

## שאלה 1: חלוקת חפצים עם מס

נתונה בעיית חלוקה עם כסף, של  $m$  חפצים בין  $n$  אנשים. כל אדם המקבל סכום כסף חיובי כלשהו  $x$ , צריך לשלם  $t \cdot x$  מס הכנסה, כאשר  $t$  הוא מספר קבוע כלשהו בין 0 ל-1 (נניח  $t = 0.3$  זה 30% מס).

א. הראו שאלגוריתם "המכרז השווה" לא תמיד מחזיר חלוקה ללא קנאה.

\* ב. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה, או הוכיחו שלא קיים כזה.

### פתרון- סעיף א':

נגדיר:

- $n$  שחקנים:  $x_1, x_2, x_3$
- $m$  חפצים:  $y_1, y_2, y_3$
- את טבלת הערכים הבאה:

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
$x_1$	$v_1(y_1) = 60$	$v_1(y_2) = 50$	$v_1(y_3) = 10$	$total_1 = 120$
$x_2$	$v_2(y_1) = 50$	$v_2(y_2) = 40$	$v_2(y_3) = 100$	$total_2 = 190$
$x_3$	$v_3(y_1) = 50$	$v_3(y_2) = 20$	$v_3(y_3) = 90$	$total_3 = 160$
	$sum_1 = 160$	$sum_2 = 110$	$sum_3 = 200$	<b><math>Total\ profit = 210</math></b>

לפי אלגוריתם "המכרז השווה" כל שחקן מקבל תשלום בסך:  $\frac{Total\ profit}{n}$ ,  $t$ : א"כ:  $\frac{210}{3} = 70$ .

כעת הערך של כל שחקן לאחר חלוקת החפצים הוא:

$$p_1 = \frac{Total\ profit}{n} - \{v_1(y_1) + v_1(y_2)\} = 70 - \{60 + 50\} = -40$$

$$p_2 = \frac{Total\ profit}{n} - \{v_2(y_3)\} = 70 - \{100\} = -30$$

כיוון ש:  $p_1, p_2 < 0$  הם לא מחויבים בתשלום מיסים, לעומת זאת  $p_3 > 0$  לכן הוא יחויב בתשלום:

$$p_3 = \frac{Total\ profit}{n} * (1 - tax) = 70 * (1 - 0.3) = 49$$

נקבל ששחקן 3 מקנא בשחקנים 1,2 ושחקן 2 מקנא בשחקן 1, בהתאם לשווי הסלים של כל אחד מהם:

$$profit_1 > profit_2 > profit_3$$

קיבלנו חלוקה עם קנאה.

**פתרון- סעיף ב':****נגדיר:**

- $n$  שחקנים:  $x_1, x_2, \dots, x_n$
- $m$  חפצים:  $y_1, y_2, \dots, y_m$
- הערך של חפץ  $j$  עבור שחקן  $i$  הוא:  $v_i(y_j)$

נאמר ששחקן  $i$  הציע את הסכום הגדול ביותר עבור חפץ  $j$  ולכן הוא מקבל אותו, ז"א:

$$v_i(y_j) > v_1(y_j), v_2(y_j), \dots, v_{i-1}(y_j), v_{i+1}(y_j), \dots, v_n(y_j)$$

עבור חפץ  $j$  המנהל מקבל:  $tax \cdot v_i(y_j)$ .

נסמן ב-  $sum_j$  את סכום הערכים של כל  $n$  השחקנים עבור חפץ  $j$ :

$$sum_j = v_1(y_j) + \dots + v_n(y_j)$$

נחשב את החלק היחסי שכל אחד מהשחקנים צריך לשלם עבור ה- $tax$  של חפץ  $j$  בהתאם לערכו:

$$tax_{v_i}(y_j) = tax \cdot \frac{v_i(y_j)}{sum_j}$$

נוודא שסכום המיסים היחסי שכל שחקן משלם שווה לערך המיסים של המנהל (כלומר הרווח של המנהל עבור חפץ  $j$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{i \in n} tax_{v_i}(y_j) &= \sum_{i \in n} tax \cdot \frac{v_i(y_j)}{sum_j} = tax \cdot \left\{ \frac{v_1(y_j)}{sum_j} + \dots + \frac{v_n(y_j)}{sum_j} \right\} \\ &= tax \cdot \frac{v_1(y_j) + \dots + v_n(y_j)}{sum_j} = tax \cdot \frac{sum_j}{sum_j} = tax \end{aligned}$$

שחקן  $i$  יקבל את החפץ  $j$  וכל אחד מ- $\{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$  השחקנים האחרים יקבל את התשלום היחסי:

$$p_z(y_j) = \frac{v_i(y_j)}{n} \cdot \left\{ tax \cdot \frac{v_z(y_j)}{sum_j} \right\}$$

**האלגוריתם מבטיח:**

- אין לשחקנים אינטרס לעשות מניפולציה- נאמר ששחקן כלשהו יעריך חפץ נמוך יותר מערכו האמתי עבור אותו שחקן, כתוצאה מכך  $p_z(y_j)$  יקטן.
- פוטנציאל רווח והפסד שווים- אם חפץ מסוים חסר ערך עבור שחקן, משמע השחקן העריך אותו ב-0, אז השחקן לא יחויב במיסים ומנגד לא יזכה בתשלום עבור אותו החפץ.
- כל שחקן ישלם את החלק היחסי למיסים בהתאם לערך החפץ עבורו.