsilon_r C_0 = 62 \text{ pF}$ .

## ► 9.3.4 压电效应 电致伸缩

有些固体电介质, 由于结晶点阵的特殊结构, 它们在外力作用下发生机械形变, 如压缩或拉伸, 也能产生极化现象, 在电介质的相对两面上产生异号的极化电荷. 这种在没有电场的作用只是由于形变而使晶体极化的现象称为**压电效应**. 能产生压电效应的晶体称为**压电体**, 如石英、电气石、酒石酸钾钠、钛酸钡(压电陶瓷)等.

压电效应的逆效应称为**电致伸缩**, 即在压电体上加电场, 晶体能产生机械形变, 伸长或缩短. 例如, 加上交变电场, 晶体能产生机械振动.

压电效应和电致伸缩在现代技术上有广泛的应用. 利用电致伸缩可以把电能转换成声能, 如利用压电体制成的扬声器、耳机, 以及超声波发生器中换能装置等. 扫描隧道显微镜 (STM) 中也利用了压电体的电致伸缩, 来完成探头在样品表面的移动. 利用石英晶体的固有振动频率和压电效应可以获得稳定的电振荡, 制成石英晶体振荡器, 广泛应用于石英钟表、小型电子计算机等. 此外利用压电体还能完成非电信号转换成电信号, 制成压电传感器.

令人感兴趣的是家用煤气灶以及汽车的火花塞中的点火器, 也是利用了对压电晶体加一次撞击, 利用压电效应产生的电压在空气中打出火花.

## 9.4 电场能量

### ► 9.4.1 电容器储能

对一个已充电的电容器两极板用导线短路而放电, 可以见到放电火花. 这说明充电电容器有能量储存. 充了电的电容器所储存的能量从哪里来呢? 从分析充电过程就可以得知这能量的来源. 电容器充电的过程是正电荷从低电势的极板通过电荷转移到高电势的极板, 从而使两个极板上等量异号电荷, 极板间建立一定的电势差. 这样的充电过程需要消耗电源能量, 也就是说需要外力做功. 为了计算这部分功, 可把充电过程设想成这样: 开始两极板都不带电, 然后, 重复地从一块极板把少量的正电荷转移到另一极板. 设充电过程的某一阶段, 极板上已分别有了电荷量  $\pm q$ , 两极板间电势差为  $u$ ,  $u = \frac{q}{C}$ . 这时再把  $+dq$  电荷量从低电势的极板转移到高电势的极板, 所做的功  $dA$  为

$$dA = u dq = \frac{q dq}{C}.$$

把电荷从零增加到最后  $Q$  所做的总功为

$$A = \int dA = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}.$$

这个功就等于带有电荷量  $Q$  的电容器具有的能量. 故充电电容器具有的能量  $W$  为

$$W = \frac{Q^2}{2C}.$$

两极板最后的电势差  $U = \frac{Q}{C}$ , 上式可写成

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU. \quad (9.4-1)$$

这就是**电容器的储能公式**, 对任何种类的电容器都成立. 式中电荷量  $Q$  的单位是库, 电压  $U$  的单位是伏, 电容  $C$  的单位是法, 能量的单位是焦.

通常电容器充电后的电压都是由电源给定的, 从公式  $W = \frac{1}{2}CU^2$  来看, 在一定电压下, 电容  $C$  大的电容器储能多. 这表明电容  $C$  也是电容器储能本领大小的标志.

电容器储能是有限的, 但若在短时间内释放出来, 可得到相当大的功率, 这在摄影、激光、受控热核反应中都有重要应用.

**例 9-6** 电容器  $A_1$  充电到电压  $U_0$ , 然后移去充电用的直流电源, 再将此电容器与电容器  $A_2$  相连接.  $A_1, A_2$  的电容分别为  $C_1 = 8 \mu\text{F}$  和  $C_2 = 4 \mu\text{F}$ ,  $U_0 = 120 \text{ V}$ . 求:

- (1) 电容器组的电压;
- (2) 开关  $S$  接通前后系统所储存的能量.

