Algebra Lineal

Interfaz de usuario gráfica, Sitio web

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

# **Preliminares**

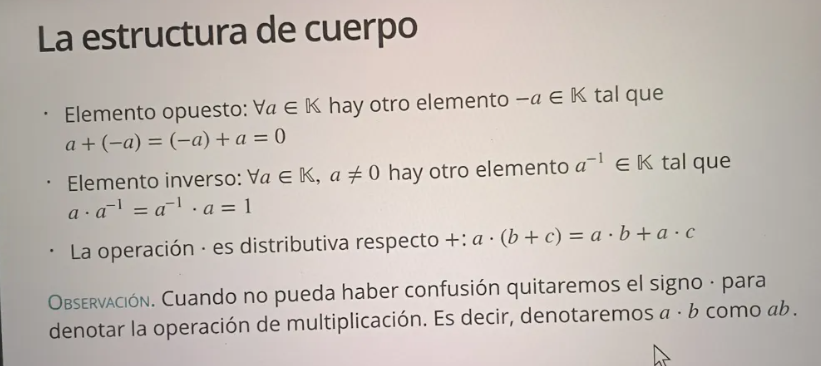
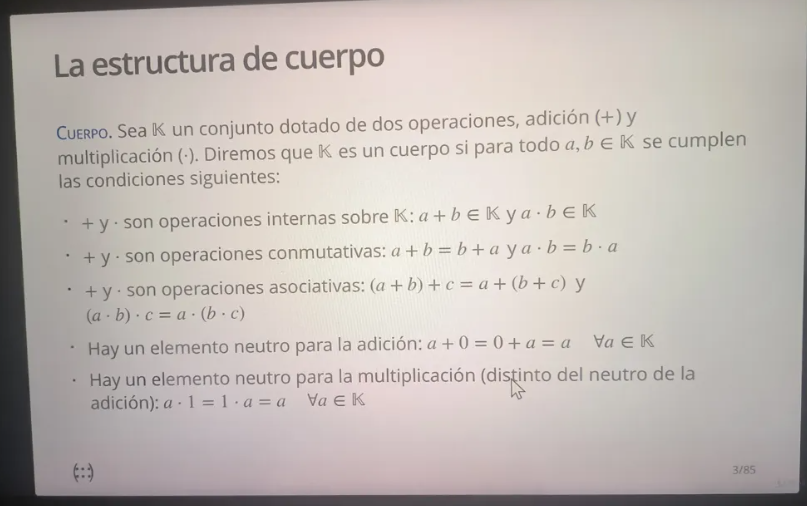
Toda el algebra lineal se monta encima de 3 cuerpos, que son: los racionales, los reales, los complejos.

Se trata de saber utilizar los polinomios. Porque el álgebra lineal Es el álgebra de los polinomios de grado 1, de los polinomios lineales.

## **Cuerpos**

### **1.1.1 estructura de un cuerpo**

Un **cuerpo** es un conjunto dotado de dos operaciones (adición + y multiplicación ·) que se comporta de manera muy similar a los números racionales, reales o complejos.



**Propiedades de un Cuerpo**

**1. Operaciones Internas**

* **+** y **·** son operaciones internas: si a, b ∈ 𝕂, entonces a + b ∈ 𝕂 y a · b ∈ 𝕂
* *Traducción:* Si sumas o multiplicas dos elementos del cuerpo, el resultado sigue en el cuerpo

**2. Conmutatividad**

* **Suma:** a + b = b + a
* **Multiplicación:** a · b = b · a
* *Traducción:* El orden no importa

**3. Asociatividad**

* **Suma:** (a + b) + c = a + (b + c)
* **Multiplicación:** (a · b) · c = a · (b · c)
* *Traducción:* Puedes agrupar como quieras

**4. Elemento Neutro para la Adición**

* Existe un elemento **0** tal que: a + 0 = 0 + a = a para todo a ∈ 𝕂
* *Traducción:* Sumar cero no cambia nada

**5. Elemento Neutro para la Multiplicación**

* Existe un elemento **1** (distinto de 0) tal que: a · 1 = 1 · a = a para todo a ∈ 𝕂
* *Traducción:* Multiplicar por uno no cambia nada

**6. Elemento Opuesto (Inverso Aditivo)**

* Para todo a ∈ 𝕂 existe -a ∈ 𝕂 tal que: a + (-a) = (-a) + a = 0
* *Traducción:* Todo número tiene su negativo

**7. Elemento Inverso (Inverso Multiplicativo)**

* Para todo a ∈ 𝕂, a ≠ 0, existe a⁻¹ ∈ 𝕂 tal que: a · a⁻¹ = a⁻¹ · a = 1
* *Traducción:* Todo número (excepto cero) tiene su recíproco

**8. Distributividad**

* a · (b + c) = a · b + a · c
* *Traducción:* La multiplicación se distribuye sobre la suma

**Ejemplos de Cuerpos:**

**✅ Son Cuerpos:**

1. **ℚ** (números racionales): {1/2, -3/4, 5, etc.}
2. **ℝ** (números reales): {π, √2, -5.7, etc.}
3. **ℂ** (números complejos): {2+3i, -i, 4, etc.}
4. **ℤ₂** = {0, 1} con aritmética módulo 2
5. **ℤ\_p** donde p es primo (aritmética módulo p)

**❌ NO son Cuerpos:**

1. **ℤ** (números enteros) - ¿Por qué? Porque 2 no tiene inverso multiplicativo en ℤ (2⁻¹ = 1/2 ∉ ℤ)
2. **ℕ** (números naturales) - No tiene negativos ni inversos

**Ejemplo Práctico: ℝ (números reales)**

Verifica que ℝ es un cuerpo:

1. **Cerrado:** 3 + 5 = 8 ∈ ℝ ✓, 2 × 7 = 14 ∈ ℝ ✓
2. **Conmutativo:** 3 + 5 = 5 + 3 ✓, 2 × 7 = 7 × 2 ✓
3. **Asociativo:** (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) ✓
4. **Neutro suma:** 5 + 0 = 5 ✓
5. **Neutro multiplicación:** 5 × 1 = 5 ✓
6. **Opuesto:** 5 + (-5) = 0 ✓
7. **Inverso:** 5 × (1/5) = 1 ✓ (para 5 ≠ 0)
8. **Distributiva:** 2 × (3 + 4) = 2×3 + 2×4 = 14 ✓

**Ejemplo Práctico: ℤ₂ = {0, 1}**

Tabla de suma (módulo 2):

Interfaz de usuario gráfica

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

* Neutro suma: 0
* Neutro multiplicación: 1
* Opuesto de 1: 1 (porque 1 + 1 = 0 en módulo 2)
* Inverso de 1: 1 (porque 1 × 1 = 1)

**ℤ₂ ES un cuerpo** ✓

**Observación Importante (de tu segunda imagen):**

Cuando no haya confusión, se omite el símbolo · para la multiplicación. Es decir:

* **a · b** se escribe simplemente como **ab**

**Aplicación en tu Curso de Álgebra Lineal:**

Los **espacios vectoriales** se definen sobre cuerpos. Por ejemplo:

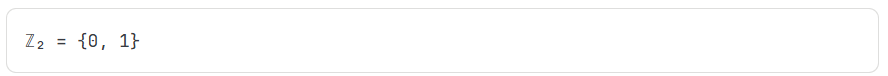
* ℝⁿ es un espacio vectorial sobre el cuerpo ℝ
* ℂⁿ es un espacio vectorial sobre el cuerpo ℂ

Esto significa que puedes multiplicar vectores por escalares del cuerpo y todo funciona bien.

