הסתברות

Moriya Bitton

מרחב ההסתברות

מרחב ההסתברות הוא זוג (Pro,Ω)

כאשר Ω הוא קבוצה הנקראת **מרחב המדגם**,

ו- $Pro:\Omega \to [0,1]$ היא פונקציה הנקראת **פונקציית ההסתברות** המקיימת:

$$\sum_{\omega\in\Omega} Pro(\omega) = 1$$

הגדרות בסיסיות

מרחב המדגם: כל האפשרויות, נסמן: $\boldsymbol{\Omega}$

<u>דוגמא</u>: בהטלת קובייה: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

מאורע: תוצאה אפשרית מבין כל התוצאות הקיימות, נסמן: $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}$

<u>דוגמא</u>: האפשרות לקבל את התוצאה 4 בהטלת קובייה: $\omega = \{4\}$

הסתברות: הסבירות להתרחשות מאורע ω מתוך מרחב המדגם Ω.

<u>דוגמא</u>: ההסתברות לקבל את המאורע ω בהטלת קובייה הוא:

$$\text{Pro}(\omega = 4) = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{\{4\}}{\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{1}{6}$$

הגדרות בסיסיות

מאורע בלתי אפשרי: מאורע בעל ההסתברות 0.

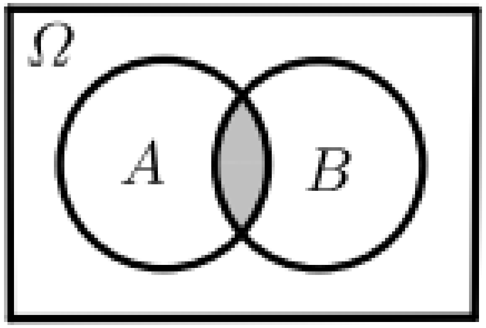
<u>דוגמא</u>: האפשרות לקבל 7 בהטלת קובייה:

$$Pro(\omega = 7) = 0$$

מאורע וודאי: מאורע בעל ההסתברות 1.

<u>דוגמא</u>: האפשרות לקבל תוצאה בטווח [1,6] בהטלת קובייה:

$$Pro(\omega \epsilon [1,6]) = 1$$



פעולת חיתוך

נותנת את **המשותף** בין המאורעות הנחתכים.

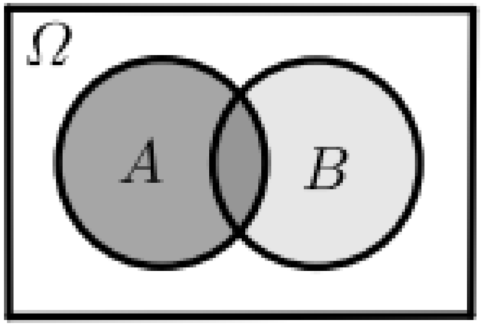
חיתוך בין המאורע A למאורע B, יסומן כך: $\boldsymbol{A \cap B}$.

דוגמא: בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל מספר שמתחלק ב-3 הן: $A = \{3,6\}$,

והאפשרויות לקבל מספר זוגי הן: $B = \{2,4,6\}$.

לכן תוצאה המתחלקת גם ב-3 וגם ב-2 היא חיתוך שני המאורעות:

$$A \cap B = \{6\}$$



פעולת איחוד

נותנת את כל האפשרויות שנמצאות **לפחות בתוך אחד מהמאורעות**.

איחוד מאורע A למאורע B, יסומן כך: $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$.

<u>דוגמא</u>: בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל מספר שמתחלק ב-2 הן: $A = \{2,4,6\}$,

והאפשרויות לקבל מספר שמתחלק ב-5 הן: $B = \{5\}$.