**解** (1)  $A_1$  上原有电荷量

$$Q_0 = C_1 U_0 = 8 \mu\text{F} \times 120 \text{ V} = 960 \mu\text{C}.$$

$S$  合上后, 两电容器组成并联电容器组, 原来的电荷  $Q_0$  现在分给两个电容器. 设电容器组的电压为  $U$ ,

$$Q_0 = C_1 U + C_2 U.$$

由此

$$U = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = \frac{960 \times 10^{-6}}{8 \times 10^{-6} + 4 \times 10^{-6}} \text{ V} = 80 \text{ V}.$$

此式提供了用已知电容测量未知电容的方法.

- (2) 开关  $S$  接通前, 储存的能量

$$W_0 = \frac{1}{2}C_1 U_0^2 = \frac{1}{2} \times 8 \times 10^{-6} \times (120)^2 \text{ J} = 5.76 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

开关  $S$  接通后这个系统储存的能量

$$W' = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U^2 = \frac{1}{2} \times (8 \times 10^{-6} + 4 \times 10^{-6}) \times (80)^2 \text{ J} = 3.84 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

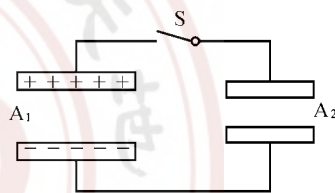
两者之差

$$W_0 - W' = 1.92 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

消失的能量  $W_0 - W'$  转换成其他形式的能量. 若连线的电阻很大, 则消失的能量大部分转换成热能; 若这个电阻很小, 则消失的能量大部分以电磁波形式辐射出去.

### ► 9.4.2 电场的能量和能量密度

静电场中, 电荷和电场同时存在, 相伴而生, 因而无法说明电能是电荷所有还是电场所有. 然而在迅变电磁场中, 电场可以脱离电荷而传播开来. 事实证明, 电能是电场所有, 即电



例 9-6 图

能是定域在电场中.

为此对(9.4-1)式作进一步演算. 简单起见, 考虑一个理想的空气平行板电容器, 其电容  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ , 两板间电场与电压关系为  $U = Ed$ , 代入(9.4-1)式有

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{\epsilon_0 S}{2d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Sd. \quad (9.4-2)$$

由上式可见平行板电容器储存电能正比于电场占有空间的体积. 单位体积内的电能, 即**电场能量密度**为

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad (9.4-3)$$

如果有电介质存在, 电场能量密度为

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \frac{1}{2} DE. \quad (9.4-4)$$

(9.4-3)式、(9.4-4)式虽然是从匀强电场的特例导出, 但可以证明它们是普遍成立的. 一个带电系统的整个电场中储存的总能量可按下式计算

$$W = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 dV. \quad (9.4-5)$$

式中  $dV$  为体积元, 积分遍及整个电场空间.

在国际单位制中, 电场能量密度  $w$  的单位是焦/米<sup>3</sup>, 记为 J/m<sup>3</sup>.

**例 9-7** 一球形电容器, 内、外球半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 两球间充满相对介电常数  $\epsilon_r$  的电介质, 利用公式(9.4-5)求此电容器带有电荷量  $Q$  时所储存的电能.

**解** 利用高斯定理可求得两球间电场强度

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}.$$

因为半径  $r$  的球面上电场强度是等值的, 所以取薄球壳为体积元,  $dV = 4\pi r^2 dr$ , 体积元中电场能量

$$dW = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 \cdot 4\pi r^2 dr.$$

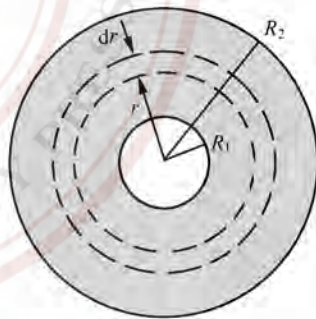
全部电场的能量

$$\begin{aligned} W &= \int_V dW = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \end{aligned}$$

与  $W = \frac{Q^2}{2C}$  比较, 可得球形电容器的电容为

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

所得结果与前面讲过的球形电容器电容的计算公式相同. 这里利用能量公式来求电容, 是计算电容器电容的另一种方法.



