

# הסתברות תרגילי חזרה

Moriya Bitton



# שאלה 1

על 6 פאות של קובייה מאוזנת נרשמו באקראי הספרות 1-6.

מה ההסתברות שסכום המספרים בכל זוג פאות נגדיות שווה ל-7?



# פתרון 1

על 6 פאות של קובייה מאוזנת נרשמו באקראי הספרות 1 – 6, מה ההסתברות שסכום המספרים בכל זוג פאות נגדיות שווה ל 7 :

• נגדיר  $B$  - כל האפשרויות לסידור זוגות בקוביה  $\Leftarrow |B| = \binom{6}{2} = 15$

• נגדיר  $A$  - האפשרות סידור של  $\{ \langle 1, 6 \rangle \langle 2, 5 \rangle \langle 3, 4 \rangle \} \Leftarrow 1$

• נקבל ש :

$$P(A|B) = \frac{1}{15} \checkmark$$



## שאלה 2

שחקן זורק קובייה הוגנת פעמיים. אם יוצא 1 או 2, השחקן מקבל נקודה אחת.

אם יוצא 3 או מספר גדול יותר, השחקן מקבל 5 נקודות.

השחקן זרק את הקובייה פעמיים וקיבל פחות מ-10 נקודות.

מה ההסתברות שקיבל 5 נקודות בזריקה השנייה?



## פתרון 2

• נגדיר  $B$  יצא 3, 4, 5, 6  $P(B) = \frac{2}{3}$

• נסמן  $A^1$  מאורע  $A$  בזריקה ראשונה וכד'

• אנחנו רוצים לחשב את

$$P(\text{get 5 points as second chance} \mid \text{total points is} < 10) = \frac{P(\text{get 5 points as second chance} \cap \text{total points is} < 10)}{P(\text{total points is} < 10)}$$

• נשים לב ש  $\text{get 5 points as second chance} \cap \text{total points is} < 10$  זה בדיוק רצף המאורעות  $A^1, B^2$  והן מאורעות בת"ל, כלומר:

$$\frac{P(\text{get 5 points as second chance} \cap \text{total points is} < 10)}{P(\text{total points is} < 10)} = \frac{P(B^2, A^1)}{P(\text{total points is} < 10)} = \frac{P(B^2) \cdot P(A^1)}{P(\text{total points is} < 10)} = \frac{\frac{2}{9}}{P(\text{total points is} < 10)}$$

• נחשב דרך המשלים (ניתן לעשות גם הסתברות שלמה ומגיעים לאותה תוצאה) כלומר :

$$\begin{aligned} P(\overline{\text{total points is} < 10}) &= P(\text{total points is} \geq 10) = P(\text{total points is} = 10) \\ &= P(B^2 \cap B^1) = P(B^2) P(B^1) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \\ &\Rightarrow P(\text{total points is} < 10) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

• סה"כ:

$$\frac{P(\text{get 5 points as second chance} \cap \text{total points is} < 10)}{P(\text{total points is} < 10)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

## שאלה 3

לגברת בלמו יש שני ילדים, נתון כי אחד מהם הוא בן.

א. מה ההסתברות ששני ילדיה הם בנים?

ב. בהינתן זה שהבן של דברת בלמו נולד ביום ה',

מה ההסתברות ששני ילדיה הם בנים?



## פתרון 3

מבחן נסיון 3-קד בלתי

הנחה

סוף דף

סוף דף

$$P(ענין 2 | 1, ק) = \frac{P(1, ענין 2) \cdot P(ענין 2)}{P(1, ק)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

סך האפשרויות: 4

1. קד ודמ	2. דמ וקד
3. קד ודמ	4. דמ וקד

$$P(קד | ענין 2) = \frac{P(קד \cap ענין 2)}{P(קד)} = \frac{P(קד, ענין 2) + P(קד, ענין 1)}{P(קד, ענין 2) + P(קד, ענין 1) + P(קד, ענין 3) + P(קד, ענין 4)} = \frac{1 + 6 + 6}{1 + 6 + 6 + 7 + 7} = \frac{13}{27}$$

## שאלה 4

בשל עומס פניות באחת מחברות הביטוח הישיר רק 60% מהפניות נענות מיד. שאר הפונים מתבקשים להשאיר את מספר הטלפון שלהם. ב-75% מהמקרים חוזר נציג חברת הביטוח לפונה באותו יום, ובשאר המקרים - למחרת.

