

דוגמאות הרצה –

Optimization-based Mechanisms for the Course Allocation Problem

תוכן

2	דוגמא 1 – דוגמא מהמאמר.....
2	TTC:
4	SP:
8	דוגמא 2 – אופטימלי משנה תוצאה.....
8	TTC:
9	SP:
10	אופטימלי (SP-O, TTC-O):.....
11	אופטימלי (OC):.....
13	דוגמא 3 – תת סבב בתוך תת סבב.....
13	TTC:
14	SP:
16	דוגמא 4 – אותה רשימה לכל סטודנט.....
16	TTC:
17	SP:
19	דוגמא 5 – סטודנט לא מקבל K קורסים (באופטימלי כן).....
19	TTC:
21	אופטימלי (TTC-O):.....
23	דוגמא 6 – סטודנט מביא לכמה קורסים אותה הצעה.....
23	TTC:
24	SP:
26	דוגמא 7 – לכל סטודנט K שונה (דוגמא גדולה).....
26	TTC:
29	SP:
32	דוגמא 8 – אופטימלי (OC):.....

דוגמא 1 – דוגמא מהמאמר

4 סטודנטים – $\{s1, s2, s3, s4\}$

5 קורסים – $\{c1, c2, c3, c4, c5\}$

מקומות זמינים בקורסים: $\{q_{c_1} = 2, q_{c_2} = 3, q_{c_3} = 3, q_{c_4} = 2, q_{c_5} = 2\}$

כל סטודנט צריך 3 קורסים סה"כ – $k=3$

סה"כ הצעות מחיר – 1000 (bids)

חפיפות: **c1 חופף לc4**

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3		S4	
c1	400	c3	256	c4	245	c1	251
c3	230	c2	252	c1	243	c3	242
c4	200	c4	246	c3	240	c2	235
c2	150	c1	245	c2	230	c4	201
c5	20	c5	1	c5	42	c5	71

TTC:

סבב ראשון:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 2$)		c2 ($q_{1c_2} = 3$)		c3 ($q_{1c_3} = 3$)		c4 ($q_{1c_4} = 2$)		c5 ($q_{1c_5} = 2$)	
s1	400	-		s2	256	s3	245		
s4	251			-	-	-	-		

בקורס c1 ישנם 2 מקומות ומצביעים עליו 2 סטודנטים – s1 ו-s4 ולכן שניהם יקבלו את c1. נשים לב שנגמר המקום בc1. על קורסים c2 ו-c5 לא מצביעים כלל. בקורס c3 ישנם 3 מקומות ומצביע עליו רק סטודנט אחד- s2 ולכן הוא יקבל את c3. בקורס c4 ישנם 2 מקומות ומצביע עליו רק סטודנט אחד- s3 ולכן הוא יקבל את c4. סה"כ כל סטודנט קיבל קורס אחד וניתן להמשיך לסבב הבא.

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3		S4	
c1	400	c3	256	c4	245	c1	251
c3	230	c2	252	c1	243	c3	242
c4	200	c4	246	c3	240	c2	235
c2	150	c1	245	c2	230	c4	201
c5	20	c5	1	c5	42	c5	71

(ב1c נגמר המקום, c1 ו-c4 חופפים)

סבב שני:

קורסים שהסטודנט קיבל
קורסים שירדו מזמינות

הצבעה:

c1 ($q_{2c_1} = 0$)	c2 ($q_{2c_2} = 3$)		c3 ($q_{2c_3} = 2$)		c4 ($q_{2c_4} = 1$)	c5 ($q_{2c_5} = 2$)
-	s2	252	s4	242	-	-
	-		s3	240		
			s1	230		

בקורס c2 יש 3 מקומות ומצביע סטודנט אחד – s2 ולכן הוא יקבל את c2. על קורסים c4, c5 אין מצביעים כלל. בקורס c3 יש רק 2 מקומות ואילו 3 סטודנטים מצביעים עליו- s1,s3,s4. C3 יבחר את 2 הסטודנטים שהציעו עליו הכי הרבה ניקוד- s3, s4. נשים לב שנגמר המקום בc3.
s1 נדחה ולכן יעבור תת סבב לבדו-
סבב 2.1:

c1 ($q_{2c_1} = 0$)	c2 ($q_{2c_2} = 2$)		c3 ($q_{2c_3} = 0$)	c4 ($q_{2c_4} = 1$)	c5 ($q_{2c_5} = 2$)
-	s1	150	-	-	-

S1 מצביע על קורס c2 אשר יש בו 2 מקומות ולכן s1 יקבל את קורס c2.
כעת כלל הסטודנטים קיבלו קורס וניתן להמשיך לסבב הבא.

הצעות מחיר הסטודנטים:

קורסים שהסטודנט קיבל
קורסים שירדו מזמינות

S1		S2		S3		S4	
c1	400	c3	256	c4	245	c1	251
c3	230	c2	252	c1	243	c3	242
c4	200	c4	246	c3	240	c2	235
c2	150	c1	245	c2	230	c4	201
c5	20	c5	1	c5	42	c5	71

(ב-c1 וב-c3 נגמר המקום, c1 ו-c4 חופפים)

סבב שלישי:

הצבעה:

c1 ($q_{3c_1} = 0$)	c2 ($q_{3c_2} = 1$)		c3 ($q_{3c_3} = 0$)	c4 ($q_{3c_4} = 1$)		c5 ($q_{3c_5} = 2$)	
-	s4	235	-	s2	246	s1	20
	s3	230		-		-	

בקורס c4 יש מקום אחד וסטודנט אחד שמצביע עליו- s2 ולכן s2 יקבל את c4.
נשים לב שנגמר המקום בc4. בקורס c5 יש 2 מקומות ורק סטודנט אחד שמצביע עליו- s1, ולכן s1 יקבל את c5. בקורס c2 יש רק מקום אחד ו2 סטודנטים שמצביעים עליו- s3,s4. הקורס יינתן לסטודנט שהציע יותר- ולכן s4 יקבל את c2. סטודנט s3 לא קיבל קורס ולכן יעבור סבב לבדו-

סבב 3.1:

c1 ($q_{3c_1} = 0$)	c2 ($q_{3c_2} = 0$)	c3 ($q_{3c_3} = 0$)	c4 ($q_{3c_4} = 0$)	c5 ($q_{3c_5} = 1$)	
-	-	-	-	s3	1

S3 מצביע על קורס c5 אשר יש בו מקום אחד ולכן s3 יקבל את קורס c5. כעת כלל הסטודנטים קיבלו 3 קורסים והאלגוריתם מסתיים.

