Opgaver til lektion 5

Opgave 5.1

Undersøg om A er symmetrisk, skævsymmetrisk eller orthogonal. Find spektret for A

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

A er ortogonal, som kan konstateres ved udregning af den inverse, $A^T = A^{-1}$.

Egenværdier, og spektrum, er $\lambda_i = \{1, j, -j\}$

Opgave 5.2

Find egenværdier og egenvektorer for A. Bestem også den algebraiske samt den geometriske multiplicitet for egenværdierne.

$$A = \begin{Bmatrix} 13 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -8 \\ 5 & 4 & 7 \end{Bmatrix}$$

Det karakteristiske polynomium er $D(\lambda) = -\lambda^3 - 27\lambda^2 + 243\lambda - 729$ hvori 9 er en rod (fælles divisor i koefficienterne). Heraf findes de to andre rødder til også at være 9, altså algebraisk multiplicitet på 3!

Tilhørende egenvektor er $v_1 = [2, -2, 1]^T$ med geometrisk multiplicitet på 1 - defect.

Opgave 5.3

Find spektrum, egenvektorer og spor for A.

$$A = \begin{Bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{Bmatrix}$$

Undersøg koordinaten $[\boldsymbol{w}]_{\boldsymbol{B}} = [4, 7, -5]^T$, hvor B er egenbasen: Er denne en løsning til egenværdiproblemet? Hvad er de tilsvarende koordinater i standardbasen?

Hint: For en mulig rod i et 3.gradspolynomium med koefficient 1 ganget på højeste potens, check mulige fælles divisorer i koefficienterne der følger efter.

Det karakteristiske polynomium er $D(\lambda) = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162$ hvori 3 er en rod (fælles divisor i koefficienterne). Heraf findes de to andre rødder 6 og 9; spektrum er dermed {3, 6, 9}.

Tilhørende egenvektorer er respektivt $v_1 = [2, -2, 1]^T$; $v_2 = [1, 2, 2]^T$, $v_3 = [2, 1, -2]^T$. Sporet er 18 og punktet (4,7,-5) i egenbasen svarer til punktet (5,1,28) i standardbasen (den kanoniske basis eller det kartesiske koordinatsystem).

Opgave 5.4

Betragt en lineær transformation i det todimensionelle rum ($\boldsymbol{R}^2$), som angiver en spejling omkring y-aksen:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$$

Find egenværdier og egenvektorer for $\boldsymbol{A}$

Egenvektorerne angiver nye koordinatakser der opstår ved den lineære transformation repræsenteret ved ***A***. Illustrer hovedakserne og retningen (orienteringen) i standardkoordinat-systemet, og forklar sammenhængen til spejlingen.

Hint: betragt den tilhørende egenværdi-dekomposition (se slides).

Det karakteristiske polynomium er $D(\lambda) = \lambda^2 - 1$ og deraf rødderne i den karakteristiske ligning, 1 og -1. Tilhørende egenvektorer er respektivt $v_1 = [0,1]^T; v_2 = [1,0]^T$. Vektoren v_1 er en vektor i "y-aksens" retning i det kartesiske koordinatsystem (egenværdi lig med +1). Tilsvarende er vektoren v_2 en vektor i "x-aksen" retning, men egenværdien er -1 hvilket vender aksen i negativ "x-akse" (hovedakse)retning.

(Anvendelsesopgaver – fokusér på en udvalgt opgave)

Opgave 5.5 (Fibonacci talrækken og det gyldne snit – se slides fra lektion 4)

Eftervisning af Fibonacci egenværdiproblemet.

Formuler egenværdiproblemet relateret til Fibonacci talrækken, $\boldsymbol{AF} = \lambda \boldsymbol{F}$, som vist i slides og løs for λ.

Hint: Bemærk, for at bestemme en gyldig løsning er man nødt til at se den i kontekst af problemet!

Det karakteriske polynomium er

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Der er to egenværdier, én positiv og en negativ. I forhold til problemet er kun den positive en egentlig løsning (i et anvendelseseksempel er ikke alle matematiske løsninger nødvendigvis egentlige løsninger). Den positive er det såkaldte "gyldne snit", ca. 1,618.

Opgave 5.6 (Power kontrol i trådløs kommunikation – se slides fra lektion 4)

Betragt et trådløst kommunikationssystem med to basisstationer og to mobiltelefoner (brugere) der sender i retning fra mobilen til basisstationen. Størrelsen a_{i,b_i} angiver her kanalens forstærkning mellem mobil *i* og basisstation b_i: jo større afstand mellem mobil og basisstation, jo mindre forstærkning. Med to mobiler og to basisstationer er der fire forstærkninger som kan opstilles i en matrix $\mathbf{A}$, hvor række angiver mobil og søjle basisstation. Antag at denne er givet som følger:

$$\mathbf{A}^{(b)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/1^4 & 1/3^4 \\ 1/4^4 & 1/2^4 \end{bmatrix}$$

Antag at de to mobiler kommunikerer samtidigt og på samme kanal. De vil således interferere/forstyrre hinanden og give anledning til et signal til interferensforhold $\omega_i = a_{i,b_i} q_i / (a_{j,b_i} q_j)$, dvs. forholdet mellem den effekt vi modtager fra den ønskede mobil (sendeeffekt q_i gange forstærkning i kanalen mellem mobil *i* og den basisstation b_i som denne mobil er forbundet til) og den effekt vi modtager fra den anden mobil (dennes sendeeffekt q_j gange forstærkning i kanalen mellem mobil *j* og den samme basisstation b_i som mobil *i* er forbundet til).

