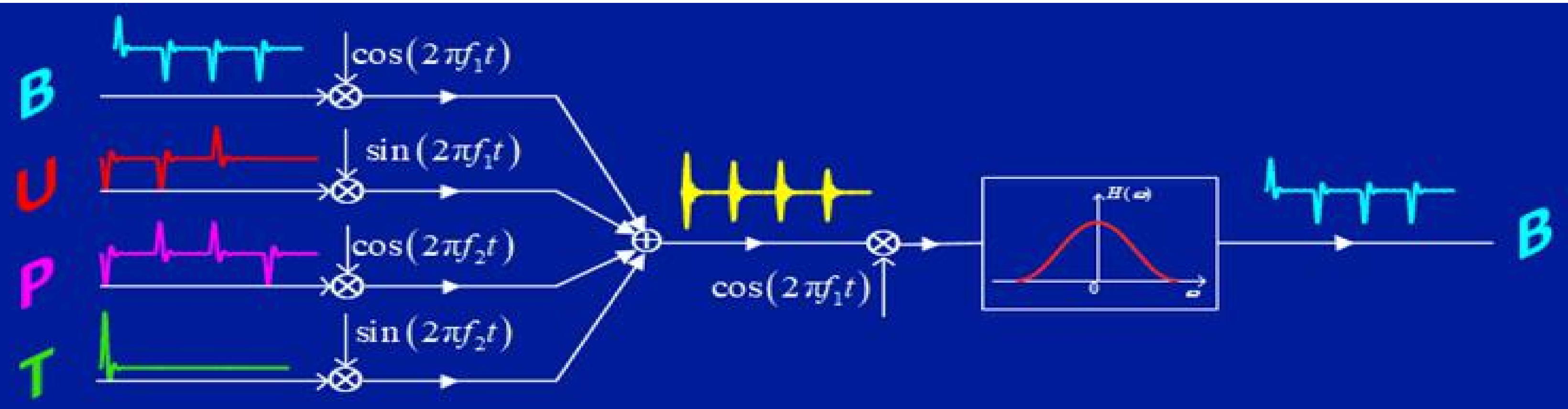
北京邮电大学
Beijing University of Posts and Telecommunications

