Algorithmen und Datenstrukturen SoSe25

-Assignment 4-

Moritz Ruge
Matrikelnummer: 5600961
Lennard Wittenberg
Matrikelnummer: —

Mai 2025

Problem 1: Rot-Schwarz Bäume und (2,4)-Bäume

In Aufgabe 3 auf dem 3. Aufgabenblatt wurden rot-schwarz Bäume definiert.

a) Zeigen Sie: Rot-schwarz Bäume und (2, 4)-Bäume sind äquivalent. Genauer: es gibt eine lokale Transformation, welche Gruppen von Knoten im rot-schwarz Baum in Knoten im (2, 4)-Baum überführt, und umgekehrt. Geben Sie eine solche Transformation an, und begründen Sie, dass Ihre Transformation die Bedingungen an rot-schwarz Bäume und an (2, 4)-Bäume erfüllt.

In einem (2,4)-Baum gilt:
min: 2 Kindknoten und max: 4 Kindknoten
min Einträge: 1 und max Einträge: 3
Bei der Convertierung eines (2,4)-Baums in einen Rot-Schwarz-Baum müssen betrachtet werden:
k: Elternknoten; w: Kinderknoten
Convertierung:

1-Knoten → rot-schwarz: Bei einem Knoten mit nur 1. Eintrag, wird der Knoten zu einem Schwarzknoten. →
Ein 1-Knoten hat entweder 0 oder 2 Kindknoten

– 0 Kindknoten: Schwarzer Blattknoten
– 2 Kindknoten: für den 1-Knoten gilt: $v = (w_1, k_1, w_2)$, wobei $w_1 < k_1 < w_2 -> w_1$ wird zum linken Kindknoten von k_1 und w_2 wird zum rechten Kind von k_1 Die Farbe der Kindknoten wird vom Elternknoten bestimmt.

2-Knoten → red-black: Bei einem Knoten mit 2 Einträgen, wird 1 Knoten zum Elternknoten und der andere Knoten wird zum Kindknoten

– Dabei gilt: $v = (k_1, k_2)$, wobei $k_1 < k_2$ → Daraus entstehen zwei Möglichkeiten:
(i) k_1: Elternknoten und k_2: rechter Kindknoten
(ii) k_2: Elternknoten und k_1: linker Kindknoten
– Ein 2-Knoten hat 3 oder 0 Kindknoten. Für die Verteilung der Kindknoten gilt:
(i) Wenn v keine Kindknoten hat, dann ist v ein Blattknoten. Somit gilt für die Kinder von v, dass sie zu schwarzen Blattknoten werden, nachdem sie in den Rot-Schwarz-Baum überführt wurden.
(i) $v = (w_1, k_1, w_2, k_2, w_3)$

Zur Veranschaulichung:

‘‘‘
```
     |A|B|
    C  D  E
```
‘‘‘

– Für v gibt es wieder zwei Möglichkeiten:
– es gilt $w_1 < ... < k_2 < w_3$ → Größenordnung von links nach rechts
(1.) k_1 wird zum Elternknoten:
w_1: linker Kindknoten von k_1
k_2: rechter Kindknoten von k_1
w_2: linker Kindknoten von k_2

w_3: rechter Kindknoten von k_2
(2.) k_2 wird zum Elternknoten:
k_1: linker Kindknoten von k_2
w_3: rechter Kindknoten von k_2
w_1: linker Kindknoten von k_1
w_2: rechter Kindknoten von k_1
– Die Farbe der Kindknoten wird vom Elternknoten bestimmt.

