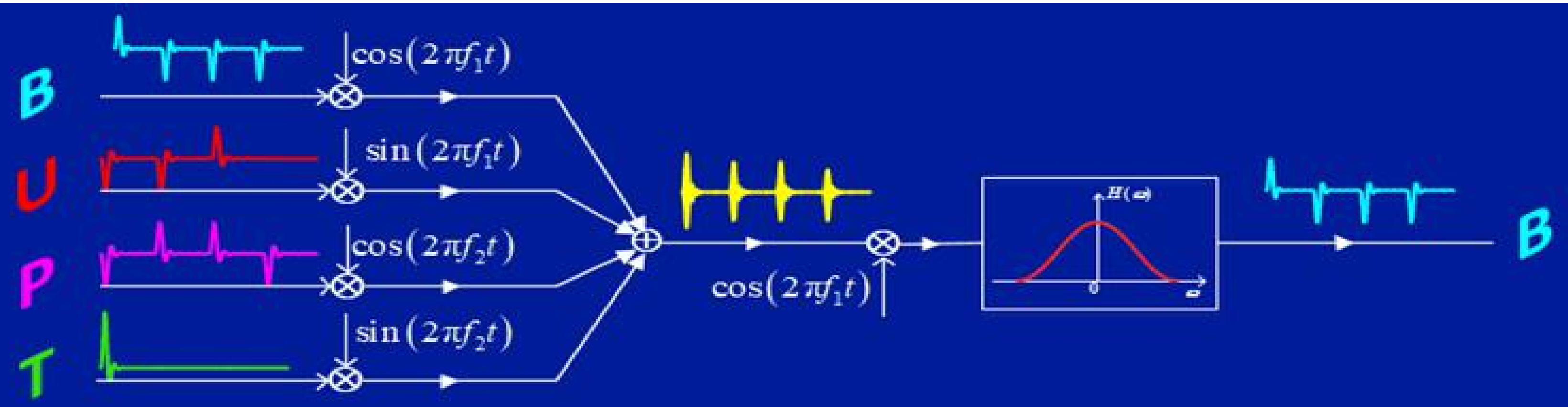
北京邮电大学
Beijing University of Posts and Telecommunications

第三章 连续时间信号的频域分析

3.3 完备正交函数集



主要内容

- 实正交函数集
- 复数正交函数集
- 完备正交函数集
- 帕塞瓦尔定理

1. 实正交函数集

$\{g_r(t)\}$，r=1, 2, 3$\cdots n$为正交函数集。

$g_1(t), g_2(t) \cdots g_n(t)$相互正交的实函数。

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) \cdot g_j(t) \mathrm{d} t = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i, & i = j \end{cases} \qquad (0 \leq i, j \leq n)$$

正交函数集规定：所有函数应两两正交。

▶ 1. 实正交函数集

任意实信号$f(t)$可表示为n维正交函数之和：

$$f(t) \approx c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_n g_n(t)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t) \qquad (t_1 < t < t_2)$$

$$c_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) \mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) \mathrm{d}t} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) \mathrm{d}t}{K_r}$$

