2. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Algorithmen und Datenstrukturen SoSe 2025

Wolfgang Mulzer

Abgabe am 9. Mai 2025 bis 10 Uhr im Whiteboard

Aufgabe 1 Induktion und binäre Bäume *10 Punkte*

Ein binärer Baum heißt *vollständig*, falls jeder Knoten entweder null oder zwei Kinder besitzt.

(a) Zeichnen Sie einen binären Suchbaum, der vollständig ist, und einen binären Suchbaum, der nicht vollständig ist.

(b) Beweisen Sie durch eine geeignete Induktion: In jedem vollständigen binären Suchbaum ist die Anzahl der Blätter genau um eins größer als die Anzahl der inneren Knoten.

(c) Formulieren Sie eine ähnliche Aussage für allgemeine binäre Suchbäume und beweisen Sie sie.

Aufgabe 2 Binäre Suchbäume *10 Punkte*

(a) Angenommen, wir haben einen binären Suchbaum T, welcher die Zahlen von 1 bis 1000 als Schlüssel speichert. Wir suchen in T nach dem Schlüssel 363. Bestimmen Sie für jede der folgenden Schlüsselfolgen, ob sie als Folge der Einträge auf dem Suchpfad nach 363 auftreten kann. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

   (a) 2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363.

   (b) 924, 220, 911, 244, 898, 258, 362, 363.

   (c) 925, 202, 911, 240, 912, 245, 363.

   (d) 2, 399, 387, 219, 266, 382, 381, 278, 363.

   (e) 935, 278, 347, 621, 299, 392, 358, 363.

(b) Sei T ein binärer Baum mit n Knoten, und sei K eine total geordnete Menge von n Schlüsseln. Zeigen Sie, dass es genau eine Möglichkeit gibt, die Schlüssel aus K auf die Knoten von T zu verteilen, so dass die binäre Suchbaumeigenschaft erfüllt ist.

Aufgabe 3 AVL-Bäume *10 Punkte*

(a) Fügen Sie die Schlüssel A, L, G, O, D, T, S, X, Y, Z in dieser Reihenfolge in einen anfangs leeren AVL-Baum ein. Löschen Sie sodann die Schlüssel Z, A, L. Zeichnen Sie den Baum nach jedem Einfüge- und Löschvorgang, und zeigen Sie die Rotationen, welche durchgeführt werden. Annotieren Sie dabei auch die Knoten mit ihrer jeweiligen Höhe.

(b) Beweisen Sie: Beim Einfügen in einen AVL-Baum wird höchstens eine (Einfach- oder Doppel-)Rotation ausgeführt. Gilt das auch beim Löschen (Begründung)?