סה"כ TTC:

קורסים שהסטודנט קיבל
קורסים שירדו מזמינות

S1		S2		S3		S4	
c1	400	c3	256	c4	245	c1	251
c3	230	c2	252	c1	243	c3	242
c4	200	c4	246	c3	240	c2	235
c2	150	c1	245	c2	230	c4	201
c5	20	c5	1	c5	42	c5	71

S1	S2	S3	S4	
570	754	527	728	תועלת קרדינלית
8	12	9	12	תועלת אורדינלית
3	3	3	3	תועלת בינארית

סטיית תקן	RANGE	סה"כ	
113.017	227	2579	תועלת קרדינלית
2.062	4	41	תועלת אורדינלית
0	0	12	תועלת בינארית

$$s_{s_1} = \{c1, c2, c5\}$$

$$s_{s_2} = \{c3, c2, c4\}$$

$$s_{s_3} = \{c4, c3, c5\}$$

$$s_{s_4} = \{c1, c3, c2\}$$

SP:

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3		S4	
c1	400	c3	256	c4	245	c1	251
c3	230	c2	252	c1	243	c3	242
c4	200	c4	246	c3	240	c2	235
c2	150	c1	245	c2	230	c4	201
c5	20	c5	1	c5	42	c5	71

סבב ראשון:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 2$)		c2 ($q_{1c_2} = 3$)		c3 ($q_{1c_3} = 3$)		c4 ($q_{1c_4} = 2$)		c5 ($q_{1c_5} = 2$)	
s1	400	-		s2	256	s3	245		
s4	251			-	-	-	-		

בקורס c1 ישנם 2 מקומות ומצביעים עליו 2 סטודנטים – s1 ו-s4 ולכן שניהם יקבלו את c1. מכיוון שאך אחד לא נדחה הקורס יהיה בחינם. נשים לב שנגמר המקום בc1. על קורסים c2 ו-c5 לא מצביעים כלל. בקורס c3 ישנם 3 מקומות ומצביע עליו רק סטודנט אחד- s2 ולכן הוא יקבל את c3 בחינם. בקורס c4 ישנם 2 מקומות ומצביע עליו רק סטודנט אחד- s3 ולכן הוא יקבל את c4 בחינם. סה"כ כל סטודנט קיבל קורס אחד וניתן להמשיך לסבב הבא – כלל הנקודות עוברות לקורס הבא של כל אחד מהסטודנטים.

הצעות מחיר הסטודנטים:

קורסים שהסטודנט קיבל
קורסים שירדו מזמינות

S1		S2		S3		S4	
c1	400	c3	256	c4	245	c1	251
c3	230	c2	252	c1	243	c3	242
c4	200	c4	246	c3	240	c2	235
c2	150	c1	245	c2	230	c4	201
c5	20	c5	1	c5	42	c5	71

(ב1c נגמר המקום, c1 ו-c4 חופפים)

סבב שני:

הצבעה:

c1 ($q_{2c_1} = 0$)		c2 ($q_{2c_2} = 3$)		c3 ($q_{2c_3} = 2$)		c4 ($q_{2c_4} = 1$)		c5 ($q_{2c_5} = 2$)	
-		s2	508	S3	728	-		-	
		-		S1	630				
				S4	493				

(הbids לא תואם לטבלת הצעות המחירים מכיוון שהנקודות מועברות לקורס הבא) בקורס c2 יש 3 מקומות ומצביע סטודנט אחד – s2 ולכן הוא יקבל את c2 בחינם. על קורסים c4, c5 אין מצביעים כלל. בקורס c3 יש רק 2 מקומות ואילו 3 סטודנטים מצביעים עליו- s1, s3, s4. C3 יבחר את 2 הסטודנטים שהציעו עליו הכי הרבה ניקוד- s1, S3. מכיוון שs4 נדחה מחיר הקורס c3 יהיה **493**. נשים לב שנגמר המקום בc3. s4 נדחה ולכן יעבור תת סבב לבדו-

סבב 2.1:

c1 ($q_{2c_1} = 0$)		c2 ($q_{2c_2} = 2$)		c3 ($q_{2c_3} = 0$)		c4 ($q_{2c_4} = 1$)		c5 ($q_{2c_5} = 2$)	
-	-	S4	728	-	-	-	-	-	-

S4 מצביע על קורס c2 אשר יש בו 2 מקומות ולכן S4 יקבל את קורס c2 בחינם.

כעת כלל הסטודנטים קיבלו קורס וניתן להמשיך לסבב הבא.

הצעות מחיר הסטודנטים:

קורסים שהסטודנט קיבל
קורסים שירדו מזמינות

S1		S2		S3		S4	
c1	400	c3	256	c4	245	c1	251
c3	230	c2	252	c1	243	c3	242
c4	200	c4	246	c3	240	c2	235
c2	150	c1	245	c2	230	c4	201
c5	20	c5	1	c5	42	c5	71

(ב- c1 וב- c3 נגמר המקום, c1 ו- c4 חופפים) $P_{c_3} = 493$

סבב שלישי:

הצבעה:

c1 ($q_{3c_1} = 0$)	c2 ($q_{3c_2} = 1$)		c3 ($q_{3c_3} = 0$)	c4 ($q_{3c_4} = 1$)		c5 ($q_{3c_5} = 2$)	
-	S1	485	-	s2	754	S4	1000
	S3	463		-		-	-

בקורס c4 יש מקום אחד וסטודנט אחד שמצביע עליו- s2 ולכן s2 יקבל את c4 בחינם. נשים לב שנגמר המקום ב- c4. בקורס c5 יש 2 מקומות ורק סטודנט אחד שמצביע עליו- s4, ולכן s4 יקבל את c5 בחינם. בקורס c2 יש רק מקום אחד ו- 2 סטודנטים שמצביעים עליו- s3, s1. הקורס יינתן לסטודנט שהציע יותר- ולכן S1 יקבל את c2. מחיר הקורס c2 יהיה **463**. סטודנט S3 לא קיבל קורס ולכן יעבור סבב לבדו-

סבב 3.1:

c1 ($q_{3c_1} = 0$)	c2 ($q_{3c_2} = 0$)	c3 ($q_{3c_3} = 0$)	c4 ($q_{3c_4} = 0$)	c5 ($q_{3c_5} = 1$)	
-	-	-	-	S3	505

S1 מצביע על קורס c5 אשר יש בו מקום אחד ולכן s1 יקבל את קורס c5 בחינם. כעת כלל הסטודנטים קיבלו 3 קורסים והאלגוריתם מסתיים.

