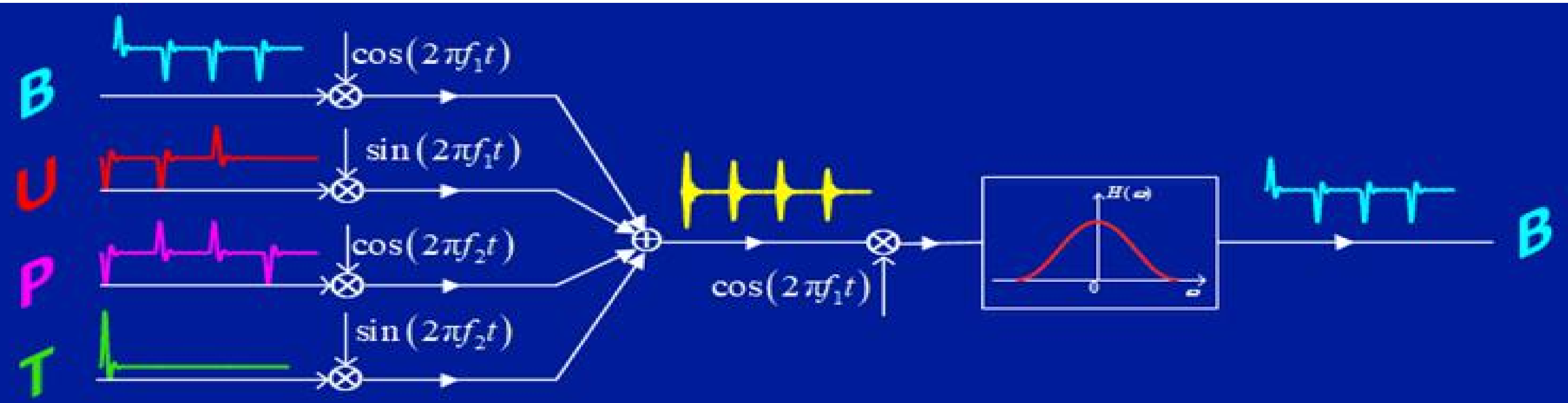
北京郵電大學
Beijing University of Posts and Telecommunications

第三章 连续时间信号的频域分析

3.4 连续周期信号的傅里叶级数



主要内容

- 三角函数形式傅里叶级数
- 指数函数形式的傅里叶级数
- 函数的对称性与傅里叶级数系数的关系
- 帕塞瓦尔定理
- 傅里叶有限级数与最小方均误差

▶ 1. 三角函数形式傅里叶级数

周期信号$f(t)$　基波周期T_0　基波角频率$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T_0}$