הסיכוי שפונה ירכוש בחברה הוא: 0.8 אם נענה מיד, 0.6 אם חזרו אליו באותו יום, ו-0.4 אם חזרו אליו למחרת.

א. מה ההסתברות שאדם הפונה לחברת ביטוח ירכוש בה ביטוח?

ב. ידוע כי אדם רכש ביטוח בחברה.

מה ההסתברות שהשאיר את מספר הטלפון וחזרו אליו באותו יום?





# פתרון 4

א. מה ההסתברות שאדם הפונה לחברת ביטוח ירכוש בה ביטוח?

נסמן את המאורעות:

• נרכש בטוח ב  $Buy$

•  $Ans$  - נענה מייד,  $NoAns$  - השאיר מספר

•  $Tod$  חזרו אליו באותו יום

•  $Tom$  חזרו אליו למחרת

אז:

$$P(Buy) = P(Buy|Ans)P(Ans) + P(Buy|NoAns, Tod)P(NoAns, Tod) \\ + P(Buy|NoAns, Tom)P(NoAns, Tom)$$

$$= 0.8 * 0.6 + 0.4 * 0.75 * 0.6 + 0.4 * 0.25 * 0.4 = 0.7$$

ב. ידוע כי אדם רכש ביטוח בחברה. מה ההסתברות שהשאיר את מספר הטלפון וחזרו אליו באותו יום?

$$P(NoAns, Tod|Buy) = \frac{P(Buy|NoAns, Tod)P(NoAns, Tod)}{P(Buy)}$$

$$= \frac{0.6 * 0.4 * 0.75}{0.7} = 0.257$$

## שאלה 5

הלכת לרופא בגלל ציפורן חודרנית. הרופא בחר באקראי לבצע בדיקת דם הבודקת שפעת חזירים. ידוע סטטיסטית שווירוס זה פוגע ב-1 מתוך 10,000 אנשים באוכלוסייה. הבדיקה מדויקת ב-99 אחוז במובן שהסתברות ל-False Positive היא 1%, (ההסתברות לסיווג שגוי של אדם בריא כאדם חולה היא 1% מהמקרים). ההסתברות ל-False Negative היא 0, (אין סיכוי שהבדיקה תגיד על אדם חולה בשפעת חזירים כי הוא בריא). בבדיקה יצאת חיובי (יש לך שפעת).

א. מה ההסתברות שיש לך שפעת חזירים?

ב. נניח שחזרת מתאילנד לאחרונה ואתה יודע ש-1 מתוך 200 אנשים חזרו לאחרונה מתאילנד,

חזרו עם שפעת חזירים. בהינתן אותה סיטואציה כמו בשאלה א',

מה ההסתברות (המתוקנת) שיש לך שפעת חזירים?



# פתרון 5

א. מה ההסתברות שיש לך שפעת חזירים?

$$P(sick) = 10^{-4} = \frac{1}{10^4}$$

- מתוך 100 בריאים  $\Leftarrow$  1 חולה, 99 בריאים
- מתוך 100 חולים  $\Leftarrow$  100 חולים, 0 בריאים
- נסמן  $H$  אדם חולה,  $E$  יצא חיובי

$$P(sick|pos) = \frac{P(pos|sick)P(sick)}{P(pos)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{10^4}}{0.01009} = 0.0099 ??$$

$$P(sick|pos) = 1$$

$$P(sick) = \frac{1}{10^4}$$

$$P(pos) = P(pos|sick)P(sick) + P(pos|healthy)P(healthy) = 1 * 10^{-4} + 0.01 * (1 - 10^{-4}) = 0.01009$$

ב. נניח שחזרת מתאילנד לאחרונה ואתה יודע ש-1 מתוך 200 אנשים חזרו לאחרונה מתאילנד, חזרו עם שפעת חזירים. בהינתן אותה סיטואציה כמו בשאלה א', מה ההסתברות (המתוקנת) שיש לך שפעת חזירים?

$$P(sick|pos) = \frac{P(pos|sick)P(sick)}{P(pos)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{200}}{0.01495} = 0.344$$

$$P(sick|pos) = 1$$

$$P(sick) = \frac{1}{200}$$

$$P(pos) = P(pos|sick)P(sick) + P(pos|healthy)P(healthy) = 1 * \frac{1}{200} + 0.01 * \left(\frac{199}{200}\right) = 0.01495$$

# שאלה 6

אתם משחקים משחק קלפים.

