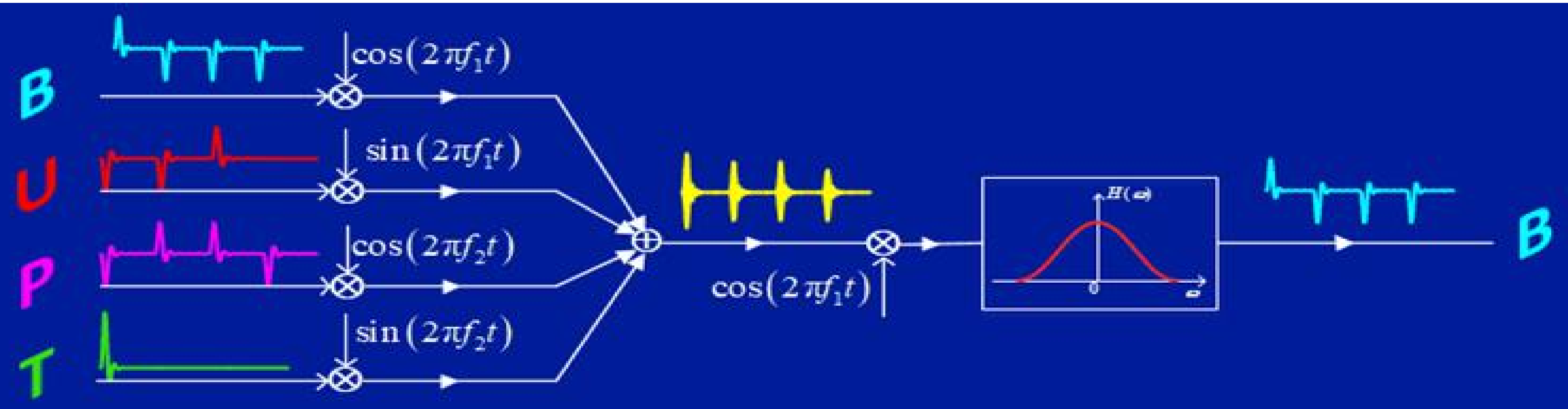
北京邮电大学
Beijing University of Posts and Telecommunications

