

§ 6.1 向量代数 § 6.2 平面和空间直线的方程（平面方程）

一、填空题

1. 平行于向量 $\mathbf{a} = (6, 7, -6)$ 的单位向量为_____.
 2. 已知 \mathbf{a}, \mathbf{b} 均为单位向量, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}$, 则以向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为邻边的平行四边形的面积为_____.
 3. 已知 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为非零向量, 若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, 则向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为_____.
 4. 设 $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 5$, 若 $\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - k\mathbf{b}$ 垂直, 则常数 $k =$ _____.
 5. 设向量 \mathbf{x} 与向量 $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$ 平行, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = -18$, 则 $\mathbf{x} =$ _____.
 6. 设 $\mathbf{a} = (4, -2, 4), \mathbf{b} = (6, 3, -2)$, 则 $\text{Pr } j_b \mathbf{a} =$ _____.
 7. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为单位向量, 且满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} =$ _____.
- 二、设长方体的各棱与坐标轴平行, 已知长方体的两个顶点坐标分别为 $(1, 1, 2), (3, 4, 5)$, 试写出余下六个顶点的坐标.

三、一向量的终点为 $B(2, -1, 7)$, 在 x, y, z 轴上的投影依次为 $4, -4, 7$, 求此向量的始点坐标, 方向余弦和方向角.

四、设 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, 求向量 $\mathbf{l} = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$ 在 x 轴上的投影以及在 y 轴上的分向量.

五、设 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, 求:

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; (2) $\text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$; (3) $\cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$.

六、已知 $A(1, -1, 2), B(5, -6, 2), C(1, 3, -1)$, 求与 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 都垂直的单位向量.

七、在 Oxy 面上, 求垂直于 $\boldsymbol{a} = (5, -3, 4)$, 并与 \boldsymbol{a} 等长的向量 \boldsymbol{b} .

八、已知空间三点 $A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(3, 4, 5)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

九、已知平面 $Ax + By + Cz + D = 0$, 根据要求填写系数应满足的条件:

过原点	平行于 z 轴	包含 x 轴	平行于 xOy 平面

十、求满足下列条件的平面方程:

1. 过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行. 答: _____
2. 过点 $(1, 1, 1)$ 和点 $(0, 1, -1)$ 且与平面 $x + y + z = 0$ 相垂直. 答: _____
3. 过点 $(1, 1, 1), (-2, -2, 2), (1, -1, 2)$. 答: _____
4. 平行于 xOz 面且经过点 $(2, -5, 3)$. 答: _____
5. 平行于 x 轴且经过两点 $(4, 0, -2), (5, 1, 7)$.

6. 平面 $x - 2y + 2z + 21 = 0$ 与平面 $7x + 24z - 5 = 0$ 之间的二面角的平分面.

§ 6.2 平面和空间直线的方程 (续) § 6.3 曲面和曲线的方程

一、填空题 (一)

1. 过点 $M_1(4,1,2), M_2(-3,5,-1)$ 的直线方程为_____.
2. 设直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$ 与直线 $x+1=y-1=z$ 相交, 则 $\lambda =$ _____.
3. 直线 $\begin{cases} 3x-y+2z=0, \\ 6x-3y+2z=0 \end{cases}$ 与 z 轴的夹角为_____.
4. 过点 $(2,-1,3)$ 且平行于直线 $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{5}$ 的直线方程为_____.
5. 过点 $(0,2,4)$ 且与平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 都相交的直线方程为_____.
6. 过点 $(0,1,2)$ 且与直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ 垂直相交的直线方程为_____.

二、写出直线 $\begin{cases} 2x+5z+3=0, \\ x-3y+z+2=0 \end{cases}$ 的对称式方程及参数方程.

三、确定下列各组中的直线和平面间的位置关系:

1. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$;

2. $\begin{cases} x+3y+2z+1=0, \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 和 $4x-2y+z-2=0$.

四. 求点 $M_0(3, -4, 4)$ 到直线 $\frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-2}{1}$ 的距离.

五、求直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影直线的方程.