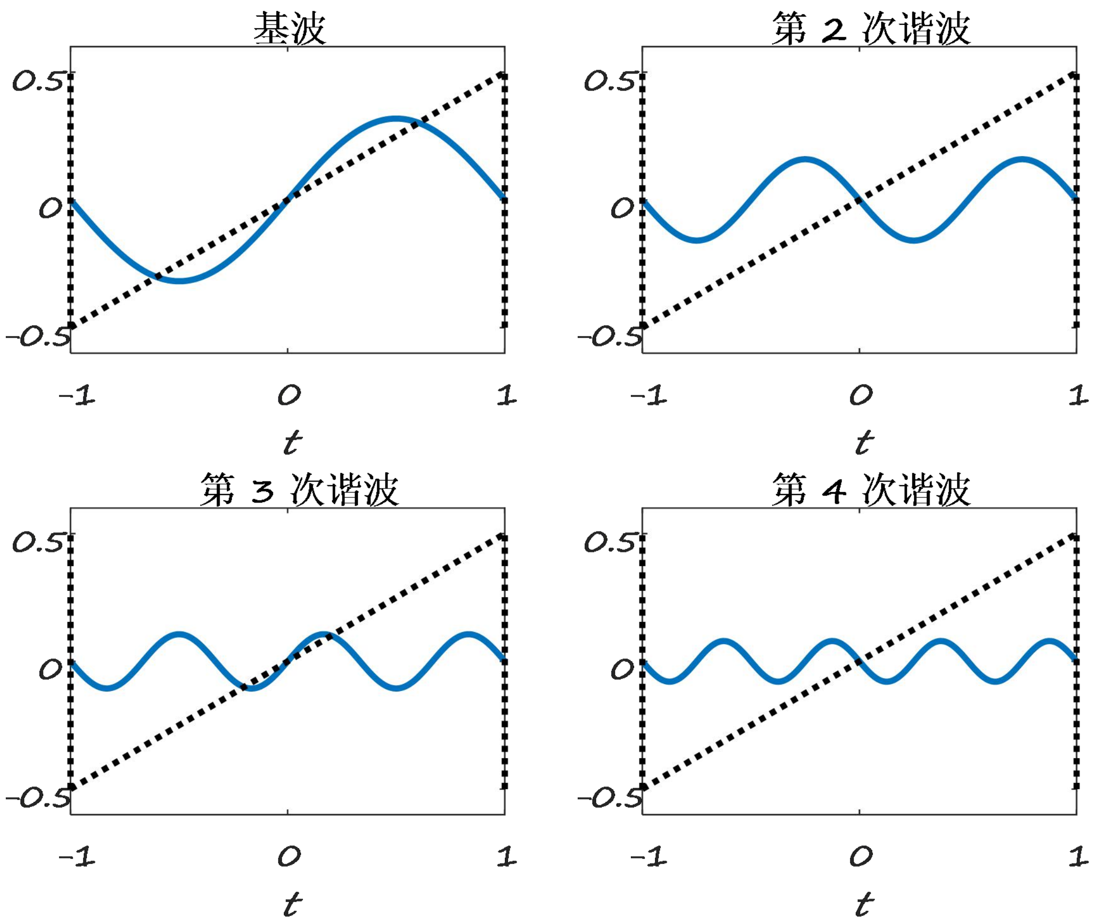
$f(t)$可分解为成谐波关系的三角函数的组合

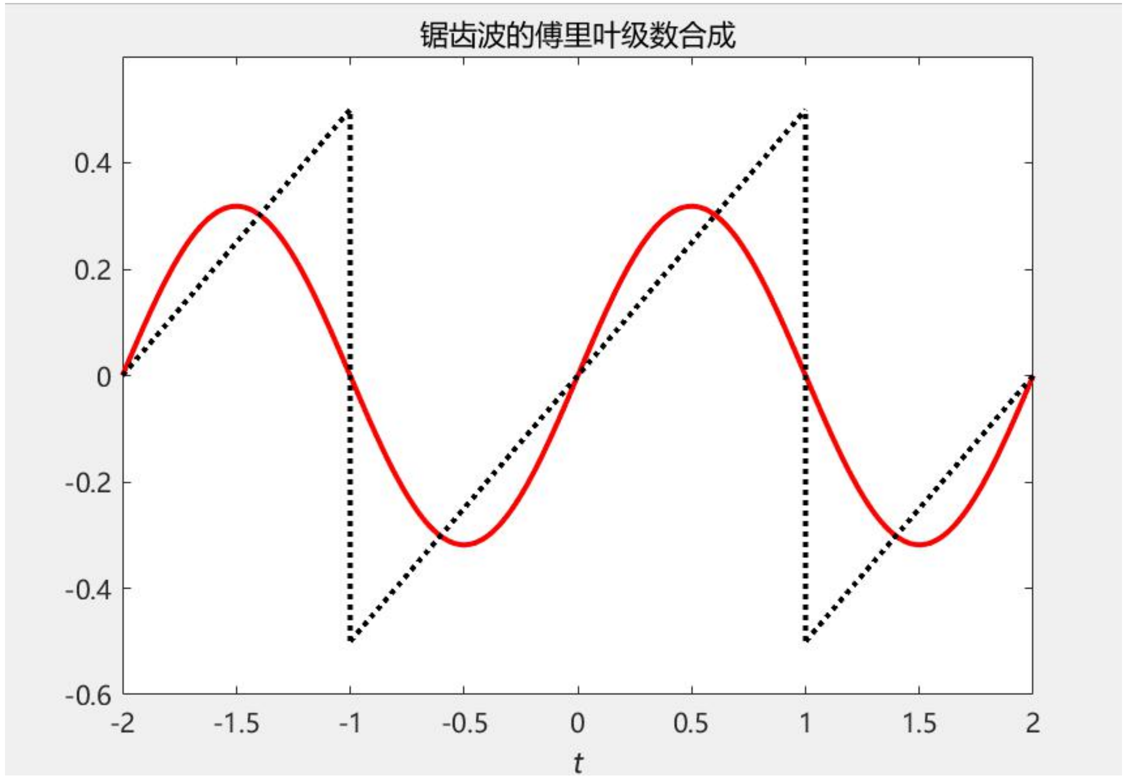
$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(n\omega_0 t\right)+b_n\sin\left(n\omega_0 t\right)\right]$$

