静　电　场

第三讲　场强叠加原理及其应用

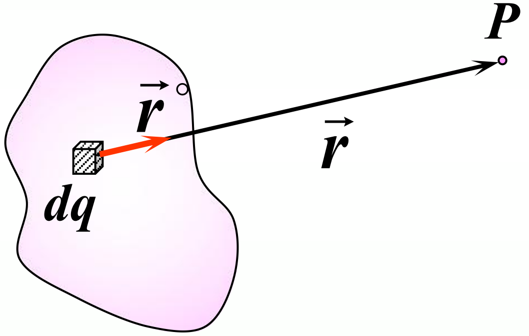
§1 场强叠加原理

点电荷系的场强：

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \vec{r}_i^{\circ}$$

场强叠加原理：点电荷系在某点产生的场强等于各点电荷单独存在时在该点产生的场强的矢量和。

电荷连续分布带电体的场强：



$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{dq}{r^2} \vec{r}^{\circ}$$

电荷体分布时：　$dq = \rho dV$　ρ电荷体密度。

电荷面分布时：　$dq = \sigma dS$　σ电荷面密度。

电荷线分布时：　$dq = \lambda dl$　λ电荷线密度。

§2 场强叠加原理的应用

例题1　计算电偶极子轴线的延长线上和中垂线上任一点的电场强度。

一对等量异号点电荷，当 $l << r$ 时称为电偶极子。

$\vec{p} = q\vec{l}$ 称为电偶极矩。$\vec{l}$ 由负电荷指向正电荷。

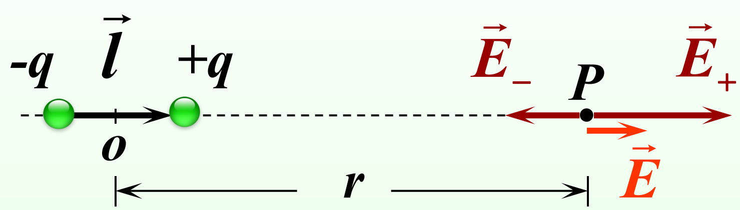
(1) 延长线上：

$$E = E_{+} - E_{-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r-\frac{l}{2})^2} - \frac{1}{(r+\frac{l}{2})^2}\right]$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2lr}{r^4} = \frac{ql}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$\vec{E}$，$\vec{p}$ 始终同方向，所以：

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}}$$



(2) 中垂线上：

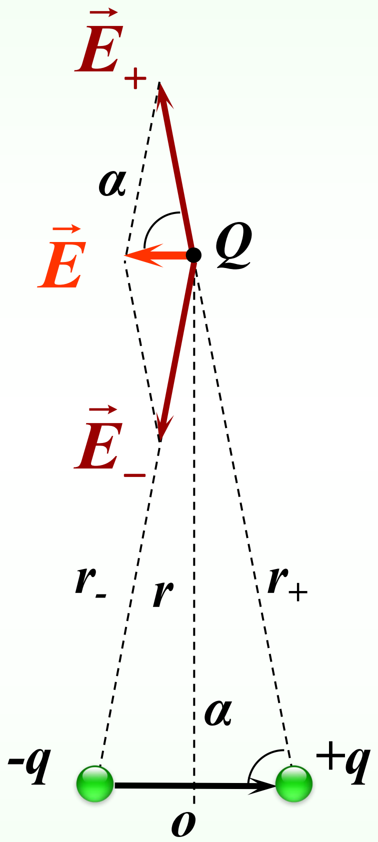
$$E = E_+\cos\alpha + E_-\cos\alpha$$

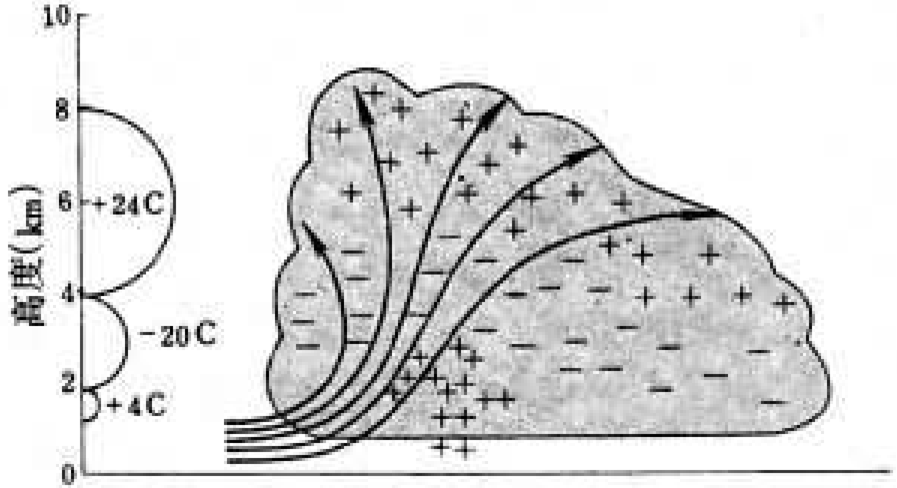
$$= 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+\frac{l^2}{4})}\cdot\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+\frac{l^2}{4}}}$$

$$\approx \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$\vec{E}$, $\vec{p}$ 始终反方向，所以：

