Lineær algebra og dynamiske systemer
ESD4/TBS

**Opgaver til lektion 8**

## Opgave 8.1

Analysér og bestem de kritiske punkter for det elektriske kresløb i Eksempel 2, sektion 4.1 (eksempel med elektrisk netværk der blev gennemgået i forbindelse med undervisningen), dvs., bestem de punkter der opfylder

$$\frac{di_2/dt}{di_1/dt} = 0$$

a) Hvor ligger det/de kritiske punkter og hvilken type er de?
b) Lav et faseplot i området omkring de kritiske punkter, svarende til Fig 80.b, s. 134 i Kreyszig.

## Opgave 8.2

Betragt følgende ulineære 2. ordens differentialligning:

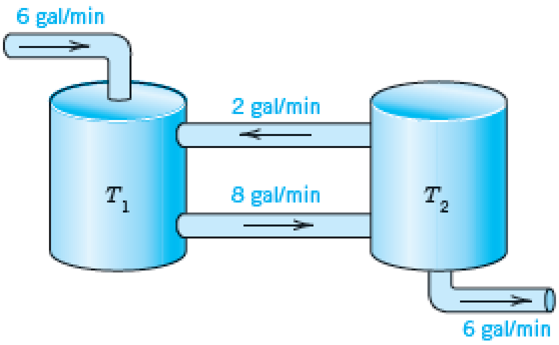
$$y'' - 9y + y^3 = 0$$

1) Opstil det ækvivalente 1. ordens (ulineære) ligningssystem og bestem de kritiske punkter. *Hint*: *ligningssystemet er en "stak" af ligninger $y_i' = f_i(y_1, \dots, y_n, r(t))$, hvor $f_i$ generelt er en ulineær funktion - se slides fra lektion 7: "A first order system" vs. "A first order linear system".*
2) Opstil det generelle *lineariserede* ligningssystem for det kritiske punkt $\tilde{\tilde{\boldsymbol{y}}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$; følg proceduren "Linearization (around stationary point)" fra slides med penduleksemplet – bemærk, proceduren er ikke begrænset til et stationært (kritisk) punkt. Afhænger ligningssystemet af det kritiske punkt, og hvordan i så fald?
3) Lav et plot af den identificerede ulineære funktion sammenholdt med dens linearisering (i et eller alle kritiske punkter).
4) For hvert af de kritiske punkter, undersøg typen og stabiliteten heraf, og lav et faseplot i omegnen af det kritiske punkt.

## Opgave 8.3

Tilsvarende opgave som i lektion 7, med koblede tanke, men nu med andre betingelser.

De to tanke indeholder hver 100 gal. vand, målt i volumenenheden gallons, hvori der for $T_2$'s vedkommende er opløst 150 lb salt. Flow ind og ud af tankene er vist på figuren. Specifikt, som tilløb til $T_1$ kommer der et flow på 6 gal/min indeholdende 6 lb salt. Koncentrationen af salt i de to tanke kan antages ensartet da der er konstant omrøring.




Problemet løses for $y_1(t)$ og $y_2(t)$ der angiver vægten af salt i de to tanke, respektive, målt i vægt-enheden pounds (lb) (modsvarende masse).

Problemet opstilles som koblede differentialligninger der sikrer balance i flowet (ingen masseophobning), dvs. for antal vægtenheder (salt) per minut:

weight [lb/min] = flow [gal/min] x ( weight [lb] / volume [gal] )

a) Løs for for $y_1(t)$ og $y_2(t)$ som funktion af tiden og plot de to resultater i samme graf for et tidsinterval der tydeligt viser både transient- og steady-state forløbet (stabiliseringen) af $T_1$ og $T_2$.
b) Giv en kvantitativ forklaring på steady-state-værdien, f.eks. vha. flow-ligningerne, og en kvalitativ forklaring på transientforløbet.
c) Opstil systemet på state-space form, med output $y(t)$ i form af vægten af gødning i $T_2$; identificer state-, input- og output- matricer, og angiv om systemet er homogent/inhomogent og tidsvariant/invariant.
d) Anvend Laplace teknikken til at løse det koblede ligningssystem og sammenlign løsningsmetoderne.

**Opgave 8.4**

Betragt eksempel 2, sektion 4.1 i Kreyszig, omhandlende et 2. ordens elektrisk kredsløb (gennemgået på tavlen i lektion 7). Opgaven her går ud på at opstille første-ordens systemet på state-space form, med udgangspunkt i at state-variable vælges som henholdsvis $x_1(t) = i_1(t)$ og $x_2(t) = v_c(t)$; ofte vælges noget som er udtryk for energien i systemet, her energien i spolen, som er $0.5Li_1^2(t)$, og energien i kondensatoren, $0.5Cv_c^2(t)$. Som output $y(t)$ ønskes $i_2(t)$.

Identificér $x_1(t)' = f_1(t, x_1, x_2, u)$, $x_2(t)' = f_2(t, x_1, x_2, u)$, og $u(t)$ som er input til systemet, og bestem:

1. matricerne $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$, samt (række) vektoren $\boldsymbol{c}$ og skalaren $D$, i state-space formuleringen
2. systemets impulsrespons