Lineær algebra og dynamiske systemer, ESD4

Eksempler på eksamensopgaver

Til den skriftlige eksamen stilles der et antal opgaver dækkende de fleste kursusdele, evt. alle – lineær algebra, systemer af differentialligninger, linearisering og stabilitet af sådanne, tidsdiskrete systemer, z-transform/inverse z-transform, samt egenskaber ved lineære tidsinvariante tidsdiskrete systemer. Opgaverne vil som udgangspunkt være stillet på engelsk (uanfægtet at nedenstående eksempler kan være angivet på dansk).

Antallet af opgaver kan variere alt afhængig af hvor omfattende opgaverne er, og af samme grund kan de enkelte opgaver vægtes forskelligt med antal procentpoint; normalt vil en mere omfattende opgave være lig med større vægtning, men vægtningen kan også være angivet, vejledende, hvis det ikke umiddelbart er klart fra opgavens omfang og der er en væsentlig forskel i vægtningen mellem opgaverne. Det samlede sæt beregnes til en 4 timers eksamen og udgør totalt 100 procentpoint. Typisk er der fem opgaver, evt. med et eller flere underspørgsmål. Uanfægtet procentfordelingen mellem opgaverne så bliver opgavebesvarelsen udsat for en helhedsvurdering - om eksaminanden kan siges at opfylde kursusmålet og til hvilket niveau.

Følgende opgaver har i uddrag været stillet i forbindelse med de forrige eksamener. Der er ikke tale om et samlet eksamenssæt, men om eksempler på opgaver der kunne stilles til eksamen, og mange flere end et eksamenssæt indeholder. Opgaverne skal ses i sammenhæng med de opgaver der er stillet i forbindelse med kurset, dvs. tilsvarende opgaver kunne også stilles til eksamen, men typisk vil en eksamensopgave kræve viden og færdigheder tillært i forbindelse med flere opgaver da en del af opgaven også er at finde ud af hvad man skal anvende.

De angivne opgaveløsninger i forbindelse med eksemplerne er her forkortet til at angive resultatet. En besvarelse, derimod, forventes at indeholde detaljer/mellemregninger i et sådant omfang at det er muligt at forstå eksaminandens tankegang i løsningsmetoden! Tankegangen i løsningen af opgaven skal klart fremgå af besvarelsen hvorfor den blotte angivelse af et facit, eller ("hovedløse") beregninger foretaget af et matematikprogram, ikke er nogen god besvarelse. Vi har angivet et enkelt eksempel for illustration af hvordan tankegangen i besvarelsen kán fremgå (se sidst i dokumentet). Det er tydeligt her at der er anvendt et matematikprogram, men besvarelsen har i dette tilfælde så meget forklarende tekst at der ikke er tvivl om fremgangsmåde (metode) og forståelse. En anden fremgangsmåde ville være at medtage mellemregninger i Gauss eliminationen, f.eks. for den første, og dermed vise forståelsen. Det vil umiddelbart være en sikrere fremgangsmåde, men generelt er der mange mulige tilgange for at vise tankegangen i løsningen af en opgave. Dette er altså kun et eksempel og ikke en skabelon!

Fejl i fremgangsmåde, altså metodefejl, trækker meget ned mens helt simple regnefejl ikke trækker ned. Regnefejl som giver et helt åbenlyst forkert resultat trækker ned.

Gilberto og Troels

Opgaveeks. 1

Betragt matrixen $\boldsymbol{A}$ givet ved

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} j0,8 & j0,6 \\ j0,6 & -j0,8 \end{bmatrix}$$

1. For hvert af følgende, angiv om udsagnet er korrekt, og i bekræftende fald begrund hvorfor: $\boldsymbol{A}$ er hermitisk, $\boldsymbol{A}$ er skævhermitisk, $\boldsymbol{A}$ er unitær, $\boldsymbol{A}$ er normal.
2. Vil egenværdierne for $\boldsymbol{A}$ være reelle, imaginære eller generelt komplekse?
3. Find en egenbase for $\boldsymbol{A}$.

Solution: $\boldsymbol{A}$ er skævsymmetrisk og normal, med imaginære egenværdier. Eksempel egenbase for $\boldsymbol{A}$ er $\boldsymbol{v_1} = [3, 1]^T, \boldsymbol{v_2} = [1, -3]^T$

Opgaveeks. 2

En matrix $\boldsymbol{A}$ er givet ved

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 44 & -8 & -4 & -2 \\ 4 & 8 & 16 & 2 \\ 16 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 16 & 8 & -26 \\ 2 & 16 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Find en basis for henholdsvis række- og søjlerum for $\boldsymbol{A}$.
2. Bestem nulrummet til $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ og angiv nulliteten.