$c_1, c_2, \cdots c_n$是相互独立的，互不影响，计算时先抽取哪一个都可以，非正交函数就无此特性。

例1：三角函数集是正交函数集

证明三角函数集$\{\sin(n\omega_0 t),\cos(n\omega_0 t)\}, n=0,1,2\cdots$

在区间$(0,T_0), T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$是正交函数集。

证明：

$$\sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)$$

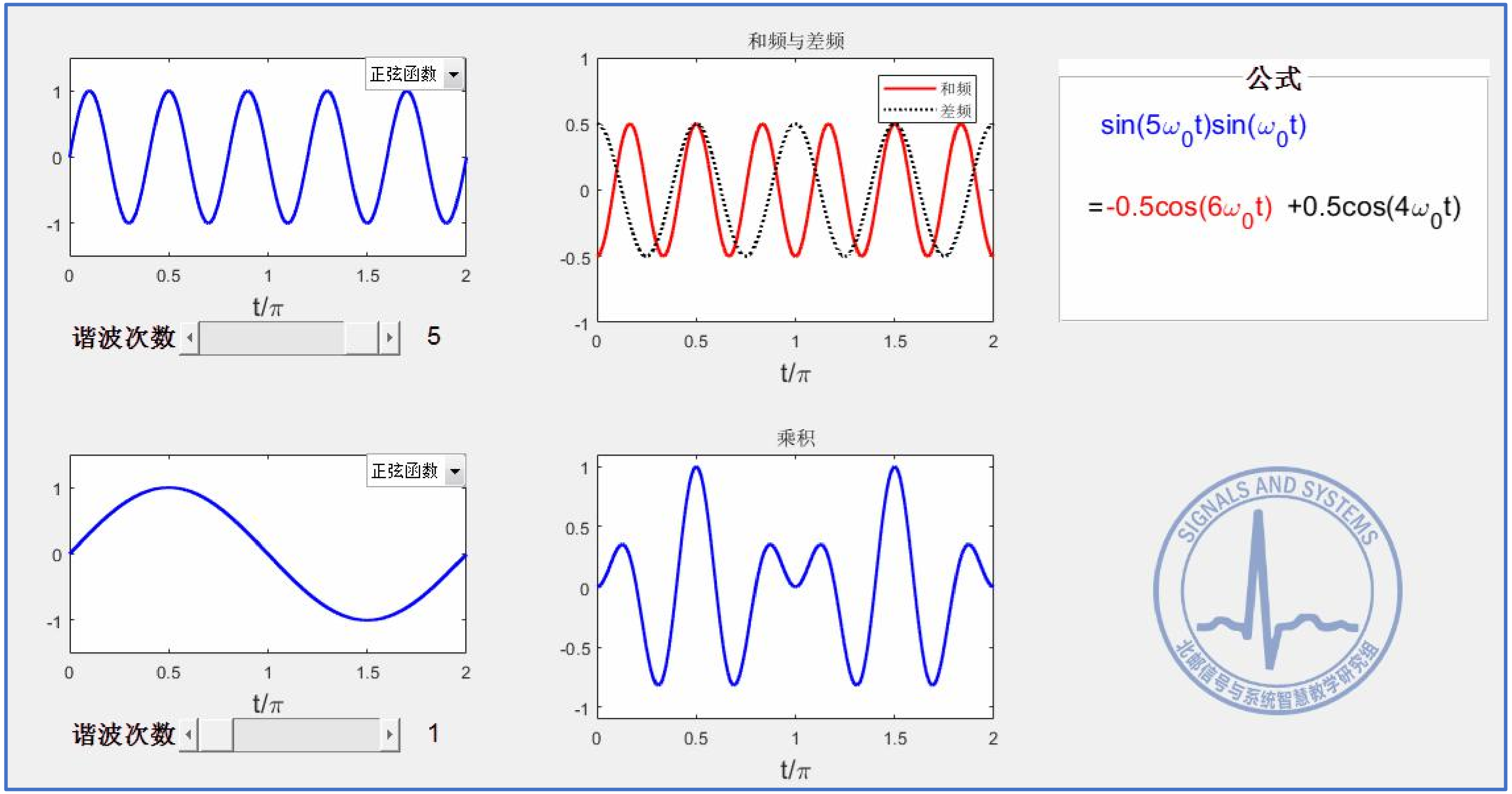
$$=\frac{1}{2}\left\{-\cos\left[(n+m)\omega_0 t\right]+\cos\left[(n-m)\omega_0 t\right]\right\}$$