#### **1.1.1.1 Operaciones en ℤ₂**

**¿Qué es ℤ₂?**

**ℤ₂** es el conjunto de los números enteros módulo 2. Solo tiene dos elementos:



Donde:

* **0** representa todos los números **PARES**
* **1** representa todos los números **IMPARES**

**Tablas de Operaciones en ℤ₂**

**Tabla de Suma (+) en ℤ₂:**

Imagen que contiene Icono

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Cómo leer la tabla:**

* Fila + Columna = Resultado
* Ejemplo: 1 + 1 = 0 (fila 1, columna 1)

**Explicación detallada:**

* **0 + 0 = 0** (par + par = par)
* **0 + 1 = 1** (par + impar = impar)
* **1 + 0 = 1** (impar + par = impar)
* **1 + 1 = 0** (impar + impar = par) ← **Caso especial: 2 mod 2 = 0**

**Tabla de Multiplicación (×) en ℤ₂:**

Imagen que contiene Icono

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Explicación detallada:**

* **0 × 0 = 0**
* **0 × 1 = 0**
* **1 × 0 = 0**
* **1 × 1 = 1**

**Propiedades de ℤ₂**

**Elementos Especiales:**

Tabla

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Ejemplos de Operaciones**

**Suma en ℤ₂:**

**Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**Multiplicación en ℤ₂:**

Interfaz de usuario gráfica

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Operaciones Combinadas:**

Imagen que contiene Forma

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**¿Por qué ℤ₂ es un Cuerpo?**

ℤ₂ cumple **TODAS** las propiedades de un cuerpo:

**1. Cerrado para + y ×**

* ✓ Si a, b ∈ ℤ₂, entonces a + b ∈ ℤ₂ y a × b ∈ ℤ₂

**2. Conmutativo**

* ✓ a + b = b + a
* ✓ a × b = b × a

**3. Asociativo**

* ✓ (a + b) + c = a + (b + c)
* ✓ (a × b) × c = a × (b × c)

**4. Tiene neutros**

* ✓ Neutro suma: 0
* ✓ Neutro multiplicación: 1

**5. Todo elemento tiene opuesto**

* ✓ Opuesto de 0: 0 (porque 0 + 0 = 0)
* ✓ Opuesto de 1: 1 (porque 1 + 1 = 0)

**6. Todo elemento ≠ 0 tiene inverso**

* ✓ Inverso de 1: 1 (porque 1 × 1 = 1)

**7. Distributivo**

* ✓ a × (b + c) = a × b + a × c

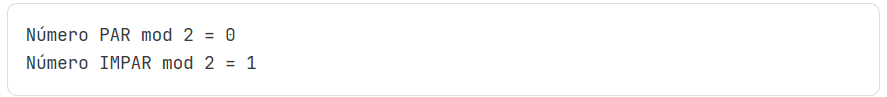
**8. No tiene divisores de cero**

* ✓ Si a × b = 0, entonces a = 0 o b = 0

**Conclusión: ℤ₂ ES un cuerpo** ✓

**Regla de Oro para Módulo 2**

**Para cualquier número entero:**



**Ejemplos:**

Tabla

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Ejercicios de Práctica**

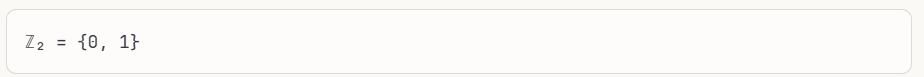
**Resuelve en ℤ₂:**

1. 1 + 1 + 1 = ?
2. (1 + 1) × (1 + 0) = ?
3. 1 + 1 + 1 + 1 = ?
4. 0 × (1 + 1) = ?

**Soluciones:**

1. 1 + 1 + 1 = 0 + 1 = 1
2. (1 + 1) × (1 + 0) = 0 × 1 = 0
3. 1 + 1 + 1 + 1 = (1 + 1) + (1 + 1) = 0 + 0 = 0
4. 0 × (1 + 1) = 0 × 0 = 0

#### **1.1.1.2 Resumiendo ℤ₂**

**ℤ₂ es un CONJUNTO con 2 elementos:**

**Las operaciones:**

* **Suma:** se hace módulo 2
* **Multiplicación:** se hace módulo 2

**Resumen Ultra-Breve:**

**ℤ₂ = {0, 1}** es un **cuerpo** (no una matriz) donde:

* Sumas y restas módulo 2
* Multiplicas módulo 2

#### **1.1.1.3 Diferencia entre CONJUNTO y CUERPO**

**CONJUNTO:**

* Solo una **colección de elementos**
* **NO** tiene operaciones definidas
* Ejemplo: {0, 1, 2, 3} es solo un conjunto

**CUERPO:**

* Un conjunto **CON** dos operaciones (+ y ×)
* Las operaciones **cumplen propiedades especiales** (conmutativa, asociativa, neutros, inversos, etc.)
* Ejemplo: ℤ₂ = {0, 1} con + y × módulo 2

**Analogía:**

**Conjunto** = Una caja con objetos  
**Cuerpo** = Una caja con objetos + instrucciones de cómo combinarlos

**En Resumen:**

**Interfaz de usuario gráfica

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**ℤ₂** es un **cuerpo** (porque tiene operaciones que cumplen las propiedades) y también es un **conjunto** (porque tiene elementos).

### **1.1.2 Cuerpos (estructura de un cuerpo)**

**Texto, Carta

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

En un cuerpo 𝕂 se verifican las siguientes propiedades:

**1. Propiedad de Simplificación para la Suma**

a + b = a + c ⇒ b =

**Explicación:** Si dos sumas tienen el mismo resultado y el mismo primer término, entonces los segundos términos son iguales.

**Ejemplo:**

5 + b = 5 + 3 ⇒ b = 3

1. **Unicidad de los Elementos Neutros (0 y 1)**

Solo existe **un** elemento neutro para la suma (el 0) y **un** elemento neutro para la multiplicación (el 1). No puede haber dos ceros distintos ni dos unos distintos en un cuerpo.

1. **Unicidad del Elemento Opuesto**

Para cada elemento **a** en un cuerpo K, existe un **único** opuesto (-a) tal que su suma es cero.

**Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**4. Unicidad del Elemento Inverso**

**Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**5. Propiedad Absorbente del Cero**

**Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**6. Ausencia de Divisores de Cero**

**Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

### **1.1.3 Cuerpos Conocidos**

**Texto, Carta

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

### **1.1.4 El cuerpo ℤ₂**

Es el primer cuerpo finito, mientras que todos los demás son infinitos

Texto, Carta

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

## **Tipo especial de cuerpo: Números complejos**

### **1.2.1 Conjunto de números complejos: Definición**

Texto, Carta

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

### **1.2.2 La forma binomica aparece al definir la unidad imaginaria, i:**

Texto, Aplicación, Chat o mensaje de texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

### **1.2.3 Parte Real, imaginaria, conjugado de z, modulo, argumento y principal:**

Texto, Carta

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

### **1.2.4 Plano Complejo:**

Diagrama

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

### **1.2.5 Forma Polar:**

Los números complejos se pueden pintar en forma de tupla, en forma binomica, y la forma polar.

Diagrama

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Radianes**

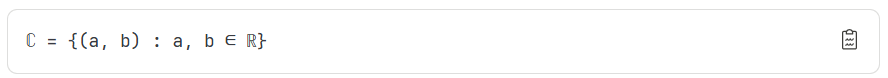
**Tabla

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

### **1.2.6 Extendido**

#### **1.2.6.1 Conjunto de Números Complejos: Definición**

**Definición:**

****

El conjunto de números complejos ℂ es el conjunto de pares ordenados (a, b) donde a y b son números reales.

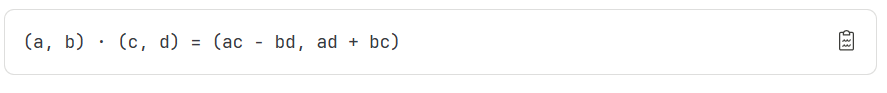
**Operaciones:**

**Suma:**



donde a, b, c, d ∈ ℝ

**Producto:**



donde a, b, c, d ∈ ℝ

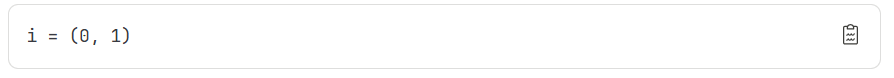
#### **1.2.6.2 La Forma Binómica y la Unidad Imaginaria**

**Forma Binómica:**

Si z ∈ ℂ tal que z = (a, b), su forma binómica es:

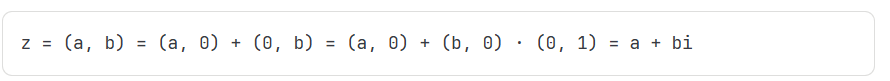


**Unidad Imaginaria:**

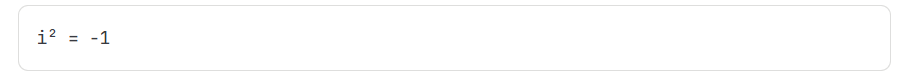
  
La unidad imaginaria i aparece al definir la forma binómica.

