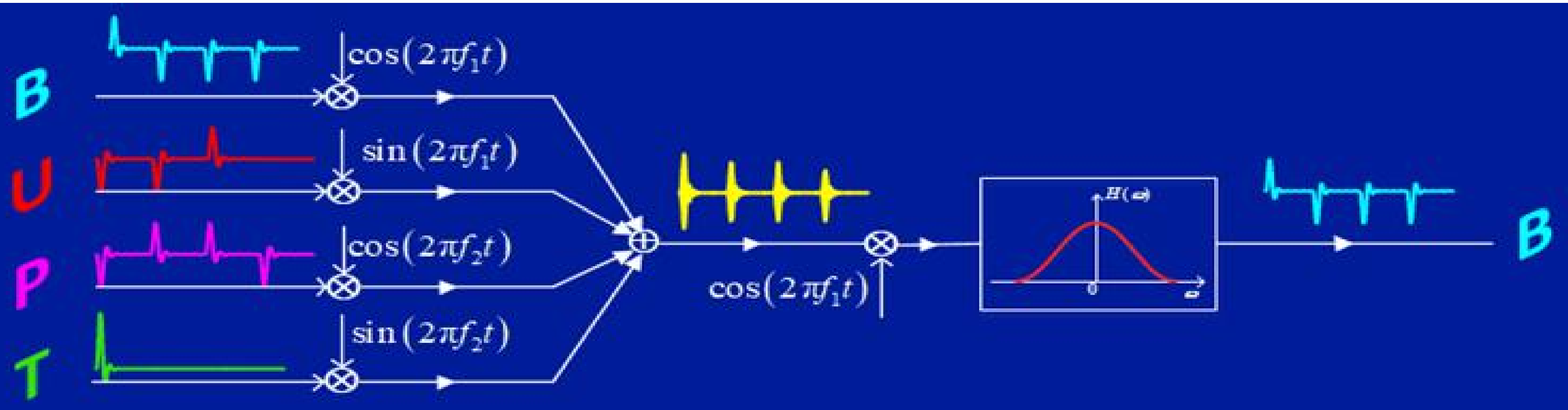
北京郵電大學
Beijing University of Posts and Telecommunications

第三章 连续时间信号的频域分析

3.5 典型周期信号的傅里叶级数

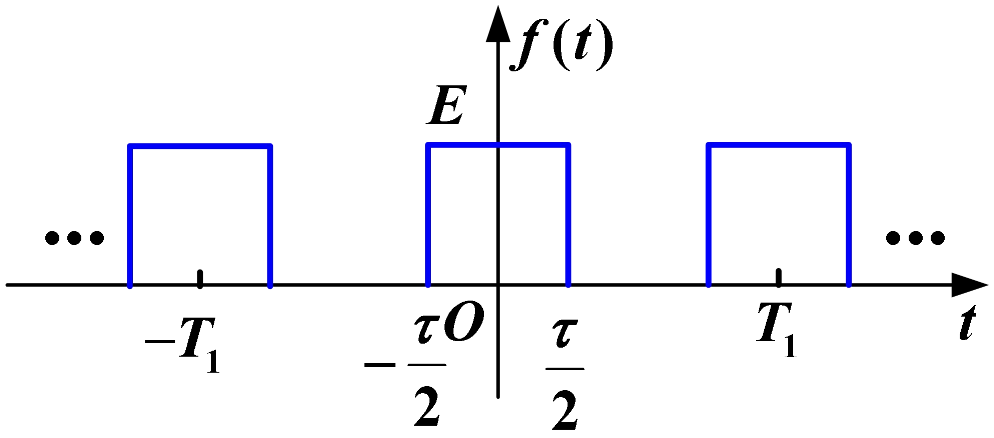


主要内容

- 周期矩形脉冲序列的频谱结构
- 吉伯斯现象
- 频带宽度

1. 周期矩形脉冲序列的频谱结构

(1) 三角形式的谱系数



脉宽为τ

周期为T_1

脉冲高度为E

$$a_0 = E\frac{\tau}{T_1} \quad \left(\frac{\tau}{T_1}: \text{占空比}\right)$$

$$f(t)\text{为偶函数} \rightarrow b_n = 0 \qquad F_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{j}b_n) = \frac{1}{2}a_n$$