3-Knoten $-$ > red-black: Bei einem Knoten mit 2 Einträgen gilt: $v = (k_1, k_2, k_3)$, dabei wird k_2 zum Schwarzen Elternknoten, k_1 zum Roten linken Kindknoten von k_2 und k_3 zum rechten Kindknoten von k_2.
– Ein 3-Knoten hat 4 oder 0 Kindknoten. Für diese gilt:
– $w_1 < k_1 < w_2 < k_2 < w_3 < k_3 < w_4$
– Darus folgt:

w_1: linker Kindknoten von k_1
w_2: rechter Kindknoten von k_1
w_3: linker Kindknoten von k_3
w_4: rechter Kindknoten von k_3

– Wenn v keine Kindknoten hat, dann ist v ein Blattknoten. Somit gilt für die Kinder von v, dass sie zu schwarzen Blattknoten werden, nachdem sie in den Rot–Schwarz-Baum überführt wurden.
– Die Farbe der Kindknoten wird vom Elternknoten bestimmt.

Wurzel:
– Die Wurzel verhält sich je nach Baum, genau wie ein Innerer Knoten oder ein Blatt Knoten und ist immer Schwarz. Eine spezielle Betrachtung ist daher nicht nötig. Die Farbwahl aller Knoten in einem in Rot-Schwarz überführten (2,4)-Baum geht von der Wurzel aus.

Unter Anwendung dieser Regeln, lässt sich jeder (2,4) Baum in einen Rot-Schwarz-Baum überführen.
Beispiel: (2,4)-Baum aus der Aufgabe 2b -¿ Rot-Schwarz-Baum
Ich stelle Knoten im Rot-Schwarz-Baum als Tuppel (key,colour)

‘ ‘ ‘

```
                 ---------------
                 | G    |    T |
                 ---------------
                /       |        \
               /        |         \
         | A | D | | L | O | S | | X | Y | Z |
```

‘ ‘ ‘

```
‘‘‘1. Wurzel -> Rot-Schwarz-Knoten Wähle G als Wurzel im Rot-Schwarz-Baum
                   (G,B)
                /        \
               /          \
         | A | D |       (T,R)
                        /      \
              | L | O | S | | X | Y | Z |
```

```
‘‘‘2. Linkes Kind von G -> Rot-Schwarz-Knoten Wähle D als Elternknoten von A.
                   (G,B)
                /        \
               /          \
            (D,R)       (T,R)
          /           /       \
        (A,B)   | L | O | S | | X | Y | Z |
‘‘‘3. Linkes und Rechtes Kind von R -> Rot-Schwarz-Knoten Wähle O als Elternknoten von L,S und Y a
                   (G,B)
                /        \
               /          \
            (D,R)       (T,R)
          /           /       \
        (A,B)      (O,B)     (Y,B)
                  /     \   /     \
                |L|    |S| |X|    |Z|
‘‘‘
‘‘‘4. Wandle verbliebende (2,4)-Blätter in Rot-Schwarz-Blätter um.
                   (G,B)
                /        \
               /          \
            (D,R)       (T,R)
          /           /       \
         /           /         \
       (A,B)      (O,B)       (Y,B)
       /   \     /     \     /     \
      B     B  (L,R) (S,R) (X,R)   (Z,R)
               /   \ /   \ /   \   /   \
              B    B B   B B   B  B     B
‘‘‘
```

Problem 2: (2,3)-Bäume und (2,4)-Bäume

a) Fügen Sie die Schlüssel A, L, G, O, D, T, S, X, Y, Z in dieser Reihenfolge in einen anfangs leeren (2, 3)-Baum ein. Löschen Sie sodann die Schlüssel Z, A, L. Zeichnen Sie den Baum nach jedem Einfüge- und Löschvorgang, und zeigen Sie die Modifikation, welche durchgeführt werden.