**Demostración:**

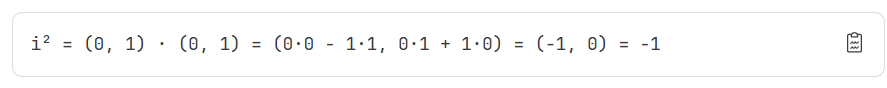
Si z = (a, b), tenemos que:

****

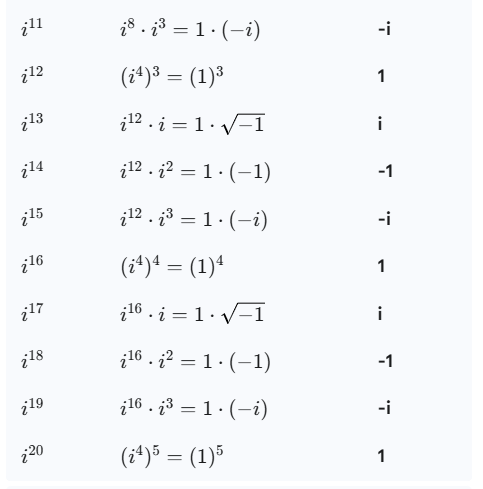
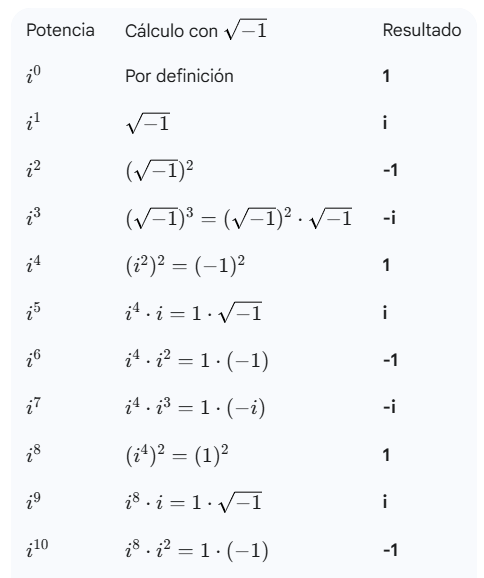
**Propiedad fundamental de i:**

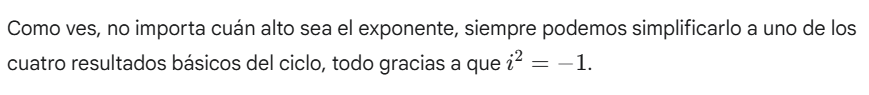


**Demostración:**



**Potencias de i (con la raíz)**

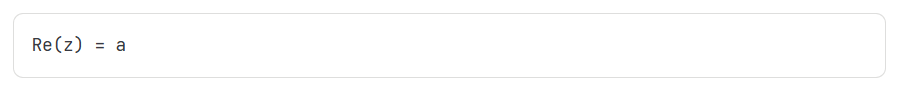
****



#### **1.2.6.3 Partes de un Número Complejo**

Sea z = a + bi un número complejo:

**1. Parte Real:**



Texto, Carta

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**2. Parte Imaginaria:**

Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación, Correo electrónico

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**3. Conjugado**

Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**4. Modulo**

Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación

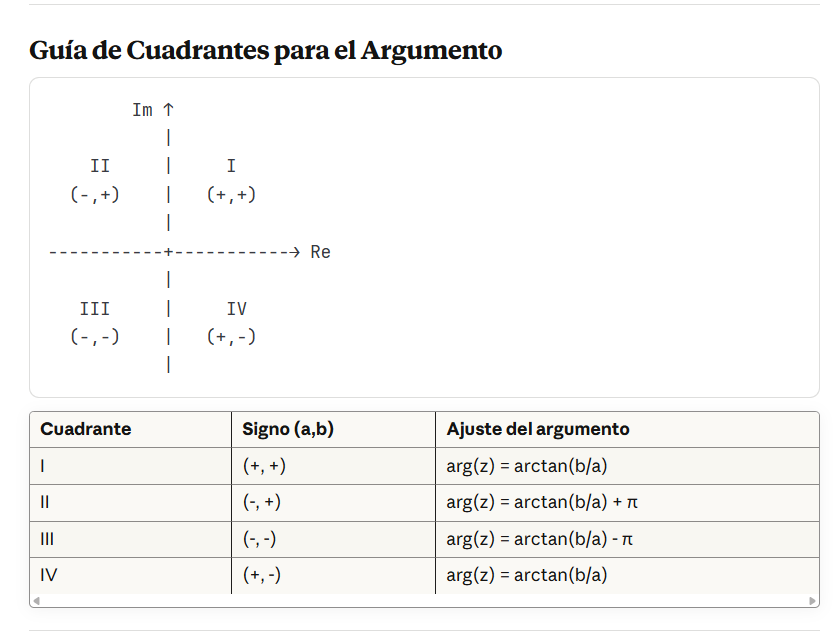
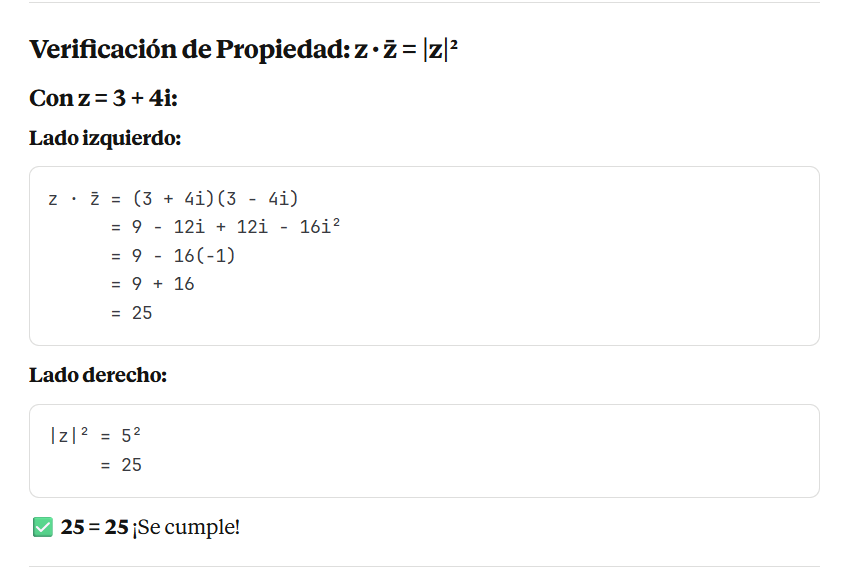
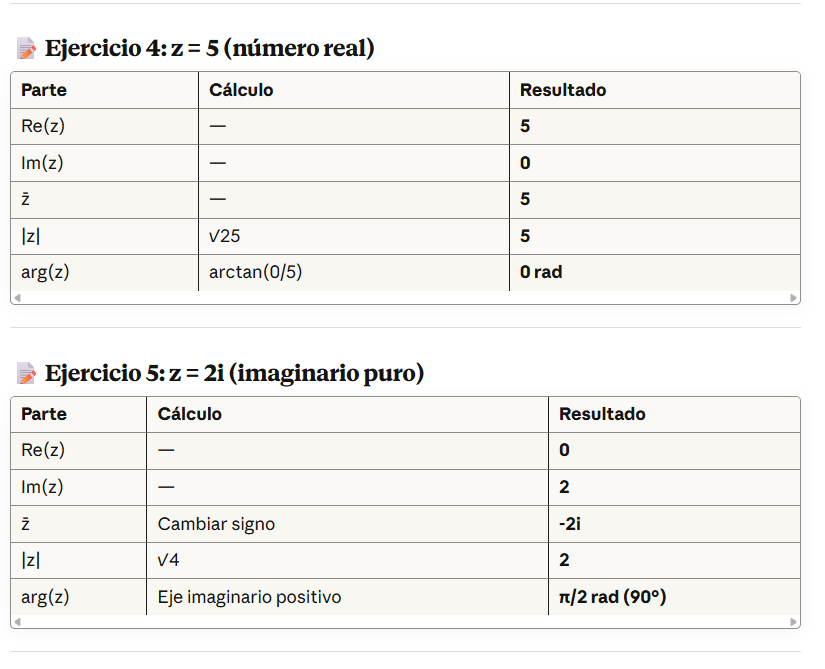
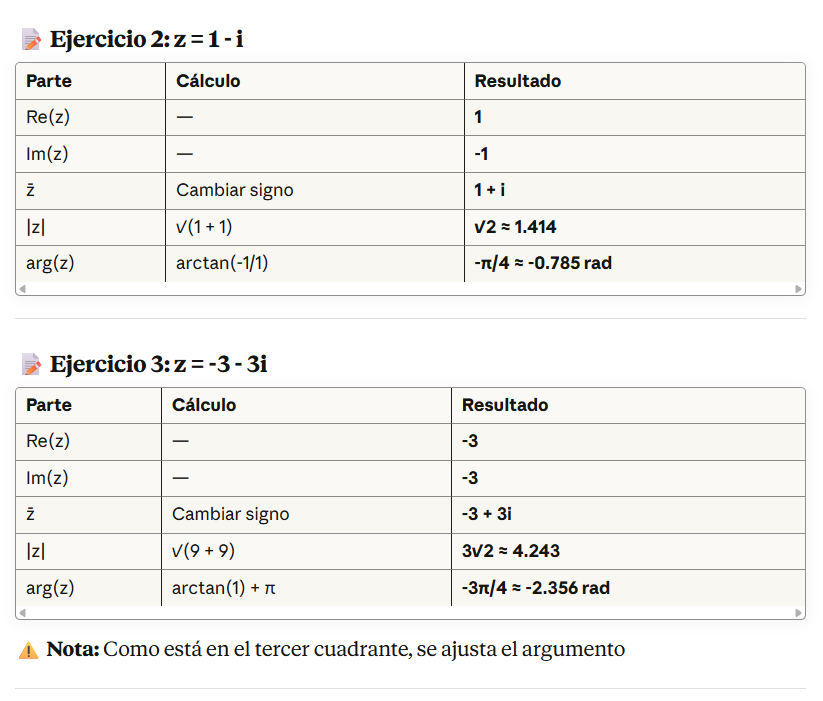
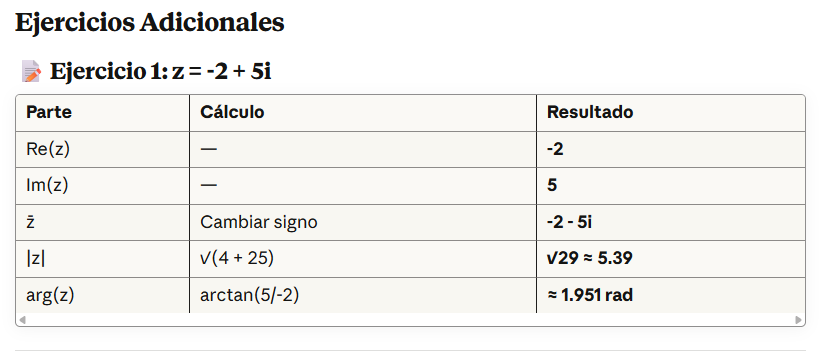
El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**5. Argumento**

Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

##### **1.2.6.3.1 Ejercicios Adicionales, verificación de propiedad y guia de cuadrantes para el argumentos**



#### **1.2.6.4 Plano complejo**

Los números complejos se representan en un plano denominado **PLANO COMPLEJO**, donde:

* El eje de las abscisas es el **EJE REAL**
* El eje de las ordenadas es el **EJE IMAGINARIO**

Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Componentes:**

* **a** = coordenada en el eje real
* **b** = coordenada en el eje imaginario
* El punto (a, b) representa z = a + bi

#### **1.2.6.5 Forma Polar**

Los números complejos se pueden representar de tres formas:

1. **Forma de tupla:** (a, b)
2. **Forma binómica:** a + bi
3. **Forma polar:** re^(iφ)

Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación, Correo electrónico

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

Imagen que contiene Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación, Correo electrónico

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

##### **1.2.6.5.1 Ejercicios con la formula de Euler**

**Fórmula de Euler**

**Imagen que contiene Interfaz de usuario gráfica

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**Ejercicio 1: Calcular**

**Solución:**

|  |
| --- |
| e^(iπ/4) = cos(π/4) + i·sin(π/4)  = √2/2 + i·√2/2  = (√2/2)(1 + i) |

**Respuesta: o**

**Ejercicio 2: Calcular**

**Solución:**

|  |
| --- |
| e^(iπ) = cos(π) + i·sin(π)  = -1 + i·0  = -1 |

**Respuesta: -1**

✨ Esta es la famosa identidad de Euler:

**Ejercicio 3: Calcular**

**Solución:**

|  |
| --- |
| e^(iπ/2) = cos(π/2) + i·sin(π/2)  = 0 + i·1  = i |

**Respuesta: i**

**Ejercicio 4: Calcular**

**Solución:**

|  |
| --- |
| e^(iπ/6) = cos(π/6) + i·sin(π/6)  = √3/2 + i·1/2 |

**Respuesta:**

##### **1.2.6.5.2 Forma Polar**

Imagen que contiene Interfaz de usuario gráfica

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

Donde:

* (módulo)
* (argumento)

**Gráfica del Plano Complejo**

Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Componentes:**

* **r**: longitud del vector desde 0 hasta z
* **φ**: ángulo desde el eje Re+ hasta el vector

**Ejemplo 1:**

**Datos:**

* r = 2
* φ = π/4 = 45°

**Gráfica:**

Interfaz de usuario gráfica, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**En binómica:**

Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Ejemplo 2:**

**Datos:**

* r = 3
* φ = π/3 = 60°

**Gráfica:**

Interfaz de usuario gráfica

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**En binómica:**

Forma

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Ejemplo 3:**

**Datos:**

* r = 4
* φ = 3π/4 = 135° (Cuadrante II)

**Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**En binómica:**

**Interfaz de usuario gráfica, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**Ejemplo 4:**

**Datos:**

* r = 2
* φ = -π/6 = -30° (Cuadrante IV)

**Gráfica:**

**Interfaz de usuario gráfica

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**En binómica:**

**Interfaz de usuario gráfica, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**Interpretación Visual**

**El módulo (r):**

* Es la **distancia** desde el origen (0) hasta el punto z
* Siempre es **positivo**
* Determina qué tan **lejos** está z del origen

**El argumento (φ):**

* Es el **ángulo** medido desde el eje real positivo
* Se mide en **sentido antihorario** (positivo)
* Se mide en **sentido horario** (negativo)
* Determina la **dirección** de z

**Ángulos en los Cuadrantes**

**Interfaz de usuario gráfica, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**Interfaz de usuario gráfica, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**Números Complejos Especiales**

**1. Eje Real Positivo: φ = 0**

**Imagen que contiene Interfaz de usuario gráfica

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**2. Eje Imaginario Positivo: φ = π/2**

**Interfaz de usuario gráfica

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**3. Eje Real Negativo: φ = π**

**Imagen que contiene Interfaz de usuario gráfica

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.  
4. Eje Imaginario Negativo: φ = -π/2**

**Imagen que contiene Interfaz de usuario gráfica

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**Ejercicio Completo: Graficar**