例 9-7 图



## 内容提要

1. 导体的静电平衡条件:  $E_{\text{内}}=0$ ,  $E_{\text{表面}}$  垂直导体表面,  $E_{\text{表面}}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

导体是等势体, 表面是等势面.

2. 静电平衡的导体上电荷分布:  $q_{\text{内}}=0$ ,  $\sigma_{\text{表面}}=\epsilon_0 E$ .

3. 计算有导体存在时的静电场分布的依据: 高斯定理、电势概念、电荷守恒、导体静电平衡条件.

4. 静电屏蔽: 金属壳的外表面及壳外的电荷在壳内的合场强为零, 因而对壳内无影响.

5. 电介质分子的电偶极矩: 有极分子的固有电偶极矩、无极分子在外电场中产生感生电偶极矩.

电介质的极化: 在外电场中固有电偶极矩的取向(取向极化), 或感生电偶极矩的产生(电子位移极化), 使电介质的表面或内部出现极化(束缚)电荷.

电介质的效应:  $C=\epsilon_r C_0$ ,  $E=\frac{E_0}{\epsilon_r}$ .

6. 电位移:  $D=\epsilon_0 \epsilon_r E$ .

$D$  的高斯定理:  $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0$ .

有电介质存在时电场的计算: 按照  $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0$  算出  $D$ , 再按  $D=\epsilon_0 \epsilon_r E$  算  $E$ .

7. 电容器的电容  $C=\frac{Q}{U}$ , 平行板电容器的电容  $C=\frac{\epsilon_0 S}{d}$ .

(1) 串联电容器组:  $\frac{1}{C}=\sum \frac{1}{C_i}$  (每个电容器带的电荷量与串联电容器组带的电荷量相同).

(2) 并联电容器组:  $C=\sum C_i$  (每个电容器两端的电压与并联电容器组两端的电压相同).

8. 电容器储能:  $W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$ .

9. 电场的能量密度:  $w=\frac{\epsilon_0 \epsilon_r E^2}{2}=\frac{1}{2}DE$ .

## 习 题

9-1 正点电荷  $Q$  位于金属球壳的中心, 则

(A) 各处的  $E=0$

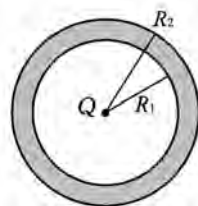
(B)  $r>R_2$ ,  $E=0$ ;  $r<R_1$ ,  $E\neq 0$

(C)  $r<R_1$ ,  $E=0$ ;  $r>R_2$ ,  $E\neq 0$

(D) 对于  $r<R_1$  以及  $r>R_2$  处  $E\neq 0$

9-2 对于金属导体来说, 下列论述正确的是

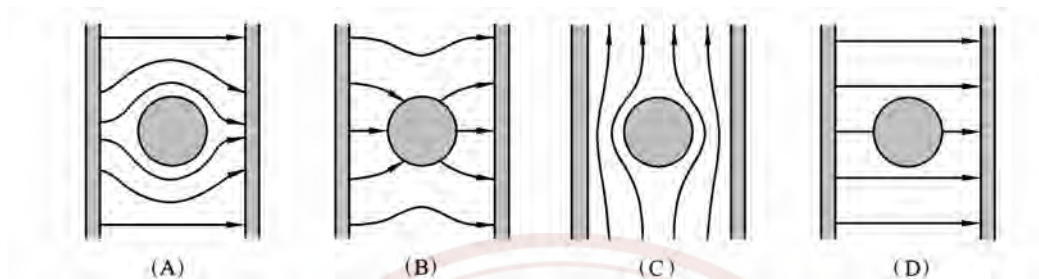
(A) 它不能带净电荷



习题 9-1 图

- (B) 如它带净电荷,这些电荷必然均匀分布在导体中
- (C) 如它带净电荷,这些电荷必然分布在它的表面
- (D) 它的电势绝对是零

9-3 导体球位于带正负电荷的金属平板之间,其正确电场线图



习题 9-3 图

9-4 平行板电容器与电池相连,现插入介电常数  $\epsilon_r = 2$  的介质板,它充满两极板间的空间.如介质板插入前后电容器储能分别为  $W_0$  和  $W_k$ ,则  $\frac{W_k}{W_0}$  为