לכן תוצאה המתחלקת ב-2 או ב-5 היא איחוד שני המאורעות:

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

הסתברות של איחוד מאורעות

$$\boldsymbol{Pro(A \cup B) = Pro(A) + Pro(B) - Pro(A \cap B)}$$

<u>דוגמא</u>: בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל מספר שמתחלק ב-3 הן: $A = \{3,\mathbf{6}\}$,

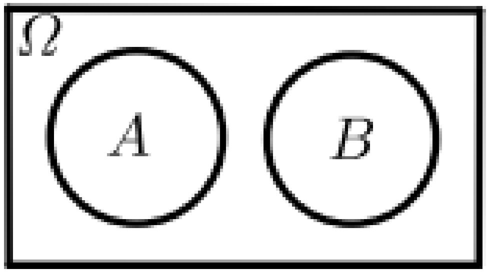
והאפשרויות לקבל מספר זוגי הן: $B = \{2,4,\mathbf{6}\}$.

לכן תוצאה המתחלקת ב-3 או ב-2 היא איחוד שני המאורעות:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, \mathbf{6}\}$$

שימו לב, כדי להימנע מכפילויות, החסרנו את החיתוך בין שני המאורעות:

$$A \cap B = \{\mathbf{6}\}$$



מאורעות זרים

מאורעות זרים כאשר אין להם **אף איבר משותף**,

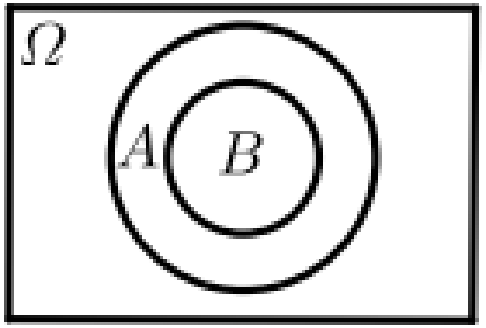
כלומר הם לא יכולים להתרחש בו זמנית, יסומן כך: $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{\,\}$.

<u>חיתוך</u>: $Pro(A \cap B) = 0$ || **<u>איחוד</u>**: $Pro(A \cup B) = Pro(A) + Pro(B)$.

<u>דוגמא</u>: בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל מספר שמתחלק ב-3 הן: $A = \{3,6\}$,

והאפשרויות לקבל מספר המתחלק ב-5 הן: $B = \{5\}$.

לא ניתן לקבל מספר המתחלק גם ב-3 וגם ב-5 בהטלת קובייה.



מאורעות מוכלים

עבור שני מאורעות שונים מ-0, נאמר שהמאורע A מכיל את המאורע B אם **כל איברי מאורע $\boldsymbol{B}$ מוכלים במאורע $\boldsymbol{A}$**, יסומן כך: $\boldsymbol{B \subset A}$.

<u>חיתוך</u>: $Pro(A \cap B) = Pro(B)$|| **<u>איחוד</u>**: $Pro(A \cup B) = Pro(A)$.

<u>דוגמא</u>: בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל מספר שמתחלק ב-2 הן: $A = \{2,4,6\}$,

והאפשרויות לקבל מספר המתחלק ב-4 הן: $B = \{4\}$.

לכן איחוד המאורעות הינו:

$$A \cup B = A = \{2, 4, 6\}$$

הסתברות מותנית

ההסתברות המותנית של מאורע A בהינתן מאורע B: היא הסיכוי להתרחשות מאורע A בהנחה שמאורע B אכן התרחש, קיום הנחה זו מצמצמת את מרחב המדגם.

$$\boldsymbol{Pro(A|B) = \frac{Pro(A \cap B)}{Pro(B)}}$$

<u>דוגמא</u>: בהטלת קובייה, בהינתן תוצאה זוגית מרחב המדגם שלנו קטן: $\Omega = \{2,4,6\}$, נרצה לחשב את ההסתברות לקבל מספר המתחלק ב-3:

$$Pro(A_3|B_2) = \frac{Pro(A_3 \cap B_2)}{Pro(B_2)} = \frac{\{6\}}{\{2,4,6\}} = \frac{1}{3}$$

כלל השרשרת (המכפלה)