סה"כ SP:

קורסים שהסטודנט קיבל
קורסים שירדו מזמינות

S1		S2		S3		S4	
c1	400	c3	256	c4	245	c1	251
c3	230	c2	252	c1	243	c3	242
c4	200	c4	246	c3	240	c2	235
c2	150	c1	245	c2	230	c4	201
c5	20	c5	1	c5	42	c5	71

S1	S2	S3	S4	
780	754	527	557	תועלת קרדינלית
10	12	10	9	תועלת אורדינלית
3	3	3	3	תועלת בינארית

סטיית תקן	RANGE	סה"כ	
130.911	253	2618	תועלת קרדינלית
1.258	3	41	תועלת אורדינלית
0	0	12	תועלת בינארית

$$s_{s_1} = \{c1, c3, c5\}$$

$$s_{s_2} = \{c3, c2, c4\}$$

$$s_{s_3} = \{c4, c3, c2\}$$

$$s_{s_4} = \{c1, c2, c5\}$$

דוגמא 2 – אופטימלי משנה תוצאה

2 סטודנטים – $\{s1, s2\}$

3 קורסים – $\{c1, c2, c3\}$

מקומות זמינים בקורסים: $\{q_{c1} = 1, q_{c2} = 1, q_{c3} = 1\}$

כל סטודנט צריך קורס אחד סה"כ – $k=1$

סה"כ הצעות מחיר – 100 (bids)

חפיפות: אין חפיפות

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2	
c1	50	c1	48
c2	49	c2	46
c3	1	c3	6

TTC:

סבב ראשון:

הצבעה:

c1 ($q_{1c1} = 1$)		c2 ($q_{1c2} = 1$)	c3 ($q_{1c3} = 1$)
s1	50	-	-
s2	48		

בקורס c1 ישנו מקום אחד ומצביעים עליו 2 סטודנטים – s1 ו-s2 ולכן הקורס יינתן למי שהציע יותר – s1 יקבל את הקורס. נשים לב שנגמר המקום ב-c1. על קורסים c2 ו-c3 לא מצביעים כלל. סטודנט s2 נדחה ולכן יעבור סבב לבדו-

סבב 1.1:

c1 ($q_{1c_1} = 0$)	c2 ($q_{1c_2} = 1$)		c3 ($q_{1c_3} = 1$)
-	s2	46	-
	-		

בקורס c2 יש מקום אחד וסטודנט אחד מצביע עליו – s2 ולכן s2 יקבל את קורס c2. נשים לב כי נגמר המקום בקורס c2. כעת כל הסטודנטים קיבלו קורס והאלגוריתם מסתיים.

סה"כ TTC:

קורסים שהסטודנט קיבל
קורסים שירדו מזמינות

S1		S2	
c1	50	c1	48
c2	49	c2	46
c3	1	c3	6
S1	S2		
50	46	תועלת קרדינלית	
3	2	תועלת אורדינלית	
1	1	תועלת בינארית	

סה"כ	RANGE	סטיית תקן	
96	4	2.828	תועלת קרדינלית
5	1	0.707	תועלת אורדינלית
2	0	0	תועלת בינארית

$$s_{s_1} = \{c1\}$$

$$s_{s_2} = \{c2\}$$

SP:

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2	
c1	50	c1	48
c2	49	c2	46
c3	1	c3	6

סבב ראשון:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 1$)		c2 ($q_{1c_2} = 1$)	c3 ($q_{1c_3} = 1$)
s1	50	-	-
s2	48		

בקורס c1 ישנו מקום אחד ומצביעים עליו 2 סטודנטים – s1 ו-s2 ולכן הקורס יינתן למי שהציע יותר- s1 יקבל את הקורס. מחיר הקורס c1 יהיה 48. נשים לב שנגמר המקום ב-c1. על קורסים c2 ו-c3 לא מצביעים כלל. סטודנט s2 נדחה ולכן יעבור סבב לבדו-

סבב 1.1:

c1 ($q_{1c_1} = 0$)		c2 ($q_{1c_2} = 1$)		c3 ($q_{1c_3} = 1$)
-		s2	94	-
		-		

בקורס c2 יש מקום אחד וסטודנט אחד מצביע עליו- s2 ולכן s2 יקבל את קורס c2 בחינם.
נשים לב כי נגמר המקום בקורס c2.
כעת כל הסטודנטים קיבלו קורס והאלגוריתם מסתיים.

סה"כ SP:

קורסים שהסטודנט קיבל
קורסים שירדו מזמינות

S1		S2	
c1	50	c1	48
c2	49	c2	46
c3	1	c3	6

S1	S2	
50	46	תועלת קרדינלית
3	2	תועלת אורדינלית
1	1	תועלת בינארית

סטיות תקן	RANGE	סה"כ	
2.828	4	96	תועלת קרדינלית
0.707	1	5	תועלת אורדינלית
0	0	2	תועלת בינארית

$$s_{s_1} = \{c1\}$$

$$s_{s_2} = \{c2\}$$

אופטימלי (SP-O, TTC-O):

האלגוריתמים האופטימליים מחשבים בכל סיבוב את המקסימום האורדינלי האפשרי לאותו סבב ובתוך זה יבחרו הקורסים שיתנו את המקסימום הbids האפשרי.

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2	
c1	50	c1	48
c2	49	c2	46
c3	1	c3	6

סבב ראשון:

הסכום האורדינלי הגבוה ביותר האפשרי הוא שאחד הסטודנטים יקבל את הקורס הראשון בהצעה והשני את השני. (9 = 5+4) – מכיוון שאין מקום לשני הסטודנטים בהצעה הראשונית שלהם.

במקרה זה- **הסכומים הקרדינלים** האפשריים הם:

$$S1 \text{ יקבל את } c1 + s2 \text{ יקבל את } c2 = 96$$

$$S1 \text{ יקבל את } c2 + s2 \text{ יקבל את } c1 = 97$$

הסכום השני גדול יותר ולכן האופטימלי יבחר בו. כל סטודנט קיבל קורס ולכן האלגוריתם מסתיים.

סה"כ אופטימלי:

קורסים שהסטודנט קיבל
קורסים שירדו מזמינות

S1		S2	
c1	50	c1	48
c2	49	c2	46
c3	1	c3	6

S1	S2	
49	48	תועלת קרדינלית
2	3	תועלת אורדינלית
1	1	תועלת בינארית

סטיית תקן	RANGE	סה"כ	
0.707	1	97	תועלת קרדינלית
0.707	1	5	תועלת אורדינלית
0	0	2	תועלת בינארית

$$s_{s_1} = \{c_2\}$$

$$s_{s_2} = \{c_1\}$$

אופטימלי (OC):

OC מחשב (לא בסבבים אלא סה"כ) את המקסימום האורדינלי האפשרי ובתוך זה יבחרו הקורסים שיתנו את המקסימום הbids האפשרי.

(בגלל שיש סבב יחיד יפעל כמו ה- TTC- O או SP-O)

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2	
c1	50	c1	48
c2	49	c2	46
c3	1	c3	6

מקומות זמינים בקורסים: $\{q_{c_1} = 1, q_{c_2} = 1, q_{c_3} = 1\}$

כל סטודנט צריך קורס אחד סה"כ $k=1$

אחד הסטודנטים יקבל את ההצעה הראשונית והשני את השנייה ומכיוון שכל אחד צריך קורס אחד בלבד זה מספיק, במקרה זה- **הסכומים הקרדינלים** האפשריים הם:

$$S1 \text{ יקבל את } c1 + s2 \text{ יקבל את } c2 = 96$$

$$S1 \text{ יקבל את } c2 + s2 \text{ יקבל את } c1 = 97$$

הסכום השני גדול יותר ולכן האופטימלי יבחר בו. כל סטודנט קיבל קורס ולכן האלגוריתם מסתיים.