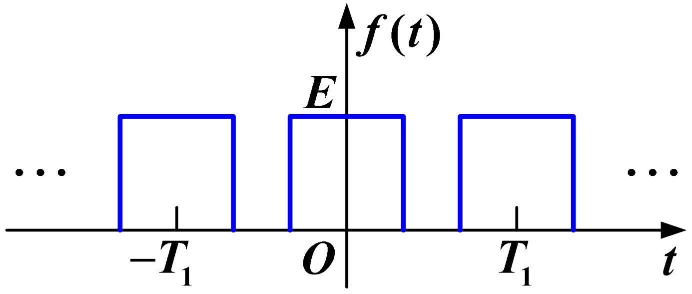
第三章 连续时间信号的频域分析

3.4 连续周期信号的傅里叶级数

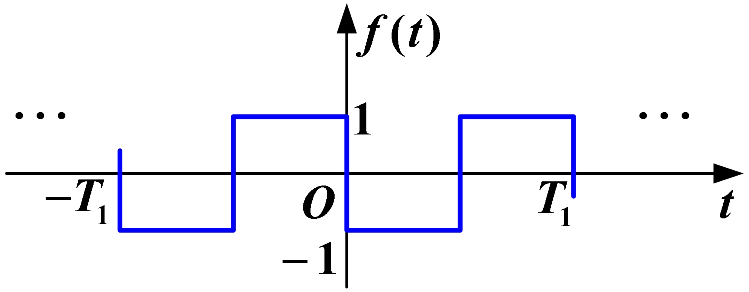


3. 函数的对称性与傅里叶级数系数的关系

整周期对称

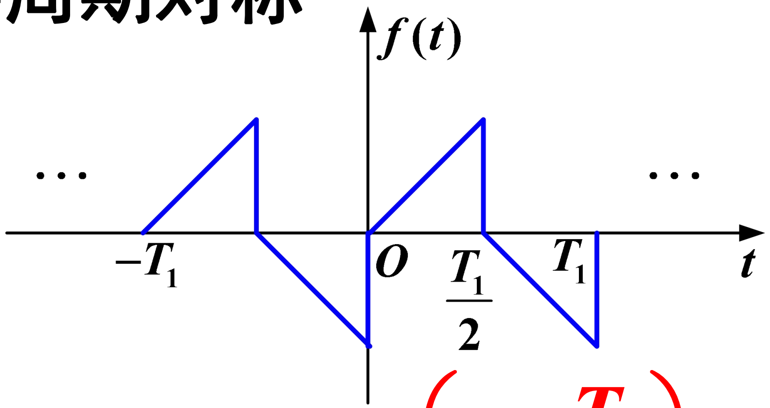


$$f(t)=f(-t)$$

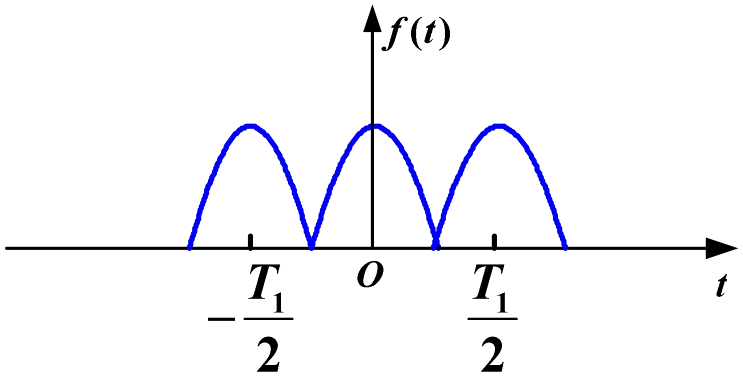


$$f(t)=-f(-t)$$

半周期对称



$$f(t)=-f\left(t\pm\frac{T_1}{2}\right)$$

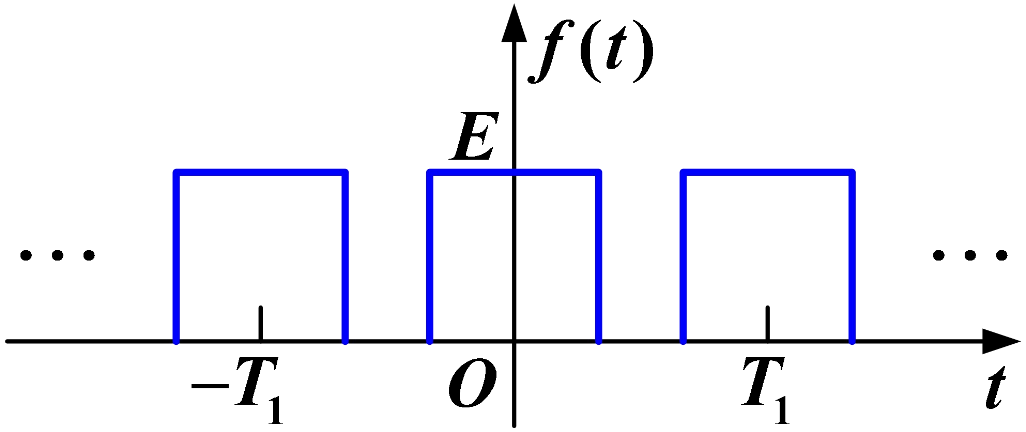


$$f(t)=f\left(t\pm\frac{T_1}{2}\right)$$

(1) 偶函数

信号波形相对于纵轴是对称的

$$f(t)=f(-t)$$

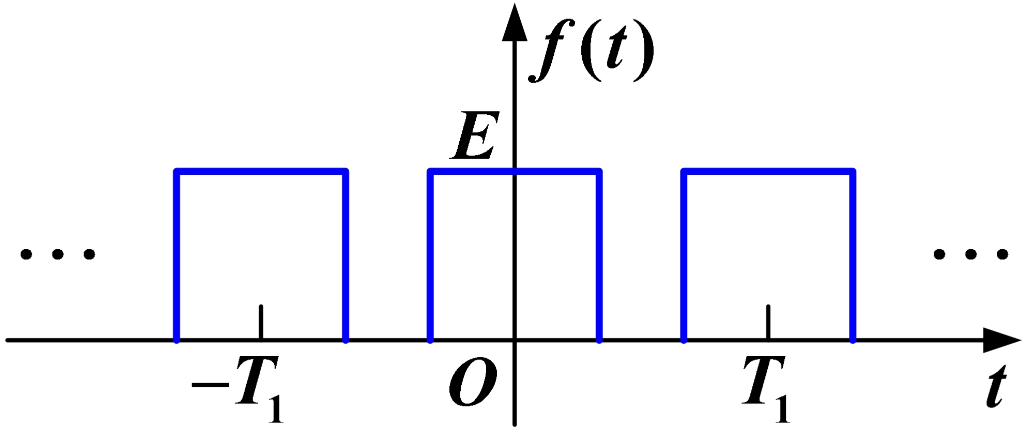


正弦函数是奇函数，所以偶函数没有奇函数的分量

$$b_n=0$$

$$a_n=\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t \neq 0$$

▶ (1) 偶函数



$$b_n = 0 \qquad a_n \neq 0$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left(a_n - \mathrm{j}b_n\right) = \frac{1}{2}a_n$$