$\{\cos(n\omega_0 t),\sin(n\omega_0 t)\}$，其中$n$=0, 1, 2,⋯是一个完备正交函数集

$f(t)$需要满足狄利克雷条件

(1) 成谐波关系（harmonically related）





(2) 完备正交函数集

$\{\cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t)\}$，$n$=0, 1, 2,⋯是正交函数集。

$$\int_0^{T_0} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{1}{2}T_0 & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^{T_0} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{1}{2}T_0 & n = m \end{cases}$$

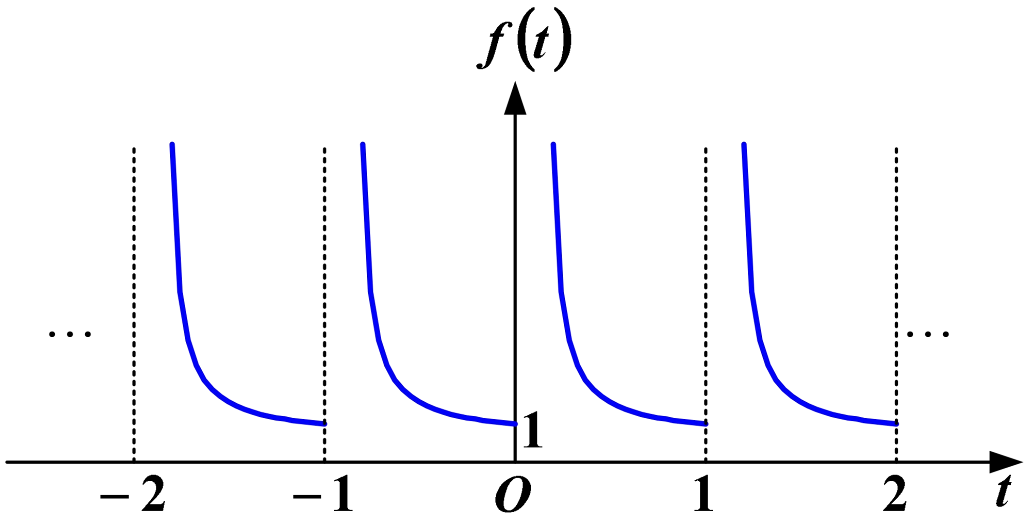
$$\int_0^{T_0} \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0$$

▶ (3) 狄利克雷（Dirichlet）条件

条件1： 在一周期内，信号**绝对可积**。

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t<\infty \qquad （T_0\text{为周期}）$$

