Opgaver til lektion 8

Opgave 8.1

Analysér og bestem de kritiske punkter for det elektriske kresløb i Eksempel 2, sektion 4.1 (eksempel med elektrisk netværk der blev gennemgået i forbindelse med undervisningen), dvs., bestem de punkter der opfylder

$$\frac{di_2/dt}{di_1/dt} = 0$$

a) Hvor ligger det/de kritiske punkter og hvilken type er de?
b) Lav et faseplot i området omkring de kritiske punkter, svarende til Fig 80.b, s. 134 i Kreyszig.

Løsning:

Benyttes definitionen på et kritisk punkt findes der i dette tilfælde ét kritisk punkt i $\boldsymbol{J} = (i_1, i_2) = (3, 0)$. Laver man derefter et variabelskift (skift af koordinatsystem), $\tilde{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}\_c$, placeres det kritiske punkt i (0,0).

Indsættes variabelskiftet i den inhomogene ligning fås, i overensstemmelse hermed, en homogen ligning, altså hvor det kritiske punkt ligger i $\tilde{\boldsymbol{J}} = [0,0]^T$. Stabiliteten afgøres derfor stadig af matrix ***A*** og dens egenværdier (det er matrixen ***A*** der karakteriserer systemet - en slags "overføringsfunktion" og g er bare input uden indvirkning på systemets egenskaber).

Egenværdier bestemmes til:

$$0 = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 4 \\ -1.6 & 1.2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 4 \\ -8 & 6-5\lambda \end{vmatrix} = 5\lambda^2 + 14\lambda + 8 \Leftrightarrow \lambda = -1.4 \pm 0.6 = \begin{cases} -0.8 \\ -2 \end{cases}$$

Heraf ses at $p = -2.8 < 0$, $q = 1.6 > 0$, og $D = 1.44 > 0$, altså er der tale om en stabil node.

Opgave 8.2

Betragt følgende ulineære 2. ordens differentialligning:

$$y'' - 9y + y^3 = 0$$

1) Opstil det ækvivalente 1. ordens (ulineære) ligningssystem og bestem de kritiske punkter. *Hint: ligningssystemet er en "stak" af ligninger $y_i' = f_i(y_1, \dots, y_n, r(t))$, hvor f_i generelt er en ulineær funktion - se slides fra lektion 7: "A first order system" vs. "A first order linear system".*
2) Opstil det generelle *lineariserede* ligningssystem for det kritiske punkt $\tilde{\tilde{\boldsymbol{y}}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$; følg proceduren "Linearization (around stationary point)" fra slides med penduleksemplet – bemærk, proceduren er ikke begrænset til et stationært (kritisk) punkt. Afhænger ligningssystemet af det kritiske punkt, og hvordan i så fald?
3) Lav et plot af den identificerede ulineære funktion sammenholdt med dens linearisering (i et eller alle kritiske punkter).

4) For hvert af de kritiske punkter, undersøg typen og stabiliteten heraf, og lav et faseplot i omegnen af det kritiske punkt.

Løsning:

Ud fra $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(y_1, y_2)$ bestemmes de kritiske punkter, dvs., man identificerer de to variable for at opstille et første ordens ligningssystem, og finder deres afhængighed af (generelt) t og $\boldsymbol{y}$.

Igen, ud fra definitionen på et kritisk punkt, $\boldsymbol{y}' = 0$, finder man tre kritiske punker $\mathbf{y_0}$, henholdsvis (0,0), (-3,0) og (3,0).

Funktionen $\boldsymbol{f}$ lineariseres i de respektive punkter, og der indføres delta-variable $\mathbf{y} = \mathbf{y_0} + \boldsymbol{\Delta y}$. Ved indsættelse konstaterer man at den resulterende ligning er en homogen ligning i deltavariable (funktionsværdien i lineariseringspunktet i Taylor rækkeudviklingen går ud med $\mathbf{y_0}$, per definition af kritisk punkt for systemer med konstante koefficienter).