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$





雷雨云中的电荷和气流分布电偶极子模式

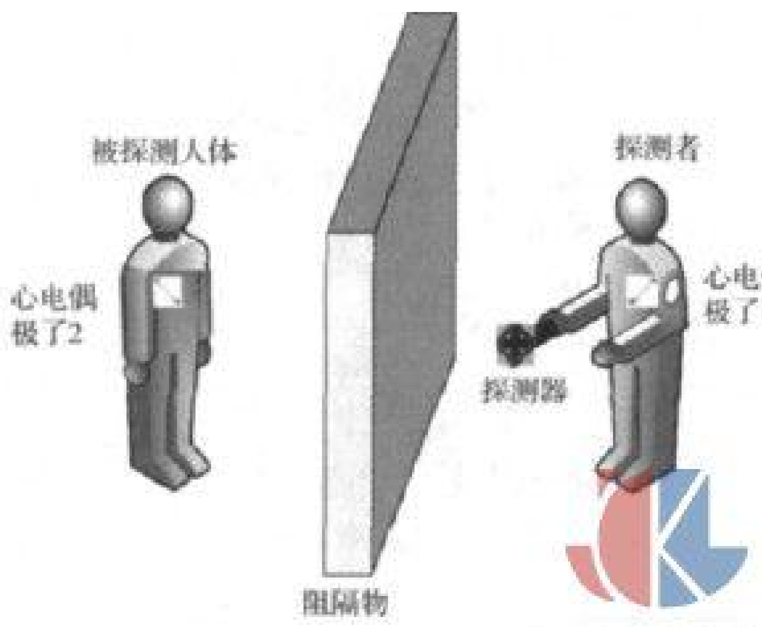
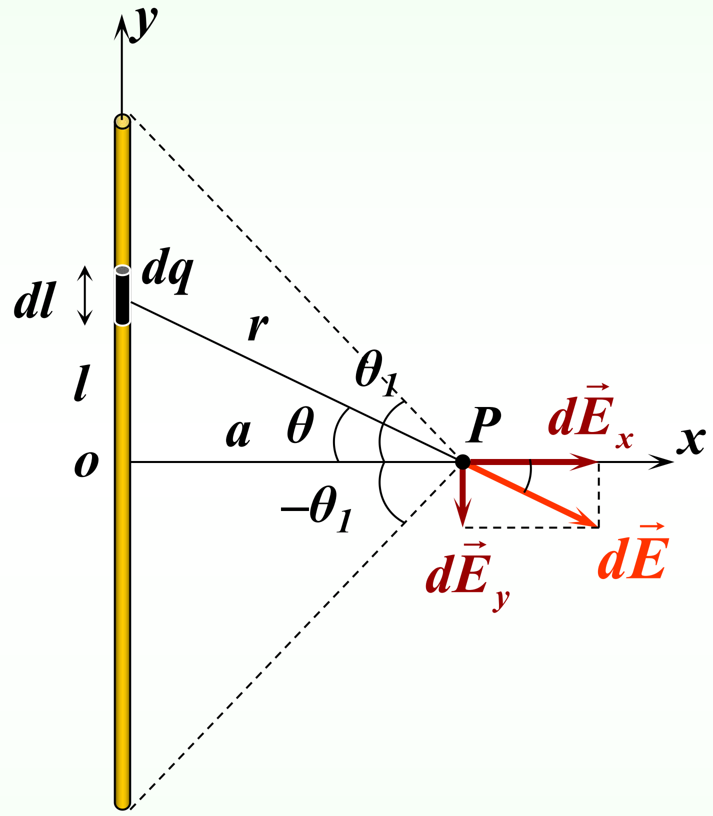


图3 双人体耦合心电场人体探测过程

例题2　计算长为L，线电荷密度为λ（$\lambda>0$）的均匀带电直线中垂线上任一点的场强。



由对称性：$E_y=\int dE_y=0$

$$dE_x=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta=\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$\because l=a\tan\theta\,,\quad \therefore dl=\frac{a d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$r=\frac{a}{\cos\theta}$$