周期为1的信号在区间$(0<t\le 1)$可表示为$f(t)=\dfrac{1}{t}$

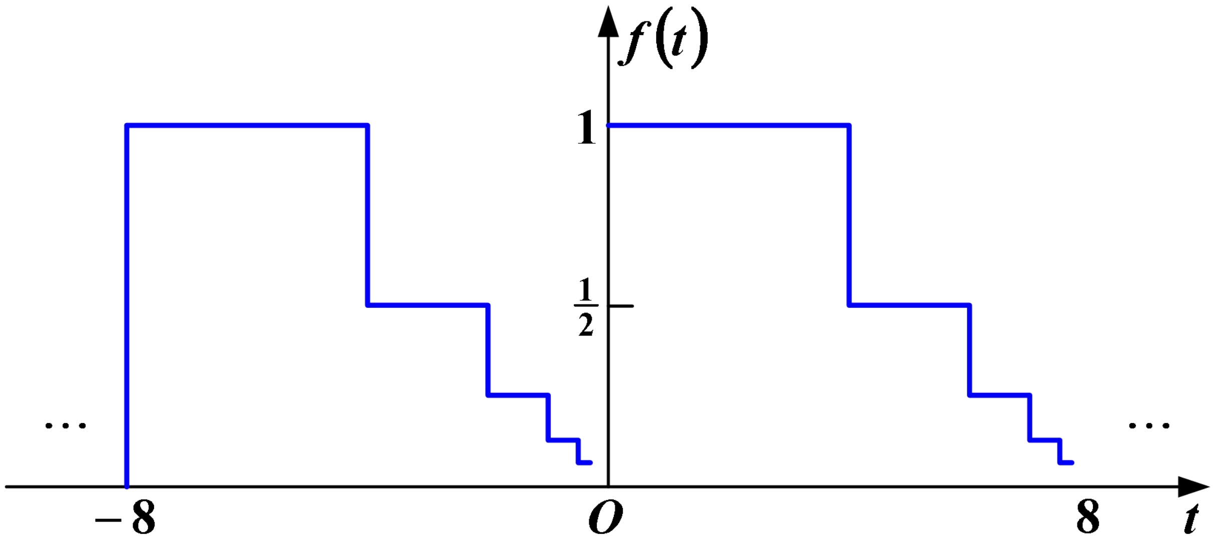


$f(t)$不满足绝对可积条件。

(3) 狄利克雷（Dirichlet）条件

条件2：在一周期内，如果有间断点存在，则间断点的数目应是有限个。

不满足条件2的例子：这个信号的周期为8，后一个阶梯的高度和宽度是前一个阶梯的一半。可见在一个周期内它的面积不会超过8，但不连续点的数目是无穷多个。

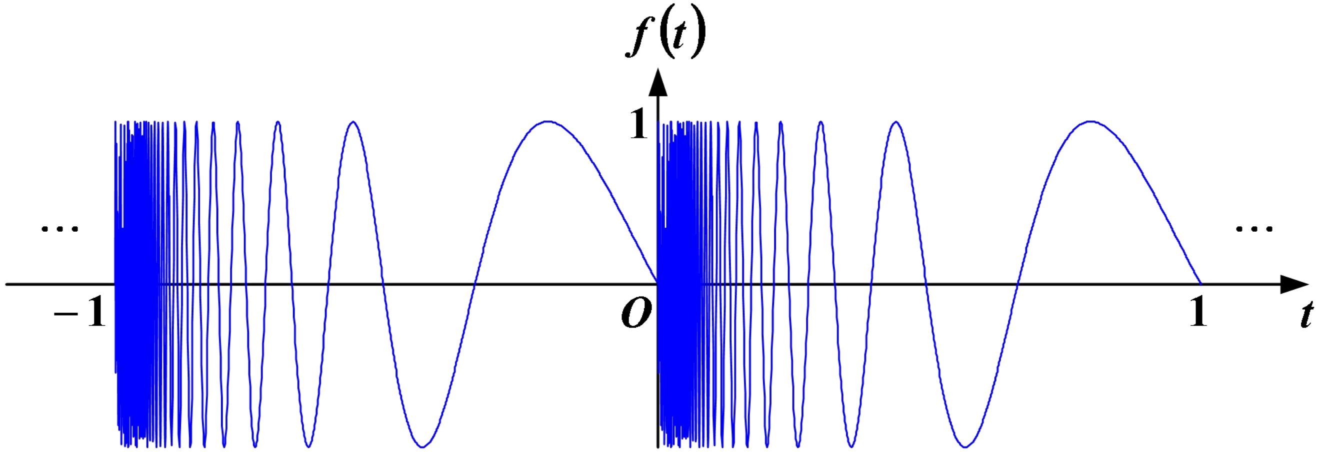


(3) 狄利克雷（Dirichlet）条件

条件3：在一周期内，极大值和极小值的数目应是有限个。

不满足条件3的一个函数是

$$f(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{t}\right),(0<t\leq 1)$$



对此函数，其周期为1，有 $\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t<1$

(4) 如何确定展开系数？

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(n\omega_0 t\right)+b_n\sin\left(n\omega_0 t\right)\right]$$