- (A)  $\frac{1}{4}$
- (B)  $\frac{1}{2}$
- (C) 1
- (D) 2
- (E) 4

9-5 两只不同的不带电的电容器串联后,接在一电池上,以下论述正确的是

- (A) 每只电容器上的电压相等
- (B) 每只电容器上的电荷量相等
- (C) 电容大的电容器上电荷量多
- (D) 电容大的电容器两端电压高
- (E) 储存在每只电容器内的电能相等

9-6 平行板电容器与电池相连,如果把极板拉开一些,则

- (A) 极板间电场减小,同时极板带电亦减少
- (B) 极板间电场保持不变,极板带电将增加
- (C) 极板间电场保持不变,但极板带电将减少
- (D) 极板间电场增加,但是极板带电将减少

9-7 空气平行板电容器带电荷量  $Q$ ,当把  $\epsilon_r = 3$  的介质板插入极板间时

- (A) 电容器极板间电压为原来的  $\frac{1}{3}$
- (B) 电容器极板间电压为原来的 3 倍
- (C) 极板上电荷增加为原来的 3 倍
- (D) 极板上电荷减少为原来的  $\frac{1}{3}$
- (E) 以上均不对

9-8 两只相同的电容器串联后接上 10 V 的电池.如果一只电容器单独接在 10 V 电池上,其储能为  $W_1$ ,则串联后接在 10 V 电池上储存的总能量为

- (A)  $4W_1$
- (B)  $2W_1$
- (C)  $W_1$
- (D)  $\frac{1}{2}W_1$
- (E)  $\frac{1}{4}W_1$

9-9 空气平板电容器带有电荷量  $Q$ , 现把  $\epsilon_r = 2$  的介质板插入, 则

- (A) 储存的能量保持不变 (B) 储存的能量减少为原来的  $\frac{1}{2}$   
(C) 储存的能量增加为原来的 2 倍 (D) 以上均不正确

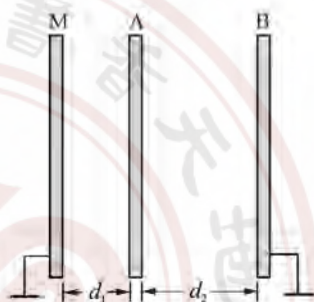
9-10 两个带电金属同心球壳, 内球半径  $R_1 = 5 \text{ cm}$ , 带电  $q_1 = 0.6 \times 10^{-8} \text{ C}$ . 外球壳的内半径  $R_2 = 7.5 \text{ cm}$ , 外半径  $R_3 = 9.0 \text{ cm}$ , 所带总电荷量  $q_2 = -2.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ .

- (1) 求离球心距离分别为  $3 \text{ cm}$ ,  $6 \text{ cm}$ ,  $8 \text{ cm}$ ,  $10 \text{ cm}$  各点的电场强度  $E$  以及电势  $U$ ;  
(2) 用导线把两球壳连接起来, 再求上述各点的  $E$  和  $U$ .

9-11 充分大的带电导体平板 A 和 B, A 板单位面积带电荷量为  $+3 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$ , B 板单位面积带电荷量为  $+7 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$ . 现把它们如图所示平行放置, 这将引起导体板上电荷的重新分布, 则最终四个表面上电荷面密度为多少?



习题 9-11 图



习题 9-13 图

9-12 如果上题的 B 板接地, 再计算四个表面上的电荷面密度.

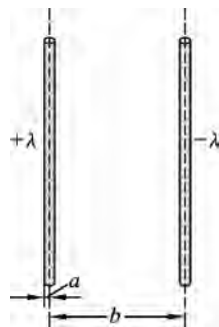
9-13 图示三块平行金属板, 面积均为  $200 \text{ cm}^2$ , 它们相距分别为  $d_1 = 2 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 4 \text{ mm}$ , A 板带有正电  $3 \times 10^{-7} \text{ C}$ , B, M 两板接地, 不计边缘效应.

