Opgaver til lektion 7

Opgave 7.1 (opgave 5 i Kreyszig, sektion 4.3)

Løs for den *generelle løsning* til det lineære system

$$y_1' = 2y_1 + 5y_2$$
$$y_2' = 5y_1 + 12.5y_2$$

Løsning:

Den generelle løsning til det homogene ligningssystem bestemmes via egenværdier til koefficientmatrixen og den generelle løsningsform for første ordens differentialligninger:

$$\boldsymbol{y_h}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5c_1 + 2c_2e^{14.5t} \\ -2c_1 + 5c_2e^{14.5t} \end{bmatrix}$$

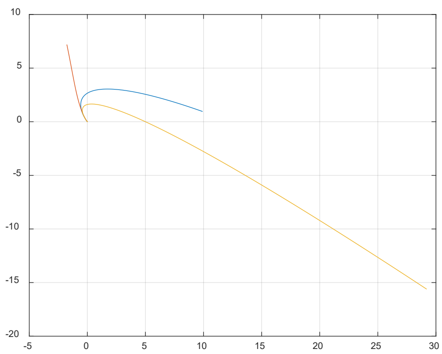
Opgave 7.2 (opgave 20 i Kreyszig, sektion 4.3)

Lav et faseplot for løsninger til den degenerative node (eksempel 6 i Kreyszig) med forskellige (valgte) begyndelsesbetingelser. Hvad bestemmer om banerne (trajectories) løber mod eller fra det kritiske punkt?

Løsning:

Se Kreyszig, degenerativ node i fasepunktet (0,0). Her tilfældet med en matrix der ikke falder ind under de normale matricer, og derfor ikke nogen garanteret egenbase; i dette tilfælde findes der ikke en egenbase og vi får en degenerativ node (én egenvektor til en dobbelt egenværdi).

Det er *p* (summen af egenværdier) der bestemmer omløbsretningen for den degenerative node, og i dette tilfælde "positiv omløbsretning", dvs. væk fra punktet (egenværdien er +3).

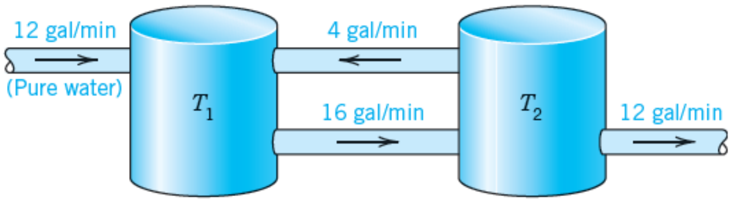


Figur: Tre faseplot ($y_2(t)$ vs $y_1(t)$), for begyndelsesbetingelser ($y_1(0)$, $y_2(0)$): gul (1,1); rød (-1,3); blå (5,0)

Opgave 7.3 (opgave 18 i Kreyszig, sektion 4.3)

(evt. gennemse eksempel 1 i sektion 4.1 for inspiration).

Opgaven går ud på at løse for $y_1(t)$ og $y_2(t)$ der angiver vægten af gødning i de to tanke T_1 og T_2, målt i vægtenheden pounds (lb) (modsvarende masse).



De to tanke indeholder hver 200 gal. vand, målt i volumenenheden gallons, hvori der for T_1's vedkommende er opløst 150 lb gødning og for T_2's, 200 lb gødning. Flow ind og ud af tankene er vist på figuren. Specifikt kommer der et flow på 12 gal/min rent vand ind som tilløb til tank T_1. Koncentrationen af gødning i de to tanke kan antages ensartet da der antages konstant omrøring og dermed givet ved henholdsvis $y_1(t)$ og $y_2(t)$.

Problemet opstilles som koblede differentialligninger der sikrer balance i flowet (ingen masseophobning), dvs. for antal vægtenheder gødning per minut der er relateret til de opgivne størrelser iflg.:

masse flow (vægtenhed per tid)
=
koncentation (vægtenhed per volumen) * væske flow (volumenenhed per tid)

, eller

weight [lb/min] = flow [gal/min] x (weight [lb] / volume [gal])

a) Er systemet homogent eller inhomogent? Er systemet autonomt?
b) Løs for for $y_1(t)$ og $y_2(t)$ som funktion af tiden *t*.
c) Plot de to resultater i samme graf som funktion af tiden; giv en forklaring på forløbene.
d) Lav et faseplot (med *t* som parameter)
e) Hvilke typer af kritiske punkter har systemet?

Løsning:

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \cdot 0 + \dfrac{4y_2}{V_2} - \dfrac{16y_1}{V_1} \\ \dfrac{16y_1}{V_1} - \dfrac{4y_2}{V_2} - \dfrac{12y_2}{V_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16/200 & 4/200 \\ 16/200 & -16/200 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}(t), \quad (lb/min)$$

$$\boldsymbol{y}(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \end{bmatrix}$$

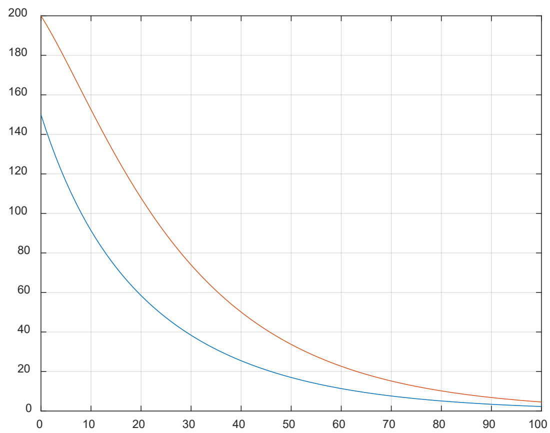
a) Homogent og autonomt (tidsinvariant).