复习：实正交函数分解

$$f\left(t\right)=c_1g_1\left(t\right)+c_2g_2\left(t\right)+\ldots+c_rg_r\left(t\right)+\cdots$$

系数

$$c_r=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f(t)g_r(t)\,\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}g_r^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

(4)如何确定展开系数？

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(n\omega_0 t\right)+b_n\sin\left(n\omega_0 t\right)\right]$$

$$a_0=\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0}f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n=\frac{\int_{t_0}^{t_0+T_0}f(t)\cos\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t}{\int_{t_0}^{t_0+T_0}\cos^2\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t}=\frac{\int_{t_0}^{t_0+T_0}f(t)\cos\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t}{\int_{t_0}^{t_0+T_0}\frac{1+\cos\left(2n\omega_0 t\right)}{2}\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0}f(t)\cos\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t$$

类似可得 $b_n=\frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0}f(t)\sin\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t$

(5) 谐波形式（同频率合并）

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(n\omega_0 t\right)+b_n\sin\left(n\omega_0 t\right)\right]$$

同频率项合并，均写为余弦函数形式：

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\left(n\omega_0 t+\varphi_n\right)$$

$n=0,\ \ c_0=a_0$：直流,平均值

$n=1$　基波 (fundamental signal)

有的文献上也称为 1 次谐波

n　n次谐波 (harmonic signal)

(5) 谐波形式（同频率合并）

$$a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)$$

$$=c_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$=c_n\cos(n\omega_0 t)\cos(\varphi_n)-c_n\sin(n\omega_0 t)\sin(\varphi_n)$$

比较系数，得$a_n=c_n\cos(\varphi_n)$　　$b_n=-c_n\sin(\varphi_n)$

参数关系：

$$c_n^2=a_n^2+b_n^2 \qquad \tan(\varphi_n)=-\frac{b_n}{a_n}$$

$$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\quad (c_n\geq 0) \qquad \varphi_n=\arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)?$$

例1

已知$f_1(t)=\sin\omega_0 t$，$f_2(t)=\sqrt{3}\cos\omega_0 t$，合并两个同频率项得到$f(t)$=$f_1(t)$+$f_2(t)$。

由题目得$a_1=\sqrt{3}, b_1=1$，则合并后c_1（≥ 0）

$$c_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2}=2$$

得到合并后信号的相位φ_1

$$\varphi_1=-\arctan\frac{b_1}{a_1}=-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{6}\quad(\mathrm{rad/s})$$

