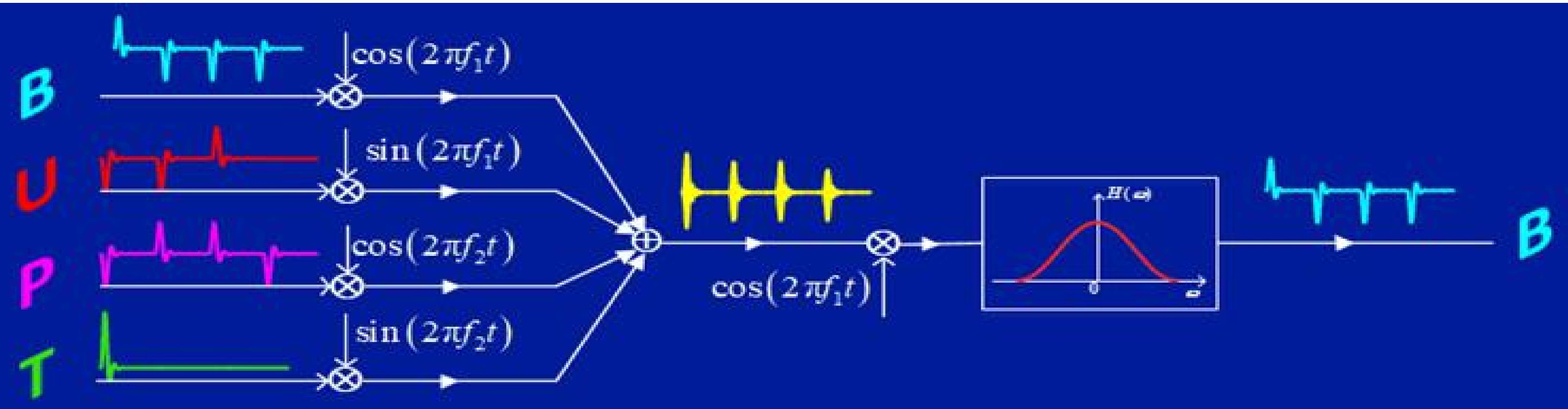
第三章 连续时间信号的频域分析

3.4 连续周期信号的傅里叶级数



2. 指数函数形式的傅里叶级数

(1) 由三角函数到指数函数

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\left(n\omega_1 t+\varphi_n\right)$$

$$c_n\cos\left(n\omega_1 t+\varphi_n\right)$$

欧拉公式 $\dfrac{1}{2}c_n\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(n\omega_1 t+\varphi_n\right)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(n\omega_1 t+\varphi_n\right)}\right]$

$$=\frac{1}{2}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}+\frac{1}{2}c_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

$$=F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}+F_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

(2) 指数函数形式的傅里叶级数表达

$\left\{ e^{jn\omega_1 t} \right\}, n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$ 是完备正交函数集

级数形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \, e^{jn\omega_1 t}$$

傅里叶级数系数

也可写为 $F(n\omega_1)$

$$F_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\, e^{-jn\omega_1 t} \, dt}{\int_{t_0}^{t_0+T_1} e^{jn\omega_1 t} e^{-jn\omega_1 t} \, dt}$$

$$= \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

(3) 幅度频谱和相位频谱

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

其中F_n为复数，可以表示为$F_n = |F_n| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n| \mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\omega_1 t+\varphi_n)}$$

$|F_n| \sim \omega$ 幅度频谱

$\varphi_n \sim \omega$ 相位频谱

$|F_n| \sim \omega$关系图称为幅度频谱图

$\varphi_n \sim \omega$之间的关系图称为相位频谱图

(4) 两种级数形式的关系

假设$f(t)$为实函数，$n>0$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t-\mathrm{j}\frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}(a_n-\mathrm{j}b_n)$$

$$F_{-n}=\frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{j}\frac{1}{T}\int_{T_1} f(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}(a_n+\mathrm{j}b_n)$$

(4) 两种级数形式的关系

$$\begin{cases} F_n = \dfrac{1}{2}(a_n - \mathrm{j}b_n) \\ F_{-n} = \dfrac{1}{2}(a_n + \mathrm{j}b_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} F_n = |F_n|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n} \\ F_{-n} = |F_{-n}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{-n}} \end{cases}$$

幅频特性

$$|F_n| = |F_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2}c_n$$

相频特性

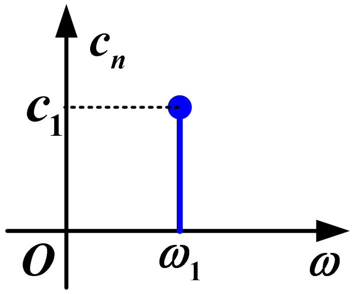
$$\varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

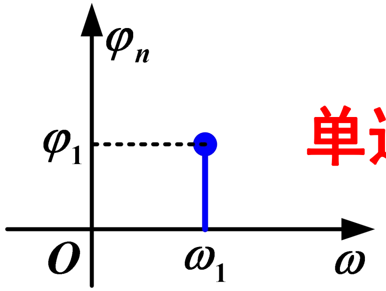
$$\varphi_n = -\varphi_{-n}$$

$$\varphi_{-n} = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

例2

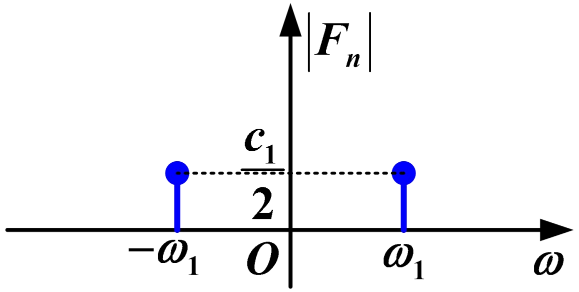
$$f(t)=c_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)=\frac{1}{2}c_1\left[e^{-j(\omega_1 t+\varphi_1)}+e^{j(\omega_1 t+\varphi_1)}\right]$$

