Hamiltonians

By: Moriya Bitton & Porat Aharon

מציגים: כפיר אטינגר, שני שוב ועוז כהן.

הקדמה:

$SAT-3$ היא הבעיה הראשונה שנמצאה לה הוכחה שהיא שייכת ל NPC (משפט קוק לווין).
ככזאת יש רדוקציה אליה (היא קשה יותר) מכל בעיה אחרת ב NP.

עד עכשיו ישנם רק רדוקציות ידועות ל $SAT-3$. המטרה שלנו היא להראות רדוקציה מ $SAT-3$. כלומר להראות שפה יותר קשה מ $SAT-3$ וכך נקבל עוד כיוון לפתרון שאלת מליון הדולר - האם $P = NP$?.

את הרדוקציה נעשה לבעיית $\boldsymbol{ground\ state\ energy}$ שהוכח שהיא שייכת ל NPH, אבל כדי להסביר את הבעיה נתחיל בלהסביר כמה מושגים:

מעבר בין יחידות זמן:

באופן אינטואיטיבי אנו מתייחסים לזמן בצורה דיסקרטית. בפרט, אינטואיטיבית אנו נחשוב על מעבר ממצב קוונטי אחד לאחר המסומן כך $|\boldsymbol{\psi}\rangle \rightarrow \boldsymbol{U}|\boldsymbol{\psi}\rangle$ בצורה דיסקרטית (ψ הוא מצב קוונטי).

בפיזיקה מתייחסים לזמן כרציף ולכן במקום $|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle$ נגדיר את H ($Hamiltonian\ Matrix$) כביטוי הכולל נגזרת (שבה משתמשים עבור פונקציות רציפות) - $\boldsymbol{Schrödinger's\ Equation}$:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \boldsymbol{H}|\psi\rangle$$

($\frac{d}{dt}$ הנגזרת של psi בזמן, $\boldsymbol{H}$ מטריצה הרמטית ו- $\hbar$ קבוע הממיר יחידות זמן לאנרגיה)

הערה: ע"י מעברים אריתמטיים נקבל: $|\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{t})\rangle = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{iHt}}|\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{0})\rangle$, כשבעזרת טענות העזר ניתן להראות שהפעולה אוניטרית כנדרש מפעולה על state.

בפיזיקה קוראים לע"ע של H אנרגיות (בעזרת טענות העזר ניתן להוכיח שהם ממשיים) ולכל ע"ע λ_i יש $|v_i\rangle$ ($energy\ eigenstate$) והע"ע האלו הם ערכים אפשריים לאנרגיות של המערכת.
מכיוון שה$eigenstates$ הם בסיס שלם אז ניתן לכתוב כל מצב כ$superposition$ של ה $eigenstates$:

$$|\psi\rangle = \alpha_0\,|v_0\rangle + \cdots + \alpha_{n-1}\,|v_{n-1}\rangle$$

ובעזרת הפעלת H עליו נקבל תמונה מרתקת של העולם שבה כל מה שקרה וכל מה שאי פעם יקרה הוא שהערכים של ה $energy\ eigenstates$ של היקום 'מקבלים' $phases$ שונים.

עובדה זאת יעילה ביותר כי היא נותנת לנו דרך לפשט את המושג 'אנרגיה' למהירות בה מצבים קוונטים מקבלים phase (כך גם אפשר להבין את חוק שימור האנרגיה).

ל$eigenstate$ שלו משויכת האנרגיה הנמוכה ביותר ($|v_0\rangle$) קוראים ה **ground state** לו יש משמעויות רבות בפיזיקה והפרט בהבנה של מה קרה בתחילת הזמן וכדי ללמוד עוד תכונות של הזמן.

כעת נציג את הבעיה:

בהינתן $Hamiltonian\ Matrix$ $H = H_0 + \cdots + H_{n-1}$, נרצה למצוא את ה $\boldsymbol{ground\ state\ energy}$ של H.

או במילים, למצוא את ה$ground\ state\ energy$ של כל אחד מהH_i בנפרד אפשר בצורה פולינומית (הע"ע הנמוך ביותר כאשר כל הע"ע מסודרים על האלכסון), הבעיה היא למצוא את ה$ground\ state\ energy$ של H שגודלה עצום $(2^n \times 2^n)$.

הרדוקציה:

תהיי פסוקית בוליאנית השייכת ל*3-SAT* : $\phi(x_1, \dots, x_n) = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$.
ניצור $Hamiltonian\ Matrix$: $H = \sum_{i=0}^{m-1} H_i$.

כך שעבור כל ליטרל x_i *יש qbit ולכל* H_i יש 3 qbits המשויכים לו.

כך שהפסוק ספיק אם"ם ה $ground\ state\ energy$ של H *הוא 0.*

כל ע"ע במטריצה מסמל השמה לפסוקית כל שערכו 0 אם"ם ההשמה מספקת את הפסוקית המשויכת לו.

לדוגמא
$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$
ישויך לפסוקית $c_0 = (x_0 \vee x_1 \vee x_2)$.

על מנת ש c_0 *לא יספוק צריך שכל שלושת הליטרלים יהיה 0. לצורך העניין נניח שאלו ההשמות והע"ע המתאימים להם במיפוי:*

ע"ע λ_i	*השמה* (x_0 , x_1, x_2)
$i = 0$	*(0,0,0)*
$i = 1$	*(1,0,0)*
$i = 2$	*(0,1,0)*
$i = 3$	*(0,0,1)*
$i = 4$	*(1,1,0)*
$i = 5$	*(1,0,1)*
$i = 6$	*(0,1,1)*
$i = 7$	*(1,1,1)*

ואכן ניתן לראות שרק הλ_0 שווה 1.