- (1) 求 B 板和 M 板上的感应电荷;  
(2) 求 A 板的电势;  
(3) 现在 A, B 板间充以  $\epsilon_r = 5$  的均匀电介质, 再回答 (1)、(2) 两问题.

9-14 范德格拉夫静电起电机是一种利用绝缘传送带向一个金属球壳输送电荷而使球壳电势升高的装置 (见本章 9.1.5 节图 9-9). 如果金属球壳的电势要保持在  $9.15 \text{ MV}$ , 试解答以下问题.

- (1) 若球壳周围高压氮气的击穿场强为  $100 \text{ MV/m}$ , 问球壳的半径至少为多大?  
(2) 由于电荷会通过气体泄漏, 要维持此电势不变, 传送带需以  $320 \mu\text{C/s}$  的速率向球壳运送电荷, 问所需最小功率多大?  
(3) 若传送带宽  $48.5 \text{ cm}$ , 移动速率为  $33.0 \text{ m/s}$ , 试求传送带上的面电荷密度和面上电场强度的大小.

9-15 两根“无限长”均匀带电直导线, 相距为  $b$ , 导线半径都是  $a$  ( $a \ll b$ ). 导线上电荷线密度分别为  $+\lambda$  和  $-\lambda$ . 试求该导体组单位长度的电容.

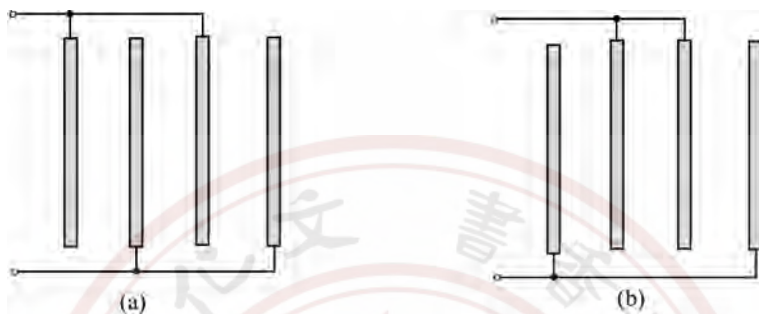


习题 9-15 图

9-16 有一种计算机键盘采用静电电容式按键, 它是由两小块平

有金属片组成的空气电容器. 当键被按下时, 两块金属片之间的距离变小, 使电容器的电容发生变化, 与之相连的电路检测这种变化来确定是哪个键被按下了. 设每个金属片的面积为  $50.0 \text{ mm}^2$ , 两金属片之间的距离是  $0.600 \text{ mm}$ . 如果电路能检测出的电容变化是  $0.250 \text{ pF}$ , 问需要按下多大的距离才能检测到按键信号?

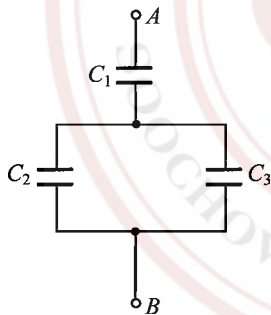
**9-17** 四块面积都是  $S$  的相同薄金属板, 平行放置, 如图连接, 设板间距离均为  $d$ . 分别求出图(a)、(b)连接的等效电容.



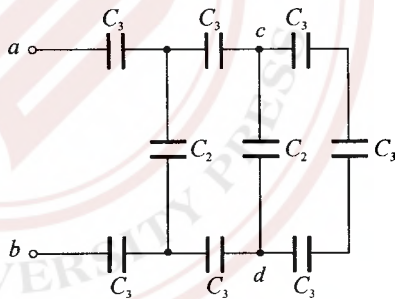
习题 9-17 图

**9-18** 按如图所示连接三个电容器,  $C_1 = 50 \text{ } \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 30 \text{ } \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 20 \text{ } \mu\text{F}$ .

- (1) 求  $A, B$  间的等值电容;
- (2) 在  $A, B$  两端加  $100 \text{ V}$  的电压后, 各电容器上的电压和电荷量是多少?



