Opgaver til lektion 4

Opgave 4.1

Beregn vha. Gauss-Jordan-metoden den inverse matrix af A og B, så vidt, de eksisterer. Hvis de ikke eksisterer, så forklar hvorfor.

$$A = \begin{Bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{Bmatrix} \qquad B = \begin{Bmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\bar{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

See Kreyszig for detaljer.

$$\bar{\bar{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.10 & 0 & 0 \\ 0.1125 & -0.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.30 & -0.35 \end{bmatrix}$$

Opgave 4.2

Med udgangspunkt i matrix A fra forrige opgave 3.1:

$$A = \begin{Bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{Bmatrix}$$

a) Udtryk søjlevektor $\mathbf{b_3}$ i den base B der blev bestemt for søjlerummet i forrige opgave, dvs. hvad er koordinaterne, $[\mathbf{b_3}]_B$, for $\mathbf{b_3}$ udtrykt i basen B? $[\bar{b}_3]_B = [1, -2, 0]^T$
b) Hvad er koordinaterne for $\mathbf{b_3}$ i standardbasen (kanoniske basis E), $[\mathbf{b_3}]_E$, altså udtrykt ved søjlevektorerne i "standardkoordinatsystemet"? ditto
c) Ortogonalisér og normalisér basen for søjlerummet; check for ortogonalitet!
d) Hvad er koordinaterne for $\mathbf{b_3}$ i den normaliserede base B?

$$[\bar{b}_3]_{B_1} = [-23.5, -8.2, 0]^T$$

Opgave 4.3

Bestem de lineære transformationer F for henholdsvis en spejling i x-aksen og y-aksen, samt en skalering i x og y.

a) Hvad er repræsentationen (afbildningsmatricen) af F
b) Hvad er billedet af standardbasen under disse transformationer?
c) Udled afbildningsmatricen for en spejling i x, efterfulgt af en skalering i y; er denne forskellig fra en skalering i y, efterfulgt af en spejling i x (*"gælder den kommutative lov"*) ? Ja

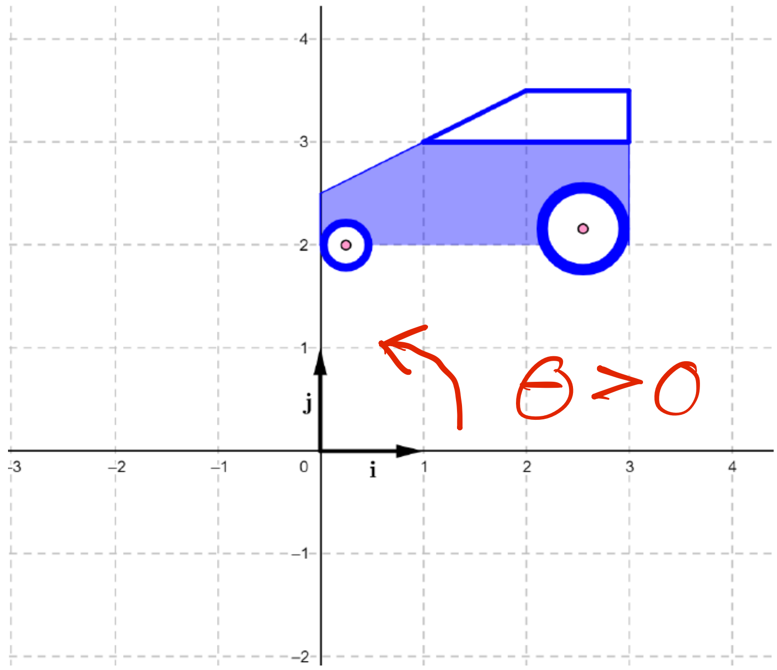
$$F: R^2 \rightarrow R^2$$

$\bar{\bar{A}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ spejling i x ; $\bar{\bar{A}}_x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ skalering i x

$\bar{\bar{A}}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ -"- y ; $\bar{\bar{A}}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ -"- y

Opgave 4.4

Betragt nedenstående bil afbildet i $\mathcal{R}^2$:



a) Lav en (passende) punktrepræsentation, med $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^2$, af denne så i kan lave et tilsvarende plot.

b) Bestem afbildningsmatricen til den lineære afbildning F: $\mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$, der drejer objektet 120 grader mod uret og samtidig skalerer det med en faktor 2.

c) Benyt denne transformation til at bestemme (plotte) billedet af punktrepræsentation i a); illustrér.

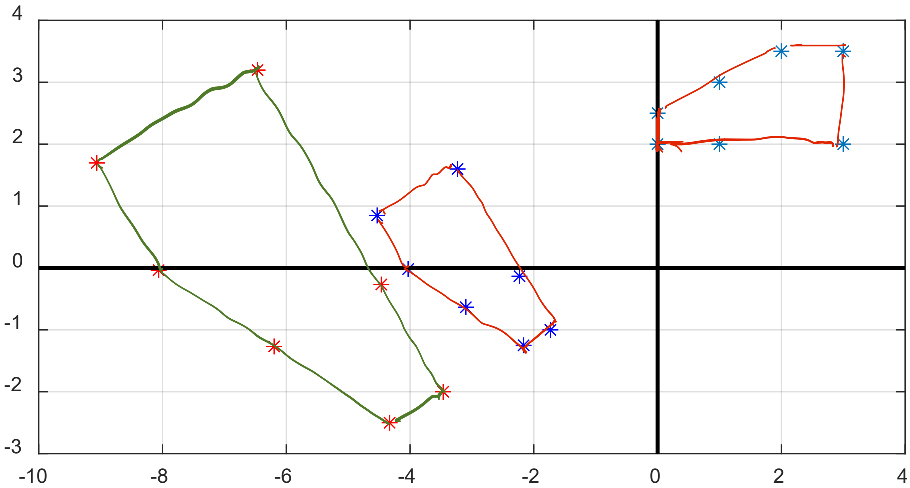
d) Transformationsmatrixen udtrykker billedpunkterne i en linearkombination: er punkterne udtrykt i en base? er der tale om en ortogonal transformationsmatrix?

$$\bar{x} = \bar{\bar{A}}_x \bar{\bar{A}}_\theta \bar{x} = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ 2\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \bar{x}$$

$$\bar{\bar{A}}_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{A}}_\theta = \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix}$$

$$\left[\bar{\bar{A}}_x \bar{\bar{A}}_\theta\right] = \left[\bar{b}_1 \ \bar{b}_2\right] \text{ og } \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 = 0,$$

altså en (ortogonal) base.


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4