**Paso 1: Convertir a forma polar**

**Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**Paso 2: Graficar**

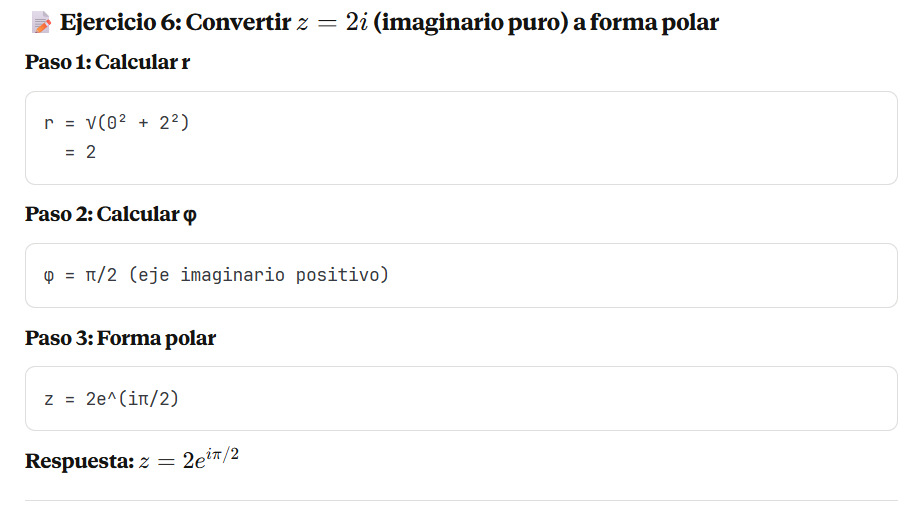
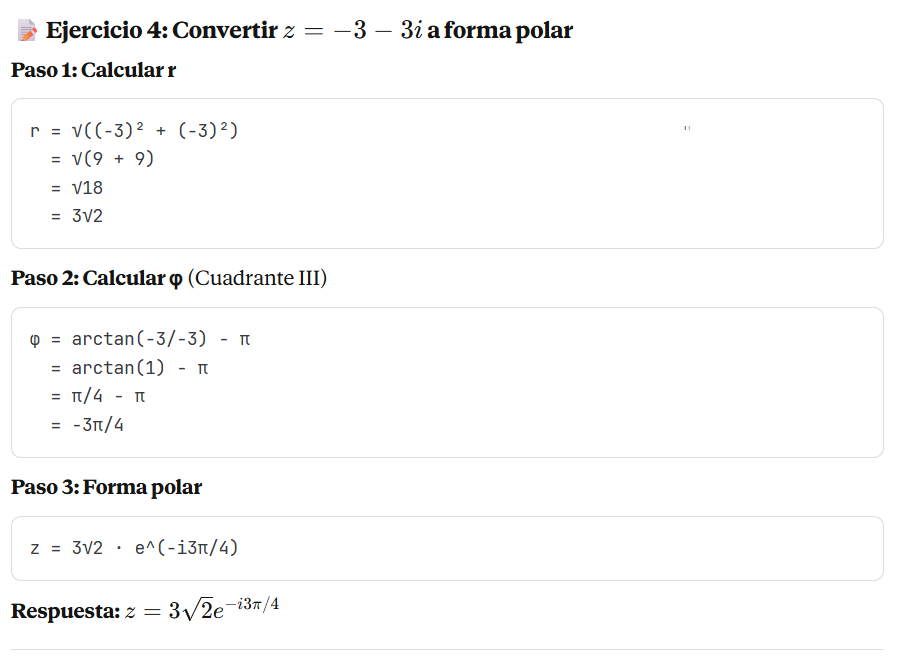
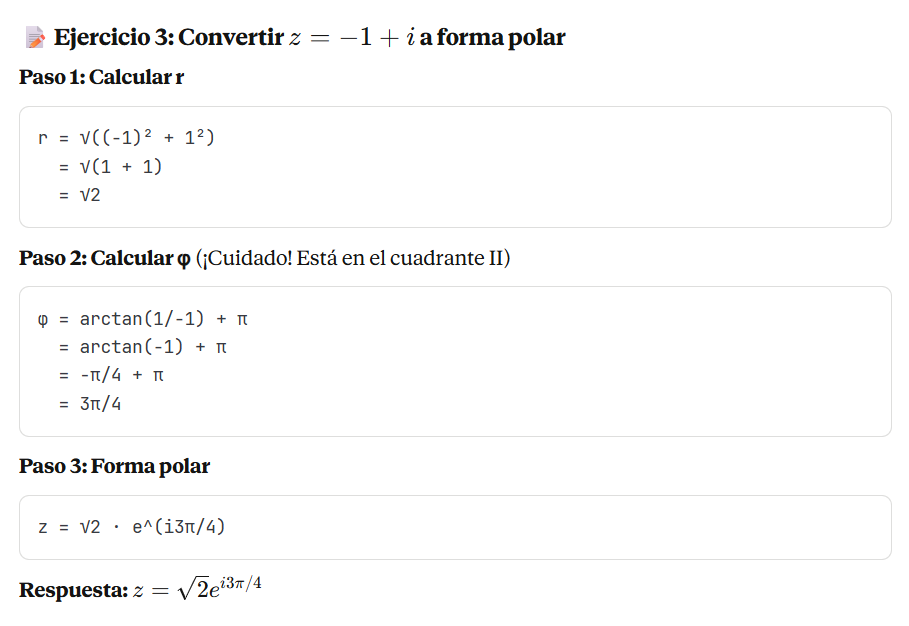
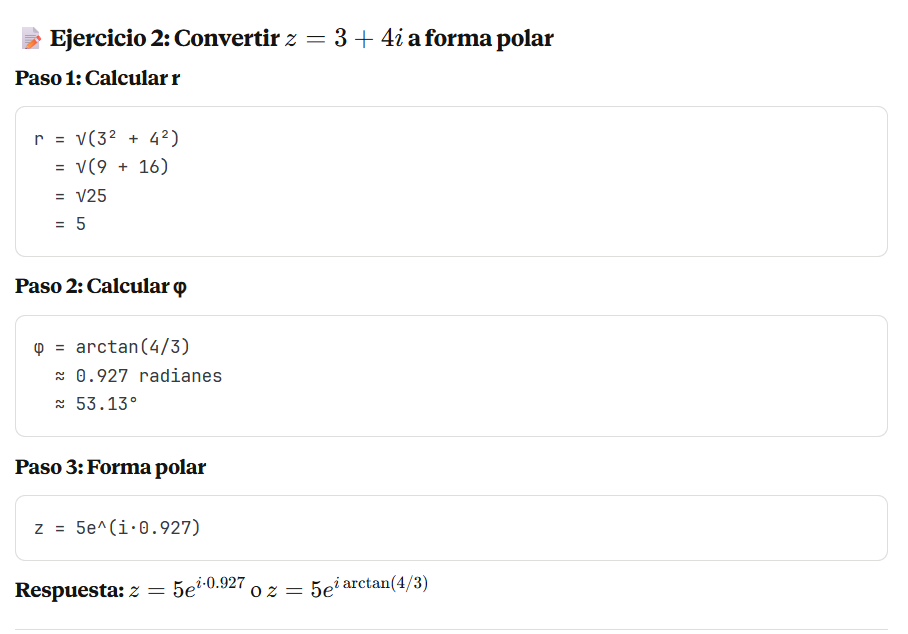
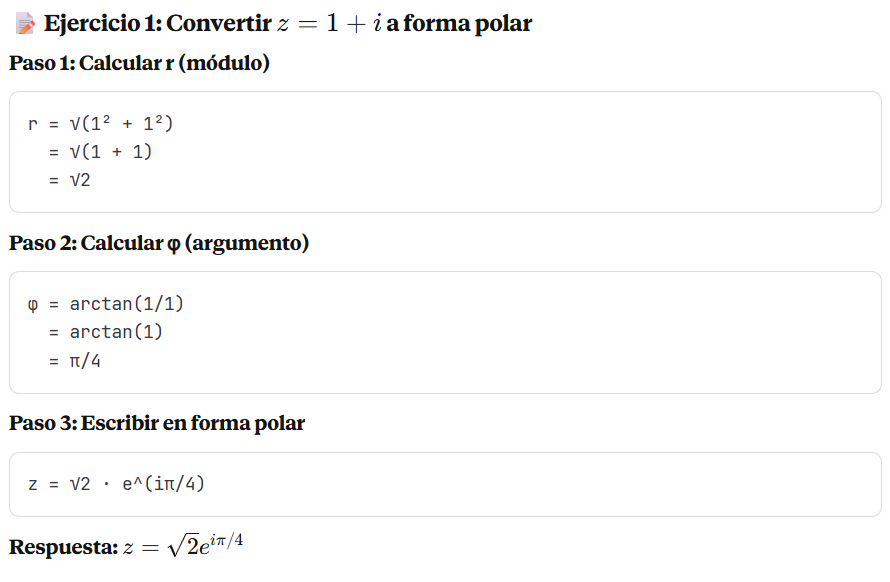
**Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