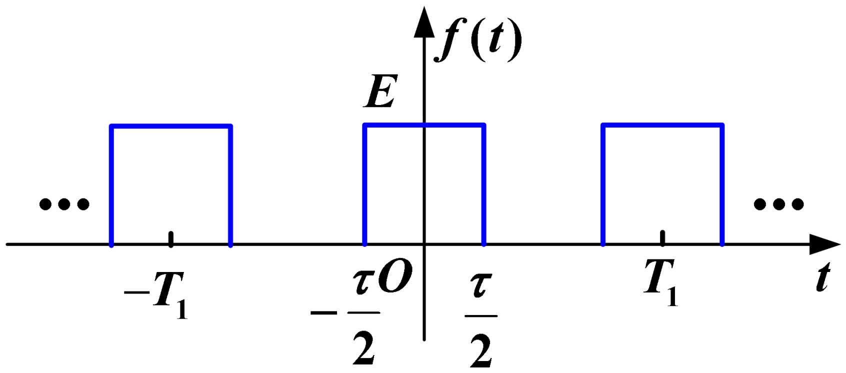
(2) 指数形式的谱系数

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E}{T_1}\frac{1}{-\mathrm{j}n\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$=\frac{-E}{\mathrm{j}n\omega_1 T_1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1\frac{\tau}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1\frac{\tau}{2}}\right)$$



$$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$$

(2) 指数形式的谱系数

$$F_n = \frac{-E}{\mathrm{j}n\omega_1 T_1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1\frac{\tau}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1\frac{\tau}{2}}\right)$$

$$= \frac{2E}{n\omega_1 T_1}\sin\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)$$

$$= \frac{E\tau}{T_1}\frac{\sin\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_1\frac{\tau}{2}}$$

$$= \frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)$$

(3) 频谱及其特点 图中$T_1=5\tau$

$$F_n=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)$$

包络函数：$\dfrac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\omega\dfrac{\tau}{2}\right)$