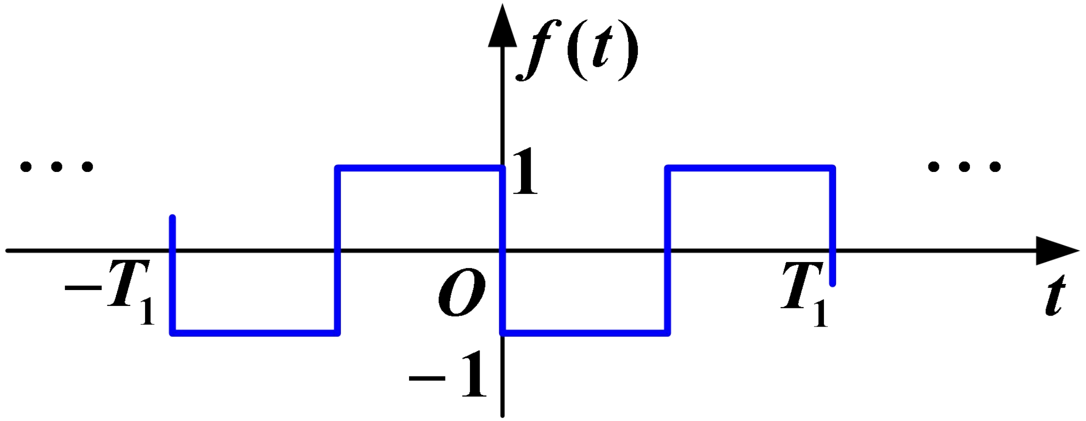
F_n为实函数

时域偶函数→频域实函数

(2) 奇函数

波形相对于纵轴反对称的：

$$f(t) = -f(-t)$$



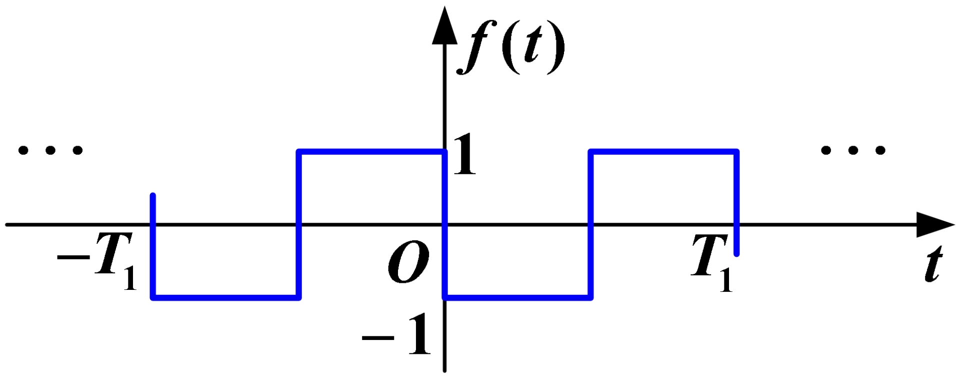
$$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t = 0$$ 没有余弦项

$$b_n = \frac{4}{T_1}\int_{0}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t \neq 0$$

(2) 奇函数

波形相对于纵轴是反对称的： $f(t)=-f(-t)$



$a_0=0 \qquad a_n=0 \qquad b_n\neq 0$

$$F_n=\frac{1}{2}\left(a_n-\mathrm{j}b_n\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{j}b_n$$

