

מטלה - חלוקת חפצים בדידים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול.

שאלה 1: מיכסה עליונה ותחתונה

המיכסה העליונה של מפלגה היא מספר המושבים המגיע לה מעוגל כלפי מעלה; המיכסה התחתונה של מפלגה היא מספר המושבים המגיע לה מעוגל כלפי מטה.

א. הראו דוגמה עם שלוש מפלגות, שבה שיטת ג'פרסון נותנת למפלגה יותר מהמיכסה העליונה שלה.

ב. הראו דוגמה עם שלוש מפלגות, שבה שיטת אדמס נותנת למפלגה פחות מהמיכסה התחתונה שלה.

* ג. הוכיחו, שכאשר יש שתי מפלגות, כל שיטת-מחלק עם פונקציה f המקיימת לכל s

$$s \leq f(s) \leq s+1$$

נותנת לכל מפלגה את המיכסה העליונה שלה או את המיכסה התחתונה שלה.

שאלה 2: חלוקת המושבים בכנסת

א. מצאו באינטרנט את תוצאות הבחירות האחרונות לכנסת. הפעילו את שיטת וובסטר על המפלגות שעברו את אחוז החסימה. השוו את התוצאות להרכב הכנסת כיום: אילו מפלגות היו מפסידות ואילו מפלגות היו מרוויחות מהשינוי?

* ב. מהו y הגדול ביותר, כך ששיטת המחלק עם $f(s) = s + y$ נותנת כנסת שונה מהכנסת הנוכחית? חשבו את y ברמת דיוק של 0.001 לפחות.

* שאלה 3: איזו שיטה טובה יותר למפלגות קטנות?

נתונות שתי שיטות-מחלק עם פונקציות-מחלק f, g .

נתון, שלכל a, b כאשר $a < b$, מתקיים:

$$f(a)/f(b) < g(a)/g(b).$$

הוכיחו, ששיטה f טובה למפלגות קטנות לפחות כמו שיטה g .

(כלומר: אם מפלגה א קטנה יותר ממפלגה ב, אז בחלוקת מספר מושבים קבוע בין מפלגה א למפלגה ב, מפלגה א תקבל בשיטה f לפחות אותו מספר מושבים כמו שהיתה מקבלת בשיטה g).

שאלה 4: זיהוי הטיית

כזכור, שיטת הנטינגטון-היל היא שיטת-מחלק עם פונציית המחלק הבאה:

$$f(s) = \sqrt{s(s+1)}$$

זו השיטה המקובלת בארה"ב לחלוקת מושבים בבית-הנבחרים בין המדינות.

הוכיחו, שבשיטה זו יש הטיה לטובת מפלגות קטנות: בחלוקה בין שתי מפלגות, מספר המושבים של המפלגה הקטנה עשוי להיות מעוגל כלפי מעלה, גם כשהשארית שלה קטנה מ-0.5.

שאלה 5: פרדוקס אלבאמה

אלגוריתמים לחלוקת מושבים משמשים גם לחלוקת המושבים בקונגרס בין המדינות בארה"ב. חלוקת-המושבים נקבעת באופן יחסי לאוכלוסייה, ומתעדכנת לפי מפקד שנערך כל 10 שנים. אחרי המפקד של 1880, רצו להגדיל את מספר-המושבים בקונגרס. התברר, שאם מספר המושבים בקונגרס יהיה 299, אז מדינת אלבאמה תקבל 8 מושבים; אבל אם מספר המושבים יהיה 300, אז אלבאמה תקבל רק 7 מושבים. מצב זה נקרא פרדוקס אלבאמה.

א. הראו דוגמה לפרדוקס אלבאמה כאשר משתמשים בשיטת המילטון.

ב. הוכיחו שפרדוקס אלבאמה לא קורה כאשר משתמשים בשיטת-מחלק כלשהי.