习题 9-18 图



习题 9-19 图

**9-19** 图示电容网络中电容  $C_3 = 3 \text{ } \mu\text{F}$ , 电容  $C_2 = 2 \text{ } \mu\text{F}$ .

- (1) 计算  $a, b$  两点间的等效电容;
- (2) 设  $U_{ab} = 900 \text{ V}$ , 计算靠近  $a$  点与  $b$  点的每一个电容器上的电荷量;
- (3)  $U_{ab} = 900 \text{ V}$  时, 计算  $U_{cd}$ .

**9-20**  $1 \text{ } \mu\text{F}$  和  $2 \text{ } \mu\text{F}$  的两电容器串联, 接在  $1200 \text{ V}$  的直流电源上.

- (1) 求每个电容器上的电荷量以及电压;
- (2) 将充了电的两个电容器与电源断开, 彼此之间也断开, 再重新将同号的两端连接在一起, 试求每一个电容器上最终所带的电荷量和电压.

**9-21**  $1 \text{ } \mu\text{F}$  和  $2 \text{ } \mu\text{F}$  两电容器并联后, 接在  $1200 \text{ V}$  的直流电源上.

- (1) 求每个电容器的电荷量和电压;
- (2) 把充了电的两个电容器与电源断开, 彼此之间也断开, 再重新将异号的两端相连

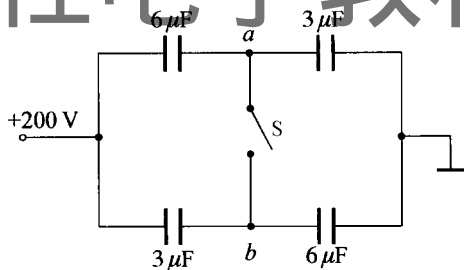


接,试求每个电容器上最终所带的电荷量和电压.

**9-22** 图示中电容器开始时都不带电,按图中所示接法连接后,开关 S 是开启的.

- (1) 求  $a, b$  两点电势差  $U_{ab}$ ;
- (2) 开关 S 合上后,求  $b$  点的电势;
- (3) 开关 S 合上时,流经 S 的电荷量为多少?

**9-23** 在两板相距为  $d$  的平行板电容器中,平行地插入厚度为  $\frac{d}{2}$  的一块金属板,则其电容变为原来



习题 9-22 图

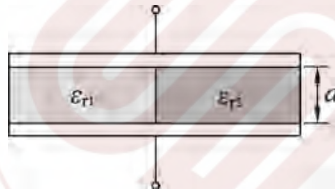
来电容的多少倍? 如果插入的是厚度为  $\frac{d}{2}$  的介质板,其相对介电常数为  $\epsilon_r$ ,则又如何?

**9-24** 平行板电容器的两薄金属板 A, B 相距 0.50 mm,该电容器放在起屏蔽作用的金属盒内,如图所示.金属板上下两内壁与 A, B 分别相距 0.25 mm.问该电容器放入盒内与不放入盒内相比,电容改变多少?(忽略边缘效应)

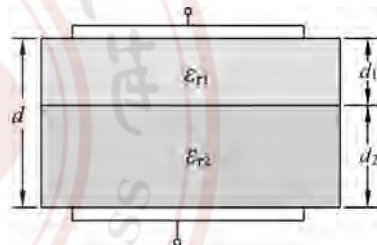
**9-25** 如图所示的电容器,极板面积为  $S$ ,极板间距离为  $d$ ,板间各一半被相对介电常数分别为  $\epsilon_{r1}$  和  $\epsilon_{r2}$  的电介质充满.求此电容器的电容.



习题 9-24 图



习题 9-25 图



习题 9-26 图

**9-26** 平行板电容器,极板面积为  $S$ ,两板间距为  $d$ ,极板间充以两层电介质,一层厚度为  $d_1$ ,相对介电常数为  $\epsilon_{r1}$ ;另一层厚度为  $d_2$  ( $d_1 + d_2 = d$ ),相对介电常数为  $\epsilon_{r2}$ .

- (1) 求该电容器的电容;
- (2) 以  $S = 200 \text{ cm}^2$ ,  $d_1 = 2 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 3 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_{r1} = 5$ ,  $\epsilon_{r2} = 2$  来计算此电容值.

