

## ASSIGNMENT 2 — Algorithmen und Datenstrukturen

### Problem 1. Induktion und binäre Bäume

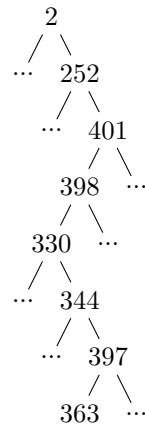
Ein binärer Baum heißt vollständig, falls jeder Knoten entweder null oder zwei Kinder besitzt.

- (a) Zeichnen Sie einen binären Suchbaum, der vollständig ist, und einen binären Suchbaum, der nicht vollständig ist.
- (b) Beweisen Sie durch eine geeignete Induktion: In jedem vollständigen binären Suchbaum ist die Anzahl der Blätter genau um eins größer als die Anzahl der inneren Knoten.
- (c) Formulieren Sie eine ähnliche Aussage für allgemeine binäre Suchbäume und beweisen Sie sie.

**Problem 2.** Binäre Suchbäume

- (a) Angenommen, wir haben einen binären Suchbaum  $T$ , welcher die Zahlen von 1 bis 1000 als Schlüssel speichert. Wir suchen in  $T$  nach dem Schlüssel 363. Bestimmen Sie für jede der folgenden Schlüsselfolgen, ob sie als Folge der Einträge auf dem Suchpfad nach 363 auftreten kann. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

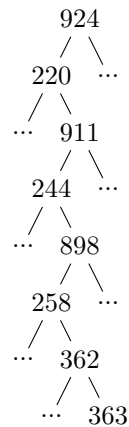
i. **2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363.**



| Schritt | Aktueller Knoten | Vergleich mit Ziel 363         | Nächster Schritt | Intervall für nächsten Knoten |
|---------|------------------|--------------------------------|------------------|-------------------------------|
| 1       | 2                | $363 > 2 \Rightarrow$ rechts   | 252              | [3, 1000]                     |
| 2       | 252              | $363 > 252 \Rightarrow$ rechts | 401              | [253, 1000]                   |
| 3       | 401              | $363 < 401 \Rightarrow$ links  | 398              | [253, 400]                    |
| 4       | 398              | $363 < 398 \Rightarrow$ links  | 330              | [253, 397]                    |
| 5       | 330              | $363 > 330 \Rightarrow$ rechts | 344              | [331, 397]                    |
| 6       | 344              | $363 > 344 \Rightarrow$ rechts | 397              | [345, 397]                    |
| 7       | 397              | $363 < 397 \Rightarrow$ links  | 363              | [345, 396]                    |
| 8       | 363              | Ziel erreicht                  | —                | —                             |

→ Answer

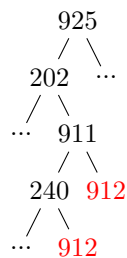
ii. **924, 220, 911, 244, 898, 258, 362, 363.**



| Schritt | Aktueller Knoten | Vergleich mit Ziel 363         | Nächster Schritt | Intervall für nächsten Knoten |
|---------|------------------|--------------------------------|------------------|-------------------------------|
| 1       | 924              | $363 < 924 \Rightarrow$ links  | 220              | $[1, 923]$                    |
| 2       | 220              | $363 > 220 \Rightarrow$ rechts | 911              | $[221, 923]$                  |
| 3       | 911              | $363 < 911 \Rightarrow$ links  | 244              | $[221, 910]$                  |
| 4       | 244              | $363 > 244 \Rightarrow$ rechts | 898              | $[245, 910]$                  |
| 5       | 898              | $363 < 898 \Rightarrow$ links  | 258              | $[245, 897]$                  |
| 6       | 258              | $363 > 258 \Rightarrow$ rechts | 362              | $[259, 897]$                  |
| 7       | 362              | $363 > 362 \Rightarrow$ rechts | 363              | $[363, 897]$                  |
| 8       | 363              | Ziel erreicht                  | —                | —                             |

→ Answer

iii. 925, 202, 911, 240, 912, 245, 363.