Ein (2,3)-Baum hat folgende Grenzen:

- min children: 2, max children: 3
- min entries: 1, max entries: 2
- A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z

1. insert(A):

   $[A]$

2. insert(L):

   $[A|L]$

3. insert(G):

   $[A|G|L]$

   ⇒ Die Wurzel hat zu viele Einträge → Splitten

   ```
         [G]
        /   \
     [A]     [L]
   ```

4. insert(O):

   ```
         [G]
        /   \
     [A]     [L|O]
   ```

5. insert(D):

   ```
          [G]
         /   \
    [A|D]     [L|O]
   ```

6. insert(T):

   ```
          [G]
         /   \
    [A|D]     [L|O|T]
   ```

   ⇒ Das rechte Blatt $[L|O|T]$ hat zu viele Einträge → Rebalance

   ```
          [G|O]
         /  |  \
    [A|D]  [L]  [T]
   ```

7. insert(S):

   ```
          [G|O]
         /  |  \
    [A|D]  [L]  [S|T]
   ```

8. insert(X):

   ```
          [G|O]
         /  |  \
    [A|D]  [L]  [S|T|X]
   ```

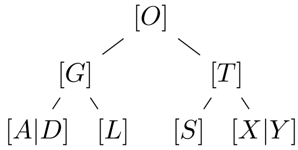
   ⇒ Das rechte Blatt $[S|T|X]$ hat zu viele Einträge → Rebalance

   ```
            [G|O|T]
          /  /   \  \
    [A|D]  [L]   [S]  [X]
   ```

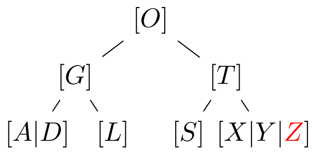
   ⇒ Die Wurzel hat zu viele Einträge & zu viele Kinder → Rebalance

   ```
               [O]
              /   \
           [G]     [T]
           / \     / \
      [A|D] [L]  [S] [X]
   ```

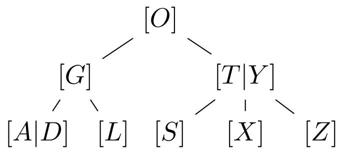
9. insert(Y):



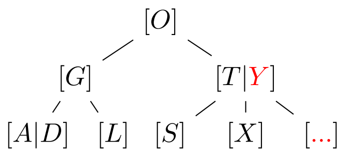
10. insert(Z):



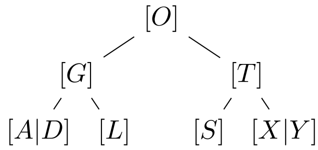
⇒ Der Knoten $[X|Y|Z]$ hat zu viele Einträge → Balancieren



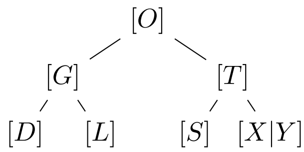
11. remove(Z):



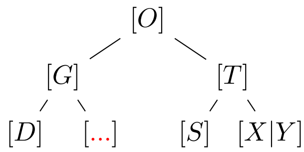
⇒ Rebalance $[Y]$ & [...] Node.



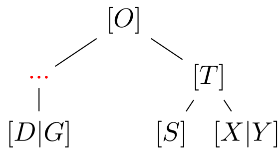
12. remove(A):



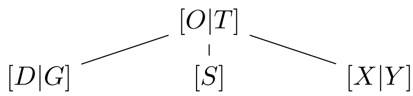
13. remove(L):



⇒ Blatt ist leer Rebalance



⇒ Knoten ist leer Rebalance $O\&T$



b) Wiederholen Sie die Teilaufgabe (a) mit einem (2, 4)-Baum.

```
min children: 2, max children: 4
min entries: 1, max entries: 3
A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z

insert(A):
              -----
              | A |
              -----
insert(L):
              ---------
              | A | L |
              ---------
insert(G):
              -------------
              | A | G | L |
              -------------
insert(O): first split
                 -----
                 | G |
                 -----
               /       \
              /         \
           | A |       | L | O |
insert(D):
                 -----
                 | G |
                 -----
               /       \
              /         \
         | A | D |    | L | O |
insert(T): second split
                 ---------
                 | G | O |
                 ---------
               /     |    \
              /      |     \
         | A | D | | L |   | T |
insert(S):
                 ---------
                 | G | O |
                 ---------
               /     |    \
              /      |     \
         | A | D | | L |   | S | T |
insert(X):
                 ---------
                 | G | O |
```

```
                ---------
              /     |    \
             /      |     \
         | A | D | | L |   | S | T | X |
insert(Y): rebasing the root -> third split
                ---------------
                | G    |    T |
                ---------------
               /       |       \
              /        |        \
         | A | D | | L | O | S | | X | Y |
insert(Z):
                ---------------
                | G    |    T |
                ---------------
               /       |       \
              /        |        \
         | A | D | | L | O | S | | X | Y | Z |
```
Starting tree:

                | G | T |

               / | \
              / | \
         | A | D | | L | O | S | | X | Y | Z |

delete(Z): delete from leaf

                | G | T |

               / | \
              / | \
         | A | D | | L | O | S | | X | Y |

delete(A): delete from leaf -> min 1 key required -> condition holds true
                ----
                | G | T |

               / | \
              / | \
         | D | | L | O | S | | X | Y |

delete(L): delete from Leaf -> 2 keys pressed -> node requirements
satisfied -> G < O and S < T -> Order condition satisfied.

                | G | T |

```
```

```
          /         |          \
         /          |           \
| D |       | O | S |    | X | Y |
```

Problem 3: (a,b)-Bäume

a) Beschreiben Sie, wie man in einem (a, b)-Baum mit n Schlüsseln die Operation succ(k) implementieren kann. Was ist die Laufzeit?

⇒ succ(k) - finde den Nachfolge vom Schlüssel k

1. Suche den Knoten "i", der den Eintrag k enthält
2. Wenn k nicht das größte Element in u ist, schaue ob es noch ein Teilbaum zwischen dem Element k und seinem direkten Nachfolger gibt.
   - Wenn Nein → dann gib den direkten Nachfolger von k zurück
   - Wenn ja, gehe in den Teilbaum und gebe das kleinste Element zurück
3. Wenn k das größte Element in u ist:
   - wenn i ein rechten Teilbaum besitzt, gehe in den rechten Teilbaum und gebe das kleinste Element zurück
   - ansonsten gehe zum Elternknoten und suche das erste Element, das größer als k ist und gebe es zurück

⇒ Die Laufzeit beträgt $O(logn)$, da die Höhe eines (a,b)-Baums $O(logn)$ ist.

b) Beschreiben Sie, wie man in einem (a, b)-Baum mit n Schlüsseln die Operation $findRange(k1, k2)$ implementieren kann, die alle Schlüssel k liefert, für die $k1 \leq k \leq k2$ ist. Die Laufzeit soll $O(blogan+s)$ betragen. Dabei ist s die Anzahl der gelieferten Schlüssel.

```
findRange(k_1,k_2):
 Sei T ein (a,b)-Baum mit Knoten v.
 Jeder Knoten besteht aus einem oder mehreren keys k_i, dabei sind die keys innerhalb
 eines Knoten von links(kleinster) nach rechts(größter) key sortiert.
 Jeder key hat zusätzlich einen Verweis (ab hier pointer genannt) auf seine
 Kinder- und Elternknoten.


 Pseusocode findRange(k_1,k_2):
 - Wenn gilt: k_1 == k_2 -> wenn die gesuchte Reichweite nur einen key beinhaltet
 gibt die Position des keys mittels get(k_2) zurück, wenn sie existiert.
 return get(k_2)

 - erstelle eine leere Liste: found_keys = []
 - erstelle einen counter für keys: left_boarder = k_1

 - Finde den key k_i >= k_1 mit der Funktion get(left_boarder), um die Linke
 Grenze zu bestimmen. get(left_boarder) ist notwendig, falls k_1
 nicht Teil des (a,b)-Baumes ist.
   - solange kein k_i gefunden wurde wiederhole diesen Funktionsaufruf, bis
   ein k_i gefunden wurde. Inkrementiere Dabei vor jeder nächsten Iteration
   den counter left_boarder.
```

```
    - Wenn gilt: k_i == k_2 -> dann liegt die gesuchte Reichweite nicht im Baum
return err

    - Wenn gilt: k_i >= k_1 -> hänge den key der Liste an und verlasse den Loop.
found_keys.append(k_i)
break

- // Diese Suche hat im worst-case eine Zeitkomplexität von O(b*log_a(n)). O(get) = O(log(n))
und dies muss maximal b-mal wiederholt werden, da der startkey k_i minimal
der kleinste key innerhalb eines Knotend v sein kann. Spätestens nach der b-ten
Inkrementierung ist der key k_i == Elternkey des Knotens v, in dem sich k_i zu Beginn
 befindet und dieser ist größer als k_1.
- Nun kann man iterative linear alle keys, für die gilt: k_j = found_nodes[0],
k_j <= k_2, an die Liste der gefundenen keys anhängen.
  - für Knoten v gilt: v = (k_1,...,k_l)
  - solange k_j <= k_2:
    - solange k_j <= k_l -> hänge k_j and die Liste der gefundenen keys an.
found_keys.append(k_j)

    - k_j = Elternkey von v
- return found_keys // gibt die Liste aller keys zurück, die gefunden wurden
found_keys[0] = k_1 und found_keys[len(found_keys)-1] = k_2
- Die Zeitkomplexität dieser Suche ist O(s*log(s)), wobei s die Anzahl der
besuchten keys ist. s-mal, da insgesamt s keys betrachtet wurden und
log(s)-mal, da innerhalb eines bestimmten Knoten nur ein bestimmter Teil von s
betrachtet wird.
  Die Dominate Klasse ist linear O(s)
- Für die Gesamt Zeitkomplexität gilt: O(b*log_a(n) + s), weil die beiden Teile
der Funktion squentiell ablaufen und nicht ineinander verschachtelt sind.
```