谱线间隔：$\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$

令$\omega\dfrac{\tau}{2}=\pi \Rightarrow \omega=\dfrac{2\pi}{\tau}$

•包络线第一个零点：

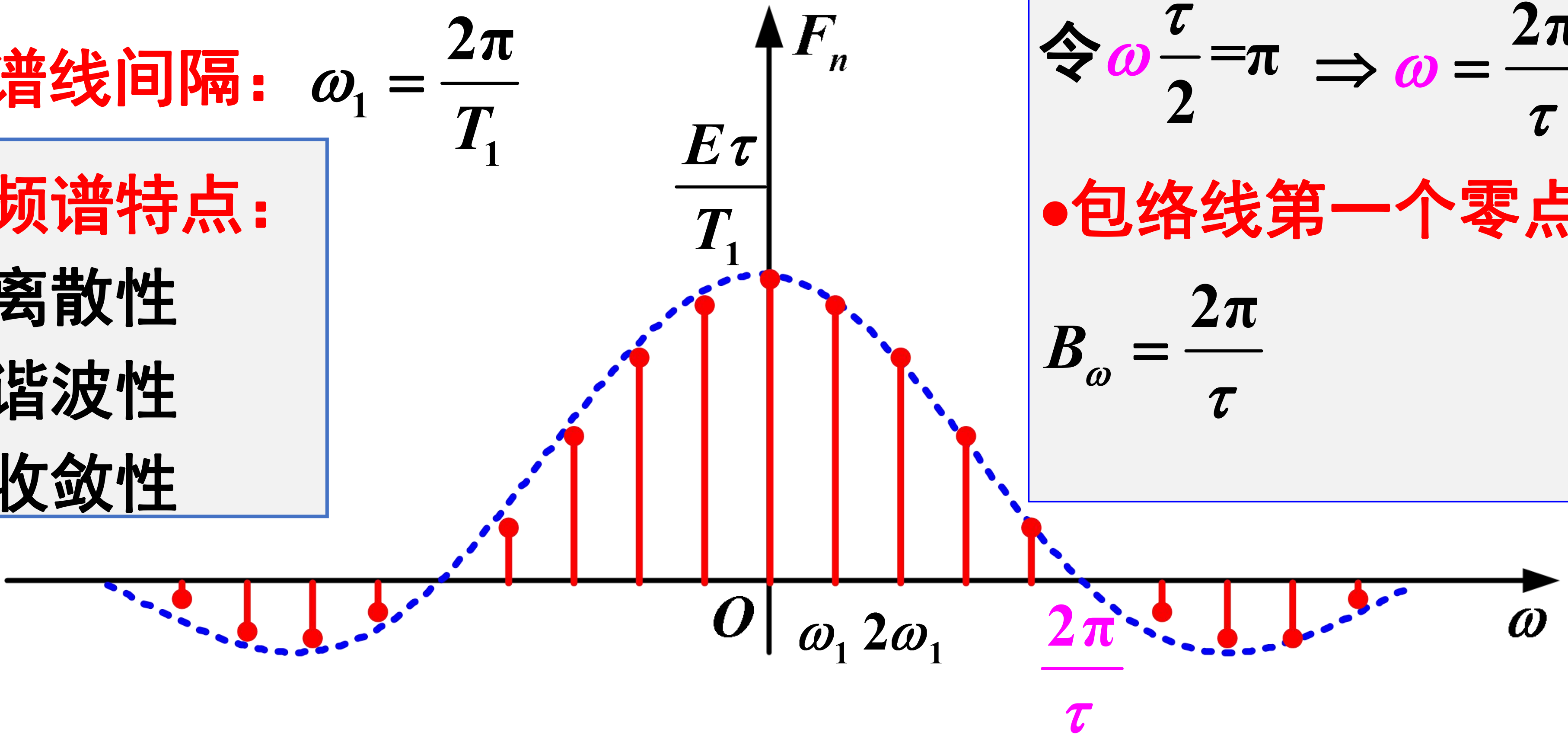
$$B_\omega=\frac{2\pi}{\tau}$$

频谱特点：

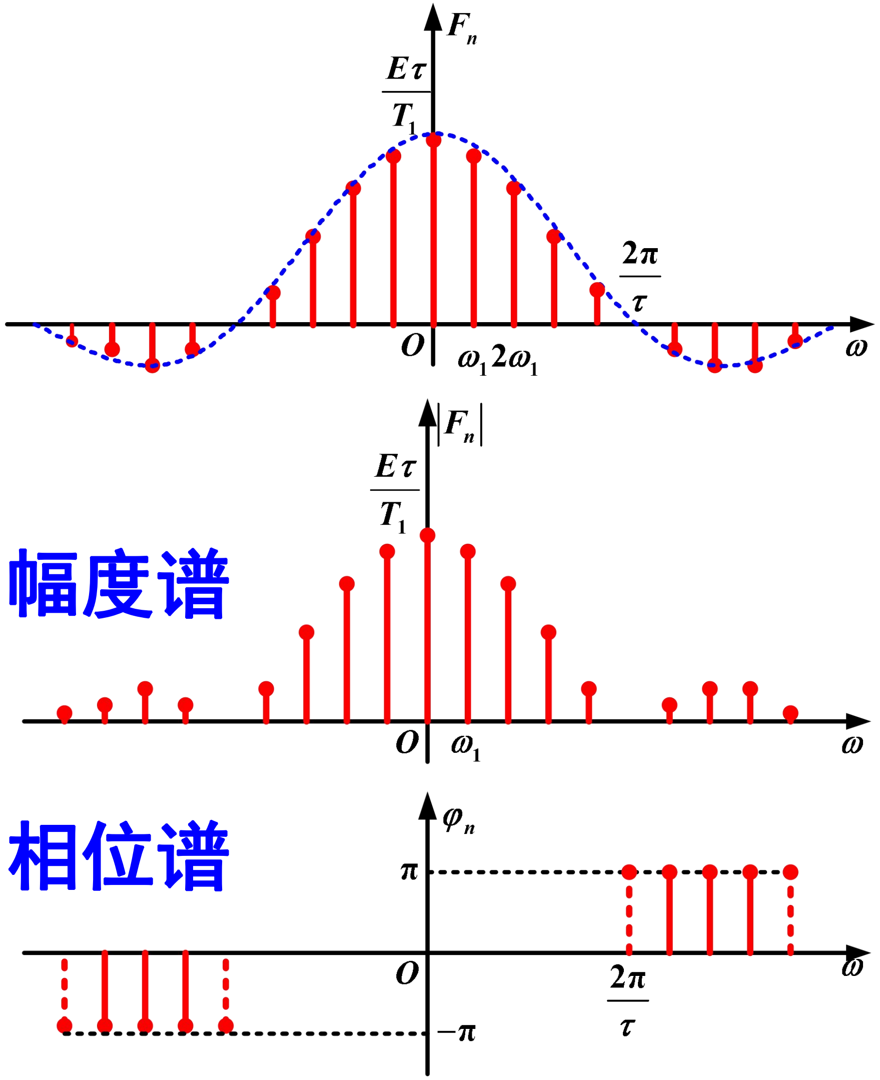
离散性

谐波性

收敛性



(3) 频谱及其特点



幅度谱

相位谱

- $F_n > 0$:

$$F_n = |F_n| \cdot 1 = |F_n| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0}$$

