

Die Energie im elektrischen Feld eines Kondensators

A) Vorüberlegungen

Wir haben kennen gelernt, dass im (Gravitations-) Feldern Energie gespeichert ist. Vermutlich ist es bei elektrischen Feldern genauso. Man kann dies recht einfach untersuchen:

Dazu legen wir einen Kondensator über einen Widerstand an eine Spannungsquelle (Abb. 1). Es fließt kurzzeitig ein *Ladestrom* I , der anfangs sehr groß ist und schließlich auf den Wert 0 abnimmt (s. Abb. 2). Die *Spannung* am Kondensator U_C steigt dabei (exponentiell) an (Abb. 3). Die in die Schaltung eingebauten Messgeräte zeigen dies deutlich.

Der *Ladestrom* I ist durch die angelegte konstante *Spannung* U und die momentane Spannung

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

am Kondensator bedingt.

$$\text{Es gilt: } I = \frac{U - U_C}{R}.$$

Ist das Aufladen beendet, dann gilt:

$U_C = U$, d. h. es fließt kein Ladestrom mehr und $I = 0$.

Für den Anfangswert der *Stromstärke* I bei $t = 0$ gilt:

$$I_0 = \frac{U}{R},$$

da U_C im Augenblick des Anlegens der Spannung U noch 0 ist.

Wir betrachten nun die **Energien** im Stromkreis:

Da die *Stromstärke* I alle Werte von I_0 bis 0 annimmt, greifen wir für die Leistungsberechnung einige Werte in diesem Intervall heraus. Zur einfachen Berechnung wählen wir $U_B = 10V$ und $R = 10\Omega$.

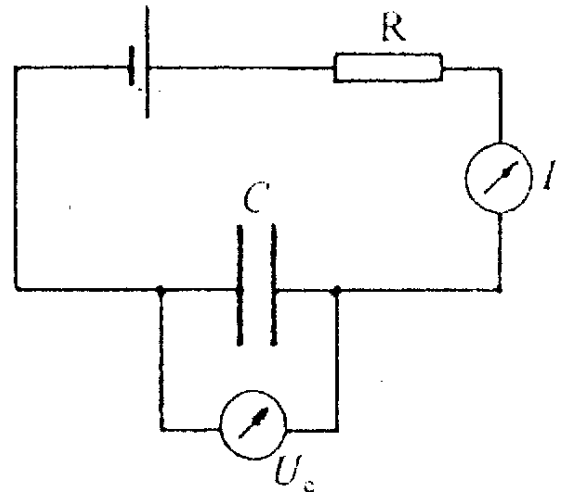


Abb. 1: Stromkreis mit Kondensator

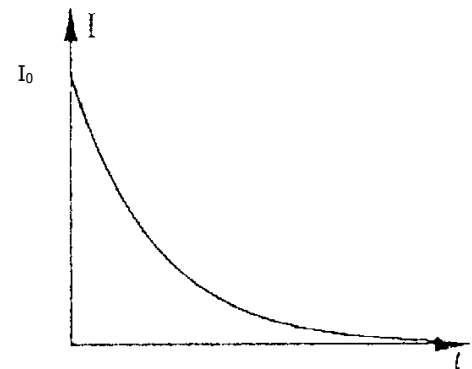


Abb. 2: Ladestrom in Abhängigkeit von t

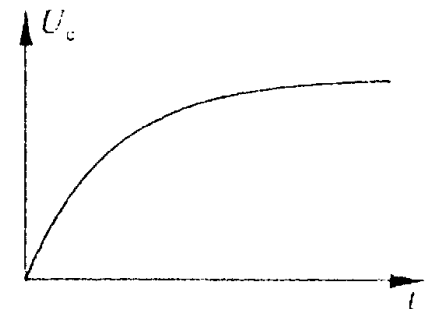


Abb. 3: Spannungsverlauf am Kondensator

| | I in A | 1,0 | 0,8 | 0,6 | 0,4 | 0,2 | 0 |
|-----------------------------|--------------------|-----|-----|-----|-----|-----|---|
| Leistung der Stromquelle | $U_B \cdot I$ in W | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 0 |
| Wärmeleistung im Widerstand | $I^2 \cdot R$ in W | 10 | 6,4 | 3,6 | 1,6 | 0,4 | 0 |

Es tritt eine Differenz zwischen den beiden Leistungen auf.

Diese Differenz dient zum Aufbau einer *Energie*, die im *elektrischen Feld* des Kondensators gespeichert ist.

☞ **In einem elektrischen Feld ist Energie gespeichert.**

B) Energie des geladenen Kondensators

Mögliche Anwendung: Zünden eines Blitzlichts durch Entladen eines Kondensators - Bereitstellen von elektrischer Energie, die zum Blitzen benötigt wird.