Den resulterende matrix fra den linearisede model er derfor bestemmende for stabiliteten og type af kritisk punkt:

$(0,0)$: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$, saddelpunkt, ustabil (q < 0)

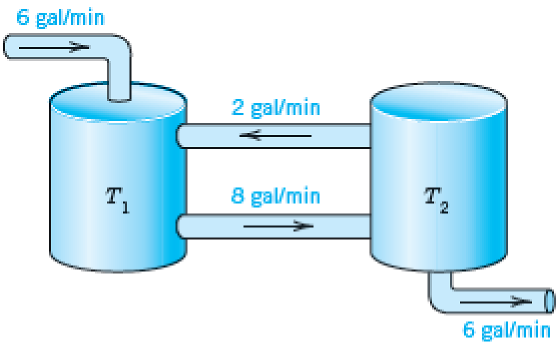
$(3,0), (-3,0)$: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -18 & 0 \end{bmatrix}$, centerpunkt (p = 0), stabil (q > 0)

Det ses at ligningssystemet, og dermed stabiliteten, afhænger af det kritiske punkt.

Opgave 8.3

Tilsvarende opgave som i lektion 7, med koblede tanke, men nu med andre betingelser.

De to tanke indeholder hver 100 gal. vand, målt i volumenenheden gallons, hvori der for T_2's vedkommende er opløst 150 lb salt. Flow ind og ud af tankene er vist på figuren. Specifikt, som tilløb til T_1 kommer der et flow på 6 gal/min indeholdende 6 lb salt. Koncentrationen af salt i de to tanke kan antages ensartet da der er konstant omrøring.



Problemet løses for $y_1(t)$ og $y_2(t)$ der angiver vægten af salt i de to tanke, respektive, målt i vægt-enheden pounds (lb) (modsvarende masse).

Problemet opstilles som koblede differentialligninger der sikrer balance i flowet (ingen masseophobning), dvs. for antal vægtenheder (salt) per minut:

weight [lb/min] = flow [gal/min] x (weight [lb] / volume [gal])

a) Løs for for $y_1(t)$ og $y_2(t)$ som funktion af tiden og plot de to resultater i samme graf for et tidsinterval der tydeligt viser både transient- og steady-state forløbet (stabiliseringen) af T_1 og T_2.
b) Giv en kvantitativ forklaring på steady-state-værdien, f.eks. vha. flow-ligningerne, og en kvalitativ forklaring på transientforløbet.
c) Opstil systemet på state-space form, med output $y(t)$ i form af vægten af gødning i T_2; identificer state-, input- og output- matricer, og angiv om systemet er homogent/inhomogent og tidsvariant/invariant.
d) Anvend Laplace teknikken til at løse det koblede ligningssystem og sammenlign løsningsmetoderne.

Løsning:

Metoden for ubestemte koefficienter kan benyttes til at bestemme den partikulære løsning $\boldsymbol{y_p}$ = $[100, 100]^T$ - en konstant. Egenværdier er -0.12 og -0.04, altså samme som i opgaven fra lektion 7 (samme inhomogene ligningssystem, men med andre begyndelsesbetingelser: $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 150$):

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} -37.5 \\ -75.0 \end{bmatrix} e^{-0.04t} + \begin{bmatrix} -62.5 \\ 125.0 \end{bmatrix} e^{-0.12t} + \begin{bmatrix} 100.0 \\ 100.0 \end{bmatrix}$$

Saltkoncentrationen stabiliserer sig for t uendelig. Derfor, sættes d**y**/dt lig 0 i ligningssystemet kan man løse for slutkoncentrationen (vægtmængden). Specifikt fås ligningen (efter Gauss-reduktion): $6 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, hvor x er salt-flowet i lb/gal. Da begge tanke indeholder V = 100 gal fås derfor en saltmængde for t uendelig på $y_1 = y_2 = Vx = 100\ gal\ \times 1\ lb/gal\ =\ 100\ lb$. Tank T_2 indeholder salt og tilføres (rent) vand fra T_1 indledningsvis, hvorfor den falder, og modsat tilføres T_1 salt hvorfor den stiger.

Opstillingen på state-space form kan udføres som i opgave 8.4, f.eks. med valg af state-variable i form af ***y***, og hvor y_1 f.eks. er valgt som output med ***c***-vektor $[1\ 0]^T$:

