ÖREBRO
UNIVERSITET

Lösningsförslag till övningstentamen 1 på kursen Integraler och differentialekvationer

1. Bytet $t = \tan(x/2)$, med $\cos(x) = (1-t^2)/(1+t^2)$ och $dx = (2/(1+t^2))dt$, tillsammans med partialbråkuppdelningen

$$\frac{6}{9-t^2} = \frac{1}{3-t} + \frac{1}{3+t}$$

ger att

$$\begin{aligned}
\int \frac{3}{4+5\cos(x)}\,dx &= = \int \frac{3}{4+5\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{6}{9-t^2}\,dt \\
&= \int \left(\frac{1}{3-t} + \frac{1}{3+t}\right) dt \\
&= -\ln|3-t| + \ln|3+t| + C \\
&= -\ln|t-3| + \ln|t+3| + C \\
&= \ln\left|\frac{t+3}{t-3}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+3}{\tan\frac{x}{2}-3}\right| + C\,.
\end{aligned}$$

Svar:Alla primitiva ges av $F(x) = \ln|(\tan(x/2)+3)/(\tan(x/2)-3)| + C$ där C godtycklig konstant.

2. Notera att differentialekvationen $y'' - y' = e^{-x}$ är linjär och att lösningarna därför är på formen

$$y = y_h + y_p$$

där y_h är allmän lösning till differentialekvationen $y'' - y' = 0$ och y_p en partikulärlösning till $y'' - y' = e^{-x}$. Vi bestämmer först y_h. Karaktäristik ekvation $r^2 - r = 0$ har lösningarna $r = 0$ och $r = 1$ så vi får att

$$y_h = C + De^x\,,$$

där C och D är godtyckliga konstanter. Ansätt $y_p = z(x)e^{-x}$. Då fås att

$$\begin{aligned}
y_p' &= z'e^{-x} - ze^{-x} = (z'-z)e^{-x}\,, \\
y_p'' &= (z''-z')e^{-x} - (z'-z)e^{-x} \\
&= (z''-2z'+z)e^{-x}\,,
\end{aligned}$$

som insatt i $y'' - y' = e^{-x}$ (efter förenkling) ger att

$$z'' - 3z' + 2z = 1\,.$$

En partikulärlösning ges av $z_p = 1/2$ så att en partikulärlösning till $y'' - y' = e^{-x}$ ges av

$$y_p = \frac{1}{2} \cdot e^{-x} .$$

Vi har att

$$y = y_h + y_p = C + D \cdot e^x + \frac{1}{2} \cdot e^{-x}$$

ger allmän lösning till $y'' - y' = e^{-x}$. Villkoren $y(0) = -1$ och $y'(0) = 1$ kan ge bestämda värden för C och D, vilket sker i detta fall. Vi bestämmer nu C och D. Villoret $y(0) = -1$ ger att

$$\begin{aligned} -1 &= C + D + \frac{1}{2} \\ C &= -\frac{3}{2} - D . \end{aligned}$$

Eftersom $y' = De^x - (1/2)e^{-x}$ så ger villkoret $y'(0) = 1$ att

$$\begin{aligned} 1 &= D - \frac{1}{2} \\ D &= \frac{3}{2} . \end{aligned}$$

Detta ger att $C = -3$ så att

$$y = -3 + \frac{3}{2} \cdot e^x + \frac{1}{2} \cdot e^{-x} .$$

Svar: $y = -3 + (3/2)e^x + (1/2)e^{-x}$.

3. Notera att $|2x - 6|$ har en brytpunkt då $x = 3$. Detta ger att vi behöver dela in integralen i två delar enligt beräkningen

$$\begin{aligned} \int_2^4 |2x - 6| \, dx &= \int_2^3 (6 - 2x) \, dx + \int_3^4 (2x - 6) \, dx \\ &= \left[6x - x^2\right]_2^3 + \left[x^2 - 6x\right]_3^4 \\ &= (18 - 9 - (12 - 4)) + (16 - 24 - (9 - 18)) = 2 . \end{aligned}$$

Svar: 2.

4. Analysens huvudsats ger att

$$y'(x) = 4x - xy(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y' + xy = 4x .$$

Notera även att integral över en punkt är lika med noll så att vi har villkoret $y(0) = 1$. En integrerande faktor till $y' + xy = 4x$ ges av $e^{x^2/2}$ och vid multiplikation i båda led fås att

$$\begin{aligned} (ye^{\frac{x^2}{2}})' &= 4xe^{\frac{x^2}{2}} \\ ye^{\frac{x^2}{2}} &= 4e^{\frac{x^2}{2}} + C \\ y &= 4 + Ce^{-\frac{x^2}{2}} . \end{aligned}$$

Villkoret $y(0) = 1$ ger att

$$\begin{aligned} 1 &= 4 + C \\ C &= -3 , \end{aligned}$$

så att $y(x) = 4 - 3e^{-x^2/2}$.