ההסתברות המותנית של מאורע A וגם של מאורע B.

$$\boldsymbol{Pro(A\cap B)=Pro(B)*Pro(A|B)}$$

<u>דוגמא</u>: בהטלת קובייה, נרצה לחשב את ההסתברות לקבל תוצאה המתחלקת ב-3 וב-2,

נקבל:

$$Pro(A_3\cap B_2)=Pro(B_2)*Pro(A_3|B_2)=\frac{\{2,4,6\}}{\Omega}*\frac{\{6\}}{\{2,4,6\}}=\frac{3}{6}*\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

נוסחת ההסתברות השלמה

נניח ש-A מאורע כלשהו ונניח ש- $B_1, B_2, \ldots, B_k$ מאורעות זרים המקיימים:

$$\bigcup_{i \in k} B_i = \Omega$$

אז:

$$\boldsymbol{Pro(A) = \sum_{i \in k} Pro(A|B_i) * Pro(B_i)}$$

<u>דוגמא:</u>

במפעל 3 מכונות: מכונה 1 מייצרת 50% מתוצרת המפעל, ושיעור הפגומים שלה הוא 5%,

מכונה 2 מייצרת 30% מתוצרת המפעל, ושיעור הפגומים שלה הוא 7%,

מכונה 3 מייצרת 20% מתוצרת המפעל, ושיעור הפגומים שלה הוא 10%.

בוחרים באקראי מוצר שיוצר במפעל. **מה ההסתברות שהוא פגום?**

<u>פתרון:</u>

נסמן B- המוצר פגום.

$$Pro(B)=\sum_{i=1,2,3}P(B|A_i)*P(A_i)=\left[\frac{5}{100}*\frac{50}{100}\right]+\left[\frac{7}{100}*\frac{30}{100}\right]+\left[\frac{10}{100}*\frac{20}{100}\right]=$$

$$\frac{25}{1000}+\frac{21}{1000}+\frac{20}{1000}=\frac{66}{1000}=0.066\ \blacksquare$$

חוק בייס

חוק בייס מאפשר לחשב את **ההסתברות המותנית ההפוכה,**

ההסתברות המותנית של B בהינתן A.

$$\boldsymbol{Pro(B|A) = \frac{Pro(A|B) \, * \, Pro(B)}{Pro(A)}}$$

דוגמא (נוסיף סעיף לתרגיל הקודם):

בוחרים באקראי מוצר שיוצר במפעל, והתברר שהוא פגום.

מה ההסתברות שהוא יוצר במכונה 1?

פתרון:

$$Pro(A_1|B)=\frac{Pro(B|A_1)*Pro(A_1)}{Pro(B)}=$$

$$\frac{\frac{5}{100}*\frac{50}{100}}{\frac{66}{1000}}=\frac{\frac{25}{1000}}{\frac{66}{1000}}=\frac{25}{66}=0.379\blacksquare$$

משתנה מקרי בדיד

משתנה מקרי בדיד (נקרא גם: משתנה אקראי) הוא משתנה מקרי אשר מקבל ערכים מקבוצה סופית או בת מניה.

$$\boldsymbol{\sum_{x \epsilon A} Pro(X = x) = 1}$$

דוגמא:

נאמר שאם תוצאת הטלת הקובייה היא **אי זוגית** המשתנה המקרי X מקבל **0**, אחרת מקבל את הערך **1** (תוצאת הטלת הקובייה היא **זוגית**).

אז הקבוצה $A = \{0,1\}$ היא בת שני איברים ו-X מקבל ערכים מקבוצה זו.

התפלגות מותנית

נגדיר את Y, X שני **משתנים מקריים** בעלי **התפלגות משותפת**.

אז **ההתפלגות המותנית של Y בהינתן X**,

היא **ההתפלגות של Y** כאשר **ערכו של X קבוע וידוע**.

$$\boldsymbol{Pro(Y = y \mid X = x) = \frac{Pro(X = x \cap Y = y)}{Pro(X = x)}}$$

הסוף