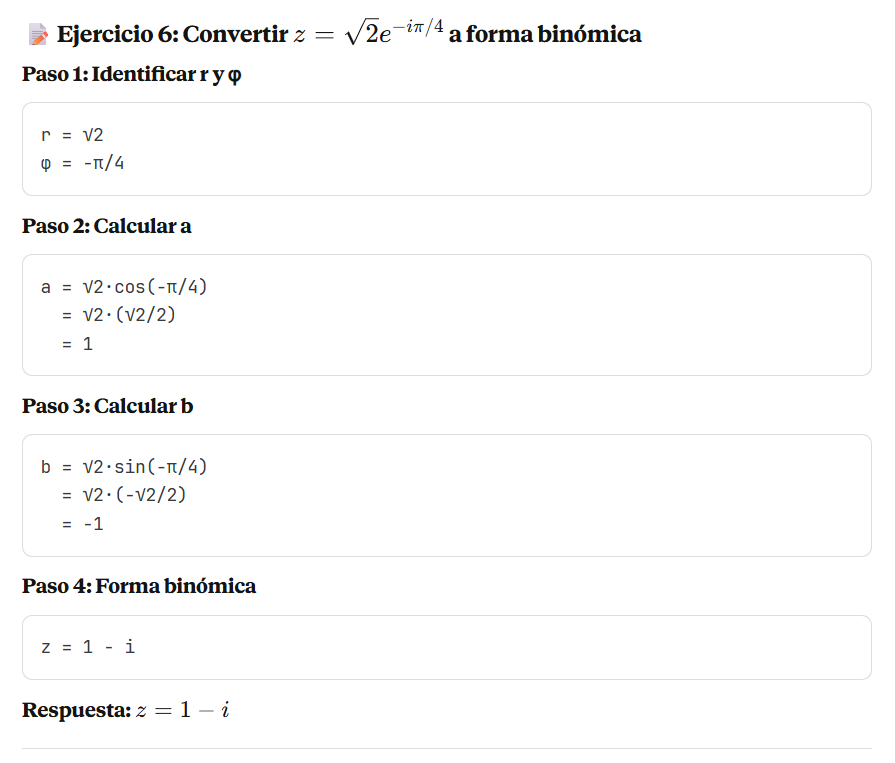
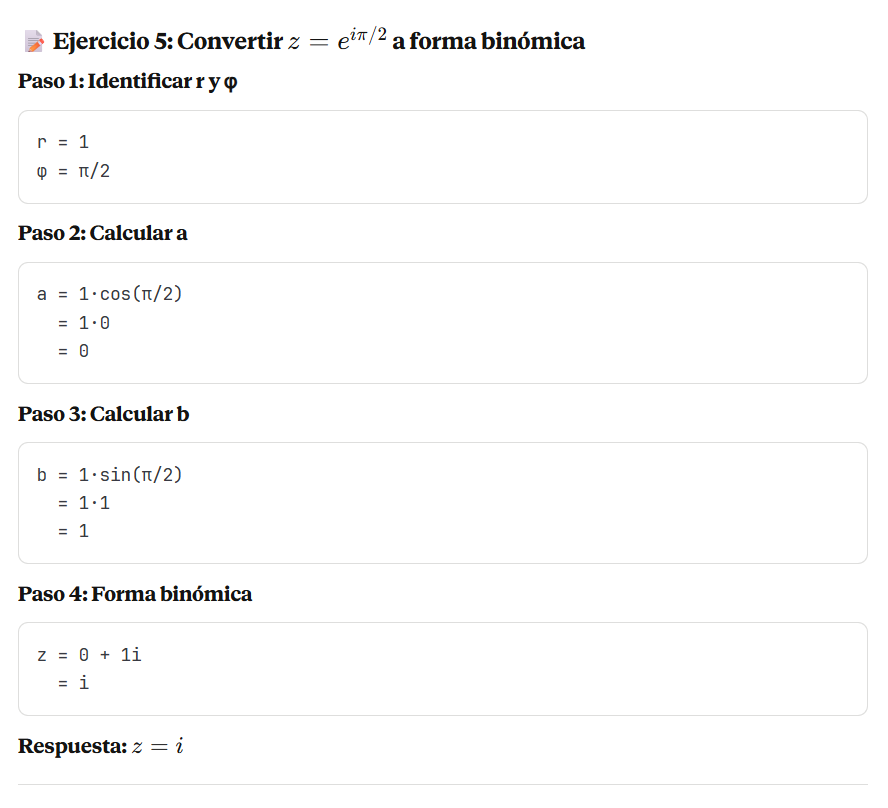
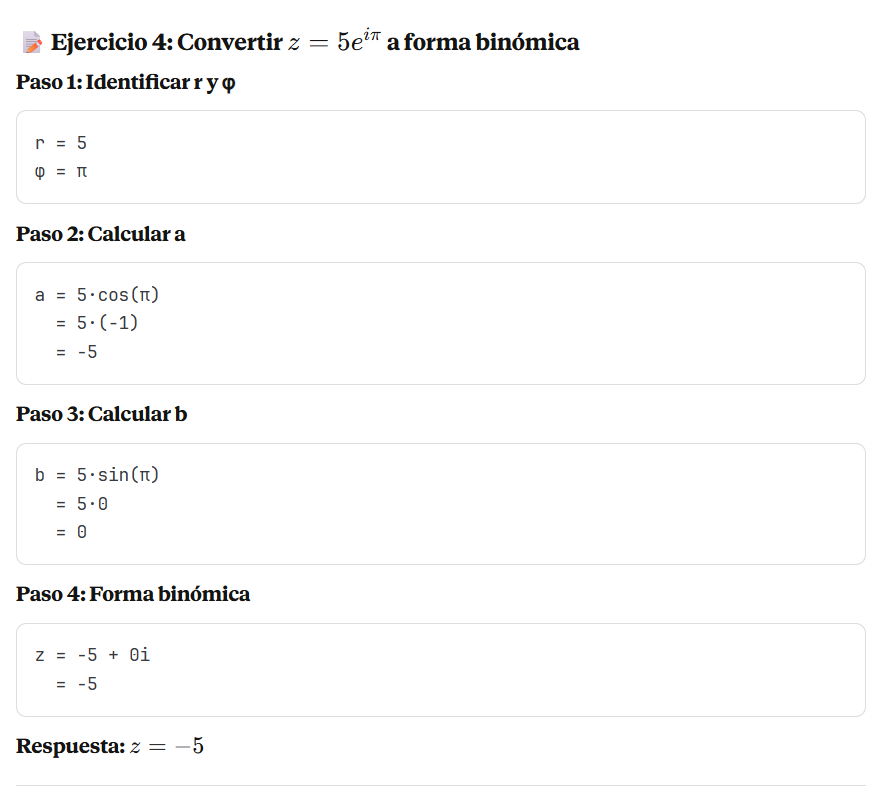
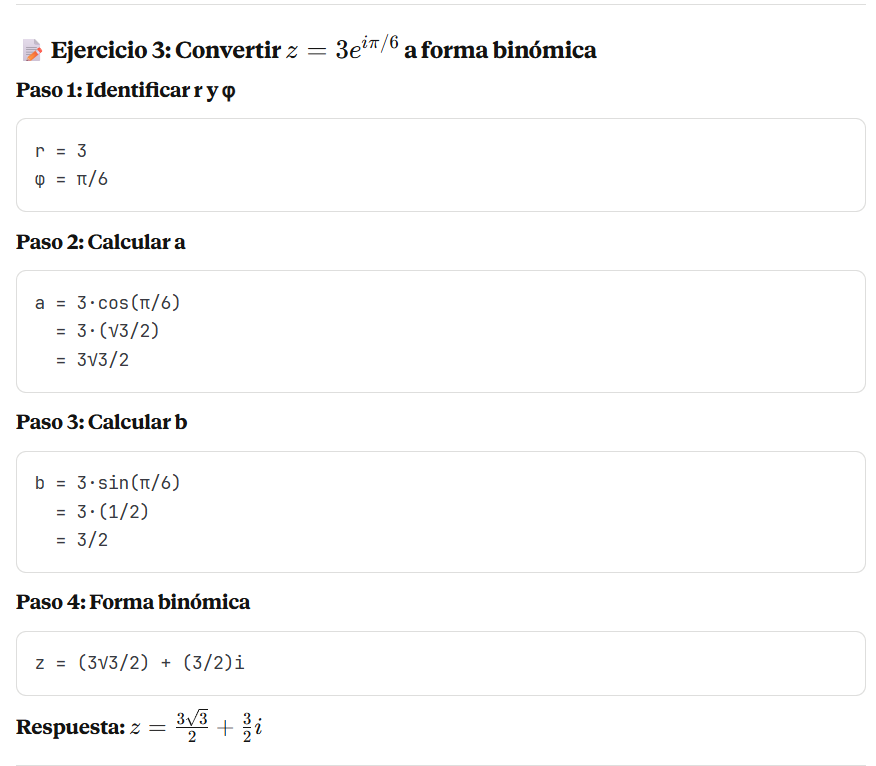
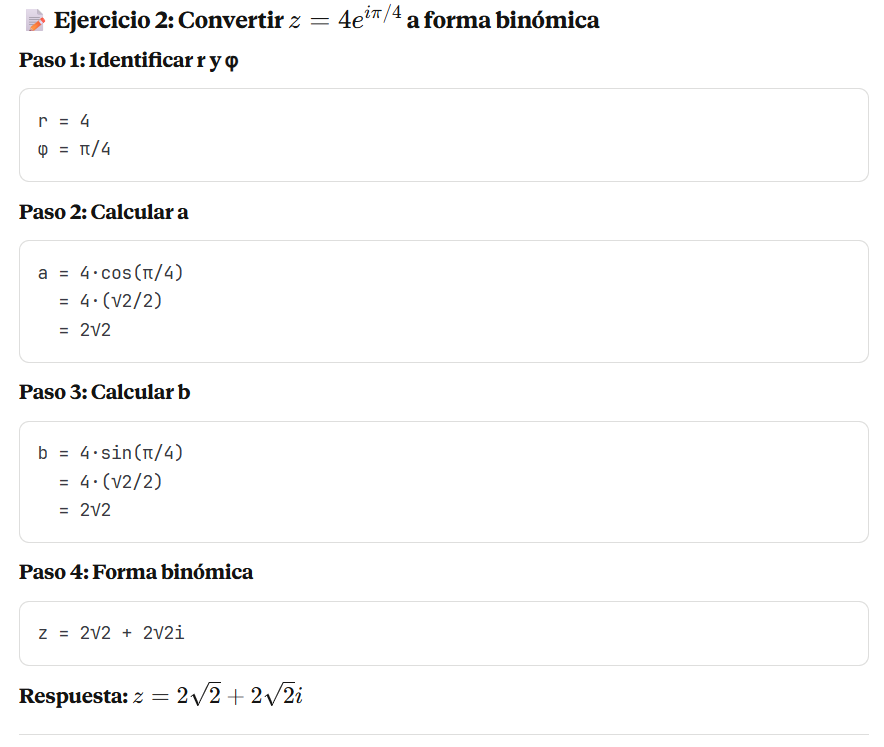
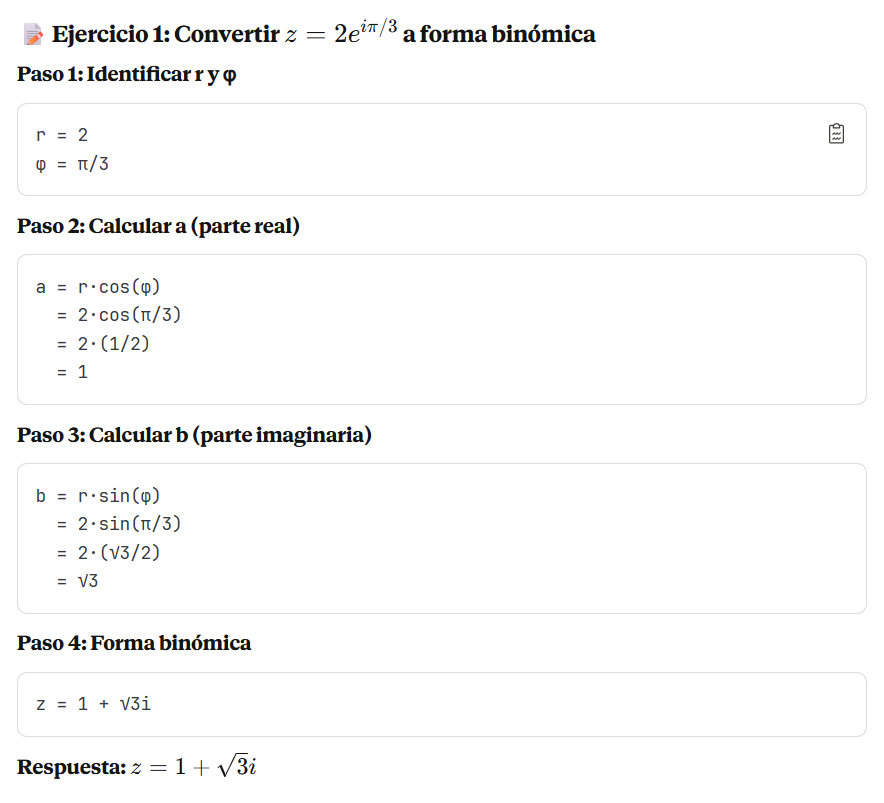
##### **1.2.6.5.3 Conversión: De Binomica a Polar**