Svar: $y(x) = 4 - 3e^{-x^2/2}$.

5. Notera att

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x+4}{x^3+3x^2+2x} \\ &= \frac{x}{x^3} \cdot \frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} \\ &= g(x) \cdot h(x) \end{aligned}$$

där $g(x) = 1/x^2$. Notera att

$$h(x) = \frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} \to 3 > 0$$

då $x \to \infty$. Eftersom $f(x) \geq 0$ och $g(x) \geq 0$ på intervallet $[0,\infty)$ så följer att

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \quad \text{konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^\infty g(x)\,dx \quad \text{konvergent} .$$

Eftersom $\int_1^\infty 1/x^2\,dx$ är konvergent så följer att $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent. Vi ska nu bestämma värdet. Notera att $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är generaliserad i ∞ och skriv om som ett gränsvärde

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R f(x)\,dx .$$

Faktorisering (gör denna) av integrandens nämnare fås av $x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2)$. Ansätt partialbråk enligt

$$\frac{3x+4}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}\,.$$

Multiplikation med $x(x+1)(x+2)$ i båda led ger att

$$3x+4 = A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)\,.$$

Låt nu x gå mot 0, -1 respektive -2 så fås att $A = 2$, $B = -1$ respektive $C = -1$ vilket ger partialbråksuppdelningen

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\,.$$

Detta ger gränsvärdesberäkningen

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty f(x)\,dx &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R f(x)\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[2\ln x - \ln(x+1) - \ln(x+2)\right]_1^R \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[\ln\left(\frac{x^2}{x^2+3x+2}\right)\right]_1^R \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\ln\left(\frac{R^2}{R^2+3R+2}\right) - \ln\left(\frac{1}{6}\right)\right) \\
&= -\ln\left(\frac{1}{6}\right) = \ln 6
\end{aligned}$$

eftersom

$$\frac{R^2}{R^2+3R+2} = \frac{1}{1+\frac{3}{R}+\frac{2}{R^2}} \to 1$$

då $R \to \infty$ och kontinuitet av logaritmfunktionen ger att

$$\ln\left(\frac{R^2}{R^2+3R+2}\right) \to \ln 1 = 0$$

då $R \to \infty$.

Svar: Den generaliserade integralen är konvergent och har värdet $\ln 6$.

6. Variabelbyte är att föredra för att lösa denna uppgift. Till exempel kan vi låta $t = \cos(x)$ som efter förenkling (gör denna) ger integralen

$$\int_0^1 \frac{t+1}{t^2+2t+3}\,dt\,.$$

Notera att derivatan av integrandens nämnare blir samma som täljaren multiplicerat med 2. Alltså fås att

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t+1}{t^2+2t+3}\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(t^2+2t+3)'}{t^2+2t+3}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|t^2+2t+3|\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\cdot(\ln 6 - \ln 3) = \frac{1}{2}\cdot \ln 2\,.
\end{aligned}$$

I detta fall kan vi faktisk lösa uppgiften betydligt snabbare om vi direkt ser att integranden är på formen $(-1/2)f'(x)/f(x)$ så att vi får

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos(x)+1)\sin(x)}{\cos^2(x)+2\cos(x)+3}\,dx &= -\frac{1}{2}\left[\ln|\cos^2(x)+2\cos(x)+3|\right]_0^{\pi/2} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot(\ln 3 - \ln 6) = \frac{1}{2}\cdot \ln 2\,.
\end{aligned}$$

Svar: $(1/2)\ln 2$.

7. Mängden D begränsas av kurvorna $y = \arctan x$ och $y = 0$ över intervallet $[0,1]$. Notera att $\arctan(1) = \pi/4$ som är det största möjliga y-värdet i D och rita mängden (gör detta). Vid rotation kring y-axeln är det lämpligt att använda rörformeln, där x är avståndet till till rotationsaxeln (y-axlen i detta fall) så att rörets omkrets ges av $2\pi x$ och med bredden Δx och höjden $y = \arctan x$ fås att rörets volym kan approximeras med

$$\Delta V = 2\pi x \arctan x \Delta x\,,$$

vilket ger volymselementet

$$dV = 2\pi x \arctan x\, dx\,.$$

Eftersom vi summerar volymen av alla rör som fås för $[x,x+\Delta x]$ där $\Delta x \to 0$ och $x \in [0,1]$ fås önskad volym av

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_0^1 x\arctan x\,dx \\
&= 2\pi\left(\left[\frac{x^2}{2}\cdot\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x-\arctan x\right]_0^1\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi^2}{2} - \pi\,.
\end{aligned}$$

Svar: $(\pi^2/2)-\pi$ v.e.