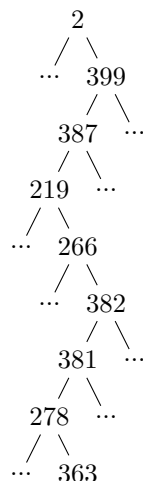


| Schritt | Aktueller Knoten | Vergleich mit Ziel 363         | Nächster Schritt | Intervall für nächsten Knoten    |
|---------|------------------|--------------------------------|------------------|----------------------------------|
| 1       | 925              | $363 < 925 \Rightarrow$ links  | 202              | $[1, 924]$                       |
| 2       | 202              | $363 > 202 \Rightarrow$ rechts | 911              | $[203, 924]$                     |
| 3       | 911              | $363 < 911 \Rightarrow$ links  | 240              | $[203, 910]$                     |
| 4       | 240              | $363 > 240 \Rightarrow$ rechts | 912              | $[241, 910]$                     |
| 5       | 912              | $363 < 912 \Rightarrow$ links  |                  | $912 > [910] \Rightarrow$ Fehler |

- Der Knoten 912 liegt nicht mehr im Intervall von  $[241, 910]$  und somit ist der Knoten nicht in der **Schlüsselfolge**.

→ Answer

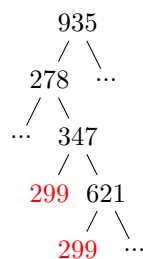
iv. 2, 399, 387, 219, 266, 382, 381, 278, 363.



| Schritt | Aktueller Knoten | Vergleich mit Ziel 363         | Nächster Schritt | Intervall für nächsten Knoten |
|---------|------------------|--------------------------------|------------------|-------------------------------|
| 1       | 2                | $363 > 2 \Rightarrow$ rechts   | 399              | [3, 1000]                     |
| 2       | 399              | $363 < 399 \Rightarrow$ links  | 387              | [3, 398]                      |
| 3       | 387              | $363 < 387 \Rightarrow$ links  | 219              | [3, 386]                      |
| 4       | 219              | $363 > 219 \Rightarrow$ rechts | 266              | [220, 386]                    |
| 5       | 266              | $363 > 266 \Rightarrow$ rechts | 382              | [267, 386]                    |
| 6       | 382              | $363 < 382 \Rightarrow$ links  | 381              | [267, 381]                    |
| 7       | 381              | $363 < 381 \Rightarrow$ links  | 278              | [267, 380]                    |
| 8       | 278              | $363 > 278 \Rightarrow$ rechts | 363              | [279, 380]                    |
| 9       | 363              | Ziel Erreicht!                 | -                | -                             |

→ Answer

v. 935, 278, 347, 621, 299, 392, 358, 363.



| Schritt | Aktueller Knoten | Vergleich mit Ziel 363         | Nächster Schritt | Intervall für nächsten Knoten    |
|---------|------------------|--------------------------------|------------------|----------------------------------|
| 1       | 935              | $363 < 935 \Rightarrow$ links  | 278              | [1, 934]                         |
| 2       | 278              | $363 > 278 \Rightarrow$ rechts | 347              | [279, 934]                       |
| 3       | 347              | $363 > 347 \Rightarrow$ rechts | 621              | [348, 934]                       |
| 4       | 621              | $363 < 621 \Rightarrow$ links  | 299              | [348, 620]                       |
| 5       | 299              | $363 > 299 \Rightarrow$ rechts |                  | $299 < [348] \Rightarrow$ Fehler |

- Der Knoten 299 liegt nicht mehr im Intervall von [348,620] und somit ist der Knoten nicht in der **Schlüsselfolge**.

→ Answer

- (b) Sei  $T$  ein binärer Baum mit  $n$  Knoten, und sei  $K$  eine total geordnete Menge von  $n$  Schlüsseln. Zeigen Sie, dass es genau eine Möglichkeit gibt, die Schlüssel aus  $K$  auf die Knoten von  $T$  zu verteilen, so dass die binäre Suchbaumeigenschaft erfüllt ist.

### Problem 3. AVL-Bäume

- (a) Fügen Sie die Schlüssel A, L, G, O, D, T, S, X, Y, Z in dieser Reihenfolge in einen anfangs leeren AVL-Baum ein. Löschen Sie sodann die Schlüssel Z, A, L. Zeichnen Sie den Baum nach jedem Einfüge- und Löschvorgang, und zeigen Sie die Rotationen, welche durchgeführt werden. Annotieren Sie dabei auch die Knoten mit ihrer jeweiligen Höhe.
- (b) Beweisen Sie: Beim Einfügen in einen AVL-Baum wird höchstens eine (Einfach- oder Doppel-)Rotation ausgeführt. Gilt das auch beim Löschen (Begründung)?

Submitted by Moritz Ruge & Lennard on 09 Mai 2025.