第三章 连续时间信号的频域分析

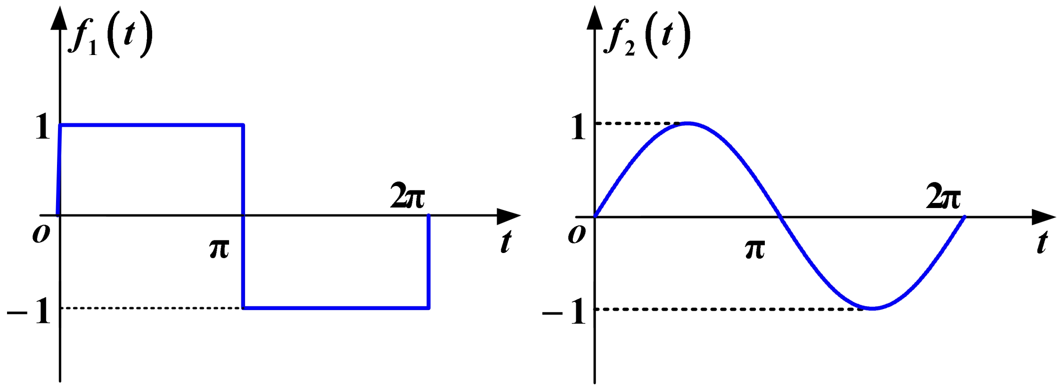
3.2 信号的正交函数分解



主要内容

- **信号的正交函数分解**
- 以矢量正交分解类比
- 信号正交的分量提取

1. 信号的正交函数分解



$f_1(t)$是否含有$f_2(t)$分量？

$f_1(t)$含有多少$f_2(t)$分量？

$$f_1(t) = c_{12} f_2(t) + f_e(t)$$

误差函数：$f_e(t) = f_1(t) - c_{12} f_2(t)$

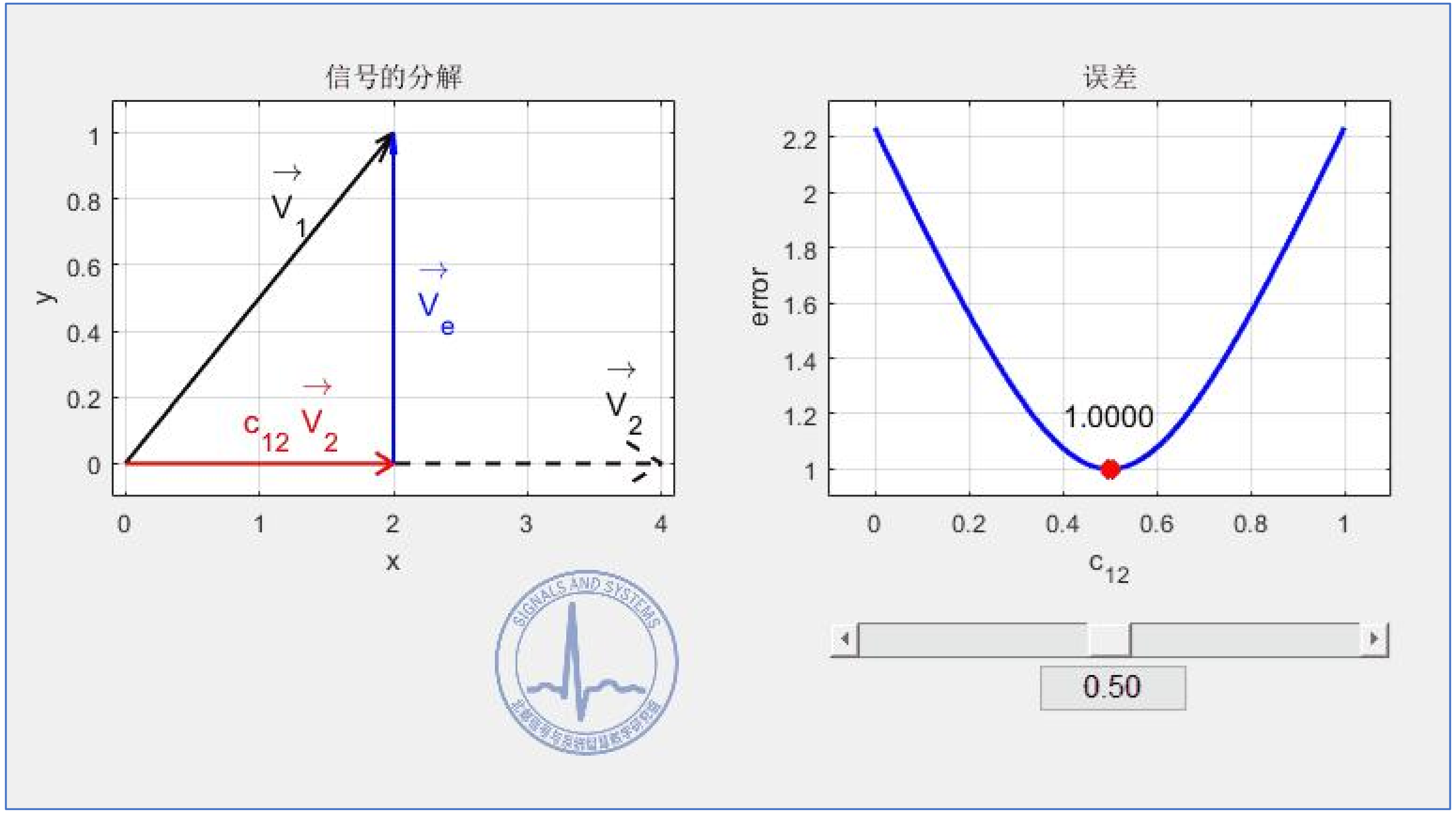
投影系数：c_{12}

求投影系数，需要使用正交函数分解的方法

▶ 2. 以矢量正交分解类比

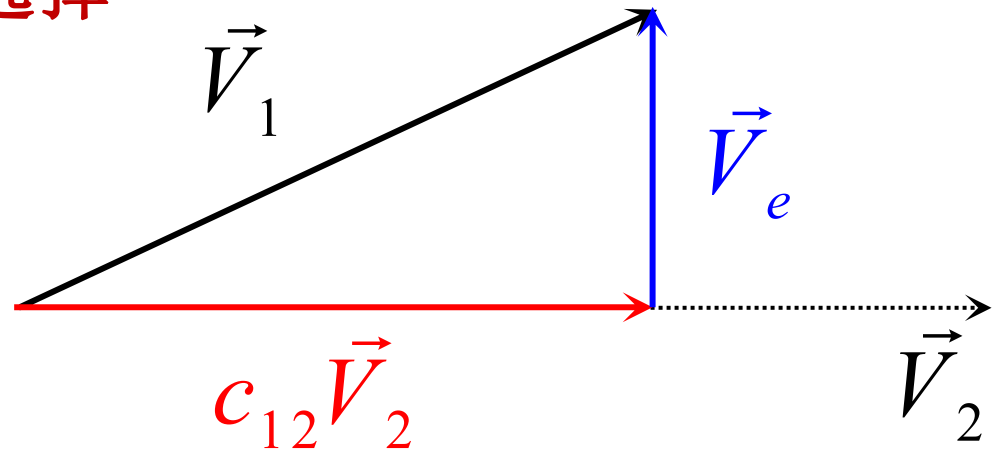
例：已知信号$\vec{V}_1$和分量$\vec{V}_2$，那么信号可分解为

