מטלה - חלוקה הוגנת של קרקעות ועוגות

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית * מזכות בניקוד כפול.

שאלה 1: חלוקה פרופורציונלית בשני מימדים

נתונה חלקת-אדמה בצורת ריבוע. יש לחלק אותה בין שני אנשים, כך שכל אחד יקבל **ריבוע.**

א. הראו דוגמה שבה לא קיימת חלוקה פרופורציונלית.

* ב. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה "חצי פרופורציונלית" לשני אנשים, כלומר, כל שחקן i מקבל ריבוע X_i ששוויו לפחות רבע מהעוגה כולה:

$$V_i(X_i) >= V_i(C) / 4$$

הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

שאלה 2: חלוקה הוגנת עם ערכים שליליים

קבוצה של n אורחים הגיעו למסיבת יום-הולדת וקיבלו עוגה. העוגה נשרפה בתנור – אבל האורחים עדיין חייבים לאכול את העוגה כדי שלא להעליב את המארחים. כמובן, כל אחד מהאורחים מעדיף לאכול כמה שפחות עוגה, אבל יש להם העדפות שונות לגבי כמה כל אחד מהחלקים בעוגה הוא גרוע (לדוגמה, יש כאלה ששונאים יותר דובדבנים שרופים, ויש כאלה ששונאים יותר קרם שוקולד שרוף, וכו').

א. הסבירו למה אלגוריתם "המפחית האחרון" אינו עובד במקרה זה. הסבירו איך לתקן אותו כך שייתן חלוקה פרופורציונלית.

ב. הסבירו למה אלגוריתם "אבן פז" אינו עובד במקרה זה. הסבירו איך לתקן אותו כך שייתן חלוקה פרופורציונלית.

שאלה 3: חלוקה עם זכויות לא-שוות

עמי ותמי עזרו לאמא להכין עוגה, אבל תמי עזרה יותר. עמי השקיע k שעות ותמי השקיעה n שעות, כאשר $n>k$. אמא רוצה לחלק את העוגה ביניהם בצורה הוגנת בהתאם לכמות ההשקעה.

א. תנו הגדרה הגיונית למושג "חלוקה פרופורציונלית" במצב זה, בעזרת הפונקציה V_i (פונקציית הערך של שחקן i), ובעזרת הפרמטרים n, k.

ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית לפי ההגדרה של סעיף א. הוכיחו את נכונות האלגוריתם וחשבו את סיבוכיות זמן-הריצה שלו.

שאלה 4: משולש החלוקות

רוצים לחלק נהר באורך 300 מטר בין שלושה אנשים. לאורך הנהר, בין 0 ל-100 מטר גדלים עשבים, בין 100 ל-200 מטר גדלים שיחים, ובין 200 ל-300 גדלים עצים. אנשים מייחסים ערכים שונים לעשבים, שיחים, ועצים, לפי הטבלה הבאה (הטבלה כוללת את הערך ל-100 מטר):

- עשבים, שיחים, עצים
- שחקן א: 50 , 30 , 20
- שחקן ב: 30 , 40 , 30
- שחקן ג: 10 , 20 , 70

ציירו את משולש-החלוקות, חלקו אותו למשולשונים עם אורך צלע של 25 מטר, וחשבו את המספרים שכותב כל אחד מהשחקנים על כל אחד מהקודקודים. הסבירו את אופן החישוב.

* שאלה 5: הוכחת הלמה של ספרנר

לא הספקנו להוכיח את הלמה בכיתה, אז נראה הוכחה (אחרת) כאן, עבור $n=3$.

יש להוכיח כל סעיף בהסתמך על הסעיפים הקודמים.

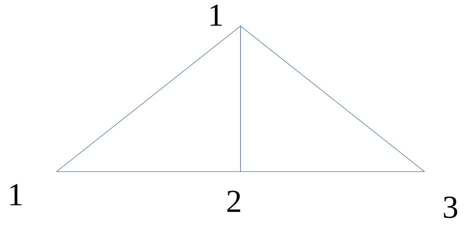
א. כזכור, ה**דרגה** של צומת בגרף לא-מכוון היא מספר השכנים שלו בגרף. הוכיחו: סכום הדרגות של כל הצמתים בגרף הוא מספר זוגי.

ב. נתון גרף עם צמתים השייכים לשלוש קבוצות:

- בקבוצה א – לכל הצמתים יש דרגה 1.
- בקבוצה ב – לכל הצמתים יש דרגה 0 או 2.
- בקבוצה ג – יש צומת אחד עם דרגה אי-זוגית.

הוכיחו: מספר הצמתים בקבוצה א הוא אי-זוגי [השתמשו בסעיף א].

ג. נתון משולש כלשהו, המחולק למשולשונים, ועל כל קודקוד של משולשון יש מספר מהקבוצה {1, 2, 3}. נגדיר גרף לא-מכוון, שבו כל משולשון הוא צומת, ובנוסף יש צומת אחד בשם "חוץ" המייצג את כל המרחב שמחוץ למשולש. יש קשת בין שני צמתים, אם ורק אם הם סמוכים זה לזה, ועל הצלע שביניהם נמצאים המספרים 1, 2. למשל, בדוגמה למטה, תהיה קשת בין המשולשון הימני למשולשון השמאלי, וכן תהיה קשת בין המשולשון השמאלי לבין "חוץ":



הוכיחו:

- לכל צומת המייצג משולשון מגוון יש דרגה 1.
- לכל צומת המייצג משולשון שאינו מגוון יש דרגה 0 או 2.
- אם דרגת הצומת "חוץ" היא איזוגית, אז יש מספר איזוגי של משולשונים מגוונים [השתמשו בסעיף ב].

ד. הגדרה: **תיווי ספרנר** הוא סימון של קודקודי המשולשונים במספרים 1, 2, 3, כך שעל כל קודקוד ראשי של המשולש הגדול ישנו מספר אחר (למשל, על הקודקוד העליון כתוב 1, על השמאלי התחתון כתוב 2, ועל הימני התחתון כתוב 3), ועל הצלע שבין שני קודקודים ראשיים כתובים רק מספרים שנמצאים על קצות הצלע (למשל, על הצלע בין קודקוד 1 לקודקוד 2 כתובים רק המספרים 1 או 2).

הוכיחו: בכל תיווי ספרנר, בהיקף של המשולש הגדול ישנו מספר איזוגי של צלעות שקצותיהן מסומנים במספרים 1, 2.

ה. הוכיחו: בכל תיווי ספרנר יש לפחות משולש מגוון אחד [השתמשו בסעיפים ג, ד].