

## Opgaver til lektion 7

### Opgave 7.1 (opgave 5 i Kreyszig, sektion 4.3)

Løs for den *generelle* løsning til det lineære system

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 + 5y_2 \\ y_2' &= 5y_1 + 12.5y_2\end{aligned}$$

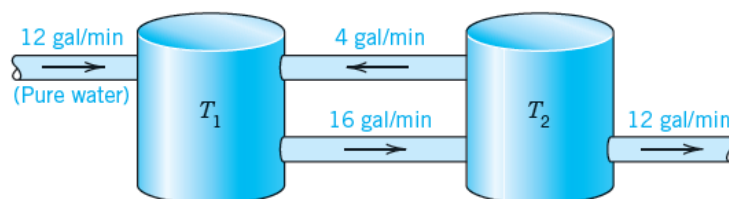
### Opgave 7.2 (opgave 20 i Kreyszig, sektion 4.3)

Lav et faseplot for løsninger til den degenerative node (eksempel 6 i Kreyszig) med forskellige (valgte) begyndelsesbetingelser. Hvad bestemmer om banerne (trajectories) løber mod eller fra det kritiske punkt?

### Opgave 7.3 (opgave 18 i Kreyszig, sektion 4.3)

(evt. gennemse eksempel 1 i sektion 4.1 for inspiration).

Opgaven går ud på at løse for  $y_1(t)$  og  $y_2(t)$  der angiver vægten af gødning i de to tanke  $T_1$  og  $T_2$ , målt i vægtenheden pounds (lb) (modsvarende masse).



De to tanke indeholder hver 200 gal. vand, målt i volumenenheden gallons, hvori der for  $T_1$ 's vedkommende er opløst 150 lb gødning og for  $T_2$ 's, 200 lb gødning. Flow ind og ud af tankene er vist på figuren. Specifikt kommer der et flow på 12 gal/min rent vand ind som tilløb til tank  $T_1$ . Koncentrationen af gødning i de to tanke kan antages ensartet da der antages konstant omrøring og dermed givet ved henholdsvis  $y_1(t)$  og  $y_2(t)$ .

Problemet opstilles som koblede differentialligninger der sikrer balance i flowet (ingen masseophobning), dvs. for antal vægtenheder gødning per minut der er relateret til de opgivne størrelser iflg.:

$$\begin{aligned}\text{masse flow (vægtenhed per tid)} \\ &= \\ \text{koncentration (vægtenhed per volumen)} * \text{væske flow (volumenenhed per tid)}\end{aligned}$$

, eller

$$\text{weight [lb/min]} = \text{flow [gal/min]} \times (\text{weight [lb]} / \text{volume [gal]})$$

- a) Er systemet homogent eller inhomogent? Er systemet autonomt?
- b) Løs for  $y_1(t)$  og  $y_2(t)$  som funktion af tiden  $t$ .
- c) Plot de to resultater i samme graf som funktion af tiden; giv en forklaring på forløbene.
- d) Lav et faseplot (med  $t$  som parameter)
- e) Hvilke typer af kritiske punkter har systemet?

#### Opgave 7.4

Afgør, ved inspektion, stabilitet og type af kritiske punkter for følgende systemer (opgaverne 10 til 13 i Kreyszig, sektion 4.3)

10.  $y_1' = 2y_1 + 2y_2$

$$y_2' = 5y_1 - y_2$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 7$$

11.  $y_1' = 2y_1 + 5y_2$

$$y_2' = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2$$

$$y_1(0) = -12, \quad y_2(0) = 0$$

12.  $y_1' = y_1 + 3y_2$

$$y_2' = \frac{1}{3}y_1 + y_2$$

$$y_1(0) = 12, \quad y_2(0) = 2$$

13.  $y_1' = y_2$

$$y_2' = y_1$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 2$$

#### Opgave 7.5 (opgave 5 i Kreyszig, sektion 4.4)

Løs for en reel generel løsning til det lineære system

$$y_1' = -2y_1 + 2y_2$$

$$y_2' = -2y_1 - 2y_2$$

Bestem type af kritiske punkter og konkluder på stabiliteten af systemet. Lav et faseplot for forskellige (valgte) begyndelsesbetingelser.