相位为 0

- $F_n < 0$:

$$F_n = |F_n| \cdot (-1) = |F_n| \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pm\pi)}$$

相位为 $\pm\pi$

(3) 频谱及其特点

$$F_n = E\frac{\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)$$

- E : F_n与E成正比。
- 脉宽τ: 包络线第一个零点$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau}$，和$\tau$成反比，

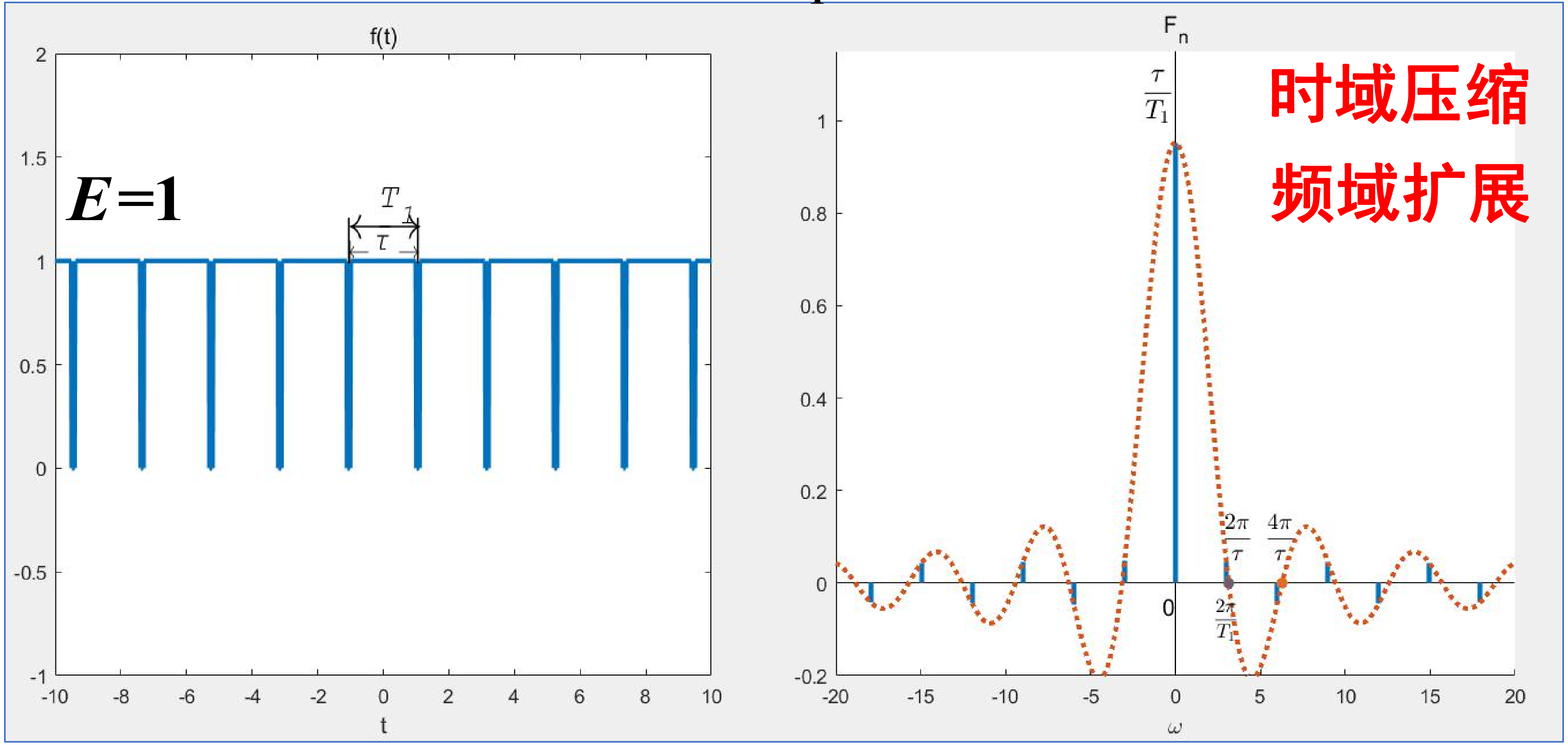
时域压缩，频域扩展

- 周期T_1: 谱线间隔$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$，$T_1$越大，谱线间隔越小。