六、选择题

1. 方程 $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 表示 ()

A. 旋转双曲面 B. 双叶双曲线 C. 双曲柱面 D. 锥面

2. 二次曲面 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 与平面 $y = h$ 相截, 其截痕是空间中的 ()

A. 双曲线 B. 抛物线 C. 椭圆 D. 直线

七、填空题 (二)

1. 一动点到坐标原点的距离等于它到点 $(2, 3, 4)$ 的距离的一半, 则该动点的轨迹方程为 _____.

2. xOy 平面上的双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程为 _____

3. xOy 平面上的圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程为 _____

4. yOz 平面上的直线 $2y - 3z + 1 = 0$ 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程为 _____

5. 根据方程填入图形名称

	平面解析几何中	空间解析几何中
$y = x + 1$		
$x^2 - y^2 = 1$		

6. 母线平行于 x 轴而且通过曲线 $\begin{cases} 2y^2 + z^2 + 4x - 4z = 0, \\ y^2 + 3z^2 - 8x - 12z = 0 \end{cases}$ 的柱面方程为 _____

7. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y = 0 \end{cases}$ 的参数方程为 _____

8. 曲线 $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4, \\ z = 0 \end{cases}$ 的参数方程为 _____

9. 根据曲线填入它们在三个坐标面上的投影曲线的方程

	在 xOy 面	在 yOz 面	在 zOx 面
$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + y + z = 1; \end{cases}$			
$\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \\ z = 2\theta. \end{cases}$			

10. 试在表中填入下列曲面所围成的立体在三个坐标面上的投影

	在 xOy 面	在 yOz 面	在 zOx 面
$z = x^2 + y^2$ 与 $z = 2 - x^2 - y^2$			
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$			

八、画出下列方程所表示的曲面或曲线：

1. $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$;

2.
$$\begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ y = x. \end{cases}$$

九、画出由平面 $x=0, z=0, x=1, y=2, z=\frac{y}{4}$ 所围成的立体的图形.

自测题一（向量代数与空间解析几何）

一、选择题（每题3分，共15分）

1、已知 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$ ，则必有：（ ）

A、 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ ； B、 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ ； C、 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ ； D、 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$

2、设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为非零向量且 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 2$ ，则 $[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})] \cdot (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) =$ （ ）

A、4； B、2； C、-2； D、0.

3、直线 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$ 与平面 $2x + y - z + 4 = 0$ 的夹角为：（ ）

A、 $\frac{\pi}{6}$ B、 $\frac{\pi}{3}$ C、 $\frac{\pi}{4}$ D、 $\frac{\pi}{2}$

4、点 $(1,1,1)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 的投影为：（ ）

A、 $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$ ； B、 $(1, -1, 0)$ ； C、 $(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$ ； D、 $(0, 1, -1)$

5、方程 $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ 表示的旋转曲面和旋转轴为（ ）

A、单叶双曲面、 x 轴； B、双叶双曲面、 x 轴；
C、单叶双曲面、 y 轴； D、双叶双曲面、 y 轴。

二、填空题（每题3分，共15分）

1、过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t - 4 \\ x = t - 1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是_____

2、设一平面过原点及点 $(6, -3, 2)$ 且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直，则此平面方程是_____

3、曲面 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 可以由曲线_____或_____绕 z 轴旋转一周得到。

4、曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x^2 \end{cases}$ 在 yOz 面上的投影为_____

5、点 $P(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ 的距离为_____

三、解下列各题（每题10分，共40分）

1、求直线 $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+2=0 \end{cases}$ 的对称式方程和参数式方程.

2、化曲线的一般方程 $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$ 为参数方程.

3、设一向量与 x 轴 y 轴夹角相等，而与 z 轴所成的角是他们的两倍，求该向量的单位向量.

4. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $z^2 = 2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

四. 解下列各题 (每题 10 分, 共 30 分)

1. 试求点 $M_1(3, 1, -4)$ 关于直线 $L: \begin{cases} x - y - 4z + 9 = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ 的对称点 M_2 的坐标.

2. 已知点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 1)$ 试在 z 轴上找一点 C , 使得 $\triangle ABC$ 的面积最小.

3. 有一束平行于直线 $L: x = y = -z$ 的平行光束照射不透明球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, 求球面在 xOy 面上留下的阴影部分的边界曲线方程.