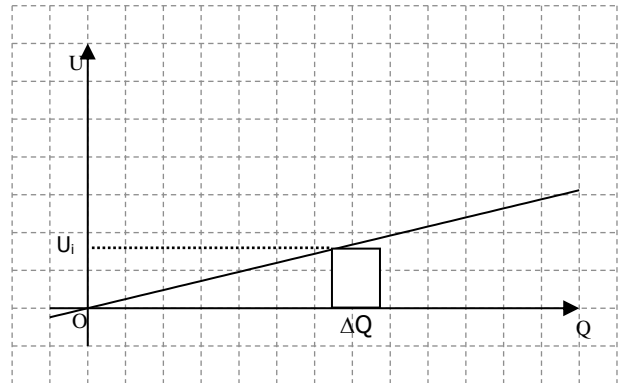
Wir wissen:

1. Am Kondensator gilt: $Q \sim C$ bzw. $Q = C \cdot U$ (s. AB „Kondensator (I)“),

2. Einheitenbetrachtung: $[E_{el}] = 1J = 1Ws = 1V \cdot A \cdot s$

$$= 1C \cdot V$$

→ Folgerung: $E \sim Q \cdot U$



Aufgabe 1

- Welche nahe liegende Entsprechung hat die Energie im Q-U-Diagramm?
- Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Fläche unter der Geraden im $[0; Q]$ an!

👉 So kann man sich das vereinfacht vorstellen und mittels der Integralrechnung exakt begründen:

Anlegen einer Spannung U_0 am Kondensator:

Schrittweise werden sehr kleine Ladungen der Größe dQ auf die Platten gebracht, weshalb sich die Spannung sukzessive erhöht. Vereinfacht bedeutet es außerdem, dass der Transport der jeweils nächsten kleinen Ladung dQ etwas mehr Energie benötigt. (Wieso eigentlich?)

Die jeweils aufzuwendende Energie beträgt somit:

$$dE = U_i \cdot dQ,$$

wobei U_i wegen $U = Q/C$ von der jeweils

vorhandenen Ladung Q abhängt.

$$dE = \frac{1}{C} \cdot Q \, dQ$$

Summiert man nun alle Energiebeträge auf,

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{C} \int_0^{Q_{\text{ges}}} Q \, dQ$$

(was einer Integration über alle Ladungen entspricht), folgt:

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{ges}}^2}{C}$$

Mit der Beziehung $Q = C \cdot U$ folgen die äquivalente Formeln! (Ergänzen Sie!)

Im mit der Spannung U aufgeladenen Kondensator der Kapazität C ist die Energie

$E_{el} =$ gespeichert.

Aufgabe 2

Das Blitzlicht einer Kamera wird durch Entladen eines Kondensators der Kapazität $C = 2 \text{ mF}$ für $0,18 \text{ ms}$ gezündet. Als Spannungsquelle dienen vier in Reihe geschaltete Batterien, deren Gesamtspannung von 6 V über einen Wechselrichter-Transformator-Gleichrichter auf ca. 500 V Ladespannung erhöht wird.

- Ermitteln Sie die mittlere Leistung, die der Kondensator nach vollständiger Aufladung abgibt!
- Berechnen Sie die mittlere Stromstärke, die während des Zündvorgangs des Blitzlichts fließt!

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Größe der Plattenfläche A , die ein mit Luft gefüllter Plattenkondensator ($d = 1,5 \text{ mm}$) bei $U = 230 \text{ V}$ besitzen müsste, um die gleiche Energie zu speichern wie eine Autobatterie ($12 \text{ V}, 88 \text{ Ah}$).

Aufgabe 4

Die Energie des elektrischen Feldes verdoppelt sich, wenn man den Kondensator von der Spannungsquelle trennt und seinen Plattenabstand verdoppelt. Erklären Sie, woher die zusätzliche Energie stammt!

Quellen: Kuhn Physik 2; Physik Oberstufe (Cornelsen); Metzler S. 201f.

Äquivalente Herleitung der Energieformel (über Betrachtung einer Entladung)

Mit einem Kondensator großer Kapazität ($C = 10^4 \mu\text{F}$) können wir die gespeicherte Energie gut nachweisen, indem wir ihn z. B. über ein Glühlämpchen oder einen kleinen Elektromotor, entladen.

Verbindet man einen geladenen Kondensator (Kapazität C , Spannung U_C) mit einem Widerstand R , so fließt im Augenblick der Verbindung der größte Strom

$$I_0 = \frac{U_C}{R}.$$

Der Strom I nimmt dann bis zur vollständigen Entladung des Kondensators (exponentiell) auf 0 ab.