(3) 频谱及其特点

$$F_n = E\frac{\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)$$

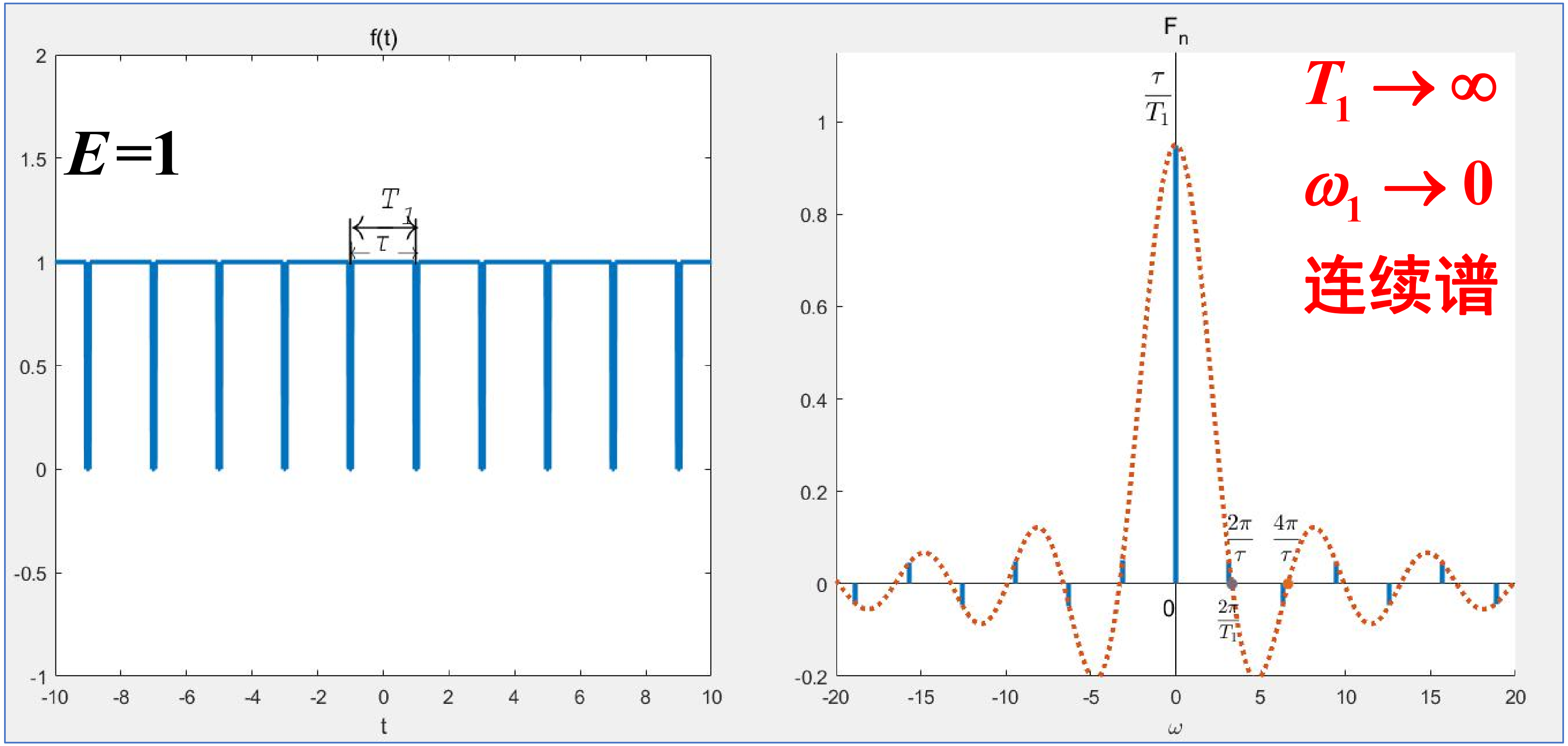
$$T_1\text{不变，}\tau\text{变小}\Rightarrow \omega_1=\frac{2\pi}{T_1}\text{不变，}B_\omega=\frac{2\pi}{\tau}\text{变大}$$



(3) 频谱及其特点

$$F_n = E\frac{\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)$$

τ不变，T_1增加 $\Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$减小，$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau}$不变