סה"כ אופטימלי:

קורסים שהסטודנט קיבל
קורסים שירדו מזמינות

S1		S2	
c1	50	c1	48
c2	49	c2	46
c3	1	c3	6

S1	S2	
49	48	תועלת קרדינלית
2	3	תועלת אורדינלית
1	1	תועלת בינארית

סה"כ	RANGE	סטיית תקן	
97	1	0.707	תועלת קרדינלית
5	1	0.707	תועלת אורדינלית
2	0	0	תועלת בינארית

$s_{s_1} = \{c2\}$

$s_{s_2} = \{c1\}$

דוגמא 3 – תת סבב בתוך תת סבב

3 סטודנטים – $\{s1, s2, s3\}$

3 קורסים – $\{c1, c2, c3\}$

מקומות זמינים בקורסים: $\{q_{c_1} = 1, q_{c_2} = 1, q_{c_3} = 1\}$

כל סטודנט צריך קורס אחד סה"כ $k=1$

סה"כ הצעות מחיר – 100 (bids)

חפיפות: אין חפיפות

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3	
C1	44	C1	50	C1	45
C2	39	C2	45	C2	40
C3	17	C3	5	C3	15

TTC:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 1$)		c2 ($q_{1c_2} = 1$)	c3 ($q_{1c_3} = 1$)
s2	50	-	-
S3	45		
s1	44		

בקורס c1 יש רק מקום אחד ו3 סטודנטים מצביעים עליו- s1,s2,s3. הסטודנט שהציע הכי הרבה- s2 יקבל את הקורס. נשים לב שנגמר המקום בc1. הסטודנטים s1 ו-s3 ימשיכו לתת סבב-

סבב 1.1:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 0$)	c2 ($q_{1c_2} = 1$)		c3 ($q_{1c_3} = 1$)
-	s3	40	-
	S1	39	

בקורס c2 יש רק מקום אחד ושני סטודנטים מצביעים עליו- s1,s3. הקורס יינתן לסטודנט שהציע יותר ולכן s3 יקבל את c2. נשים לב שבc2 נגמר המקום. סטודנט s1 נדחה ולכן ימשיך לתת סבב נוסף-

סבב 1.1.1:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 0$)	c2 ($q_{1c_2} = 0$)	c3 ($q_{1c_3} = 1$)	
-	-	s1	17

בקורס c3 יש מקום אחד וסטודנט אחד מצביע עליו- s1 ולכן s1 יקבל את c3. נשים לב שבצ3 נגמר המקום.

כל סטודנט קיבל קורס ולכן האלגוריתם מסתיים.

סה"כ TTC:

S1		S2		S3	
C1	44	C1	50	C1	45
C2	39	C2	45	C2	40
C3	17	C3	5	C3	15

S1	S2	S3	
17	50	40	תועלת קרדינלית
1	3	2	תועלת אורדינלית
1	1	1	תועלת בינארית

סטיות תקן	RANGE	סה"כ	
16.921	33	107	תועלת קרדינלית
1	2	6	תועלת אורדינלית
0	0	3	תועלת בינארית

$$s_{s_1} = \{c3\}$$

$$s_{s_2} = \{c1\}$$

$$s_{s_3} = \{c2\}$$

:SP

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3	
C1	44	C1	50	C1	45
C2	39	C2	45	C2	40
C3	17	C3	5	C3	15

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 1$)		c2 ($q_{1c_2} = 1$)	c3 ($q_{1c_3} = 1$)
s2	50	-	-
S3	45		
s1	44		

בקורס c1 יש רק מקום אחד ו3 סטודנטים מצביעים עליו- s1,s2,s3. הסטודנט שהציע הכי הרבה- s2 יקבל את הקורס. מחיר הקורס c1 יהיה 45. נשים לב שנגמר המקום בc1. הסטודנטים s1 ו-s3 ימשיכו לתת סבב-

סבב 1.1:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 0$)	c2 ($q_{1c_2} = 1$)		c3 ($q_{1c_3} = 1$)
-	s3	85	-
	S1	83	

בקורס c2 יש רק מקום אחד ושני סטודנטים מצביעים עליו- s1,s3. הקורס יינתן לסטודנט שהציע יותר ולכן s3 יקבל את c2. מחיר הקורס c2 יהיה 83. נשים לב שב2c נגמר המקום. סטודנט s1 נדחה ולכן ימשיך לתת סבב נוסף-

סבב 1.1.1:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 0$)	c2 ($q_{1c_2} = 0$)	c3 ($q_{1c_3} = 1$)	
-	-	s1	100

בקורס c3 יש מקום אחד וסטודנט אחד מצביע עליו- s1 ולכן s1 יקבל את c3 בחינם. נשים לב שב3c נגמר המקום.

כל סטודנט קיבל קורס ולכן האלגוריתם מסתיים.

סה"כ SP:

S1		S2		S3	
C1	44	C1	50	C1	45
C2	39	C2	45	C2	40
C3	17	C3	5	C3	15

S1	S2	S3	
17	50	40	תועלת קרדינלית
1	3	2	תועלת אורדינלית
1	1	1	תועלת בינארית

סטיית תקן	RANGE	סה"כ	
16.921	33	107	תועלת קרדינלית
1	2	6	תועלת אורדינלית
0	0	3	תועלת בינארית

$$s_{s_1} = \{c3\}$$

$$s_{s_2} = \{c1\}$$

$$s_{s_3} = \{c2\}$$

דוגמא 4 – אותה רשימה לכל סטודנט

2 סטודנטים – $\{s1, s2\}$

2 קורסים – $\{c1, c2\}$

מקומות זמינים בקורסים: $\{q_{c1} = 1, q_{c2} = 1\}$

כל סטודנט צריך קורס אחד סה"כ – $k=1$

סה"כ הצעות מחיר – 100 (bids)

חפיפות: אין חפיפות

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2	
c1	55	c1	55
c2	45	c2	45

TTC:

סבב ראשון:

הצבעה:

c1 ($q_{1c1} = 1$)		c2 ($q_{1c2} = 1$)	
s1	55	-	
s2	55		

בקורס c1 ישנו מקום אחד ומצביעים עליו 2 סטודנטים – s1 ו-s2 ולכן הקורס יינתן למי שהציע יותר- הסטודנטים הציעו את אותה הצעה ולכן הראשון יקבל את הקורס- s1 יקבל את הקורס. נשים לב שנגמר המקום בc1. סטודנט s2 נדחה ולכן יעבור סבב לבדו-

סבב 1.1:

c1 ($q_{1c1} = 0$)		c2 ($q_{1c2} = 1$)	
-		s2	45
		-	

בקורס c2 יש מקום אחד וסטודנט אחד מצביע עליו- s2 ולכן s2 יקבל את קורס c2. נשים לב כי נגמר המקום בקורס c2. כעת כל הסטודנטים קיבלו קורס והאלגוריתם מסתיים.