Für die elektrische Energie E_{el} des Kondensators gilt:

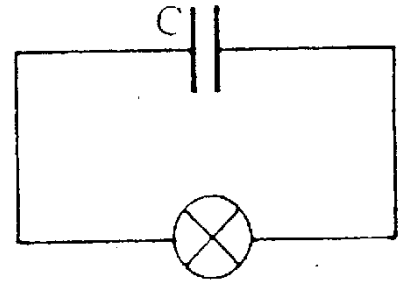
$$dE_{\text{el}} = U_C \cdot I \cdot dt = U_C \cdot \frac{dQ}{dt} \cdot dt$$

oder

$$dE_{\text{el}} = \frac{Q}{C} \cdot dQ. \quad (1)$$

Betrachtet wir E als Funktion in Abhängigkeit von Q : dann zeigt (1), dass die Ableitung $E' = \frac{dE}{dQ}$ gerade $\frac{Q}{C}$ ist. Somit muss für E gelten

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$



$$\begin{aligned} E_{\text{el}} &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \\ &= \frac{1}{2} Q U_C \\ &= \frac{1}{2} C U_C^2 \end{aligned}$$

was man durch Ableitung überprüfen kann.

C) Übungen zum Vertiefen

Aufgabe 5

Ein luftgefüllter Plattenkondensator hat die Plattenfläche $A = 1,0 \text{ dm}^2$ und den Plattenabstand $d = 1,0 \text{ cm}$. Er wird an die Spannung $U = 220 \text{ V}$ angeschlossen.

- Berechnen Sie den Energieinhalt des Kondensators.
- Wie ändert sich der Energieinhalt des Kondensators, wenn
 - ein Dielektrikum der Dicke d und der Fläche A mit $\epsilon_r = 2,0$ eingeschoben wird (Kondensator bleibt mit der Stromquelle verbunden).
 - die Spannung verdoppelt wird,
 - der Plattenabstand bei abgetrennter Stromquelle verdoppelt wird?

Aufgabe 6

Der mittlere Bedarf eines Dreipersonenhaushalts an elektrischer Energie sei 25 kWh pro Tag.

Wie groß müsste die Fläche eines auf 220 V aufgeladenen Plattenkondensators sein ($d = 1,0 \text{ mm}$, $\epsilon_r = 7$), damit er den täglichen Energiebedarf decken könnte?

Aufgabe 7

Zur Erzeugung hoher Ströme und damit starker Magnetfelder soll in einer Parallelschaltung von Kondensatoren bei der Spannung $3,0 \text{ kV}$ eine Energie von 100 kJ gespeichert werden.

- Welche Kapazität muss die Kondensatorbatterie haben?
- Welche mittlere Stromstärke herrscht bei der Entladung, wenn sich diese in $0,10 \text{ ms}$ vollzieht?

Aufgabe 8

Ein Kondensator mit quadratischen Platten der Kantenlänge $a = 20\text{cm}$ und dem Plattenabstand $d = 2,0\text{mm}$ ist mit den Polen einer Spannungsquelle ($U = 30\text{V}$) verbunden.

- Welche elektrische Ladung sitzt auf einer Platte?
- Wie viel Ladung fließt von der Stromquelle zum Kondensator nach, wenn zwischen die Platten ein Dielektrikum ($A=400\text{cm}^2$; $d = 2,0\text{mm}$; $\epsilon_r = 4$) geschoben wird, so dass sich keine Luft mehr im Kondensator befindet?
- Wie viel Ladung fließt vom ursprünglich luftgefüllten Kondensator, wenn die Platten auf $d = 6,0\text{mm}$ auseinander gezogen werden?

Aufgabe 9

- Ein Kondensator ist an eine Spannungsquelle angeschlossen.
Welche der elektrischen Größen Q , U , E und E_{el} ändern sich, wenn der Plattenabstand des Kondensators vergrößert wird? Begründen Sie!
- Ein geladener Plattenkondensator wird von der Spannungsquelle getrennt.
Welche der elektrischen Größen Q , U , E und E_{el} ändern sich, wenn der Plattenabstand des Kondensators vergrößert wird? Begründen Sie!

Mögliche Lösungen zur Selbstkontrolle:

$5,3 \cdot 10^{-9}\text{As}$; $15,9 \cdot 10^{-9}\text{As}$; $3,5 \cdot 10^{-9}\text{As}$; $0,6 \cdot 10^{11}\text{m}^2$; $22,2\text{mF}$; $6,7 \cdot 10^5\text{A}$; $2,14 \cdot 10^{-7}\text{J}$;