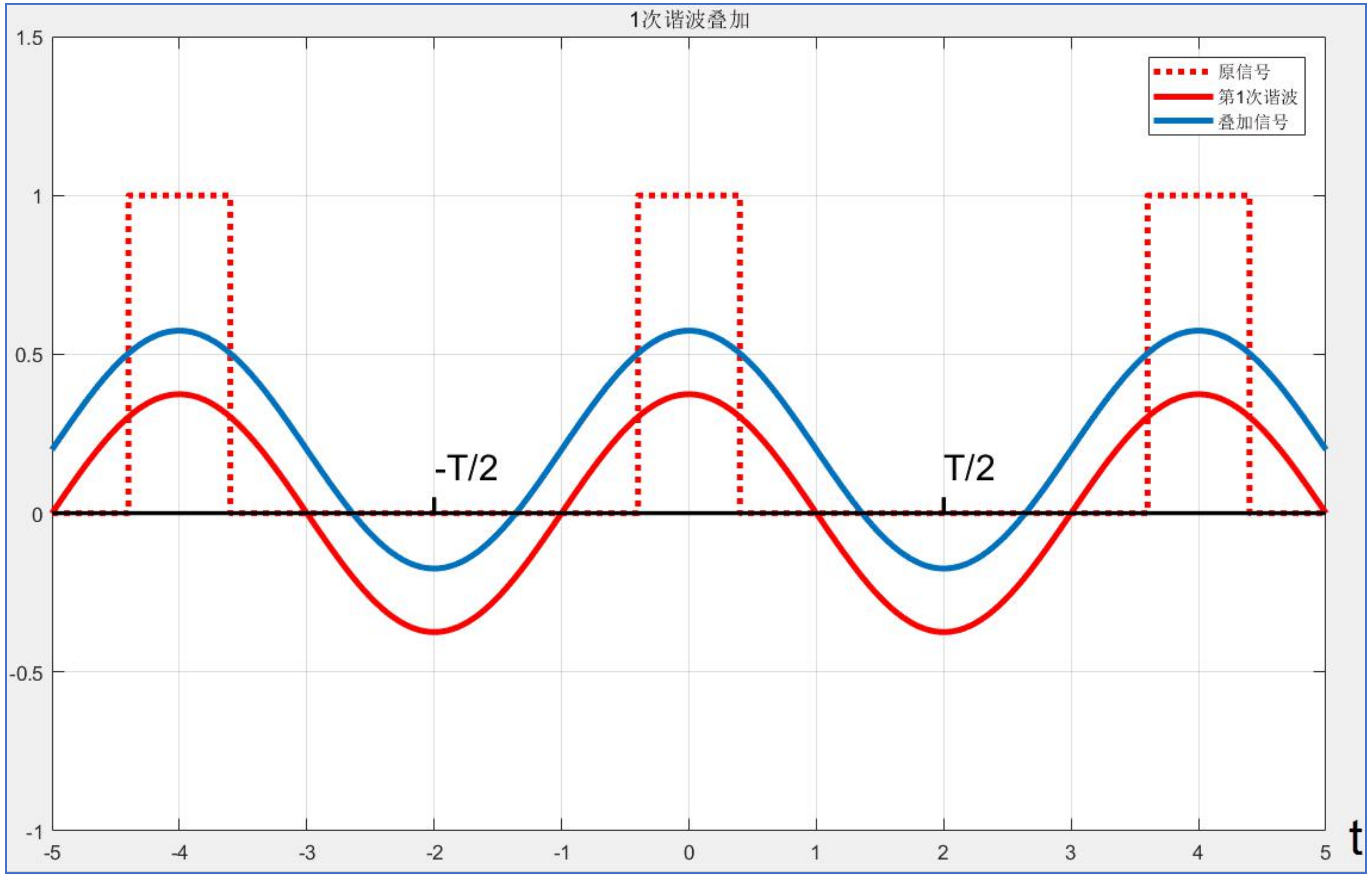


(4) 傅里叶级数合成

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} E\frac{\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\quad\left(\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}\right)$$