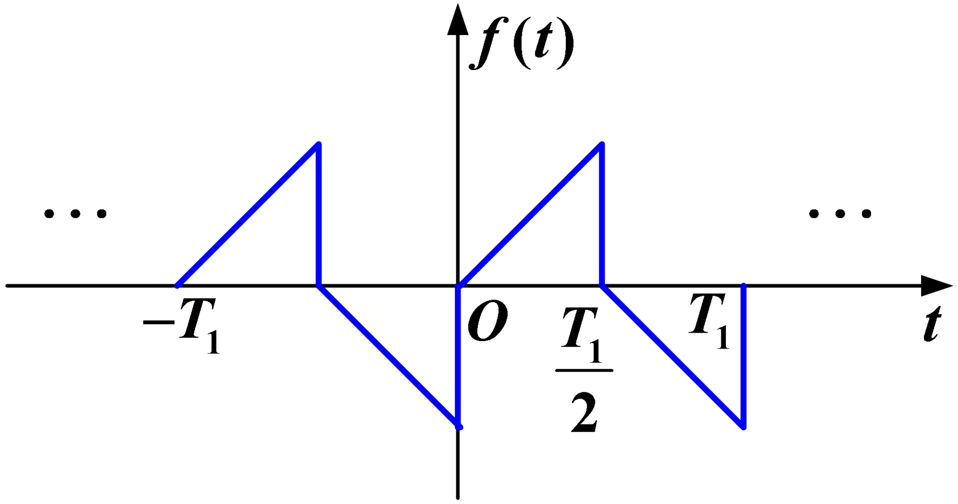
F_n**为虚函数**

时域奇函数→频域虚函数

(3) 奇谐函数

若波形沿时间轴平移半个周期并相对于该轴上下反转，此时波形并不发生变化：

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right)$$



$$a_0 = 0$$

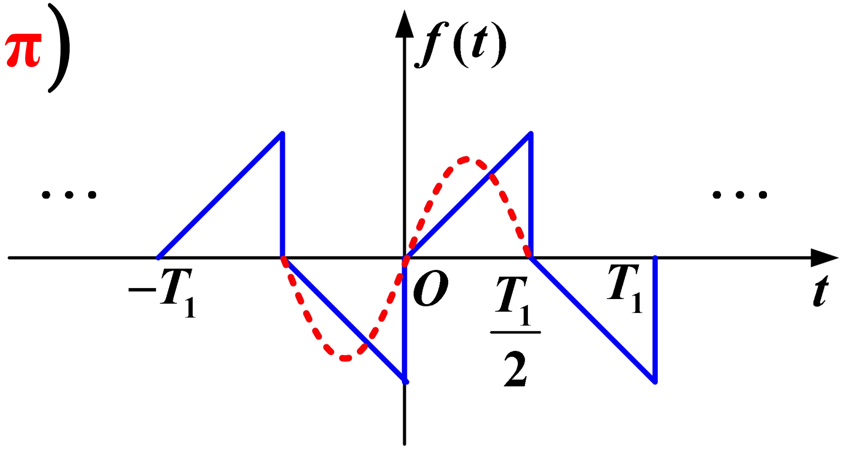
$n = 2,4,6\cdots$时 $\quad a_n = b_n = 0$

没有偶次谐波项

(3) 奇谐函数 以正弦项为例分析系数，余弦项求系数情况相同

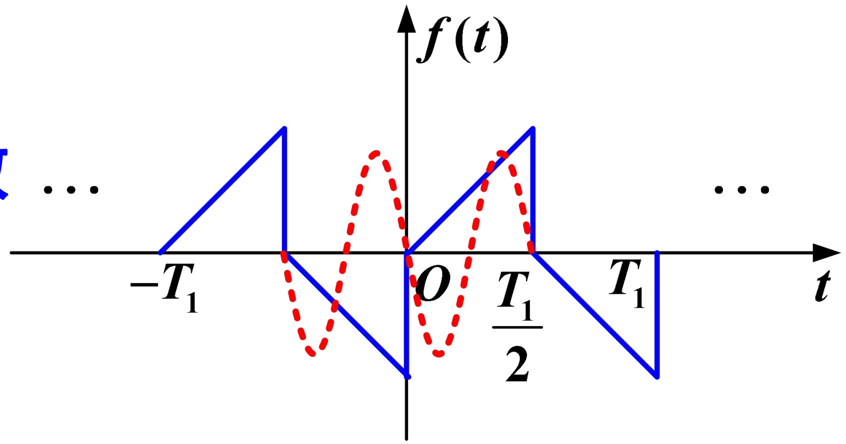
$$\sin\left[n\omega_1\left(t\pm\frac{T}{2}\right)\right]=\sin\left(n\omega_1\pm n\pi\right)$$

$$=\begin{cases}-\sin\left(n\omega_1 t\right) & n\text{为奇数}\\ \sin\left(n\omega_1 t\right) & n\text{为偶数}\end{cases}$$



$$f\left(t\pm\frac{T}{2}\right)\sin\left[n\omega_1\left(t\pm\frac{T}{2}\right)\right]$$

$$=\begin{cases}f\left(t\right)\sin\left(n\omega_1 t\right) & n\text{为奇数}\\ -f\left(t\right)\sin\left(n\omega_1 t\right) & n\text{为偶数}\end{cases}$$