Solution:

Søjlerummet har "fuld rang" og derfor udgør de fire søjlevektorer en basis for søjlerummet. For rækkerummet kan f.eks. vælges række 1, 2, 3 og 4, som kan konstateres lineært uafhængige. Ligningssystemet $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har een og kun een løsning, nemlig den trivielle $\boldsymbol{0}$-vektor, og nulliteten er dermed 0.

Opgaveeks. 3

Betragt vektorerne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

1. Gøre rede for at $\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$, hvor:

$$\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2. Redegør for at $3x_1 + x_3 = 0$ udgør et underrum i $\mathbb{R}^3$, og bestem en basis for dette; giv en geometrisk fortolkning af underrummet.

Solution: De tre vektorer kan konstateres lineært uafhængige, f.eks. ved anvendelse af Gauss elimination, og givet at der er tale om $\mathbb{R}^3$ udgør de dermed en basis for $\mathbb{R}^3$. Det angivne nulrum ligger i $\mathbb{R}^3$, med dimension 2, som kan konstateres ved at løse ligningen i $\mathbb{R}^3$. Geometrisk udggør underummet et plan (se Opg. 1 eksemplet sidst i pdf'en).

Opgaveeks. 4

En matrix $\boldsymbol{A}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, er givet ved

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2+2i & 0 \\ 2-2i & 0 & 2+2i \\ 0 & 2-2i & 0 \end{bmatrix}$$

1. Redegør for at $\boldsymbol{A}$ kan diagonaliseres.
2. Diagonaliser $\boldsymbol{A}$, og bestem en unitært ækvivalent matrix til $\boldsymbol{A}$; vis de enkelte step i udregningen.
3. Angiv spektret og den spektrale radius for $(\sqrt{-1}\boldsymbol{A})^5$.

Solution:
Da $\boldsymbol{A}$ er hermitesk (og normal) har $\boldsymbol{A}$ en egenbase der diagonaliserer $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$, hvor $\boldsymbol{D}$ og $\boldsymbol{A}$ er unitært ækvivalente, og $\boldsymbol{D}$ har $\boldsymbol{A}$'s egenværdier på diagonalen.

$(\sqrt{-1}\boldsymbol{A})^5$ er unitært ækvivalent med $(\sqrt{-1}\boldsymbol{D})^5$, altså diagonalelementer opløftet i 5. gange i, hvilket giver spektret $\{0, 1024i, -1024i\}$. Heraf ses at den spektrale radius er 1024.

Opgaveeks. 5

Convert the following linear differential equation into a system of first-order ODEs and state the (real) general solution:

$$y'' + 4y = 0$$

Based on the eigenvalues for the system, conclude on whether the system is stable or unstable.

Solution:

$$y(t) = c_1 cos(2t) + c_2 sin(2t)$$

From the eigenvalues it is seen that the q-value (product of eigenvalues) is positive - a stable system (center).

Opgaveeks. 6

Determine the critical points of the following differential equation:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} cos(y_2) \\ 3y_1 \end{bmatrix}$$

Note: $\boldsymbol{x}$' refers to the derivative of $\boldsymbol{x}$

For each of the critical points, illustrate the location in the phase plane and determine the stability and type of the critical point. Illustrate an example trajectory of the phase portrait for one of the critical points, including indication of its (tangent) direction.

Solution:

Critical points $\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{0}$, i.e., $\boldsymbol{y_o} = [0, k\pi/2]$, where k is any odd integer - located on the y_2 axis in the phase plane. We need only consider linearization at $\boldsymbol{y_o} = [0, \pm\pi/2]$.

For example, the linearized system at $+\pi/2$:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 + \Delta y_1 \\ \pi/2 + \Delta y_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} \approx \boldsymbol{y_o}$$

$$\boldsymbol{y'} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -\Delta y_2 \\ 3\Delta y_1 \end{bmatrix}$$

which is a stable center, same as all critical points $+\pi/2$ multiple 2π. Similarly, for the linearized system at $-\pi/2$ we get an unstable system (saddle), same as all critical points $-\pi/2$ multiple 2π. An example trajectory of the phase portrait can be traced by identification (knowing that it is a center or saddle), insertion of example values, or by cross-multiplying and integrating the linearized system equation to get the equation for, respectively, (counter-clockwise) ellipses and hyperbolas (as demonstrated in Kreyszig).

Opgaveeks. 7

Calculate the output $y[n]$ of a linear time invariant system with impulse response $h[n] = 3^n u[n-1]$ for the input $x[n] = 5u[n]$.