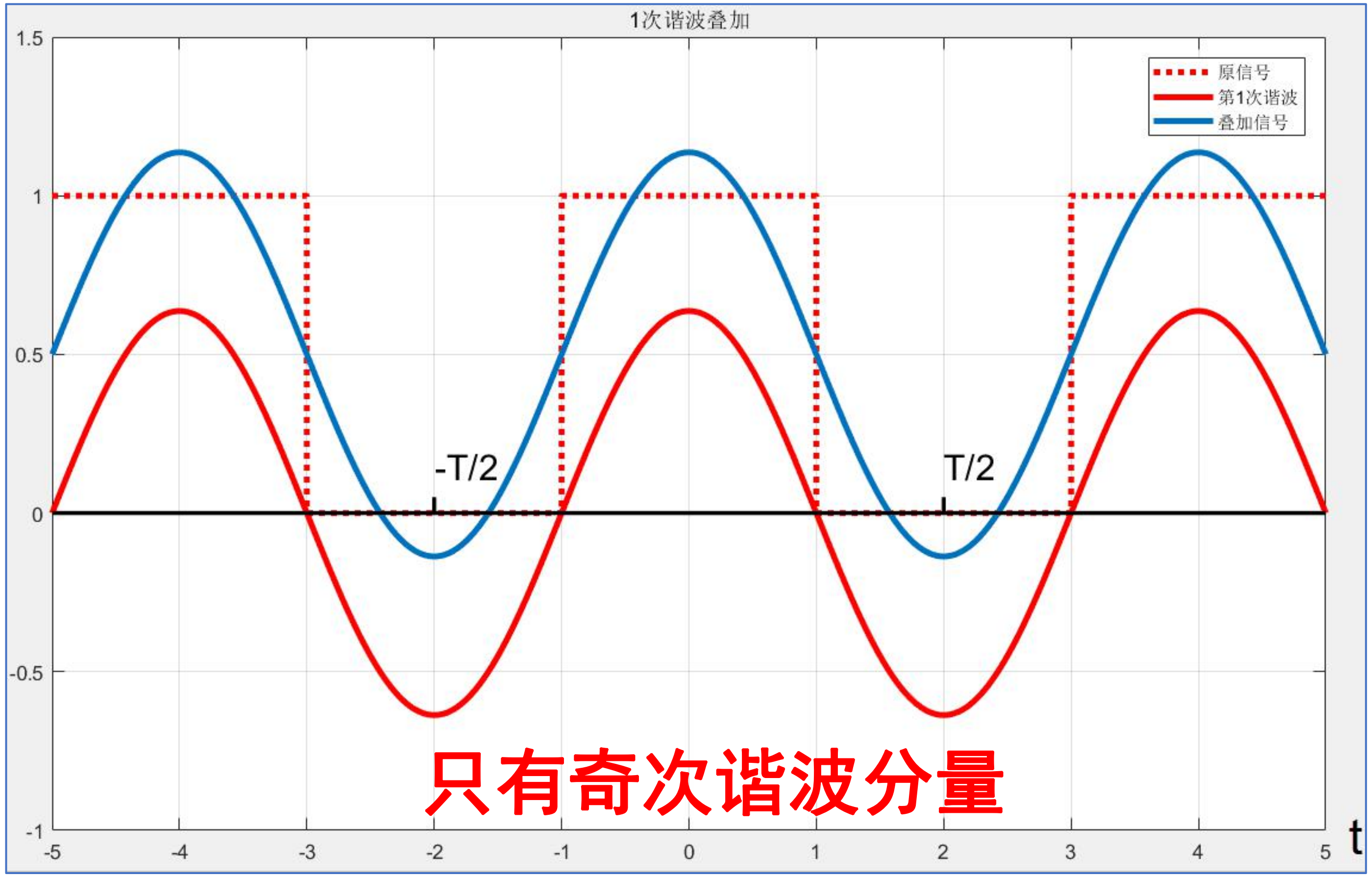
$$=E\frac{\tau}{T_1}+2E\frac{\tau}{T_1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)\cos\left(n\omega_1 t\right)$$