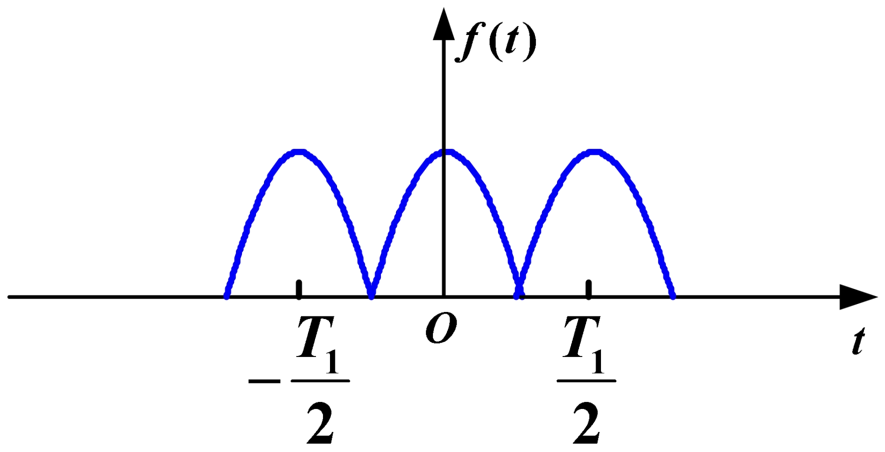


没有偶次谐波项

(4) 偶谐函数 (实际周期为标注周期的一半)

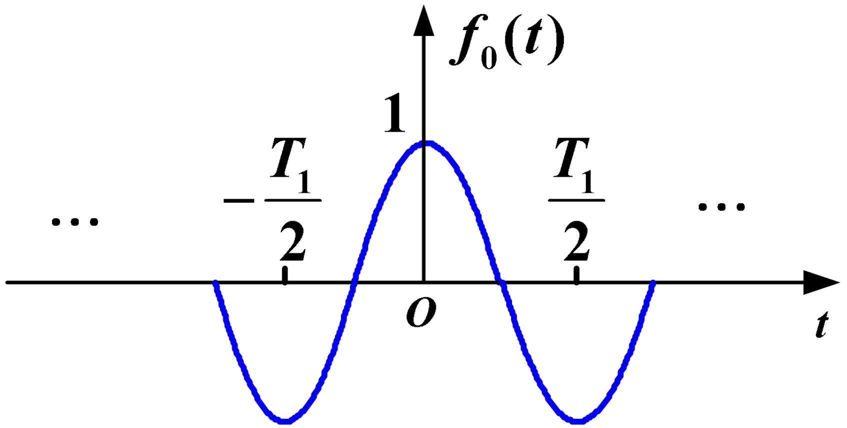
波形移动 $\pm\dfrac{T_1}{2}$ 与原波形重合，称为偶谐函数。

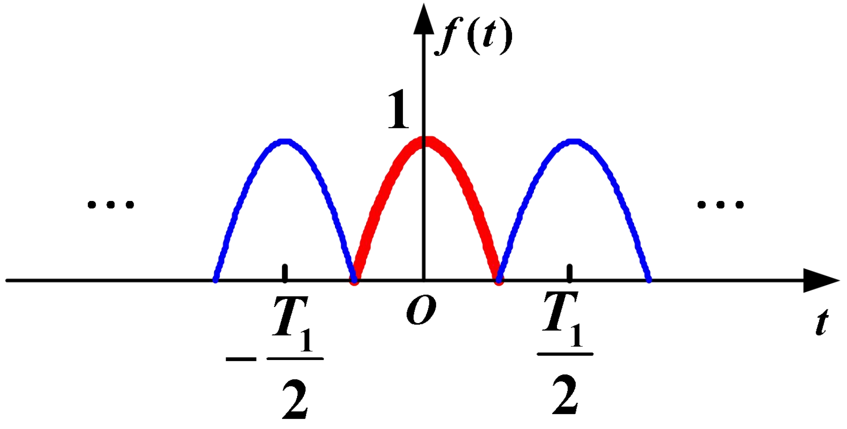
$$f(t) = f\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right) \qquad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$



当 $n = 1,3,5\cdots$ 时 $\qquad a_n = b_n = 0$

(4) 偶谐函数 (实际周期为标注周期的一半)





- T_1为标注的周期

基波角频率$\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$

- 实际的周期为$\dfrac{T_1}{2}$

实际包含的频谱成分：

$$\frac{2\pi}{\frac{T_1}{2}} = 2\omega_1\text{的整倍数}$$

学好信号与系统
低通高通路路通

北京邮电大学信号与系统

智慧教学研究组