

Ex10 Q2

שאלה 2: אלגוריתם הממוצע - יעילות פארטו

א. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש רק שני נושאים.

* ב. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש מספר כלשהו של נושאים.
רמז: השתמשו במשפט (שאולי למדתם בקורס בהסתברות; חפשו בגוגל כדי להיזכר):
 "the mean minimizes the mean squared error"

• נעזרתי בפתרון שהוצג בכיתה

פתרון א':

נסמן: n אנשים, $j \in [1, 2]$ נושאים, C סכום כסף כולל, $p_{i,j}$ הערך של שחקן i לחפץ j , A_j הסכום שנושא j יקבל לפי אלגוריתם הממוצע.

1. לפי אלגוריתם הממוצע:

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i,1}}{n}, A_2 = C - A_1$$

2. נחשב את התועלת של שחקן i :

$$\begin{aligned} U_i(\mathbf{d}) &= -(|p_{i,1} - d_1| + |p_{i,2} - d_2|) = -(|p_{i,1} - A_1| + |(C - p_{i,1}) - (C - A_1)|) \\ &= -2|p_{i,1} - A_1| \end{aligned}$$

3. נניח שקיים איזשהו סכום כסף ε שאם נעביר אותו מנושא 1 לנושא 2 (בלי הגבלת הכלליות) אזי נקבל שיפור פארטו.

אם כן, בהכרח קיים שחקן k שמעריך את נושא 1 יותר מהממוצע: $A_1 < p_{k,1}$

4. נחשב כעת את התועלת של שחקן k :

$$\begin{aligned} U_k(\mathbf{d}) &= -(|p_{k,1} - d_1| + |p_{k,2} - d_2|) \\ &= -(|p_{k,1} - (A_1 - \varepsilon)| + |(C - p_{k,1}) - (C - (A_1 - \varepsilon))|) \\ &= -(|p_{k,1} - A_1 + \varepsilon| + |-p_{k,1} + A_1 - \varepsilon|) = -2|p_{k,1} - A_1 + \varepsilon| \end{aligned}$$

5. נשווה את התועלת של שחקן k , מתקיים: $A_1 < p_{k,1}$ ולכן נקבל:

$$-2|p_{k,1} - A_1| > -2|p_{k,1} - A_1 + \varepsilon|$$

התועלת של שחקן k ירדה ולכן קיבלנו סתירה לכך שקיים שיפור פארטו, לכן האלגוריתם יעיל פארטו.

פתרון ב':