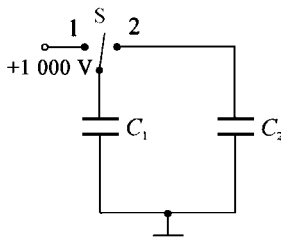
**9-27** 人体的某些细胞壁两侧带有等量异号的电荷.设某细胞壁厚度为  $5.2 \times 10^{-9} \text{ m}$ ,两表面所带面电荷密度为  $\pm 0.52 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2$ ,其中内表面带正电荷.如果细胞壁物质的相对介电常数为 6.0,求:

- (1) 细胞壁内电场强度的大小;
- (2) 细胞壁两表面间的电势差.

**9-28** 图示电路,开始时  $C_1$  和  $C_2$  均未带电,开关 S 扳向 1 对  $C_1$  充电后,再把开关 S 扳向 2 对  $C_2$  充电.如果  $C_1 = 20 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 5 \mu\text{F}$ ,问:

- (1) 两电容器各带电多少?
- (2) 第一个电容器损失的能量为多少?

**9-29** (1) 空气平板电容器,两极板间隙  $d = 1.5 \text{ cm}$ .当所



习题 9-28 图

加电压为 39 kV 时,该电容器是否会被击穿?(空气击穿场强为 30 kV/cm)

(2) 在上述电容器中插入厚度为 0.3 cm 的玻璃片,玻璃片与极板平行,玻璃的介电常数  $\epsilon_r=7$ ,击穿场强为 100 kV/cm,问这时的电容器是否会被击穿?

**9-30** 圆柱形电容器的半径分别为  $a$  和  $b$ , 试证所储存的能量的一半是在半径为  $r=\sqrt{ab}$  的圆柱内部.

**9-31** 证明球形电容器带电后,其电场能量的一半储存在内半径为  $R_1$ 、外半径为  $\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$  的球壳内,其中  $R_1$  和  $R_2$  分别为电容器内球和外球壳的半径.一个孤立的导体球带电后,其电场能量的一半储存在多大的球壳内?

**9-32** 在一半径为  $a$  的球体内均匀地充满电荷,总电荷量为  $q$ ,试求其电势能.

**9-33** 两个同轴的金属圆柱面,长度为  $l$ ,半径分别为  $a$  和  $b$ ,两圆柱面间充有相对介电常数为  $\epsilon_r$  的均匀电介质,当这两个圆柱面带有等量异号电荷  $\pm Q$  时,求:

(1) 离轴线距离  $r(a < r < b)$  处的电场能量密度;

(2) 电介质中的总能量;

(3) 该圆柱形电容器的电容.

**9-34** 空气平行板电容器,极板面积为  $0.2 \text{ m}^2$ ,极板间距为 1 cm,现将其连接到 50 V 的电池组上.

(1) 求两极板间电场强度和电容器所储存的能量;

(2) 将电池组断开,再将两极板间距拉开至 2 cm,再求极板间的场强和电容器储存的能量.

**9-35** 一平行板电容器,极板面积为  $S$ ,两极板间距为  $x$ ,极板上带有电荷量  $\pm q$ .

(1) 电容器储存的总能量是多少?

(2) 现将两极板拉开距离  $dx$ ,这时的总能量又为多少?

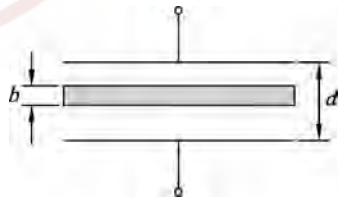
(3) 如果两极板间的相互吸引力为  $F$ ,则上述两能量之差必定等于拉开两极板所做的功  $W=Fdx$ ,由此证明  $F=\frac{q^2}{2\epsilon_0 S}$ .

**9-36** 一个平行板电容器,极板面积为  $S$ ,极板间距为  $d$ .

(1) 充电后保持其电荷量  $Q$  不变,将一块厚度为  $b$  的金属板平行于两极板插入.与金属板插入前相比,电容器储能增加多少?

(2) 导体板进入时,外力对它做功多少?是被吸入还是需要推入?

(3) 如果充电后保持电容器的电压  $U$  不变,则(1)、(2)两问的结果又如何?



习题 9-36 图