**Interfaz de usuario gráfica, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

****

**Conversión: De Polar a Binómica**

****

## **Trabajando con Zn**

**1. Definición inicial:**

- ℤₙ donde n ∈ ℕ y n = 3, 4, 5, 6   
- Esto significa que estás trabajando con los conjuntos ℤ₃, ℤ₄, ℤ₅, ℤ₆

**2. Pregunta:**

* ℤ = {[0], [1], [2], ..., [n-1]}?
* **Respuesta:** Sí, es la estructura de ℤₙ

**3. Ejemplo con n = 5:**

* ℤ₅ = {[0], [1], [2], [3], [4]}

**4. Ejercicios de pertenencia:**

**Caso 1: 150**

* 150 ÷ 5 = 30 con resto 0
* Por lo tanto: **150 ∈ [0]**

**Caso 2: 77**

* 77 ÷ 5 = 15 con resto 2
* Por lo tanto: **77 ∈ [2]**

**Los cálculos que aparecen abajo:**

* 150/5 = 30 (verificando que el resto es 0)
* 77/5 = 15.4 → 15 con resto 2 (verificando que el resto es 2)

### **ℤₙ como Cuerpo (Campo)**

**Definición de Cuerpo**

Un **cuerpo** (o campo) es una estructura algebraica donde se pueden realizar:

* Suma y multiplicación
* División (excepto por 0)
* Todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo

**Condición CRÍTICA**

**ℤₙ es un cuerpo SI Y SOLO SI n es un número PRIMO**

Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**¿Por qué?**

Para que ℤₙ sea cuerpo, **todos los elementos no nulos** deben tener inverso multiplicativo.

* Si **n es primo**: todos los números {1, 2, 3, ..., n-1} son coprimos con n
  + Por lo tanto, todos tienen inverso multiplicativo
  + ✅ **ℤₙ ES CUERPO**
* Si **n NO es primo**: existe algún divisor d con 1 < d < n
  + Este d NO es coprimo con n
  + [d] NO tiene inverso multiplicativo
  + ❌ **ℤₙ NO ES CUERPO**

**Análisis de tu imagen**

En tu imagen tienes: **n = 3, 4, 5, 6**

Tabla

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Ejemplo Práctico**

ℤ₅ (n=5, primo) → **ES CUERPO**

**Elementos:** {[0], [1], [2], [3], [4]}

**Inversos multiplicativos:**

* [1] × [1] = [1] → inverso de [1] es [1]
* [2] × [3] = [6] = [1] → inverso de [2] es [3]
* [3] × [2] = [6] = [1] → inverso de [3] es [2]
* [4] × [4] = [16] = [1] → inverso de [4] es [4]

