Algorithmen und Datenstrukturen SoSe25

-Assignment 4-

Moritz Ruge
Matrikelnummer: 5600961
Lennard Wittenberg
Matrikelnummer: —

Mai 2025

Problem 1: Rot-Schwarz Bäume und (2,4)-Bäume

In Aufgabe 3 auf dem 3. Aufgabenblatt wurden rot-schwarz Bäume definiert.

a) Zeigen Sie: Rot-schwarz Bäume und (2, 4)-Bäume sind äquivalent. Genauer: es gibt eine lokale Transformation, welche Gruppen von Knoten im rot-schwarz Baum in Knoten im (2, 4)-Baum überführt, und umgekehrt. Geben Sie eine solche Transformation an, und begründen Sie, dass Ihre Transformation die Bedingungen an rot-schwarz Bäume und an (2, 4)-Bäume erfüllt.

Problem 2: (2,3)-Bäume und (2,4)-Bäume

a) Fügen Sie die Schlüssel A, L, G, O, D, T, S, X, Y, Z in dieser Reihenfolge in einen anfangs leeren (2, 3)-Baum ein. Löschen Sie sodann die Schlüssel Z, A, L. Zeichnen Sie den Baum nach jedem Einfüge- und Löschvorgang, und zeigen Sie die Modifikation, welche durchgeführt werden.

Ein (2,3)-Baum hat folgende Grenzen:

- min children: 2, max children: 3
- min entries: 1, max entries: 2
- A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z

1. insert(A):

   $[A]$

2. insert(L):

   $[A|L]$

3. insert(G):

   $[A|G|L]$

   ⇒ Die Wurzel hat zu viele Einträge → Splitten

   $[G]$

   $[A]$ $[L]$

4. insert(O):

   $[G]$

   $[A]$ $[L|O]$

5. insert(D):

   $[G]$

   $[A|D]$ $[L|O]$

6. insert(T):

   $[G]$

   $[A|D]$ $[L|O|T]$

   ⇒ Das rechte Blatt $[L|O|T]$ hat zu viele Einträge → Rebalance

   $[G|O]$

   $[A|D]$ $[L]$ $[T]$

7. insert(S):

   $[G|O]$

   $[A|D]$ $[L]$ $[S|T]$

8. insert(X):

   $[G|O]$

   $[A|D]$ $[L]$ $[S|T|X]$

   ⇒ Das rechte Blatt $[S|T|X]$ hat zu viele Einträge → Rebalance

   $[G|O|T]$

   $[A|D]$ $[L]$ $[S]$ $[X]$

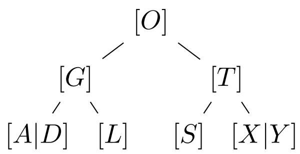
   ⇒ Die Wurzel hat zu viele Einträge & zu viele Kinder → Rebalance

   $[O]$

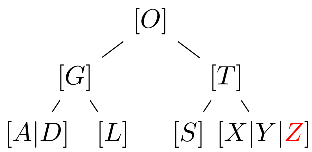
   $[G]$ $[T]$

   $[A|D]$ $[L]$ $[S]$ $[X]$

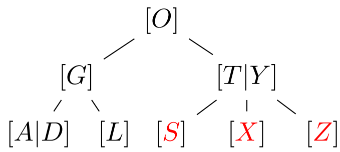
9. insert(Y):



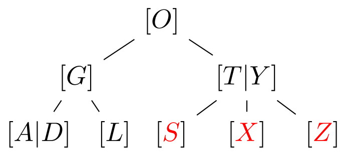
10. insert(Z):



⇒ Der Knoten $[X|Y|Z]$ hat zu viele Einträge → Balancieren



⇒ Der Knoten $[T|Y]$ hat zu viele Kinder → Balancieren



11. remove(Z):

12. remove(A):

13. remove(L):

b) Wiederholen Sie die Teilaufgabe (a) mit einem (2, 4)-Baum.

```
min children: 2, max children: 4
min entries: 1, max entries: 3
A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z

insert(A):
              -----
              | A |
              -----
insert(L):
              ---------
              | A | L |
              ---------
insert(G):
              -------------
              | A | G | L |
              -------------
insert(O): first split
                 -----
                 | G |
                 -----
               /       \
              /         \
           | A |       | L | O |
insert(D):
                 -----
                 | G |
                 -----
               /       \
              /         \
         | A | D |    | L | O |
insert(T): second split
                 ---------
                 | G | O |
                 ---------
               /     |    \
              /      |     \
         | A | D | | L |   | T |
insert(S):
                 ---------
                 | G | O |
                 ---------
               /     |    \
              /      |     \
         | A | D | | L |   | S | T |
insert(X):
                 ---------
                 | G | O |
```

```
                 ---------
               /     |    \
              /      |     \
         | A | D | | L |   | S | T | X |
insert(Y): rebasing the root -> third split
                 ---------------
                 | G    |    T |
                 ---------------
                /       |       \
               /        |        \
         | A | D | | L | O | S | | X | Y |
insert(Z):
                 ---------------
                 | G    |    T |
                 ---------------
                /       |       \
               /        |        \
         | A | D | | L | O | S | | X | Y | Z |
‘‘‘
Starting tree:
                 ---------------
                 | G    |    T |
                 ---------------
                /       |       \
               /        |        \
         | A | D | | L | O | S | | X | Y | Z |

delete(Z): delete from leaf
                 ---------------
                 | G    |    T |
                 ---------------
                /       |       \
               /        |        \
         | A | D | | L | O | S | | X | Y |

delete(A): delete from leaf -> min 1 key required -> condition holds true
                 ---------------
                 | G    |    T |
                 ---------------
                /       |       \
               /        |        \
         | D |     | L | O | S | | X | Y |

delete(L): delete from Leaf -> 2 keys pressed -> node requirements
satisfied -> G < O and S < T -> Order condition satisfied.

                 ---------------
                 | G    |    T |
                 ---------------
```

```
        /         |          \
       /          |           \
| D |      | O | S |    | X | Y |
```

Problem 3: (a,b)-Bäume

a) Beschreiben Sie, wie man in einem (a, b)-Baum mit n Schlüsseln die Operation succ(k) implementieren kann. Was ist die Laufzeit?

