Lineær algebra og dynamiske systemer
ESD4/TBS

Opgaver til lektion 2

Opgave 2.1

Matrixen A er givet ved:

$$A = \begin{Bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \end{bmatrix}$$

a. Rækkereducér A til echelonform.
b. Find rangen af A. $\text{rang}(\bar{A}) = 3$

Opgave 2.2

Find rangen af A, B og C.

$$A = \begin{Bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{Bmatrix} \qquad B = \begin{Bmatrix} 30 & -70 & 50 \\ -36 & 84 & -60 \end{Bmatrix} \qquad C = \begin{Bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{Bmatrix}$$

$\text{rang}(\bar{A}) = 1$ $\quad$ $\text{rang}(\bar{B}) = 1$ $\quad$ $\text{rang}(\bar{C}) = 2$

Check både række og søjle og sammenlign resultaterne.

For matricen C, identificer de elementære transformationsmatricer der er nødvendige for at opnå echelonform, evt. implementer i Matlab eller lignende.

$$E_{pre} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Opgave 2.3

Løs ligningssystemet vha. Gauss-elimination og bagefter vha. Cramers formel.

$$\begin{aligned} -x + 3y - 2z &= 7 \\ 3x + 3z &= -3 \\ 2x + y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Opgave 2.4

Løs ligningssystemet vha. Gauss-elimination og bagefter vha. Cramers formel.

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 3z &= 1 \\ -x + 2y + z &= 2 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

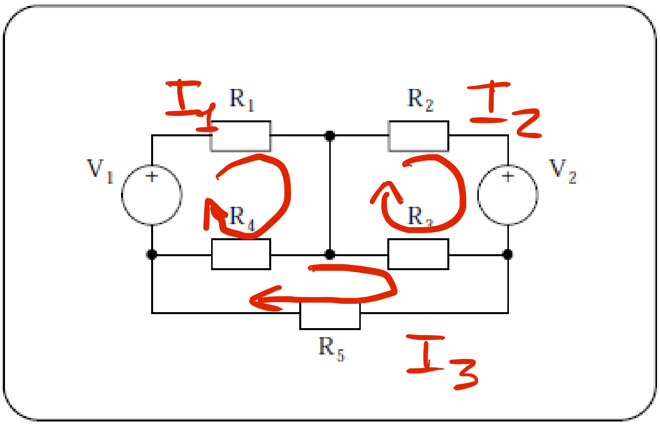
Opgave 2.5

Beregn strømmen igennem R_3. Plusretningen er tilhøjre på figuren. Opstil kredsløbslignin-mgerne vha. Kirchoffs maskeligninger og løs ligningssystemet fx vha. gaussisk elimination. Generatorer og modstande har følgende værdier:

$$V_1 = 1\ \text{V} \quad R_1 = 1\ \Omega \quad R_3 = 3\ \Omega \quad R_5 = 5\ \Omega$$
$$V_2 = 2\ \text{V} \quad R_2 = 2\ \Omega \quad R_4 = 4\ \Omega$$

$I_{R_3} = I_3 - I_2$

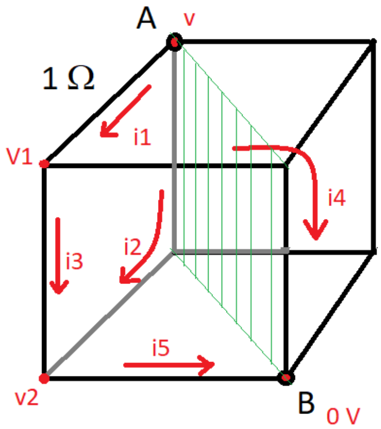
$\approx 377\ \text{mA}$



$$[I_1, I_2, I_3]^T = \begin{bmatrix} 0.1543 \\ -0.4343 \\ -0.0571 \end{bmatrix} \text{mA}$$

Opgave 2.6 (fra ugebladet Ingeniørens Tænkeboks)

Givet nedenstående kubiske terning opbygget af 12 modstandstråde, hver med resistansen 1 Ohm, find resistansen mellem punkt A og B (eller generelt mellem diametralt modsatte hjørner).



I Ingeniørens løsning anvendtes symmetri: Fra punkt A, og tilsvarende fra B pga. symmetri, kan strømmen løbe ad tre veje med lige stor modstand (og til punkter med samme potentiale pga. symmetrien), der hver deler sig i to veje med lige stor modstand; den samlede resistans er derfor 1/3 + (1/2)/3 + 1/3 Ω= 5/6 Ω.

Opgaven er at verificere denne løsning ved at løse det underliggende ligningssystem. Anvend symmetri, men nu ved at dele terningen diagonalt i to halvdele (ved den grønne skærm), sådan at den samlede resistans fremkommer som parallelforbindelsen. Vi kan derfor nøjes med at analysere den venstre halvdel ved at påtrykke v = 1 V i punkt A i forhold til B (0 V potentiale) og løse for den resulterende strøm, og deraf resistansen. $R = v/2 \,/\, (i_4 + i_5)$

Bestem det "halve kredsløb" og opstil ligningssystemet med de fem ubekendte strømme og to ubekendte spændinger, dvs. **x** = [i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, v_1, v_2], og derefter ligningen til bestemmelse af resistansen mellem de to hjørner.

Til sammenligning, anvend de to iterative metoder, Gauss-Seidel og Jacobi, på det opstillede ligningssystem og sammenligning løsning, konvergens og konvergensrate.

$\bar{x} = [0.4, 0.2, 0.2, 0.2, 0.4, 0.6, 0.4]$

$\bar{x}_{\text{Gauss-Seidel / Jacobi}} = \bar{x}$ efter 5 opdateringer

Opg. 2.6 – Jacobi iteration

Gauss elimination

2×KCL
5×KVL

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \\ 0 \\ v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow [\widetilde{A}|\widetilde{b}] = \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 4v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/3 & 4/3 & 4v/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\frac{1}{3} & -4v/3 \end{array}\right]$$

rearranged

Normalization: **A** = **A**./diag(**A**);

b = **b**./diag(**A**);

Iteration matrix: **C** = (eye(n)- **A**);

First guess: **x** = ones(n,1);

Iteration: **x** = **b**+ **C*** **x**;

$\bar{x}^{(1)} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \bar{x}^{(5)}$

1.0000	2.0000	-0.6667	0.6667	0.6000	0.4000
1.0000	0	0.6667	0.5333	0	0.2000
1.0000	-1.0000	0.6667	0.4000	0.2000	0.2000
1.0000	0.3333	0	0.2000	0.2000	0.2000
1.0000	-0.3333	1.2000	0.4000	0.4000	0.4000
1.0000	0	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000
1.0000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000