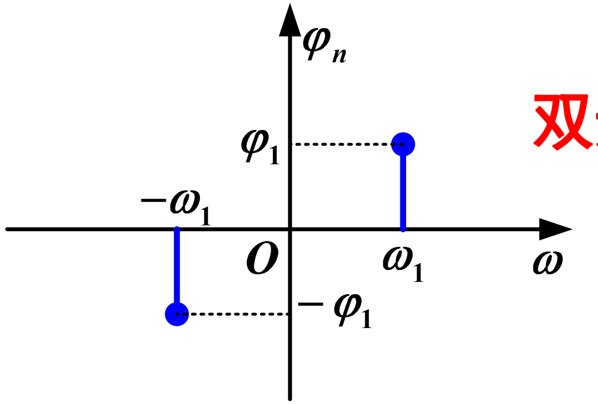




单边频谱

$$f(t)=\frac{1}{2}c_1e^{-j\varphi_1}e^{-j\omega_1 t}+\frac{1}{2}c_1e^{j\varphi_1}e^{j\omega_1 t}$$





双边频谱

例3

已知$f(t)=1+\sin\omega_0 t+\sqrt{3}\cos\omega_0 t-\cos\left(2\omega_0 t+\dfrac{5\pi}{4}\right)$，

请画出其幅度频谱图和相位频谱图。

解：

设$f_1(t)=\sin\omega_0 t+\sqrt{3}\cos\omega_0 t$

同频率项合并，化为余弦形式

利用例1的结果

$$f_1(t)=2\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$-\cos\left(2\omega_0 t+\frac{5\pi}{4}\right)$$

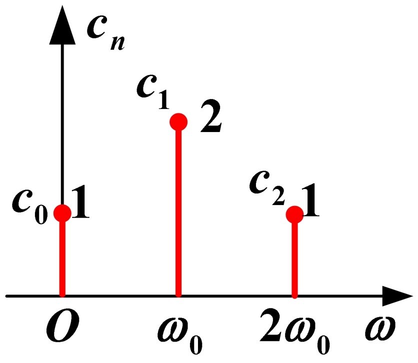
$$=\cos\left(2\omega_0 t+\frac{5\pi}{4}-\pi\right)$$

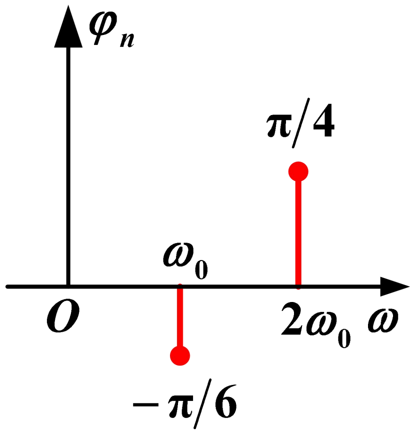
$$=\cos\left(2\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right)$$

例3

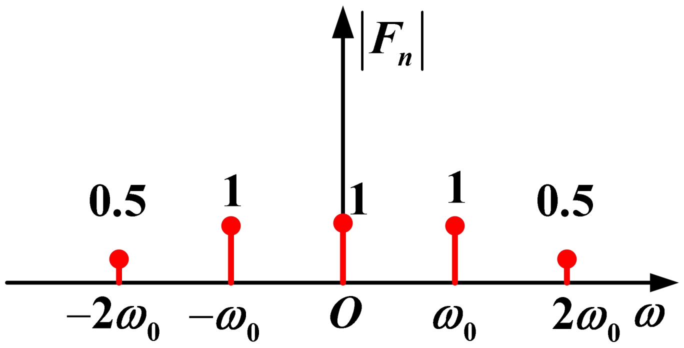
$$f(t)=1+2\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right)$$

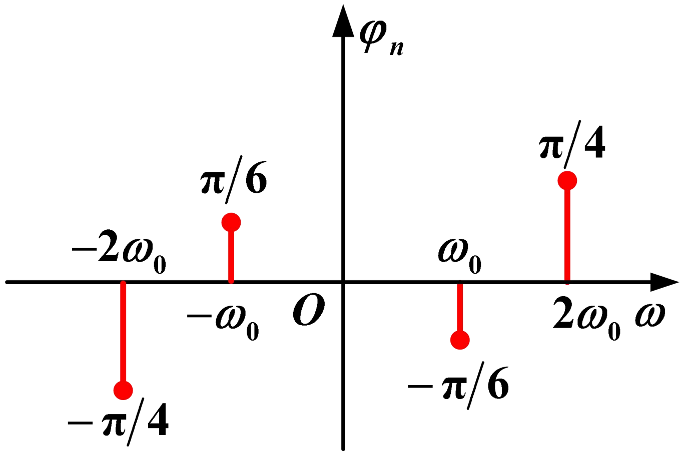
单边频谱图





双边频谱图





学好信号与系统
低通高通路路通

北京邮电大学信号与系统

智慧教学研究组