

Aufgabe 1 AVL-Bäume

10 Punkte

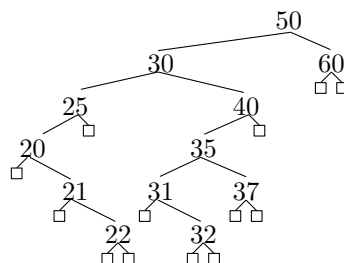
Diese Aufgabe wurde vom zweiten Aufgabenblatt nach hinten verlegt.

- (a) Fügen Sie die Schlüssel A, L, G, O, D, T, S, X, Y, Z in dieser Reihenfolge in einen anfangs leeren AVL-Baum ein. Löschen Sie sodann die Schlüssel Z, A, L. Zeichnen Sie den Baum nach jedem Einfüge- und Löschvorgang, und zeigen Sie die Rotationen, welche durchgeführt werden. Annotieren Sie dabei auch die Knoten mit ihrer jeweiligen Höhe.
- (b) Beweisen Sie: Beim Einfügen in einen AVL-Baum wird höchstens eine (Einfach- oder Doppel-)Rotation ausgeführt. Gilt das auch beim Löschen (Begründung)?

Aufgabe 2 findRange

10 Punkte

- (a) Betrachten Sie den folgenden binären Suchbaum:



- Wo befinden sich die Schlüssel, die kleiner sind als 37? Wo befinden sich die Schlüssel, die größer sind als 21? Wo befinden sich die Schlüssel, die zwischen 21 und 37 liegen?
- (b) Beschreiben Sie, wie man in einem AVL-Baum mit n Schlüssel die Operation $\text{findRange}(k_1, k_2)$ implementieren kann, die alle Schlüssel k liefert, für die $k_1 \leq k \leq k_2$ ist. Die Laufzeit soll $O(\log n + s)$ betragen. Dabei ist s die Anzahl der gelieferten Schlüssel.

Aufgabe 3 Rot-Schwarz Bäume

10 Punkte

Ein *rot-schwarz Baum* ist ein binärer Suchbaum, den wir auf die folgende Weise erweitern: Jeder Knoten und jeder leere Teilbaum erhält eine Farbe (rot oder schwarz), so dass die folgenden Regeln gelten: (i) die Wurzel ist schwarz; (ii) die leeren Teilbäume sind schwarz; (iii) die Kinder eines roten Knoten sind schwarz;

und (iv) die *schwarze Tiefe* aller leeren Teilbäume ist gleich, d.h., für alle leeren Teilbäume ist die Anzahl der schwarzen Knoten auf dem Pfad von der Wurzel zum jeweiligen Teilbaum gleich.

- (a) Zeichnen Sie drei Beispiele für rot-schwarz Bäume und erklären Sie, warum diese jeweils die Regeln für einen rot-schwarz Baum erfüllen.
- (b) Sei T ein rot-schwarz Baum, und sei s die schwarze Tiefe der leeren Teilbäume. Zeigen Sie, dass T mindestens $2^{s-1} - 1$ schwarze Knoten besitzt. Was folgt daraus über die Mindestanzahl von Knoten in einem rot-schwarz Baum mit Höhe h ? Folgern Sie: ein rot-schwarz Baum mit n Knoten hat Höhe $O(\log n)$.