סה"כ TTC:

קורסים שהסטודנט קיבל
קורסים שירדו מזמינות

S1		S2	
c1	55	c1	55
c2	45	c2	45

S1	S2	
55	45	תועלת קרדינלית
2	1	תועלת אורדינלית
1	1	תועלת בינארית

סטיית תקן	RANGE	סה"כ	
7.071	10	100	תועלת קרדינלית
0.707	1	3	תועלת אורדינלית
0	0	2	תועלת בינארית

$$s_{s_1} = \{c_1\}$$

$$s_{s_2} = \{c_2\}$$

SP:

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2	
c1	55	c1	55
c2	45	c2	45

סבב ראשון:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 1$)		c2 ($q_{1c_2} = 1$)
s1	55	-
s2	55	

בקורס c1 ישנו מקום אחד ומצביעים עליו 2 סטודנטים – s1 ו-s2 ולכן הקורס יינתן למי שהציע יותר- הסטודנטים הציעו את אותה הצעה ולכן הראשון יקבל את הקורס- s1 יקבל את הקורס. מחיר הקורס c1 יהיה 55. נשים לב שנגמר המקום ב-c1. סטודנט s2 נדחה ולכן יעבור סבב לבדו-

סבב 1.1:

c1 ($q_{1c_1} = 0$)	c2 ($q_{1c_2} = 1$)	
-	s2	100
	-	

בקורס c2 יש מקום אחד וסטודנט אחד מצביע עליו- s2 ולכן s2 יקבל את קורס c2 בחינם.
 נשים לב כי נגמר המקום בקורס c2.
 כעת כל הסטודנטים קיבלו קורס והאלגוריתם מסתיים.

סה"כ SP:

קורסים שהסטודנט קיבל
קורסים שירדו מזמינות

S1		S2	
c1	55	c1	55
c2	45	c2	45

S1	S2	
55	45	תועלת קרדינלית
2	1	תועלת אורדינלית
1	1	תועלת בינארית

סטטיית תקן	RANGE	סה"כ	
7.071	10	100	תועלת קרדינלית
0.707	1	3	תועלת אורדינלית
0	0	2	תועלת בינארית

$$s_{s_1} = \{c1\}$$

$$s_{s_2} = \{c2\}$$

דוגמא 5 – סטודנט לא מקבל K קורסים (באופטימלי כן)

3 סטודנטים – $\{s1, s2, s3\}$

3 קורסים – $\{c1, c2, c3\}$

מקומות זמינים בקורסים: $\{q_{c_1} = 2, q_{c_2} = 2, q_{c_3} = 2\}$

כל סטודנט צריך קורס אחד סה"כ $2=K$

סה"כ הצעות מחיר – 100 (bids)

חפיפות: אין חפיפות

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3	
C1	50	C1	45	C1	49
C3	40	C2	30	C3	36
C2	10	C3	25	C2	15

TTC:

סבב ראשון:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 2$)		c2 ($q_{1c_2} = 2$)	C3 ($q_{1c_3} = 2$)
s1	50	-	-
s3	49		
s2	45		

בקורס c1 ישנם 2 מקומות ומצביעים עליו 3 סטודנטים – s1, s2 ו-s3 ולכן הקורס יינתן למי שהציע יותר- s1 ו-s3 יקבלו את הקורס. S2 לא קיבל קורס כלל ולכן ימשיך לסבב נוסף לבדו:

סבב 1.1:

c1 ($q_{1c_1} = 0$)	c2 ($q_{1c_2} = 2$)		C3 ($q_{1c_3} = 2$)
-	s2	30	-

בקורס c2 יש שני מקומות ורק סטודנט אחד מצביע עליו – s2 ולכן s2 יקבל את c2

S1		S2		S3	
C1	50	C1	45	C1	49
C3	40	C2	30	C3	36
C2	10	C3	25	C2	15

סבב שני:

הצבעה:

c1 ($q_{2c_1} = 0$)	c2 ($q_{2c_2} = 1$)	C3 ($q_{2c_3} = 2$)	
-	-	s1	40
		s3	36
		s2	25

בקורס c3 יש 2 מקומות ומצביעים עליו 3 סטודנטים s1, s2, s3 ולכן הקורס יינתן למי שהציע עליו הכי הרבה – s1, s3. s2 נדחה אבל לא נשארו לו עוד קורסים להצביע עליהם ולכן האלגוריתם יסתיים.

קורסים שהסטודנט קיבל

קורסים שירדו מזמינות

סה"כ TTC:

S1		S2		S3	
C1	50	C1	45	C1	49
C3	40	C2	30	C3	36
C2	10	C3	25	C2	15

S1	S2	S3	
90	30	85	תועלת קרדינלית
5	2	5	תועלת אורדינלית
2	1	2	תועלת בינארית

סטיית תקן	RANGE	סה"כ	
33.29164	60	205	תועלת קרדינלית
1.732051	3	12	תועלת אורדינלית
0	1	5	תועלת בינארית

$$s_{s_1} = \{c1, C3\}$$

$$s_{s_2} = \{c2\}$$

$$s_{s_3} = \{C1, C3\}$$

אופטימלי (TTC-O):

האלגוריתמים האופטימליים מחשבים בכל סיבוב את המקסימום האורדינלי האפשרי לאותו סבב ובתוך זה יבחרו הקורסים שיתנו את המקסימום bids האפשרי.

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3	
C1	50	C1	45	C1	49
C3	40	C2	30	C3	36
C2	10	C3	25	C2	15

סבב ראשון:

הסכום האורדינלי הגבוה ביותר האפשרי הוא ששני סטודנטים יקבלו את הקורס הראשון בהצעה והשלישי את הקורס השני שלו. $(3+3+2 = 8)$ – מכיוון שאין מקום לשלושת הסטודנטים בהצעה הראשונית שלהם.

במקרה זה- **הסכומים הקרדינליים** האפשריים הם:

$129 = c_2 \text{ יקבל את } s_2 + c_1 \text{ יקבל את } s_3 + c_1 \text{ יקבל את } s_1$

$131 = c_3 \text{ יקבל את } s_3 + c_1 \text{ יקבל את } s_2 + c_1 \text{ יקבל את } s_1$

$134 = c_1 \text{ יקבל את } s_3 + c_1 \text{ יקבל את } s_2 + c_3 \text{ יקבל את } s_1$

הסכום השלישי גדול יותר ולכן האופטימלי יבחר בו.