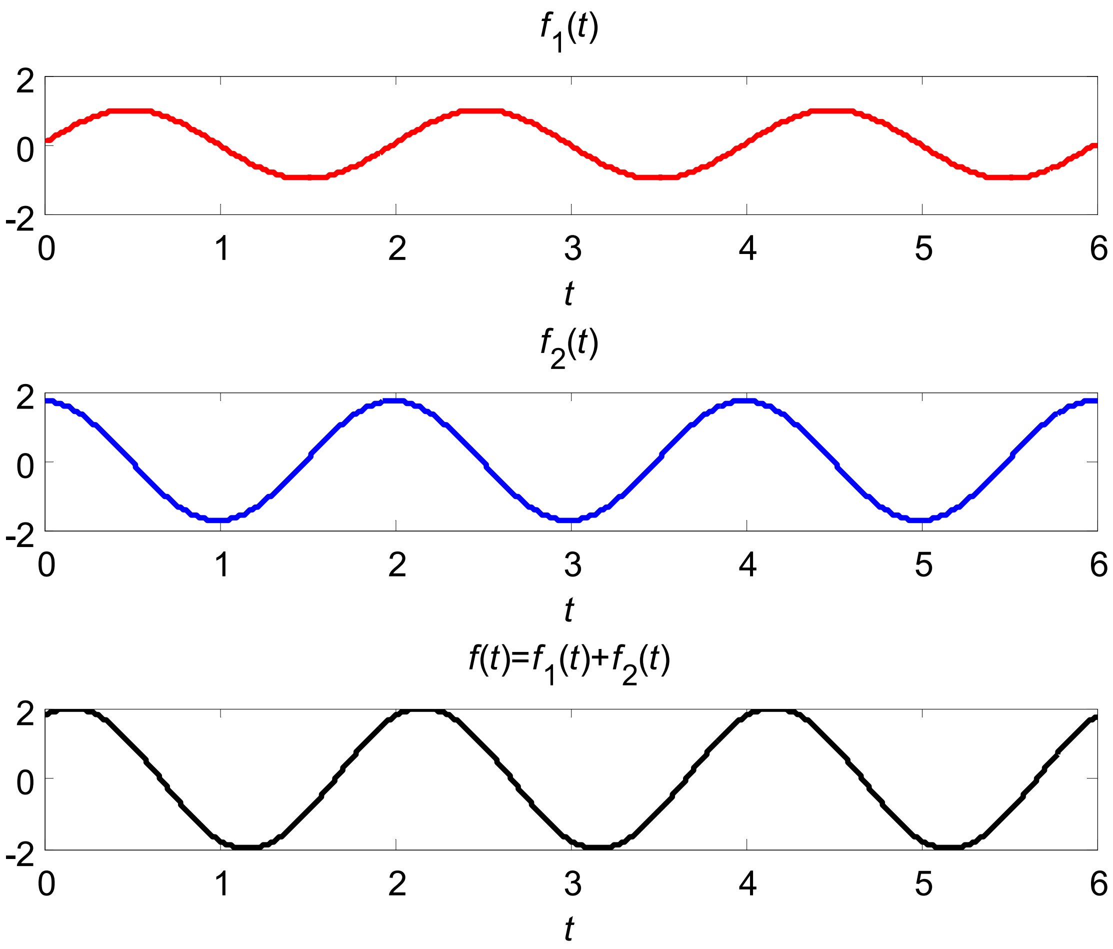
$$f(t)=2\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{6}\right)$$

例1

$$f_1(t) = \sin\omega_0 t$$

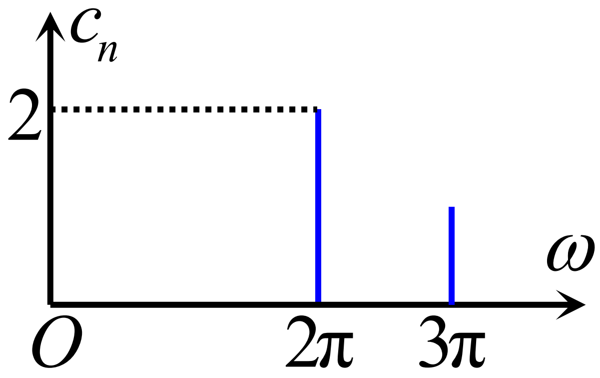
$$f_2(t) = \sqrt{3}\cos\omega_0 t$$

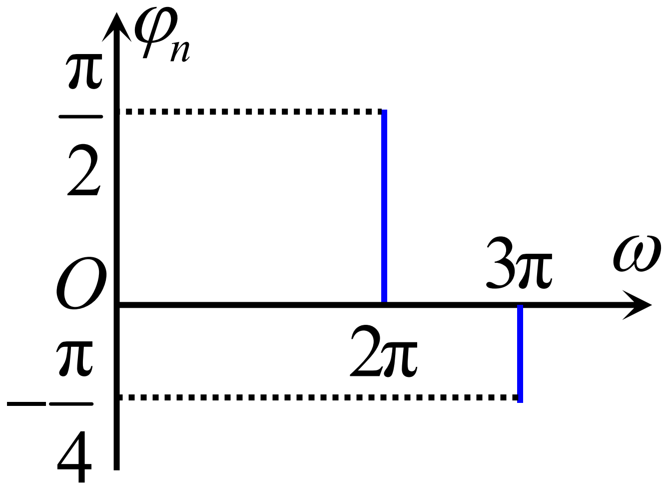
$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$



▶ (6) 频谱图

$$f(t)=2\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(3\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$$





$c_n \sim \omega$ 关系曲线称为**幅度频谱图**

$\varphi_n \sim \omega$ 关系曲线称为**相位频谱图**

学好信号与系统
低通高通路路通

北京邮电大学信号与系统

智慧教学研究组