得：$dE_x=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\, d\theta$

$$E=\int dE_x=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{-\theta_1}^{\theta_1}\cos\theta\, d\theta=\frac{\lambda\sin\theta_1}{2\pi\varepsilon_0 a}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{L}{\sqrt{L^2+(2a)^2}}$$

$$E=\frac{\lambda\ \sin\theta_1}{2\pi\varepsilon_0 a}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{L}{\sqrt{L^2+(2a)^2}}$$

讨论：(1) 当 $a \ll L$ 时，带电直线可当作无限长。

此时：$\theta_1 \to \pi/2$, $\sin\theta_1 \to 1$

$$\boxed{E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$

(2) 当 $a \gg L$ 时，带电直线可当作点电荷。

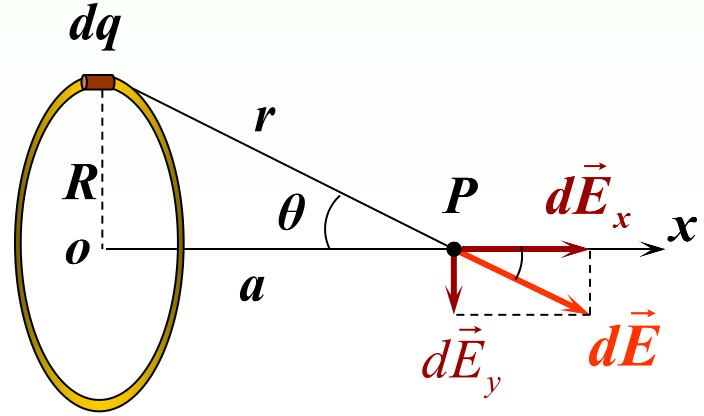
此时：$\theta_1 \to 0$, $\sin\theta_1 \to L/2a$

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{L}{2a}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

例题3　计算半径为*R*，带电量为*q* (*q*>0)的均匀带电圆环轴线上任一点的场强。

由对称性：$E_y = \int dE_y = 0$

$$dE_x = dE \cdot \cos\theta = \frac{a\,dq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



$$E = \int dE_x = \frac{a}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + a^2)^{3/2}} \oint dq$$

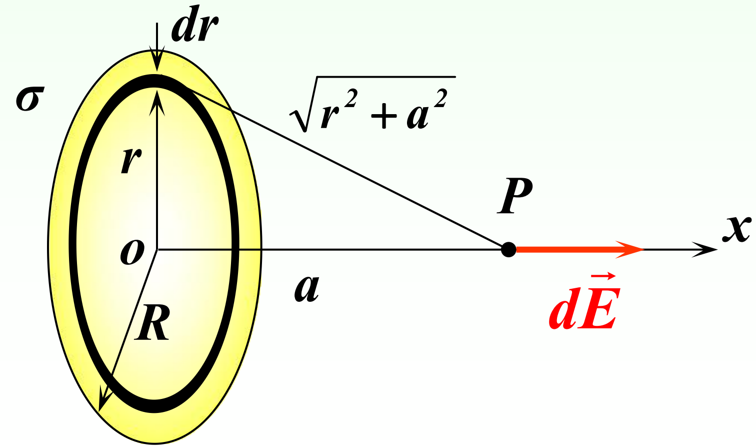
$$\boxed{= \frac{aq}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + a^2)^{3/2}}}$$

讨论：
(1)　$a >> R$ 时：　$E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$

(2)　$a = 0$ 时：　$E_0 = 0$

例题4　计算半径为R，面电荷密度为σ（$\sigma>0$）的均匀带电薄圆板轴线上任一点的场强。

将圆板看作由许多细圆环组成。



半径为r的细圆环的电量为:

$$dq=\sigma\cdot 2\pi r\cdot dr$$

该细圆环在P点产生的电场:

$$dE=\frac{adq}{4\pi\varepsilon_0(r^2+a^2)^{3/2}}=\frac{a\sigma rdr}{2\varepsilon_0(r^2+a^2)^{3/2}}$$

整个圆板在P点产生的电场:

$$E=\frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{rdr}{(r^2+a^2)^{3/2}}=\frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

$$E=\frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

讨论：当 $R>>a$ 时，此圆板可视为“无限大”。

$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

可见：无限大均匀带电平板附近的电场是匀强电场。当$\sigma>0$时，电场方向指离平板；当$\sigma<0$时，电场方向指向平板。

思考题：

一无限大均匀带电平面，开有一个半径为a的圆洞设电荷面密度为σ。

（1）如何利用例题3 的结果去求轴线上离洞心为r处的电场强度？

（2）如何利用例题4 的结果去求轴线上离洞心为r处的电场强度？