$\vec{V}_1 = c_{12}\vec{V}_2 + \vec{V}_e$如何选择系数$c_{12}$。



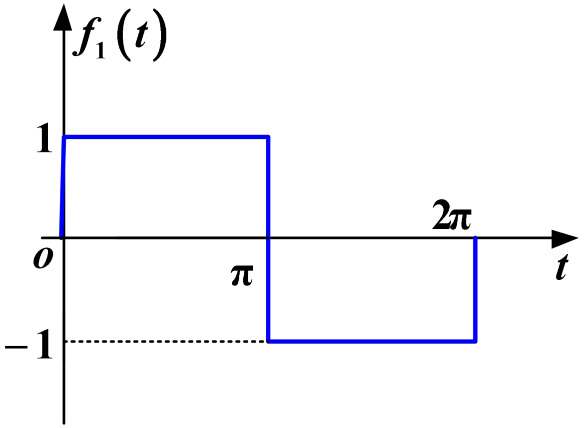
▶ 2. 以矢量正交分解类比

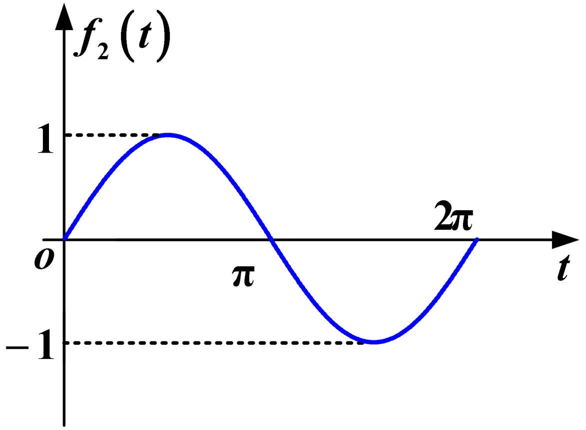
投影系数选择



- 两个矢量正交时，误差分量最小。
- 误差分量中不再含有被选择的这个分量。

3. 信号正交的分量提取





$$f_1(t) = c_{12} f_2(t) + f_e(t)$$

误差函数

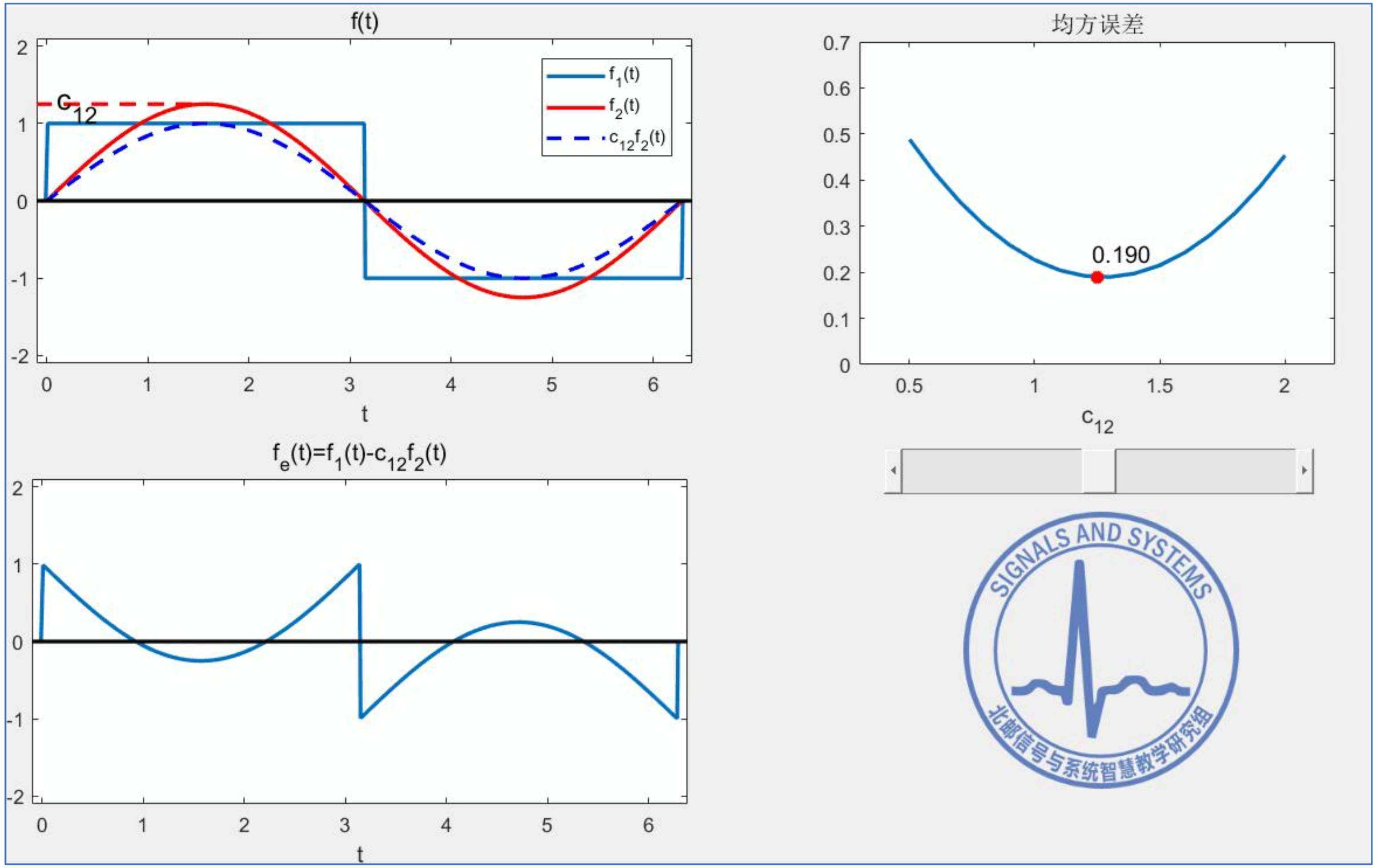
$$f_e(t) = f_1(t) - c_{12} f_2(t)$$

误差信号在区间(t_1, t_2)的平均功率（方均误差）

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{f_e^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f_1(t) - c_{12} f_2(t)\right]^2 \mathrm{d}t$$

▶ 3. 方均误差

根据方均误差最小原则求投影系数



3. 信号正交的分量提取

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{\varepsilon^2}}{\mathrm{d}\,c_{12}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,c_{12}}\left\{\int_{t_1}^{t_2}\left[f_1(t) - c_{12} f_2(t)\right]^2 \mathrm{d}\,t\right\} = 0$$

交换微积分次序

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,c_{12}}\left[\underset{(1)}{f_1^2(t)} - \underset{(2)}{2c_{12} f_2(t) f_1(t)} + \underset{(3)}{f_2^2(t) c_{12}^2}\right]\mathrm{d}\,t = 0$$