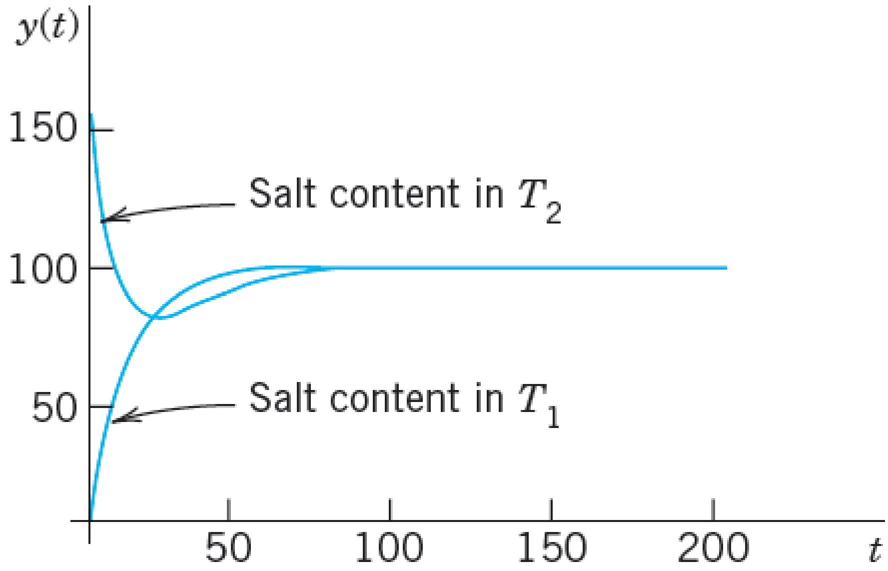
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16/200 & 4/200 \\ 16/200 & -16/200 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = [1 \quad 0], D = 0$$

B-vektoren kan defineres forskelligt, her i enheden per gal/s (flowet), sådan at inputtet er gødningskoncentration målt i lb/gal , dvs. input *u(t)* = 1 (der er andre muligheder afhængig af fortolkningen, men i sidste ende skal enhederne passe!).

I stedet for LA tilgangen kunne man også have valgt at anvende Laplace direkte på det resulterende første-ordens ligningssystem (altså det der fører til identifikation af A matricen og forcing/input-funktionen), hvormed man får en algebraisk ligning i $Y_1(s)$ og $Y_2(s)$ (de Laplace-transformerede af $y_1(t)$ og $y_2(t)$). Løses der for disse (Gauss elimination, f.eks.)) og faktoriseres resultatet, kan udtrykkene inverse Laplace-transformeres for at finde ***y***(t).

Stabiliteten kan i dette tilfælde konstateres ved at se på poler i overføringsfunktionen, forudsat at man har defineret en sådan overføringsfunktion! bemærk, det er ikke nødvendigt ved LA-metoden - ***A*** matrixen er at betragte som en sådan ”overføringsfunktion”.



Opgave 8.4

Betragt eksempel 2, sektion 4.1 i Kreyszig, omhandlende et 2. ordens elektrisk kredsløb (gennemgået på tavlen i lektion 7). Opgaven her går ud på at opstille første-ordens systemet på state-space form, med udgangspunkt i at state-variable vælges som henholdsvis x_1(t) = i_1(t) og x_2(t) = v_c(t); ofte vælges noget som er udtryk for energien i systemet, her energien i spolen, som er $0.5Li_1^2(t)$, og energien i kondensatoren, $0.5Cv_c^2(t)$. Som output $y(t)$ ønskes i_2(t).

Identificér $x_1(t)' = f_1(t, x_1, x_2, u)$, $x_2(t)' = f_2(t, x_1, x_2, u)$, og $u(t)$ som er input til systemet, og bestem:

1. matricerne ***A*** og ***B***, samt (række) vektoren ***c*** og skalaren *D*, i state-space formuleringen
2. systemets impulsrespons

Løsning:

Antaget at $x_1(t) = i_1(t); x_2(t) = v_c(t)$ og at output vælges som $y(t) = i_1(t)$, re-arrangeres ligningerne sådan at $x_1'\ og\ x_2{}'$ isoleres for identifikation af de fire ”variable” i state-space formuleringen. Dermed fås input som $u(t) = E$, og derefter,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} - 1\right)\frac{R_1}{L} & -\frac{\tau_1}{\tau_2}\frac{1}{L} \\ \frac{R_1}{\tau_2} & -\frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix}, \tau_1 = R_1 C, \tau_2 = C(R_1 + R_2)$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = C\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

Systemets impulsrespons er dermed $h(t) = \boldsymbol{c}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B} + D\delta(t)$, en skalarfunktion. Bemærk, det havde også været muligt at anvende tallene fra eksemplet, men dermed sværere at se hvordan det resulterende udtryk var fremkkommet.

Eventuelt kunne man også have valgt $x_1(t) = i_1(t)$ og $x_2(t) = i_2(t)$, hvilket også er en mulighed, og så ”direkte oversætte” formlerne fra eksemplet i slides, lektion 7, til state-space form (som i opgave 8.3), dvs. med tal i stedet for symboludtryk.