Bildsynthese, Blatt 6

Moritz Hamann - 2508568, Boitumelo Ruf - 2835202

June 10, 2013

Aufgabe 6.1

Dreieck

Aus Symmetriegründen sieht man, das die Flächen A_1, A_2 und A_3 gleich groß sind. Weiterhin sind die Ein- und Ausfallswinkel der Formfaktoren $F_{1,2}$ und $F_{1,3}$ aus Symmetriegründen gleich. Daraus lässt sich schließen, dass gelten muss:

$$F_{1,2} = F_{1,3}$$

Weiterhin muss gelten:

$$\sum_j F_{i,j}=1$$

und wegen des Reziprozitätsgesetzes:

$$\begin{aligned} A_i F_{i,j} &= A_j F_{j,i} \\ F_{i,j} &= F_{j,i} \end{aligned}$$

da $A_i = A_j$. Man sieht also sofort, das für das Dreieck gilt:

$$\begin{aligned} F_{i,j} &= \frac{1}{2} \text{ für } i,j \in \{1,2,3\} \\ F_{i,i} &= 0 \end{aligned}$$

Mit den Werten $\{\rho_1 = 0, \rho_2 = \frac{1}{2}, \rho_3 = \frac{3}{4}\}$ für das Albedo und $\{E_1 = 1, E_2 = 0, E_3 = 0\}$ für die Emissionswerte, lässt sich folgendes LGS für B_i aufstellen:

$$B = E + TB$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung dieses LGS ist:

$$\begin{aligned} B &= (1 - T)^{-1} E \\ B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0.37 \\ 0.51 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quadrat

Ähnlich wie beim Dreieck kann man auch mit Hilfe der Symetrie begründen das $F_{1,2}$ und $F_{1,3}$ gleich sein müssen. Allerdings existiert noch $F_{1,4}$, was druchaus unterschiedlich sein kann. Es gilt aber weiterhin, dass $\sum_j F_{i,j} = 1$ (da die Szene abgeschlossen ist). In den Folien war als Sonderfall der Formfaktor zweiter benachbarter Seiten eines Würfels mit $F_{i,j} \approx \frac{1}{5}$ angeben. Wir setzen deshalb hier

$$F_{1,2} = F_{1,3} = \frac{1}{5}$$

Daraus folt mit $F_{i,i} = 0$ dann für $F_{1,4}$

$$F_{1,4} = 1 - 2 * \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

Da die Flächen wieder gleich groß sind gilt mit dem Reziprozitätsgesetz wieder $F_{i,j} = F_{j,i}$. Ähnlich wie beim Dreieck lässt sich mithilfe der gegeben Albedo und Emissionswerten das LGS für B_i aufstellen

$$B = E + TB$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist wieder gegeben durch:

$$\begin{aligned} B &= (1 - T)^{-1} E \\ B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0.19 \\ 0.26 \\ 0.17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 6.2

Die 3 einzelnen Transformationen sind (in dieser Reihenfolge) eine Translation:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie eine Rotation um 45° um die 3. Achse:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und eine Skalierung um den Faktor $\sqrt{2}$:

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die gesammte Matrix T ist somit:

$$\begin{aligned} T &= U * R * S \text{ und die Inverse} \\ T^{-1} &= (U * R * S)^{-1} \\ &= S^{-1} * R^{-1} * U^{-1} \end{aligned}$$

mit den Einzelinversen:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.3

Die erste Matrix ist eine Rotation um 45° gegen den Uhrzeigersinn, die zweite Matrix eine Skalierung um den Faktor $\frac{1}{2}$ und die dritte Matrix eine Translation um den Vektor $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Um das transformierte Bild zu bekommen, muss als erstes die Skalierung (M_2), dann die Translation (M_3) und am Schluss die Rotation (M_1) angewendet werden. Das dies stimmt kann leicht überprüft werden, in dem wir die komplette Matrix für alle 3 Operatoren ausrechnen

$$M = M_1 * M_3 * M_2 = \begin{pmatrix} 3.53 & -0.53 & 1.41 \\ 3.53 & 3.53 & 4.24 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und anschließend den Punkt $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (welcher die Dachspitze representiert) transformieren

$$\begin{aligned} p' &= M * p \\ p' &= \begin{pmatrix} 0.7 \\ 5.6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

was der transformierten Dachspitze entspricht.