⇒ succ(k) - finde den Nachfolge vom Schlüssel k

1. Suche den Knoten "i", der den Eintrag k enthält
2. Wenn k nicht das größte Element in u ist, schaue ob es noch ein Teilbaum zwischen dem Element k und seinem direkten Nachfolger gibt.
   - Wenn Nein → dann gib den direkten Nachfolger von k zurück
   - Wenn ja, gehe in den Teilbaum und gebe das kleinste Element zurück
3. Wenn k das größte Element in u ist:
   - wenn i ein rechten Teilbaum besitzt, gehe in den rechten Teilbaum und gebe das kleinste Element zurück
   - ansonsten gehe zum Elternknoten und suche das erste Element, das größer als k ist und gebe es zurück

⇒ Die Laufzeit beträgt $O(logn)$, da die Höhe eines (a,b)-Baums $O(logn)$ ist.

b) Beschreiben Sie, wie man in einem (a, b)-Baum mit n Schlüsseln die Operation $findRange(k1, k2)$ implementieren kann, die alle Schlüssel k liefert, für die $k1 \leq k \leq k2$ ist. Die Laufzeit soll $O(blogan+s)$ betragen. Dabei ist s die Anzahl der gelieferten Schlüssel.

```
findRange(k_1,k_2):
 Sei T ein (a,b)-Baum mit Knoten v.
 Jeder Knoten besteht aus einem oder mehreren keys k_i, dabei sind die keys innerhalb
 eines Knoten von links(kleinster) nach rechts(größter) key sortiert.
 Jeder key hat zusätzlich einen Verweis (ab hier pointer genannt) auf seine
 Kinder- und Elternknoten.


 Pseusocode findRange(k_1,k_2):
 - Wenn gilt: k_1 == k_2 -> wenn die gesuchte Reichweite nur einen key beinhaltet
 gibt die Position des keys mittels get(k_2) zurück, wenn sie existiert.
 return get(k_2)

 - erstelle eine leere Liste: found_keys = []
 - erstelle einen counter für keys: left_boarder = k_1

 - Finde den key k_i >= k_1 mit der Funktion get(left_boarder), um die Linke
 Grenze zu bestimmen. get(left_boarder) ist notwendig, falls k_1
 nicht Teil des (a,b)-Baumes ist.
   - solange kein k_i gefunden wurde wiederhole diesen Funktionsaufruf, bis
   ein k_i gefunden wurde. Inkrementiere Dabei vor jeder nächsten Iteration
   den counter left_boarder.
```

```
    - Wenn gilt: k_i == k_2 -> dann liegt die gesuchte Reichweite nicht im Baum
return err

    - Wenn gilt: k_i >= k_1 -> hänge den key der Liste an und verlasse den Loop.
found_keys.append(k_i)
break

- // Diese Suche hat im worst-case eine Zeitkomplexität von O(b*log_a(n)). O(get) = O(log(n))
und dies muss maximal b-mal wiederholt werden, da der startkey k_i minimal
der kleinste key innerhalb eines Knotend v sein kann. Spätestens nach der b-ten
Inkrementierung ist der key k_i == Elternkey des Knotens v, in dem sich k_i zu Beginn
 befindet und dieser ist größer als k_1.
- Nun kann man iterative linear alle keys, für die gilt: k_j = found_nodes[0],
k_j <= k_2, an die Liste der gefundenen keys anhängen.
  - für Knoten v gilt: v = (k_1,...,k_l)
  - solange k_j <= k_2:
    - solange k_j <= k_l -> hänge k_j and die Liste der gefundenen keys an.
found_keys.append(k_j)

    - k_j = Elternkey von v
- return found_keys // gibt die Liste aller keys zurück, die gefunden wurden
found_keys[0] = k_1 und found_keys[len(found_keys)-1] = k_2
- Die Zeitkomplexität dieser Suche ist O(s*log(s)), wobei s die Anzahl der
besuchten keys ist. s-mal, da insgesamt s keys betrachtet wurden und
log(s)-mal, da innerhalb eines bestimmten Knoten nur ein bestimmter Teil von s
betrachtet wird.
  Die Dominate Klasse ist linear O(s)
- Für die Gesamt Zeitkomplexität gilt: O(b*log_a(n) + s), weil die beiden Teile
der Funktion squentiell ablaufen und nicht ineinander verschachtelt sind.
```

c) Seien $T1$ und $T2$ zwei (a, b)-Bäume, und sei $S1$ die Schlüsselmenge von $T1$ und $S2$ die Schlüsselmenge von $T2$. Sei x ein weiterer Schlüssel. Alle Schlüssel in $S1$ sind kleiner als x, und alle Schlüssel in $S2$ sind größer als x. Beschreiben Sie eine Operation join, die aus $T1$, $T2$ und x einen (a, b)-Baum für die Schlüsselmenge $S1 \cup x \cup S2$ erzeugt. Die Laufzeit sollte $O(blogamax|S1|, |S2|)$ betragen. Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass $T1$ und $T2$ die gleiche Höhe haben. Achten Sie darauf, dass hinterher die (a, b)-Baum Eigenschaften wieder hergestellt werden.