Solution: $y[n] = -\frac{15}{2}u[n] + \frac{15}{2}(3)^n u[n]$

Opgaveeks. 8

Given a causal linear time invariant system with the following transfer function:

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-1}}{2 - 4z^{-1}},$$

calculate the impulse response $h_i[n]$ of the inverse system.

Solution: $h_i[n] = 2(3)^n u[n] - 4(3)^{n-1} u[n-1]$, or $h_i[n] = -2(3)^n u[-n-1] + 4(3)^{n-1} u[-n]$.

Opgaveeks. 9

A stable LTI system is characterized by the following difference equation:

$$y[n] - 3y[n-1] = 5x[n-2]$$

Find the impulse response $h[n]$ of the system. Is the system causal?

Solution: $h[n] = -5(3)^{n-2} u[-n+1]$. The system is non-causal.

Opgaveeks. 10

Calculate the inverse z-transform of the following sequences:

- $X(z) = \frac{2z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{z^3}{1-\frac{4}{7}z^{-1}}$, ROC: $|z| > 1$
- $X(z) = \frac{3}{1-2z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$, ROC: $|z| < 1$

Solution:

- $x[n] = 2u[n-1] + \left(\frac{4}{7}\right)^{n+3} u[n+3]$
- $x[n] = -3(2)^n u[-n-1] - u[-n]$.

Opg 1. Eksempel besvarelse for opgaveeksempel 3

Betragt vektorerne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

1. Gøre rede for at $\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$, hvor:

$$\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2. Redegør for at $3x_1 + x_3 = 0$ udgør et underrum i $\mathbb{R}^3$, og bestem en basis for dette; giv en geometrisk fortolkning af underrummet.

Opgave 1

I følgende besvarelse anvendes kursiv skrift til at repræsentere matrixer som "A". Vektorer betegnes med fed og ikke-kursiv skrift som "$\mathbf{x}$". Til rækkereduktion mellem matrixer benyttes symbolet "$\sim$" for at angive, at matrixerne er række-ækvivalente og udspænder samme løsningsrum.

1) <u>Vi tjekker om følgende tre vektorer udgør en basis for $\mathbb{R}^3$:</u>

$$\mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{b_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

For at gøre rede for at de tre vektorer udgør en basis for $\mathbb{R}^3$, så skal vektorerne være lineært uafhængige. Dette betyder at vi ikke kan danne en linear kombination af en ved hjælp af de andre. Såfremt at de er lineært uafhængige, så kan de danne en basis for hele $\mathbb{R}^3$ da dimensionen af vektorrummet er 3. Altså kan vi med de tre vektorer udspænde hele rummet.

For at tjekke om vektorerne er lineært uafhængige, så må den homogene ligning $B\mathbf{x} = 0$ kun have den trivielle løsning. Dette tjekkes ved at opstille ligningssytemet $B\mathbf{x} = 0$ hvor $B = [\mathbf{b_1} \quad \mathbf{b_2} \quad \mathbf{b_3}]$ og tjekke at vores koefficientmatrix har fuld rank og dermed er invertibel. Vi omregner da til række-reduceret echelonform vha. Gauss-elimination:

$$B\mathbf{x} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Altså ses det at vi kun har den trivielle løsning til den homogene ligning. Vi ved da at alle tre vektorer er lineært uafhængige og udgør en basis for $\mathbb{R}^3$.

2) <u>Der redegøres for at $3x_1 + x_3 = 0$ udgør et underrum i $\mathbb{R}^3$ og bestemmer en basis for dette, samt en geometrisk fortolkning af underrummet.</u>

For at finde en dimension for dette ligningssytem, så opstiller vi det givne ligningssytem i $\mathbb{R}^3$. Vi sætter matricen lig 0, da ligningen antyder at det er nulrummet som vi kigger på:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Altså kan det ses, at vi har 2 frie variabler. Det vil sige at dimensionen af dette nulrum er:

$$\mathrm{Dim(Nul)} = 2$$

Dette betyder da at vi har et todimensionelt underrum i et tredimensionelt vektorrum $\mathbb{R}^3$. Vi kan da finde en basis for dette underrum ved at løse det homogene ligningssytem:

$$X\mathbf{x} = 0,$$

hvor $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T$. Vi beregner da vha. Gauss-elimination:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Altså udgør disse to vektorer en basis for ligningssytemet. Det ses at dimensionen er 2.

Vi kan fortolke dette underrum som en flade i et tredimensionelt rum - altså udgør det et underrum til $\mathbb{R}^3$.