8. Med $y(t)$ kg salt vid tiden t minuter efter att vatten med ny saltkoncentration börjar tillföras så fås att

$$\begin{aligned} y'(t) &= 0{,}02\cdot 2-\frac{y(t)}{50}\cdot 2 \\ y'(t) &= 0{,}04-0{,}04y(t) \\ y'(t)+0{,}04y(t) &= 0{,}04\,. \end{aligned}$$

Dessutom, vi har från början att saltmängden är 4 kg vilket ger villkoret $y(0)=4$. För att lösa differentialekvationen noteras att $e^{0{,}04t}$ är en integrerande faktor och differentialekvationen kan skrivas om och lösas enligt

$$\begin{aligned} y'(t)\cdot e^{0{,}04t}+y(t)\cdot e^{0{,}04t}\cdot 0{,}04 &= e^{0{,}04t}\cdot 0{,}04 \\ \frac{d}{dt}\left(y(t)e^{0{,}04t}\right) &= e^{0{,}04t}\cdot 0{,}04 \\ y(t)e^{0{,}04t} &= e^{0{,}04t}+C \\ y(t) &= 1+Ce^{-0{,}04t}\,. \end{aligned}$$

Villkoret $y(0)=4$ ger att $C=3$. Vi får alltså att

$$y(t)=1+3e^{0{,}04t}\,.$$

Notera att $e^{-0{,}04t}\to 0$ då $t\to\infty$ så gränsvädet blir 1 kg salt.

Svar: Förloppet beskrivs av begynnelsevärdesproblemet $y'(t)+0{,}04y(t)=0{,}04$ med $y(0)=4$. Den funktion som löser begynnelsevärdesproblemet ges av $y(t)=1+3e^{-0{,}04t}$ med gränsvärdet 1 kg salt.

9. Problemet med att bestämma a kan omformuleras som att vi ska beräkna gränsvärdet

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)-\ln(1+2x)}{x(e^x-1)}\,.$$

Detta görs lämpligen med MacLaurinutveckling. Notera att

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x-\frac{x^3}{6}+x^5B_1(x)\,, \\ \ln(1+2x) &= 2x-\frac{(2x)^2}{2}+x^3B_2(x)\,, \\ e^x &= 1+x+x^2B_3(x)\,, \end{aligned}$$

där $B_1(x)$, $B_2(x)$ och $B_3(x)$ är begränsade nära $x = 0$. Detta ger att

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x) - \ln(1+2x)}{x(e^x - 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x - \frac{x^3}{3} + 2x^5 B_1(x) - (2x - 2x^2 + x^3 B_2(x))}{x^2 + x^3 B_3(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - \frac{x^3}{3} + 2x^5 B_1(x) - x^3 B_2(x)}{x^2 + x^3 B_3(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2 - \frac{x}{3} + 2x^3 B_1(x) - x B_2(x)}{1 + x B_3(x)} \\
&= \frac{2 - 0 + 0 - 0}{1 + 0} = 2\,.
\end{aligned}$$

Vi har visat att det finns en funktion

$$h(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sin(x) - \ln(1+2x)}{x(e^x - 1)}$$

sådan att $h(x) \to 1$ då $x \to 0$ så att

$$f(x) = \frac{2\sin(x) - \ln(1+2x)}{(e^x - 1)\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}} = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}} \cdot h(x)$$

för alla $x \in (0,1]$. För att avgöra om den generaliserade integralen, i 0,

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

är konvergent eller divergent räcker det därför att avgöra om integralen

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}}\, dx$$

är konvergent eller divergent. Detta kan göras med att beräkna integralen, där vi då med hjälp av variabelbyte kommer att erhålla ett visst värde som då ger konvergens. Det går även att se detta direkt genom att visa att integranden är begränsad enligt uppskattningen

$$0 \le \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}} \le \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,.$$

Eftersom integranden är begränsad på ett begränsat intervall måste integralen vara konvergent.

Svar: $a = 2$ och den generaliserade integralen är konvergent.