**✅ Todos tienen inverso → ℤ₅ ES CUERPO**

**ℤ₄ (n=4, NO primo) → NO ES CUERPO**

**Elementos:** {[0], [1], [2], [3]}

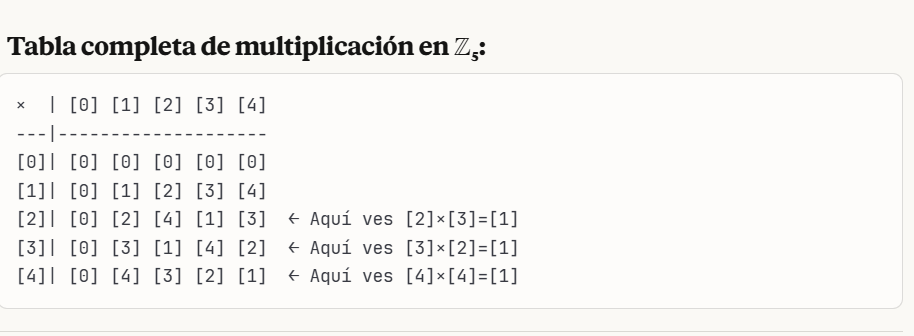
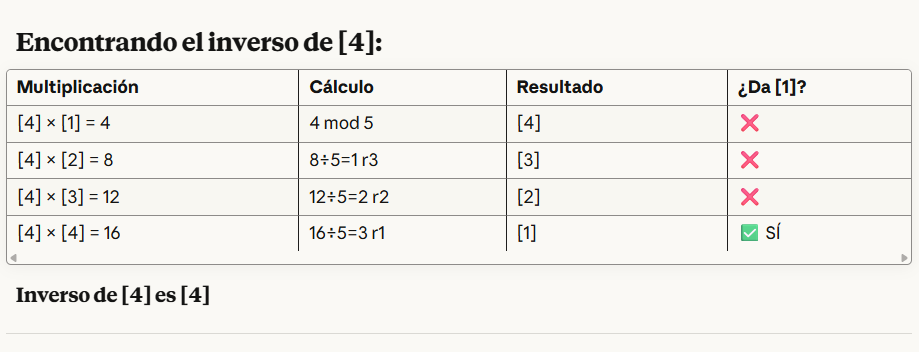
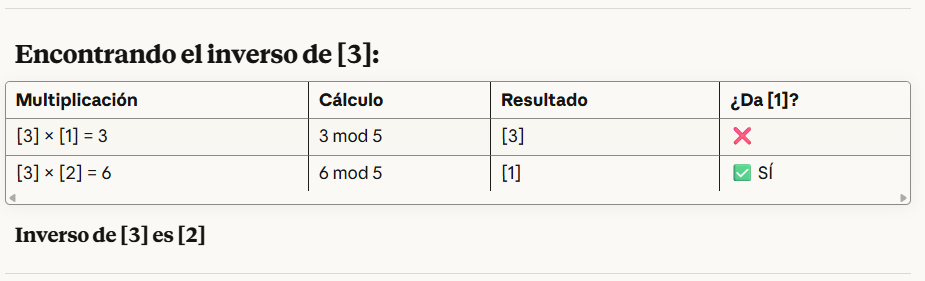
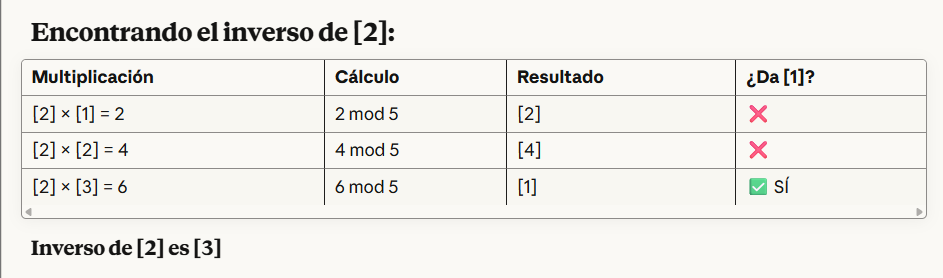
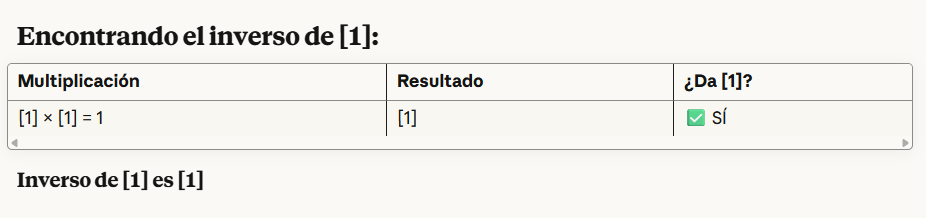
**Buscando inversos:**

* [1] × [1] = [1] ✅
* [2] × ? = [1]
  + [2] × [1] = [2]
  + [2] × [2] = [4] = [0]
  + [2] × [3] = [6] = [2]
  + ❌ **[2] NO tiene inverso**
* [3] × [3] = [9] = [1] ✅

❌ [2] NO tiene inverso → **ℤ₄ NO ES CUERPO**

### **ℤₙ Como se encuentran los inversos paso a paso**

Para cada elemento, lo multiplicas por TODOS los otros elementos hasta encontrar cuál te da [1].



### **Operaciones en ℤ₅**

**Elementos de ℤ₅**

ℤ₅ = {[0], [1], [2], [3], [4]}

**Tabla de SUMA en ℤ₅**

Interfaz de usuario gráfica

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Ejemplos de cálculo de sumas:**

**[2] + [3]:**

* 2 + 3 = 5
* 5 ÷ 5 = 1 resto 0
* Resultado: **[0]**

**[4] + [4]:**

* 4 + 4 = 8
* 8 ÷ 5 = 1 resto 3
* Resultado: **[3]**

**[3] + [4]:**

* 3 + 4 = 7
* 7 ÷ 5 = 1 resto 2
* Resultado: **[2]**

**[1] + [2]:**

* 1 + 2 = 3
* 3 ÷ 5 = 0 resto 3
* Resultado: **[3]**

**Tabla de MULTIPLICACIÓN en ℤ₅**

Interfaz de usuario gráfica

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Ejemplos de cálculo de multiplicaciones:**

**[2] × [3]:**

* 2 × 3 = 6
* 6 ÷ 5 = 1 resto 1
* Resultado: **[1]** ← Este es el inverso!

**[4] × [4]:**

* 4 × 4 = 16
* 16 ÷ 5 = 3 resto 1
* Resultado: **[1]** ← Este es el inverso!

**[2] × [4]:**

* 2 × 4 = 8
* 8 ÷ 5 = 1 resto 3
* Resultado: **[3]**

**[3] × [3]:**

* 3 × 3 = 9
* 9 ÷ 5 = 1 resto 4
* Resultado: **[4]**

**[2] × [2]:**

* 2 × 2 = 4
* 4 ÷ 5 = 0 resto 4
* Resultado: **[4]**

**Regla general para operar en ℤ₅**

Interfaz de usuario gráfica, Aplicación, Word

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

### **Regla definitiva para inverso mutliplicativo**

### **Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**Ejemplos:**

**ℤ₃ (3 es primo):**

* Elementos: {[0], [1], [2]}
* **[1] tiene inverso:** [1] × [1] = [1] ✅
* **[2] tiene inverso:** [2] × [2] = [4] = [1] ✅
* **2 elementos con inverso** (todos excepto [0])

**ℤ₅ (5 es primo):**

* Elementos: {[0], [1], [2], [3], [4]}
* **[1] tiene inverso:** [1] ✅
* **[2] tiene inverso:** [3] ✅
* **[3] tiene inverso:** [2] ✅
* **[4] tiene inverso:** [4] ✅
* **4 elementos con inverso** (todos excepto [0])

ℤ₇ (7 es primo):

* Elementos: {[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6]}
* **Todos {[1], [2], [3], [4], [5], [6]} tienen inverso ✅**
* **6 elementos con inverso (**todos excepto [0])

**¿Qué pasa si n NO es primo?**

**ℤ₄ (4 NO es primo):**

* Elementos: {[0], [1], [2], [3]}
* **[1] tiene inverso:** [1] ✅
* **[2] NO tiene inverso** ❌
* **[3] tiene inverso:** [3] ✅
* ❌ **NO todos tienen inverso → NO es cuerpo**

### **Opuesto Aditivo (Inverso Aditivo)**

El **opuesto aditivo** de [a] es el elemento que sumado con [a] te da **[0]**.

**Diferencia clave:**

Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**En ℤ₅ - Opuestos Aditivos:**

**Tabla de SUMA (recordatorio):**

|  |
| --- |
| + | [0] | [1] | [2] | [3] | [4]  -----|-----|-----|-----|-----|-----  [0] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4]  [1] | [1] | [2] | [3] | [4] | [0] ← [1]+[4]=[0]  [2] | [2] | [3] | [4] | [0] | [1] ← [2]+[3]=[0]  [3] | [3] | [4] | [0] | [1] | [2] ← [3]+[2]=[0]  [4] | [4] | [0] | [1] | [2] | [3] ← [4]+[1]=[0]  ```  ### Buscando opuestos (¿quién suma [0]?):  | Elemento | Opuesto | Verificación |  |----------|---------|--------------|  | [0] | [0] | [0] + [0] = [0] ✅ |  | [1] | [4] | [1] + [4] = [5] = [0] ✅ |  | [2] | [3] | [2] + [3] = [5] = [0] ✅ |  | [3] | [2] | [3] + [2] = [5] = [0] ✅ |  | [4] | [1] | [4] + [1] = [5] = [0] ✅ |  \*\*✅ TODOS tienen opuesto aditivo (los 5 elementos)\*\*  ---  ## En ℤ₄ - Opuestos Aditivos:  ### Tabla de SUMA:  ```  + | [0] | [1] | [2] | [3]  -----|-----|-----|-----|-----  [0] | [0] | [1] | [2] | [3]  [1] | [1] | [2] | [3] | [0] ← [1]+[3]=[0]  [2] | [2] | [3] | [0] | [1] ← [2]+[2]=[0]  [3] | [3] | [0] | [1] | [2] ← [3]+[1]=[0]  ```  | Elemento | Opuesto | Verificación |  |----------|---------|--------------|  | [0] | [0] | [0] + [0] = [0] ✅ |  | [1] | [3] | [1] + [3] = [4] = [0] ✅ |  | [2] | [2] | [2] + [2] = [4] = [0] ✅ |  | [3] | [1] | [3] + [1] = [4] = [0] ✅ |  \*\*✅ TODOS tienen opuesto aditivo (los 4 elementos)\*\*  ---  ## Regla general:  ```  En ℤₙ (sea n primo o NO):  → TODOS los elementos SIEMPRE tienen opuesto aditivo  → Incluso [0] tiene opuesto: [0] + [0] = [0] |

**Resumen comparativo:**

**Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación, Correo electrónico

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**