和频项，在区间$(0,T_0)$有$n+m$个完整的正弦波

差频项，在区间$(0,T_0)$有$n-m$个完整的正弦波

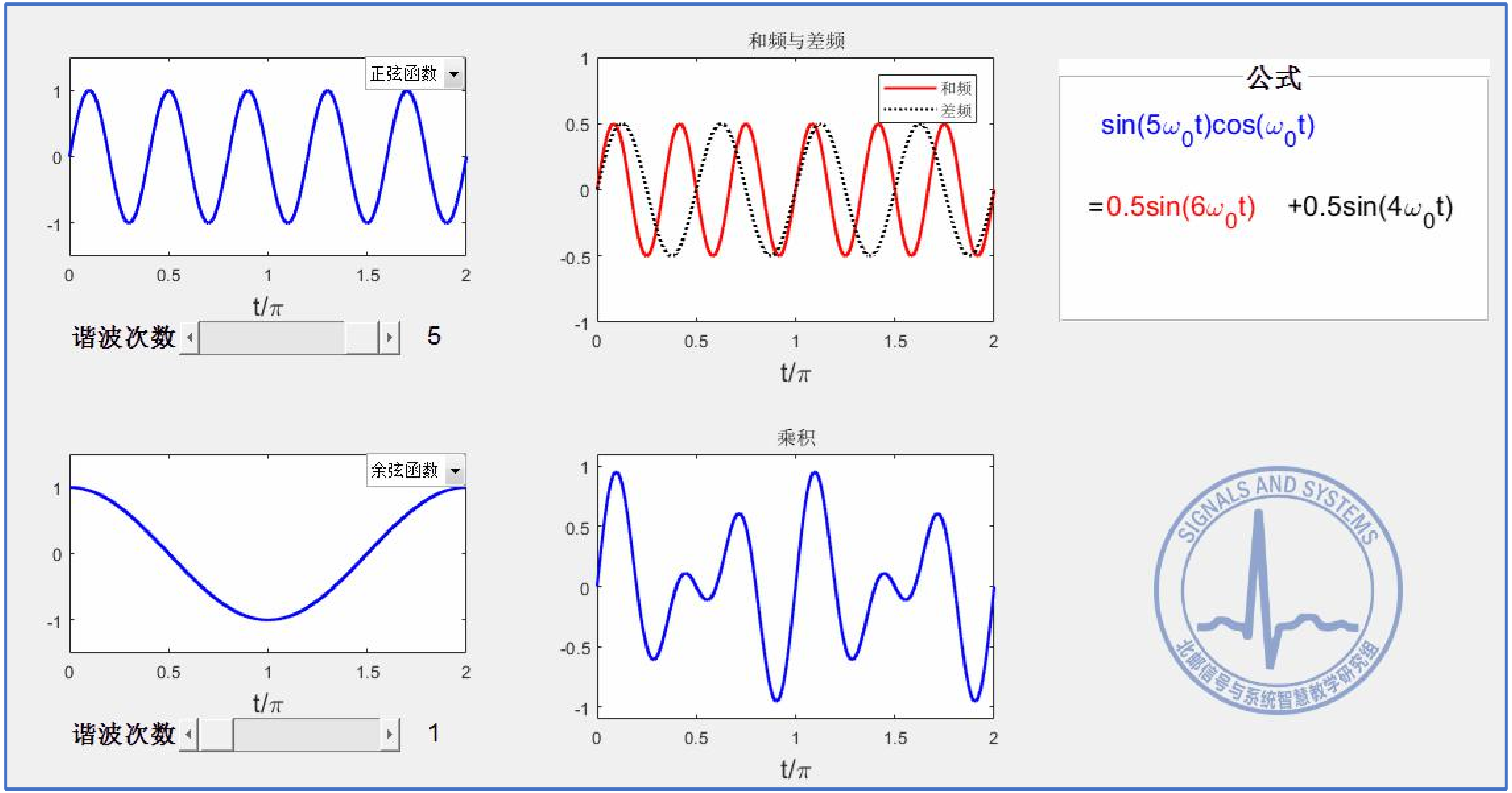
▶ 例1：三角函数集是正交函数集

$$\int_0^{T_0} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{1}{2}T_0 & n = m \end{cases}$$



