4. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Algorithmen und Datenstrukturen SoSe 2025

Wolfgang Mulzer

Abgabe am 23. Mai 2025 bis 10 Uhr im Whiteboard

Aufgabe 1 Rot-Schwarz Bäume und $(2, 4)$-Bäume *10 Punkte*

In Aufgabe 3 auf dem 3. Aufgabenblatt wurden rot-schwarz Bäume definiert.

(a) Zeigen Sie: Rot-schwarz Bäume und $(2, 4)$-Bäume sind äquivalent. Genauer: es gibt eine lokale Transformation, welche Gruppen von Knoten im rot-schwarz Baum in Knoten im $(2, 4)$-Baum überführt, und umgekehrt. Geben Sie eine solche Transformation an, und begründen Sie, dass Ihre Transformation die Bedingungen an rot-schwarz Bäume und an $(2, 4)$-Bäume erfüllt.

Aufgabe 2 $(2, 3)$-Bäume und $(2, 4)$-Bäume *10 Punkte*

(a) Fügen Sie die Schlüssel A, L, G, O, D, T, S, X, Y, Z in dieser Reihenfolge in einen anfangs leeren $(2, 3)$-Baum ein. Löschen Sie sodann die Schlüssel Z, A, L. Zeichnen Sie den Baum nach jedem Einfüge- und Löschvorgang, und zeigen Sie die Modifikation, welche durchgeführt werden.

(b) Wiederholen Sie die Teilaufgabe (a) mit einem $(2, 4)$-Baum.

Aufgabe 3 (a, b)-Bäume *10 Punkte*

(a) Beschreiben Sie, wie man in einem (a, b)-Baum mit n Schlüsseln die Operation `succ`(k) implementieren kann. Was ist die Laufzeit?

(b) Beschreiben Sie, wie man in einem (a, b)-Baum mit n Schlüsseln die Operation `findRange`(k_1, k_2) implementieren kann, die alle Schlüssel k liefert, für die $k_1 \leq k \leq k_2$ ist. Die Laufzeit soll $O(b \log_a n + s)$ betragen. Dabei ist s die Anzahl der gelieferten Schlüssel.

(c) Seien T_1 und T_2 zwei (a, b)-Bäume, und sei S_1 die Schlüsselmenge von T_1 und S_2 die Schlüsselmenge von T_2. Sei x ein weiterer Schlüssel. Alle Schlüssel in S_1 sind kleiner als x, und alle Schlüssel in S_2 sind größer als x. Beschreiben Sie eine Operation `join`, die aus T_1, T_2 und x einen (a, b)-Baum für die Schlüsselmenge $S_1 \cup \{x\} \cup S_2$ erzeugt. Die Laufzeit sollte $O(b \log_a \max\{|S_1|, |S_2|\})$ betragen.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass T_1 und T_2 die gleiche Höhe haben. Achten Sie darauf, dass hinterher die (a, b)-Baum-Eigenschaften wieder hergestellt werden.