(4) 傅里叶级数合成，占空比为20%



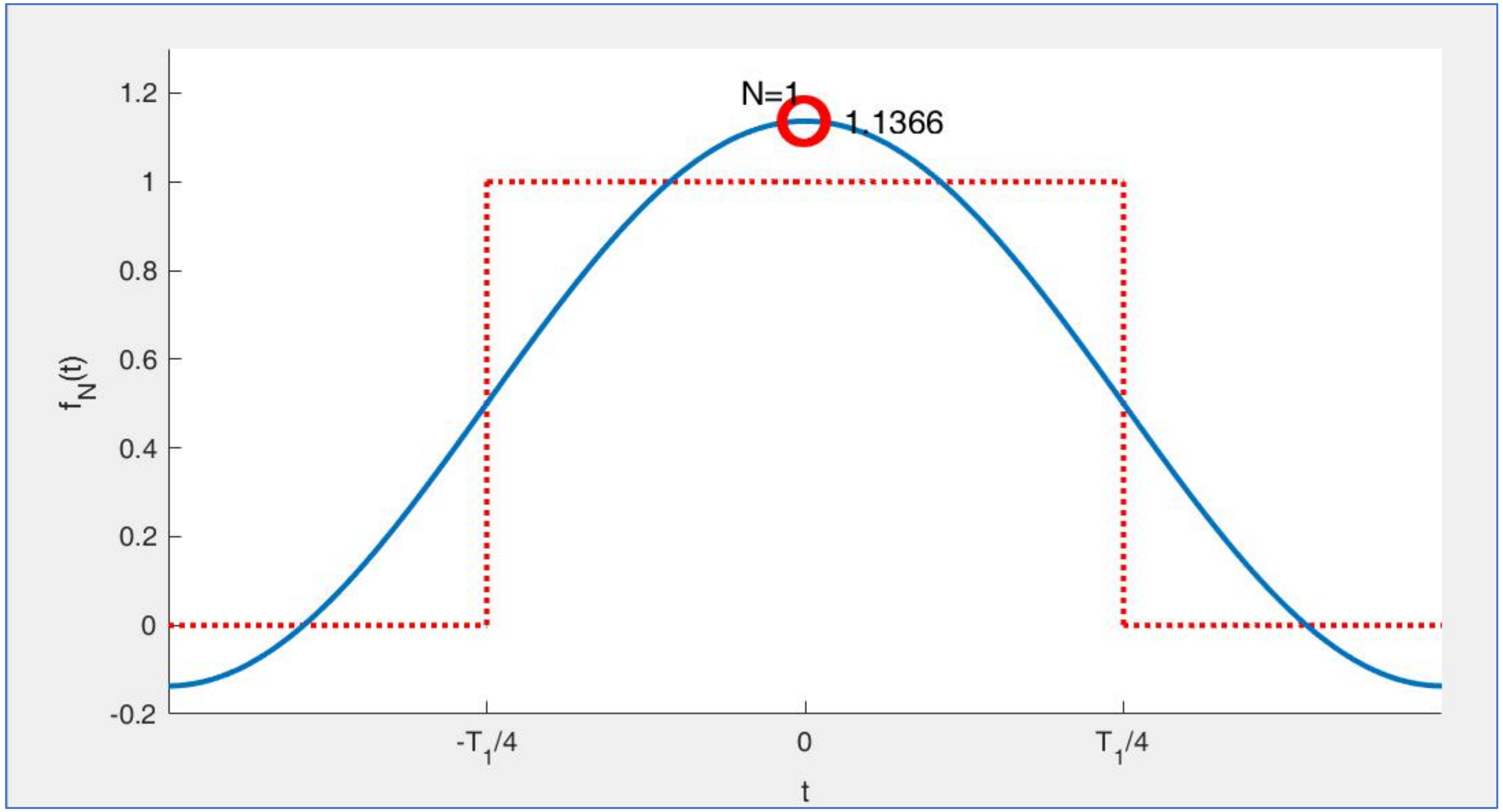
$$f(t)=E\frac{\tau}{T_1}+2E\frac{\tau}{T_1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)\cos(n\omega_1 t)$$

(4) 傅里叶级数合成，占空比为50%



$$f(t)=\frac{E}{2}+\frac{2E}{\pi}\left[\cos(\omega_1 t)-\frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t)+\frac{1}{5}\cos(5\omega_1 t)+\cdots\right]$$

(5) 吉伯斯现象



项数越多，方均误差越小，起伏的峰值趋于一个常数，大约为总跳变值的9%，这就是**吉伯斯现象**。

(5) 吉伯斯现象

•傅里叶级数是在方均误差最小原则下的信号分解。对于有不连续点的信号，不连续点处不收敛。

1898年，美国物理学家米切尔森（Albert Michelson）利用自制的谐波分析仪来合成信号。在测试方波信号时，发现了这种现象。

著名的数学物理学家吉伯斯（Josiah Gibbs），吉伯斯检查了这一结果，并于1899年发表了他的看法。

学习理想低通滤波器分析产生原因。

学好信号与系统
低通高通路路通

北京邮电大学信号与系统

智慧教学研究组