Opgaver til lektion 2 (+ Opgave 1.6 fra lektion 1)

Opgave 2.1

Matrixen A er givet ved:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

a. Rækkereducér A til echelonform.
b. Find rangen af A.

Opgave 2.2

Find rangen af A, B og C.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 30 & -70 & 50 \\ -36 & 84 & -60 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

Check både række og søjle og sammenlign resultaterne.

For matricen C, identificer de elementære transformationsmatricer der er nødvendige for at opnå echelonform, evt. implementer i Matlab eller lignende.

Opgave 2.3

Løs ligningssystemet vha. Gauss-elimination og bagefter vha. Cramers formel.

$$\begin{aligned} -x + 3y - 2z &= 7 \\ 3x \qquad + 3z &= -3 \\ 2x + y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

Opgave 2.4

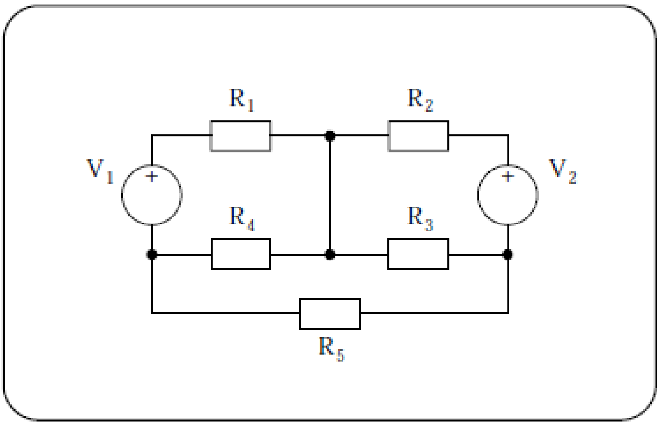
Løs ligningssystemet vha. Gauss-elimination og bagefter vha. Cramers formel.

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 3z &= 1 \\ -x + 2y + z &= 2 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Opgave 2.5

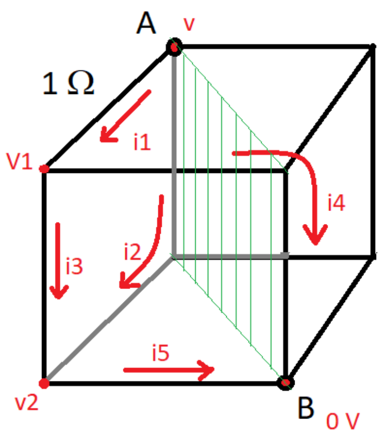
Beregn strømmen igennem R_3. Plusretningen er tilhøjre på figuren. Opstil kredsløbsligningerne vha. Kirchoffs maskeligninger og løs ligningssystemet fx vha. gaussisk elimination. Generatorer og modstande har følgende værdier:

$$V_1 = 1\text{ V} \quad R_1 = 1\ \Omega \quad R_3 = 3\ \Omega \quad R_5 = 5\ \Omega$$
$$V_2 = 2\text{ V} \quad R_2 = 2\ \Omega \quad R_4 = 4\ \Omega$$



Opgave 2.6 (fra ugebladet Ingeniørens Tænkeboks)

Givet nedenstående kubiske terning opbygget af 12 modstandstråde, hver med resistansen 1 Ohm, find resistansen mellem punkt A og B (eller generelt mellem diametralt modsatte hjørner).



I Ingeniørens løsning anvendtes symmetri: Fra punkt A, og tilsvarende fra B pga. symmetri, kan strømmen løbe ad tre veje med lige stor modstand (og til punkter med samme potentiale pga. symmetrien), der hver deler sig i to veje med lige stor modstand; den samlede resistans er derfor 1/3 + (1/2)/3 + 1/3 Ω= 5/6 Ω.

Opgaven er at verificere denne løsning ved at løse det underliggende ligningssystem. Anvend symmetri, men nu ved at dele terningen diagonalt i to halvdele (ved den grønne skærm), sådan at den samlede resistans fremkommer som parallelforbindelsen. Vi kan derfor nøjes med at analysere den venstre halvdel ved at påtrykke v = 1 V i punkt A i forhold til B (0 V potentiale) og løse for den resulterende strøm, og deraf resistansen.

Bestem det "halve kredsløb" og opstil ligningssystemet med de fem ubekendte strømme og to ubekendte spændinger, dvs. **x** = [i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, v_1, v_2], og derefter ligningen til bestemmelse af resistansen mellem de to hjørner.

Til sammenligning, anvend de to iterative metoder, Gauss-Seidel og Jacobi, på det opstillede ligningssystem og sammenligning løsning, konvergens og konvergensrate.