Lineær algebra og dynamiske systemer
ESD4/TBS

Opgaver til lektion 3

Opgave 3.1

Matrixen A er givet ved:

$$A = \begin{Bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{Bmatrix}$$

a. Rækkereducér A til echelonform.
b. Find rangen af A.
c. Find en base for rækkerummet. rk. 1, 2 og 4
d. Find en base for søjlerummet. sj. 1, 2 og 4 $x_1=0, x_2=1$
e. Find en base for nulrummet. $\bar{\bar{A}}\bar{x}=\bar{0}$, nullitet 2, ex. $x_1=1, x_2=0$
f. Angiv dimensionerne af de tre rum og relatér dem til antallet af søjler i A.
dim(sj.) = dim(rk.) = rank($\bar{\bar{A}}$) = dim($\bar{\bar{A}}$) − nullitet

OBS! De to første spørgsmål er løst i forrige opgavesæt (opgave 2.1).

Opgave 3.2

Matrixen A er givet ved:

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

a. Find rangen af A. rang($\bar{\bar{A}}$) = 2
b. Find nulliteten af A (dimensionen af nulrummet). 3 − 2 = 1
c. Find determinanten for A. det($\bar{\bar{A}}$) = 0
d. Undersøg om de tre vektorer a, b og (a + b) tilhører nulrummet for A. Vektorerne er givne ved:

$$\bar{a} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{Bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 6 \\ 22 \end{Bmatrix}$$

$\bar{\bar{A}}(c_1 \cdot \bar{a} + c_2 \cdot \bar{b}) = \bar{0}$ ✓

Opgave 3.3

Givet følgende tre sæt af vektorer, angiv i hvert tilfælde om der er tale om et vektorrum og begrund hvorfor/hvorfor ikke. I fald der er tale om et vektorrum, angiv dimensionen heraf og en base for vektorrummet:

1) alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ hvorom det gælder at $|x|<1, |y|<1$, dvs. hvor komposanternes absolutte værdi er mindre end 1.
2) alle vektorer i $\mathbb{R}^3$ hvorom det gælder at $2x+3z=0$.
3) alle vektorer i $\mathbb{R}^1$

1) Der eksisterer $\bar{v}_1, \bar{v}_2$: $|\{1,0\}\cdot(\bar{v}_1+\bar{v}_2)|>1$
2) OK, dim = 2, x og y vælges frit
3) OK, dim = 1, x vælges frit

Opgave 3.4

Betragt alle vektorer i $\mathcal{R}^3$, hvorom det gælder, at $5x - 3y + 2z = 0$

$\mathcal{R}^3$ står for sæt af 3 reelle tal. Dvs. det kunne være det 3-dimensionelle rum, der beskrives. Symbolerne x, y, z står for komposanterne i de angivne vektorer.

- **a.** Vis at de angivne vektorer udgør et vektorrum. $\forall \bar{v} = [x, y, -(5x+3y)/2]$
- **b.** Find dimensionen. $dim = 2$
- **c.** Find en base.

$\bar{v}_1 = [2, 0, -5]$, $\bar{v}_2 = [0, 2, 3]$

Opgave 3.5

Betragt alle vektorer i $\mathcal{R}^5$, hvorom det gælder, at de 3 første komposanter er 0.

- **a.** Vis at de angivne vektorer udgør et vektorrum. $\bar{v} = [0, 0, 0, c_1, c_2]$
- **b.** Find dimensionen. $dim = 2$
- **c.** Find en base.

$\bar{v}_1 = [0, 0, 0, 1, 0]$, $\bar{v}_2 = [0, 0, 0, 0, -1]$

Opgave 3.6

Matrixen A er givet ved:

$$A = \begin{Bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

- **a.** Find rangen af A. $rang(\bar{A}) = 1$
- **b.** Find nulliteten af A (dimensionen af nulrummet). $nullitet = 2$
- **c.** Find determinanten for A. $det(\bar{A}) = 0$
- **d.** Undersøg om de tre vektorer a, b og $(a + b)$ tilhører nulrummet for A. Vektorerne er givne ved:

$$a = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \checkmark \qquad b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1.5 \end{Bmatrix} \checkmark$$

- **e.** Gentag alle de ovenstående spørgsmål for matrixen B, som er givet ved:

$$B = \{5 \quad -3 \quad 2\}$$

ditto, bortset fra c)!