S1		S2		S3	
C1	50	C1	45	C1	49
C3	40	C2	30	C3	36
C2	10	C3	25	C2	15

מקומות שנשארו בקורסים: $\{q_{c_1} = 0, q_{c_2} = 2, q_{c_3} = 1\}$

סבב שני:

הסכום האורדינלי הגבוה ביותר האפשרי הוא ששני סטודנטים יקבלו את הקורס השני בהצעה והשלישי את השלישי. $(1+2+2 = 5)$

במקרה זה- **הסכומים הקרדינליים** האפשריים הם:

$76 = c_3 \text{ יקבל את } s_3 + c_2 \text{ יקבל את } s_2 + c_2 \text{ יקבל את } s_1$

סה"כ אופטימלי:

קורסים שהסטודנט קיבל

קורסים שירדו מזמינות

S1		S2		S3	
C1	50	C1	45	C1	49
C3	40	C2	30	C3	36
C2	10	C3	25	C2	15

S1	S2	S3	
50	75	85	תועלת קרדינלית
3	5	5	תועלת אורדינלית
2	2	2	תועלת בינארית

סטיית תקן	RANGE	סה"כ	
18.028	35	210	תועלת קרדינלית
1.155	2	13	תועלת אורדינלית
0	0	6	תועלת בינארית

דוגמא 6 – סטודנט מביא לכמה קורסים אותה הצעה

3 סטודנטים – $\{s1, s2, s3\}$

2 קורסים – $\{c1, c2\}$

מקומות זמינים בקורסים: $\{q_{c1} = 2, q_{c2} = 1\}$

כל סטודנט צריך קורס אחד סה"כ – $k=1$

סה"כ הצעות מחיר – 100 (bids)

חפיפות: אין חפיפות

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3	
C1	50	C2	60	C1	75
C2	50	C1	40	C2	25

(בחר לs1 את c1 לפני c2 למרות שהגיש את אותה הצעה)

TTC:

סבב ראשון:

הצבעה:

c1 ($q_{1c1} = 2$)		c2 ($q_{1c2} = 1$)	
s3	75	s2	60
s1	50		

בקורס c1 יש שני מקומות ומצביעים עליו 2 סטודנטים – s1 ו-s3 ולכן הקורס יינתן לשניהם- s1 ו-s3 יקבלו את הקורס. בקורס c2 יש מקום אחד ומצביע עליו סטודנט אחד – s2 יקבל את c2. נשים לב שנגמר המקום בc1 ו-bc2. כלל הסטודנטים קיבלו קורס אחד והאלגוריתם מסתיים.

סה"כ TTC:

קורסים שהסטודנט קיבל

קורסים שירדו מזמינות

S1		S2		S3	
C1	50	C2	60	C1	75
C2	50	C1	40	C2	25

S1	S2	S3	
50	60	75	תועלת קרדינלית
2	2	2	תועלת אורדינלית
1	1	1	תועלת בינארית

סה"כ	RANGE	סטיית תקן	
185	25	12.5830574	תועלת קרדינלית
6	0	0	תועלת אורדינלית
3	0	0	תועלת בינארית

$$s_{s_1} = \{c1\}$$

$$s_{s_2} = \{c2\}$$

$$s_{s_3} = \{c3\}$$

:SP

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3	
C1	50	C2	60	C1	75
C2	50	C1	40	C2	25

(בחר ל1 s את c1 לפני c2 למרות שהגיש את אותה הצעה)

סבב ראשון:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 2$)		c2 ($q_{1c_2} = 1$)	
s3	75	s2	60
s1	50		

בקורס c1 יש שני מקומות ומצביעים עליו 2 סטודנטים – s1 ו-s3 ולכן הקורס יינתן לשניהם בחינם- s1 ו-s3 יקבלו את הקורס. בקורס c2 יש מקום אחד ומצביע עליו סטודנט אחד – s2 יקבל את c2 בחינם. נשים לב שנגמר המקום בc1 וב-c2. כלל הסטודנטים קיבלו קורס אחד והאלגוריתם מסתיים.

סה"כ SP:

קורסים שהסטודנט קיבל

קורסים שירדו מזמינות

S1		S2		S3	
C1	50	C2	60	C1	75
C2	50	C1	40	C2	25

S1	S2	S3	
50	60	75	תועלת קרדינלית
2	2	2	תועלת אורדינלית
1	1	1	תועלת בינארית

סטיית תקן	RANGE	סה"כ	
12.5830574	25	185	תועלת קרדינלית
0	0	6	תועלת אורדינלית
0	0	3	תועלת בינארית

$$s_{s_1} = \{c1\}$$

$$s_{s_2} = \{c2\}$$

$$s_{s_3} = \{c3\}$$

דוגמא 7 – לכל סטודנט K שונה (דוגמא גדולה)

נגדיר עבור כל סטודנט k_i המתאים לסטודנט i.

כעת האלגוריתמים יסתיימו כאשר כל סטודנט קיבל את ה- k_i המתאים לו או שנגמרו המקומות בקורסים.

7 סטודנטים – $\{s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7\}$

5 קורסים – $\{c1, c2, c3, c4, c5\}$

מקומות זמינים בקורסים: $\{q_{c_1} = 2, q_{c_2} = 5, q_{c_3} = 4, q_{c_4} = 3, q_{c_5} = 2\}$

עבור כל סטודנט: $\{k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 2, k_4 = 3, k_5 = 3, k_6 = 4, k_7 = 1\}$

סה"כ הצעות מחיר – 100 (bids)

חפיפות: c1 ו-c5 חופפים

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3		S4		S5		S6		S7	
C1	400	C2	350	C1	300	C1	280	C3	270	C4	260	C1	250
C2	200	C5	200	C2	250	C2	250	C4	250	C2	250	C3	210
C3	150	C1	160	C4	180	C3	180	C2	180	C3	200	C4	200
C4	130	C3	150	C5	160	C5	160	C5	160	C1	150	C2	180
C5	120	C4	140	C3	110	C4	130	C1	140	C5	140	C5	160

TTC:

סבב ראשון:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 2$)		c2 ($q_{1c_2} = 5$)		c3 ($q_{1c_3} = 4$)		c4 ($q_{1c_4} = 3$)		c5 ($q_{1c_5} = 2$)
S1	400	S2	350	S5	270	S6	260	-
S3	300	-	-	-	-			
S4	280							
S7	250							

בקורס c1 יש 2 מקומות ומצביעים עליו 4 סטודנטים, השניים הראשונים יקבלו אותו- הקורס יינתן ל-s1 ו-s3. נשים לב כי נגמר המקום בקורס c1. S2 יקבל את c5, s5 יקבל את c3, s6 יקבל את c4.

s4 ו-s7 נדחו ולכן יעברו סבב נוסף לבד:

סבב 1.1:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 0$)	c2 ($q_{1c_2} = 4$)		c3 ($q_{1c_3} = 3$)		c4 ($q_{1c_4} = 2$)	c5 ($q_{1c_5} = 2$)
-	S4	250	S7	210	-	-

S4 יקבל את c2, S7 יקבל את c3. כלל הסטודנטים קיבלו קורס ולכן ניתן לעבור לסבב הבא.