b) $\lambda_1 = -0.04; \lambda_2 = -0.12; \boldsymbol{x_1} = [0.4472, 0.8944]^T;\ \boldsymbol{x_2} = [-0.4472, 0.8944]^T$

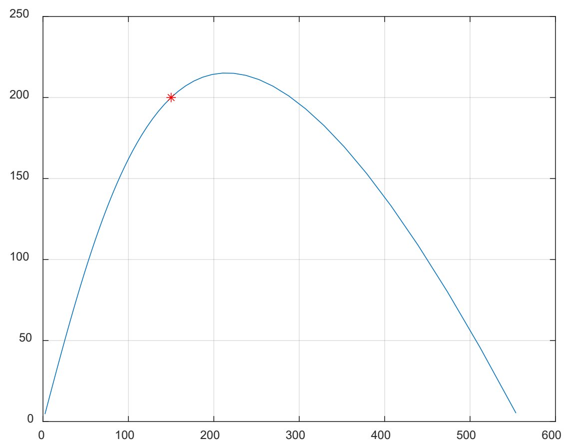
$\boldsymbol{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \end{bmatrix} e^{-0.04t} + c_2 \begin{bmatrix} -0.4472 \\ 0.8944 \end{bmatrix} e^{-0.12t}$; c1 = 279.52, c2 = -55.90

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 125.0 \\ 250.0 \end{bmatrix} e^{-0.04t} + \begin{bmatrix} 25.0 \\ -50.0 \end{bmatrix} e^{-0.12t}$$

c) Dette er plot versus tid 0 til 100 sekunder



d) Dette er faseplot -20 til 100 sekunder (t = 0 med rød stjerne)



e) $\boldsymbol{y} = [0, 0]^T;\ q = 0.0048; p = \ -0.16; D = 0.0064$ → en node, stabil (improper eller proper?)

Opgave 7.4

Afgør, ved inspektion, stabilitet og type af kritiske punkter for følgende systemer (opgaverne 10 til 13 i Kreyszig, sektion 4.3)

10. $y_1' = 2y_1 + 2y_2$
$y_2' = 5y_1 - y_2$
$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 7$

11. $y_1' = 2y_1 + 5y_2$
$y_2' = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2$
$y_1(0) = -12, \quad y_2(0) = 0$

12. $y_1' = y_1 + 3y_2$
$y_2' = \frac{1}{3}y_1 + y_2$
$y_1(0) = 12, \quad y_2(0) = 2$

13. $y_1' = y_2$
$y_2' = y_1$
$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 2$

Løsning:

10: $\boldsymbol{y} = [0,0]^T;\ q = -14; p = 0; D = 56$ → et saddelpunkt, ustabilt

11: $\boldsymbol{y} = [0,0]^T;\ q = -0.5; p = 0.5; D = 2.25$ → et saddelpunkt, ustabilt

12: $\boldsymbol{y} = [0,0]^T;\ q = 0; p = 2; D = 4$ → et nodepunkt, ustabilt

13: $\boldsymbol{y} = [0,0]^T;\ q = -1; p = 0; D = 4$ → et saddelpunkt, ustabilt

Opgave 7.5 (opgave 5 i Kreyszig, sektion 4.4)

Løs for en reel generel løsning til det lineære system

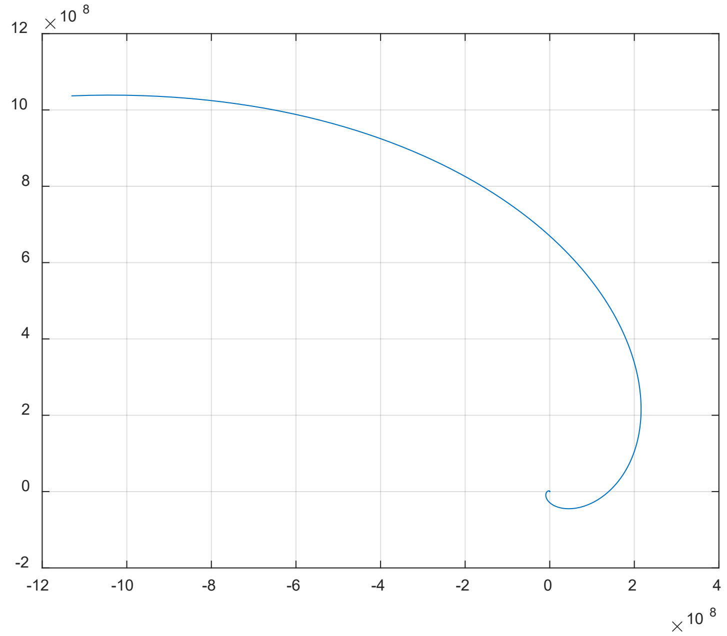
$$y_1' = -2y_1 + 2y_2$$
$$y_2' = -2y_1 - 2y_2$$

Bestem type af kritiske punkter og konkluder på stabiliteten af systemet. Lav et faseplot for forskellige (valgte) begyndelsesbetingelser.

Løsning:

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} Acos(2t) + Bsin(2t) \\ Bcos(2t) - Asin(2t) \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Stabil spiral (q = 8, p = -4, D = -16), complex eigenvalues.



Figur: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 3$