Signal til interferensforholdet er bestemmende for om man kan kommunikere samtidigt (og for den opnåelige datarate) og ønskes så stort som muligt. I dette tilfælde ønsker vi det ikke bare så stort som muligt, men balanceret mellem de to mobiler/brugere sådan at de begge får samme servicekvalitet.

Baseret på slides, op opstil ligningssystemet:

$$\frac{1}{\omega}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{2,b_1}/a_{1,b_1} \\ a_{1,b_2}/a_{2,b_2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

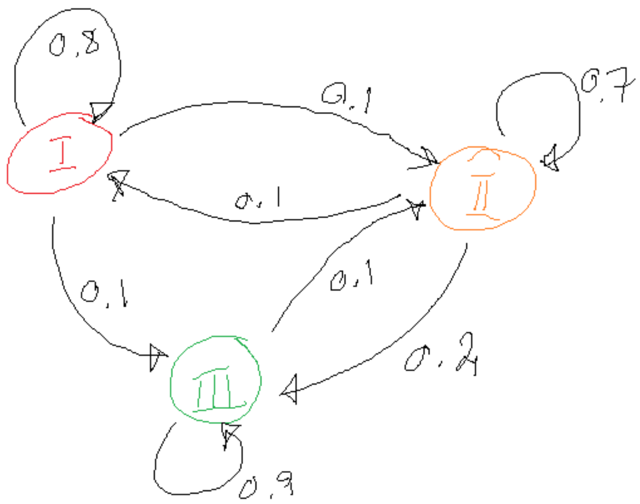
Spørgsmålet er nu hvordan skal vi associere mobiler med basisstationer og hvor stor sendeeffekt vi skal tildele de to mobiler sådan at vi maksimerer ω? Besvar spørgsmålet med den antagelse at vi ikke tildeler begge mobiler til samme basisstation samtidigt.

$\omega = 36$ (15.6dB)

$q_1 = 0{,}14; q_2 = 0{,}99$ (W)

Opgave 5.8 (Markov proces – state transition matrix)

Følgende model viser hvordan en given by udvikler sig mellem tre områder, her I: boligområde, II: forretningsområde, og III: industriområde, i fem års intervaller. I et bestemt referenceår er fordelingen I: 30%, II: 20% og III: 50%



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

a_{ij} angiver sandsynligheden for at gå fra tilstand *i* til tilstand *j*

Modellen er en såkaldt Markov-model, og udviklingen en Markov process: Den næste tilstand, ***y***, afhænger kun af den forrige tilstand ***x*** sådan at $\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}$, hvor f.eks. tilstanden i referenceåret er $\mathbf{x}^T = [0.3, 0.2, 0,5]$ (overbevis jer om at næste tilstand for område I er givet ved den lineære transformation dette udtryksom i ovenstående udtryk for Markov processen) – giver det mening?

A er en såkaldt stokastisk matrix, for hvilket der gælder at summen af hver række er lig 1.0, svarende til at den totale sandsynlighed (for at gå fra tilstand i) er 1.0!

c) Lav et Matlab/Maple program der kan fremskrive udviklingen i områdefordelingen i intervaller af fem år (check at i for hvert step får total på 1.0), og generér et plot eller en tabel der viser procentfordelingen mellem de tre områder som funktion af intervaller af fem år (et antal år ud i fremtiden).

Besvarelsen af a) forsøger numerisk at løse problemet $\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}$, altså at fordelingen mellem områder stabiliserer sig (og for øvrigt tilsvarende fremgangsmåde som benyttes i Power Iteration for den maksimale egenværdi).

d) Formulér ovenstående som et egenværdiproblem og løs for den resulterende fordeling mellem områder vha. Gaussisk elimination (hvad er egenværdien? husk at hvis **x** er en løsning så er også *k***x** også en løsning, men ikke alle løsninger er gyldige her! Hvad skal der gælde for den resulterende løsning?) Husk, for at bestemme en gyldig løsning er man nødt til at se den i kontekst af problemet!

Egenværdi 1, endelig områdefordeling $\begin{Bmatrix} 0,125 \\ 0,25 \\ 0,625 \end{Bmatrix}$

Vektoren skal summere til 1 (sandsynlighed)