נזכיר כי עבור כל סטודנט: $\{k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 2, k_4 = 3, k_5 = 3, k_6 = 4, k_7 = 1\}$

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3		S4		S5		S6		S7	
C1	400	C2	350	C1	300	C1	280	C3	270	C4	260	C1	250
C2	200	C5	200	C2	250	C2	250	C4	250	C2	250	C3	210
C3	150	C1	160	C4	180	C3	180	C2	180	C3	200	C4	200
C4	130	C3	150	C5	160	C5	160	C5	160	C1	150	C2	180
C5	120	C4	140	C3	110	C4	130	C1	140	C5	140	C5	160

S1, S2, S7 קיבלו את כל הקורסים שלהם. (c1 ו-c5 חופפים) בל c נגמר המקום

סבב שני:

הצבעה:

c1 ($q_{2c_1} = 0$)	c2 ($q_{2c_2} = 3$)		c3 ($q_{2c_3} = 2$)		c4 ($q_{2c_4} = 2$)		c5 ($q_{2c_5} = 2$)
-	S3	250	S4	180	S5	250	-
	S6	250	-		-		

S3, S6 יקבלו את c2. S4 יקבל את c3. S5 יקבל את c4. כלל הסטודנטים קיבלו קורס וניתן לעבור לסבב הבא.

נזכיר כי עבור כל סטודנט: $\{k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 2, k_4 = 3, k_5 = 3, k_6 = 4, k_7 = 1\}$

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3		S4		S5		S6		S7	
C1	400	C2	350	C1	300	C1	280	C3	270	C4	260	C1	250
C2	200	C5	200	C2	250	C2	250	C4	250	C2	250	C3	210
C3	150	C1	160	C4	180	C3	180	C2	180	C3	200	C4	200
C4	130	C3	150	C5	160	C5	160	C5	160	C1	150	C2	180
C5	120	C4	140	C3	110	C4	130	C1	140	C5	140	C5	160

S3 קיבל את כל הקורסים שלו. (c1 ו-c5 חופפים)

סבב שלישי:

הצבעה:

c1 ($q_{3c_1} = 0$)	c2 ($q_{3c_2} = 1$)		c3 ($q_{3c_3} = 1$)		c4 ($q_{3c_4} = 1$)	c5 ($q_{3c_5} = 2$)	
-	S5	180	S6	200	-	S4	160

S5 יקבל את c2. S6 יקבל את c3. ב-c2 וב-c3 נגמר המקום. S4 יקבל את c5. כל סטודנט קיבל קורס ואפשר להמשיך לסבב הבא.

נזכיר כי עבור כל סטודנט: $\{k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 2, k_4 = 3, k_5 = 3, k_6 = 4, k_7 = 1\}$

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3		S4		S5		S6		S7	
C1	400	C2	350	C1	300	C1	280	C3	270	C4	260	C1	250
C2	200	C5	200	C2	250	C2	250	C4	250	C2	250	C3	210
C3	150	C1	160	C4	180	C3	180	C2	180	C3	200	C4	200
C4	130	C3	150	C5	160	C5	160	C5	160	C1	150	C2	180
C5	120	C4	140	C3	110	C4	130	C1	140	C5	140	C5	160

S4 ו-S5 קיבלו את כל הקורסים שלהם. (c1 ו-c5 חופפים)

סבב רביעי:

הצבעה:

c1 ($q_{4c_1} = 0$)	c2 ($q_{4c_2} = 0$)		c3 ($q_{4c_3} = 0$)		c4 ($q_{4c_4} = 1$)	c5 ($q_{4c_5} = 1$)	
-	-	-	-	-	-	S6	140

S6 יקבל את c5. כלל הסטודנטים קיבלו את הא שלהם ולכן האלגוריתם יסתיים.

סה"כ TTC:

S1		S2		S3		S4		S5		S6		S7	
C1	400	C2	350	C1	300	C1	280	C3	270	C4	260	C1	250
C2	200	C5	200	C2	250	C2	250	C4	250	C2	250	C3	210
C3	150	C1	160	C4	180	C3	180	C2	180	C3	200	C4	200
C4	130	C3	150	C5	160	C5	160	C5	160	C1	150	C2	180
C5	120	C4	140	C3	110	C4	130	C1	140	C5	140	C5	160

S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	
400	350	550	590	700	850	210	תועלת קרדינלית
5	5	9	9	12	13	4	תועלת אורדינלית
1	1	2	3	3	4	1	תועלת בינארית

סה"כ	RANGE	סטיית תקן	
3650	640	218.5123	תועלת קרדינלית
57	9	3.57904	תועלת אורדינלית
15	3	1.214986	תועלת בינארית

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3		S4		S5		S6		S7	
C1	400	C2	350	C1	300	C1	280	C3	270	C4	260	C1	250
C2	200	C5	200	C2	250	C2	250	C4	250	C2	250	C3	210
C3	150	C1	160	C4	180	C3	180	C2	180	C3	200	C4	200
C4	130	C3	150	C5	160	C5	160	C5	160	C1	150	C2	180
C5	120	C4	140	C3	110	C4	130	C1	140	C5	140	C5	160

:SP

סבב ראשון:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 2$)		c2 ($q_{1c_2} = 5$)		c3 ($q_{1c_3} = 4$)		c4 ($q_{1c_4} = 3$)		c5 ($q_{1c_5} = 2$)
S1	400	S2	350	S5	270	S6	260	-
S3	300	-	-	-	-			
S4	280							
S7	250							

בקורס c1 יש 2 מקומות ומצביעים עליו 4 סטודנטים, השניים הראשונים יקבלו אותו- הקורס יינתן ל1 ו-S3 במחיר 280. נשים לב כי נגמר המקום בקורס c1. S2 יקבל את c5 בחינם, S5 יקבל את c3 בחינם, S6 יקבל את c4 בחינם. S4 ו-S7 נדחו ולכן יעברו סבב נוסף לבד:

סבב 1.1:

הצבעה:

c1 ($q_{1c_1} = 0$)		c2 ($q_{1c_2} = 4$)		c3 ($q_{1c_3} = 3$)		c4 ($q_{1c_4} = 2$)		c5 ($q_{1c_5} = 2$)	
-		S4	530	S7	460	-		-	

S4 יקבל את c2 בחינם, S7 יקבל את c3 בחינם. כלל הסטודנטים קיבלו קורס ולכן ניתן לעבור לסבב הבא.