לכל אחד מקלפי המספר [1-10] יש הערך שלו,

לכל אחד מקלפי הצורה יש ערך של 10,

לג'וקר (אחד בחבילה) תוכלו לבחור כל ערך שתרצו.

במשחק אתם מושכים שלושה קלפים מהחבילה.

אתם מנצחים, אם סכום הקלפים מגיע לרף מסוים או עובר אותו.

נניח שהרף הוא 4 - מה הסתברות הזכייה בסיבוב הראשון?

(ניתן לצאת מנקודת הנחה שאתם רוצים לנצח)



## פתרון 6

נחשב דרך המשלים, כלומר מה ההסתברות להפסיד? רק אם יצא רצף של 1, 1, 1, ולכן:

$$1 - \left( \frac{4}{53} \cdot \frac{3}{52} \cdot \frac{2}{51} \right) = 0.999 \checkmark$$



# שאלה 7

במפעל פועלות שתי מכונות, מכונה A ו-B.

10% מתוצרת המפעל מיוצרים במכונה A והשאר (90%) מיוצרים במכונה B.

1% מהמוצרים המיוצרים במכונה A ו-5% מהמוצרים המיוצרים במכונה B הינם פגומים.

א. נבחר מוצר באקראי. מה ההסתברות שהוא פגום?

ב. אחרי ביקור של הטכנאי שמטפל במכונה B, מוצאים ש-1.9% ממוצרי המפעל הם פגומים.

מה עכשיו ההסתברות שמוצר המיוצר במכונה B יהיה פגום?



# פתרון 7

א. נבחר מוצר אקראי. מה ההסתברות שהוא פגום?

$$P(\text{fail}) = P(\text{fail}|A) P(A) + P(\text{fail} | B) P(B)$$

$$\frac{1}{100} \cdot \frac{10}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{90}{100} = \frac{46}{1000} = 0.046$$

ב. אחרי ביקור של הטכנאי שמטפל במכונה B, מוצאים ש-1.9% ממוצרי המפעל הם פגומים. מה עכשיו ההסתברות שמוצר המיוצר במכונה B יהיה פגום?

נשים לב שהנתונים השתנו אבל נוכל להשתמש באותה משוואה על מנת לחלץ את  $P(\text{fail} | B)$

$$P(\text{fail}) = P(\text{fail}|A) P(A) + P(\text{fail} | B) P(B)$$

$$0.019 = 0.001 + P(\text{fail} | B) * 0.9$$

$$0.018 = 0.9 * P(\text{fail} | B) \iff P(\text{fail} | B) = 0.02$$

## שאלה 8

נתונה חבילת קלפים רגילה ומעורבבת המכילה גם קלף ג'וקר אחד.

משכתם ארבעה קלפים בזה אחר זה (בלי להחזיר לחבילה).

מה ההסתברות שבאותם ארבעה קלפים יש קלף אחד מכל סוג (לב, תלתן, עלה ויהלום)?





## פתרון 8

- עבור הקלף הראשון ההסתברות להוציא קלף שאינו גוקר היא:  $\frac{52}{53}$
- עבור הקלף השני ההסתברות להוציא קלף שאינו גוקר ואינו מהסדרה הראשונה היא:  $\frac{52}{53} \cdot \frac{38}{52}$
- ...
- סה"כ:

$$\frac{52}{53} \cdot \frac{39}{52} \cdot \frac{26}{51} \cdot \frac{13}{50} = 0.0975 \checkmark$$



## שאלה 9

בארנק נמצאים 8 מטבעות הוגנים ו-2 מטבעות המראים H בהסתברות  $2/3$   
ו-T בהסתברות  $1/3$ .

שולפים באקראי מטבע מהארנק ומטילים אותו.

א. מה ההסתברות שיתקבל H?

ב. אם ידוע שהתקבל H, מה ההסתברות שהמטבע שנבחר הוא הוגן?



## פתרון 9

א. מה ההסתברות שיתקבל  $H$ ?

$$\begin{aligned} P(H) &= P(H|\text{fair coin}) P(\text{fair coin}) + P(H|\text{specail coin}) P(\text{specail coin}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{10} = 0.533 \end{aligned}$$

ב. אם ידוע שהתקבל  $H$ , מה ההסתברות שהמטבע שנבחר הוא הוגן?

$$P(\text{fair coin}|H) = \frac{P(H|\text{fair coin}) \cdot P(\text{fair coin})}{P(H)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10}}{0.5332} = 0.75$$



# הסוף