c) Seien $T1$ und $T2$ zwei (a, b)-Bäume, und sei $S1$ die Schlüsselmenge von $T1$ und $S2$ die Schlüsselmenge von $T2$. Sei x ein weiterer Schlüssel. Alle Schlüssel in $S1$ sind kleiner als x, und alle Schlüssel in $S2$ sind größer als x. Beschreiben Sie eine Operation join, die aus $T1$, $T2$ und x einen (a, b)-Baum für die Schlüsselmenge $S1 \cup \{x\} \cup S2$ erzeugt. Die Laufzeit sollte $O(b \log_a max\{|S1|, |S2|\})$ betragen. Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass $T1$ und $T2$ die gleiche Höhe haben. Achten Sie darauf, dass hinterher die (a, b)-Baum Eigenschaften wieder hergestellt werden.

1. Fall - $T1$ & $T2$ haben die gleiche Höhe
   - $\Rightarrow$ Sei $S1 < x < S2$
   - Setzte den Schlüssel x als Wurzel
   - Das linke Kind wird der Baum $T1$ und das rechte Kind wird der Baum $T2$
   - Da die Bäume schon in (a,b)-Baum Ordnung sind, müssen wir hier auch nicht weiter überprüfen
2. Fall - $T1$ & $T2$ haben unterschiedliche Höhe
   Angenommen $T1$ ist höher als $T2$
   - durchlaufe den größeren Baum($T1$) bis zur Höhe von $T2$
   - führe nun auf gleicher Höhe den Merge durch von $T1$, bis zur Höhe h, und $T2$
   - die Restlichen Knoten von T1 werden danach eingefügt, dabei müssen wir die (a,b)-Baum Ordnung überprüfen, da Knoten jetzt zu viele Elemente haben können $\Rightarrow$ wir müssen nach oben hin mit Splits oder Merges arbeiten

– Laufzeitanalyse
   - Das durchsteigen eines (a,b,)-Baums zur Höhe h hin dauert $O(\log_a max\{|S1|, |S2|\})$
   - Das spliten oder Mergen auf dem Pfad nach oben braucht $O(b)$, da ein Knoten maximal b Kinder haben kann.
   - Gesamtlaufzeit: $O(b \log_a max\{|S1|, |S2|\})$