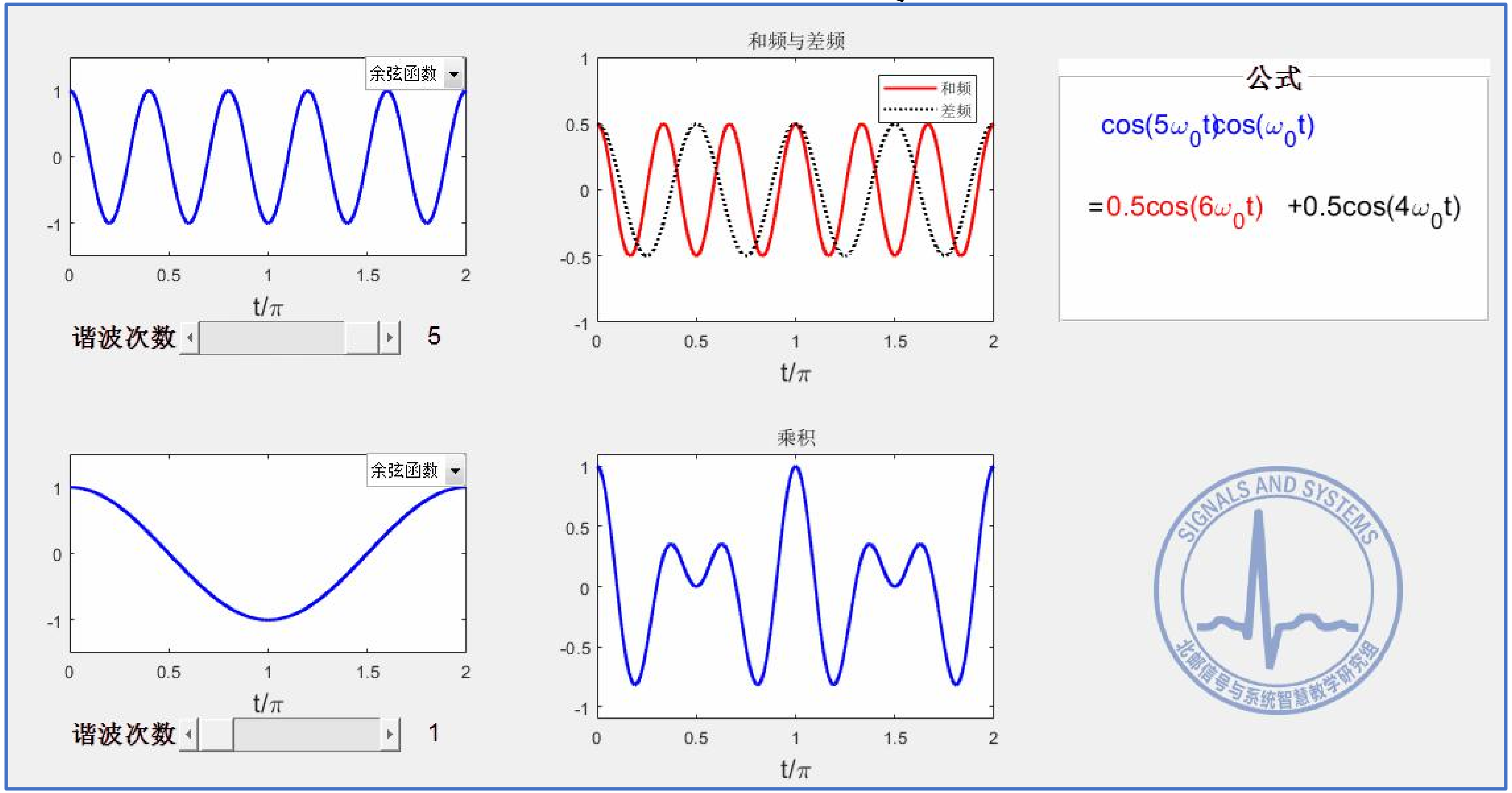
例1：三角函数集是正交函数集

$$\int_0^{T_0} \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0$$



例1：三角函数集是正交函数集

$$\int_0^{T_0} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{1}{2}T_0 & n = m \end{cases}$$



▶ 例1：三角函数集是正交函数集

$$\int_0^{T_0} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{1}{2}T_0 & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^{T_0} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{1}{2}T_0 & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^{T_0} \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0$$

满足正交函数的条件，所以该函数集是正交函数集。

2. 复数正交函数集

若在区间(t_1,t_2)内，复变函数集$\{g_r(t)\}(r=1,2,\cdots,n)$满足关系

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t)g_j^*(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & i\neq j\\ K_i & i=j\end{cases}$$

则此复变函数集为**正交函数集**。

$f(t)\approx\sum_{r=1}^{n}c_r g_r(t)$，其中

$$c_r=\frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_r^*(t)\,\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} g_r(t)g_r^*(t)\,\mathrm{d}t}$$

例2：虚指数函数集是正交函数集

证明指数函数集$\left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t} \right\}, n=0,\pm1,\pm2\cdots$在区间$(0,T_1)$，

$T_1=\dfrac{2\pi}{\omega_1}$是正交函数集。

证明：

令n,m为任意整数，$g_n(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}, g_m(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\omega_1 t}$，则

$$\int_0^{T_1} g_n(t) g_m^*(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{T_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\omega_1 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{T_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-m)\omega_1 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases} 0 & n\neq m \\ T_1 & n=m \end{cases}$$

满足正交函数的条件，所以该函数集是正交函数集。

▶ 3. 完备正交函数集

$$f(t) \approx \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$$

定义1：

当n增加时，$\overline{\varepsilon^2}$下降，若$n \to \infty$，则$\overline{\varepsilon^2} \to 0$，此时$g_1(t)$，$g_2(t) \cdots g_r(t) \cdots g_n(t)$为**完备**的正交函数集。

定义2：

如果存在函数$x(t)$，有$\int_{t_1}^{t_2} g_r(t) \cdot x(t) \mathrm{d}t = 0$，则$x(t)$必属于此正交函数集，原函数集$g_1(t), g_2(t) \cdots g_r(t) \cdots g_n(t)$不完备。

▶ 4. 帕塞瓦尔定理

$$f(t)=\sum_{r=1}^{\infty} c_r g_r(t)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\sum_{r=1}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2}|c_r g_r(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

信号的能量

各分量信号的能量

上式称为“帕塞瓦尔方程”

这一约束规律称为**帕塞瓦尔定理**：一个信号所含有的能量（功率）恒等于此信号在完备正交函数集中各分量能量（功率）之和。

4. 帕塞瓦尔定理

证明：

$$\int_{t_1}^{t_2}\left|f(t)\right|^2\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}f(t)f^*(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{r=1}^{\infty}c_rg_r(t)\right]\left[\sum_{r=1}^{\infty}c_rg_r(t)\right]^*\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2}\left|c_rg_r(t)\right|^2\mathrm{d}t$$

其他交叉项
积分为0

5. 小结

- 正交函数集
- 完备正交函数集
- 帕塞瓦尔定理

学好信号与系统
低通高通路路通

北京邮电大学信号与系统

智慧教学研究组