3. 信号正交的分量提取

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,c_{12}}\left[f_1^2(t) - 2c_{12}f_2(t)f_1(t) + f_2^2(t)c_{12}^2\right]\mathrm{d}\,t = 0$$

(1) (2) (3)

$$(1)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,c_{12}} f_1^2(t) = 0$$ （因为$f_1(t)$不含c_{12}）

$$(2)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,c_{12}}\left[-2c_{12}f_1(t)\cdot f_2(t)\right] = -2f_1(t)\cdot f_2(t)$$

$$(3)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,c_{12}}\left[c_{12}^2 f_2^2(t)\right] = 2c_{12}f_2^2(t)$$

▶ 3. 信号正交的分量提取

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-2f_1(t)\cdot f_2(t)\right]\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}2c_{12}f_2^2(t)\mathrm{d}t=0$$

$$c_{12}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)\cdot f_2(t)\,\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}f_2^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

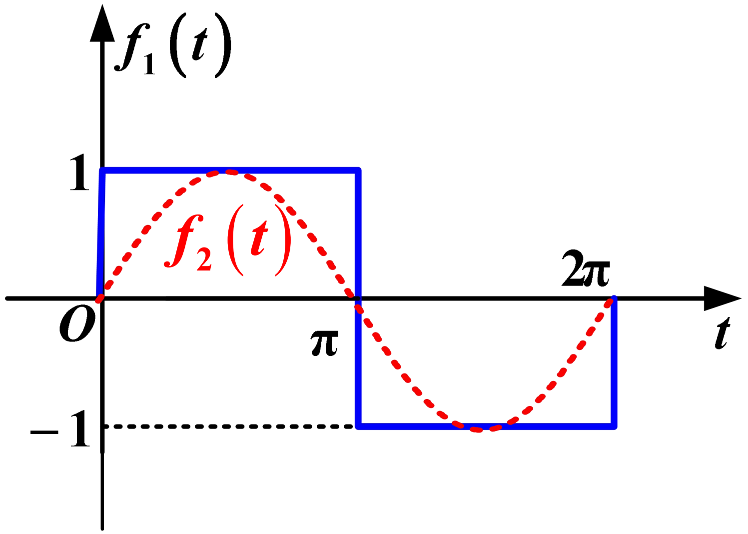
若$c_{12}=0$，则$f_1(t),f_2(t)$称为**正交函数**，满足