נזכיר כי עבור כל סטודנט: $\{k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 2, k_4 = 3, k_5 = 3, k_6 = 4, k_7 = 1\}$

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3		S4		S5		S6		S7	
C1	400	C2	350	C1	300	C1	280	C3	270	C4	260	C1	250
C2	200	C5	200	C2	250	C2	250	C4	250	C2	250	C3	210
C3	150	C1	160	C4	180	C3	180	C2	180	C3	200	C4	200
C4	130	C3	150	C5	160	C5	160	C5	160	C1	150	C2	180
C5	120	C4	140	C3	110	C4	130	C1	140	C5	140	C5	160

S1, S2, S7 קיבלו את כל הקורסים שלהם. (C1 ו-C5 חופפים) ב-C1 נגמר המקום

סבב שני:

הצבעה:

c1 ($q_{2c_1} = 0$)	c2 ($q_{2c_2} = 3$)		c3 ($q_{2c_3} = 2$)		c4 ($q_{2c_4} = 2$)		c5 ($q_{2c_5} = 2$)
-	S6	510	S4	530	S5	520	-
	S3	270	-		-		

S3, S6 יקבלו את C2 בחינם. S4 יקבל את C3 בחינם. S5 יקבל את C4 בחינם. כלל הסטודנטים קיבלו קורס וניתן לעבור לסבב הבא.

נזכיר כי עבור כל סטודנט: $\{k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 2, k_4 = 3, k_5 = 3, k_6 = 4, k_7 = 1\}$

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3		S4		S5		S6		S7	
C1	400	C2	350	C1	300	C1	280	C3	270	C4	260	C1	250
C2	200	C5	200	C2	250	C2	250	C4	250	C2	250	C3	210
C3	150	C1	160	C4	180	C3	180	C2	180	C3	200	C4	200
C4	130	C3	150	C5	160	C5	160	C5	160	C1	150	C2	180
C5	120	C4	140	C3	110	C4	130	C1	140	C5	140	C5	160

S3 קיבל את כל הקורסים שלו. (C1 ו-C5 חופפים)

סבב שלישי:

הצבעה:

c1 ($q_{3c_1} = 0$)	c2 ($q_{3c_2} = 1$)		c3 ($q_{3c_3} = 1$)		c4 ($q_{3c_4} = 1$)		c5 ($q_{3c_5} = 2$)
-	S5	700	S6	710	-		S4 870

S5 יקבל את C2 בחינם. S6 יקבל את C3 בחינם. ב-C2 וב-C3 נגמר המקום. S4 יקבל את C5 בחינם. כל סטודנט קיבל קורס ואפשר להמשיך לסבב הבא.

נזכיר כי עבור כל סטודנט: $\{k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 2, k_4 = 3, k_5 = 3, k_6 = 4, k_7 = 1\}$

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2		S3		S4		S5		S6		S7	
C1	400	C2	350	C1	300	C1	280	C3	270	C4	260	C1	250
C2	200	C5	200	C2	250	C2	250	C4	250	C2	250	C3	210
C3	150	C1	160	C4	180	C3	180	C2	180	C3	200	C4	200
C4	130	C3	150	C5	160	C5	160	C5	160	C1	150	C2	180
C5	120	C4	140	C3	110	C4	130	C1	140	C5	140	C5	160

S4 ו-S5 קיבלו את כל הקורסים שלהם. (C1 ו-C5 חופפים)

סבב רביעי:

הצבעה:

c1 ($q_{4c_1} = 0$)		c2 ($q_{4c_2} = 0$)		c3 ($q_{4c_3} = 0$)		c4 ($q_{4c_4} = 1$)		c5 ($q_{4c_5} = 1$)	
-		-		-		-		S6	1000

S6 יקבל את C5 בחינם. כלל הסטודנטים קיבלו את הא שלהם ולכן האלגוריתם יסתיים.

סה"כ SP:

S1		S2		S3		S4		S5		S6		S7	
C1	400	C2	350	C1	300	C1	280	C3	270	C4	260	C1	250
C2	200	C5	200	C2	250	C2	250	C4	250	C2	250	C3	210
C3	150	C1	160	C4	180	C3	180	C2	180	C3	200	C4	200
C4	130	C3	150	C5	160	C5	160	C5	160	C1	150	C2	180
C5	120	C4	140	C3	110	C4	130	C1	140	C5	140	C5	160

S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	
400	350	550	590	700	850	210	תועלת קרדינלית
5	5	9	9	12	13	4	תועלת אורדינלית
1	1	2	3	3	4	1	תועלת בינארית

סה"כ	RANGE	סטיית תקן	
3650	640	218.5123	תועלת קרדינלית
57	9	3.57904	תועלת אורדינלית
15	3	1.214986	תועלת בינארית

דוגמא 8 - אופטימלי (OC):

OC מחשב (לא בסבבים אלא סה"כ) את המקסימום האורדינלי האפשרי ובתוך זה יבחרו הקורסים שיתנו את המקסימום הbids האפשרי.

2 סטודנטים – {s1, s2}

3 קורסים – {c1, c2, c3}

מקומות זמינים בקורסים: $\{q_{c_1} = 2, q_{c_2} = 1, q_{c_3} = 2\}$

כל סטודנט צריך קורס אחד סה"כ – $k=2$

סה"כ הצעות מחיר – 100 (bids)

חפיפות: אין חפיפות

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2	
C1	44	C1	50
C2	39	C2	45
C3	17	C3	5

הסכום האורדינלי הגבוה ביותר האפשרי: בc1 יש 2 מקומות ולכן שני הסטודנטים יקבלו את ההצעה הראשונית שלהם. בc2 יש רק מקום אחד אז סטודנט אחד יצטרך לקבל את ההצעה השנייה וסטודנט אחד את ההצעה השלישית (3+3+2+1)

במקרה זה- **הסכומים הקרדינליים** האפשריים הם:

$$S1 \text{ יקבל את } c1 \text{ ו- } c2 + s2 \text{ יקבל את } c1 \text{ ו- } c3 = 44+39+50+45 = 178$$

$$S1 \text{ יקבל את } c1 \text{ ו- } c3 + s2 \text{ יקבל את } c1 \text{ ו- } c2 = 44+17+50+5 = 116$$

הסכום הראשון גדול יותר ולכן האופטימלי יבחר בו.

סה"כ אופטימלי OC:

הצעות מחיר הסטודנטים:

S1		S2	
C1	44	C1	50
C2	39	C2	45
C3	17	C3	5

קורסים שהסטודנט קיבל
קורסים שירדו מזמינות

S1	S2	
83	55	תועלת קרדינלית
5	4	תועלת אורדינלית
2	2	תועלת בינארית

סטיית תקן	RANGE	סה"כ	
19.799	28	178	תועלת קרדינלית
0.707	1	9	תועלת אורדינלית
0	0	4	תועלת בינארית

$$s_{s_1} = \{c2\}$$

$$s_{s_2} = \{c1\}$$