$$\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2(t)\,\mathrm{d}t=0$$

例1

在区间$(0<t<2\pi)$内，求实信号$f_1(t)$中$f_2(t)$的分量。

$$f_1(t)=\begin{cases}+1 & (0<t<\pi)\\ -1 & (\pi<t<2\pi)\end{cases}$$



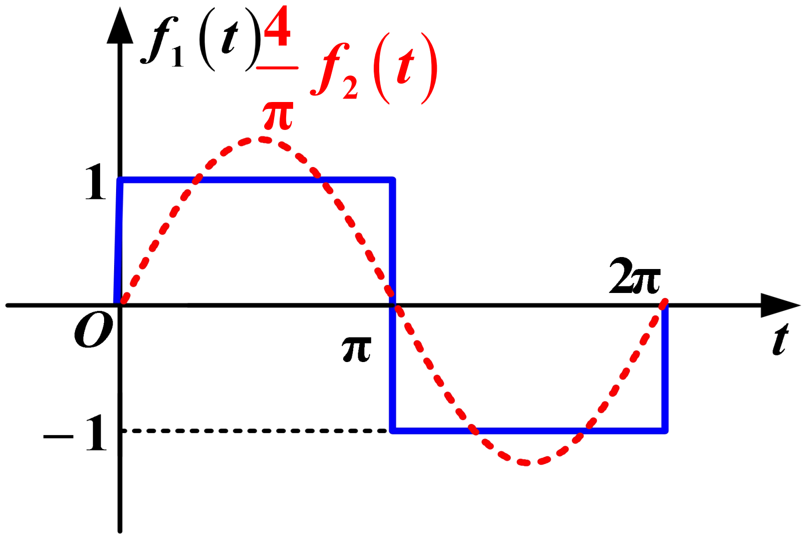
$$f_2(t)=\sin t \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

$$f_1(t)=c_{12}f_2(t)+f_e(t) \qquad c_{12}\,?$$

例1

为使方均误差最小，c_{12}应满足

$$c_{12}=\frac{\int_0^{2\pi} f_1(t)\sin t\,\mathrm{d}t}{\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t}$$



分子 $:2\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t \ =-2\cos t\Big|_0^{\pi}=4$

分母 $:\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\pi$

$$\therefore c_{12}=\frac{4}{\pi}$$

例1

问题：剩余分量$f_e(t)$中还含有多少的$f_2(t)$分量？

$$\int_0^{2\pi} f_e(t) f_2(t) \mathrm{d}t$$

$$\int_0^{2\pi} \left[f_1(t) - c_{12} f_2(t) \right] f_2(t) \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} f_1(t) f_2(t) \mathrm{d}t - c_{12} \int_0^{2\pi} f_2^2(t) \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} f_1(t) f_2(t) \mathrm{d}t - \frac{\int_0^{2\pi} f_1(t) f_2(t) \mathrm{d}t}{\int_0^{2\pi} f_2^2(t) \mathrm{d}t} \int_0^{2\pi} f_2^2(t) \mathrm{d}t = 0$$

$f_e(t)$和$f_2(t)$是正交的

例2

正弦函数$\sin t$在区间$(0,2\pi)$之间包含的余弦函数$\cos t$分量是多少？

解：

由于

$$\cos t \sin t = \frac{\sin(2t)}{2}$$

所以 $\int_0^{2\pi} \cos t \sin t \, \mathrm{d} t = 0$ 即$c_{12} = 0$

说明：

余弦函数$\cos t$在一个周期内不包含正弦信号$\sin t$分量，或者说$\cos t$与$\sin t$两函数在一个周期内正交。

4. 小结

信号的正交分解

$$f_1(t) = c_{12} f_2(t) + f_e(t)$$

投影系数

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) \mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) \mathrm{d}t}$$

两个信号在区间(t_1, t_2)内正交的条件是

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) \mathrm{d}t = 0$$

学好信号与系统
低通高通路路通

北京邮电大学信号与系统

智慧教学研究组