ÖREBRO
UNIVERSITET

Lösningsförslag till övningstentamen 3 på kursen Integraler och differentialekvationer

1. Insättning av $z = a + ib$ och omskrivning ger att

$$\begin{aligned} & |z - i| = |z + 1| \\ \iff & |a + (b-1)i| = |(a+1) + bi| \\ \iff & |a + (b-1)i|^2 = |(a+1) + bi|^2 \\ \iff & a^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + b^2 \\ \iff & b = -a\,. \end{aligned}$$

Detta ger att de komplexa tal som uppfyller likheten ges av $z = a - ai$, där a reellt.

Svar: $z = a - ai$ där a reellt.

2. Vi börjar med att lösa den linjära differentialekvationen

$$LI'(t) + RI(t) = V\,,\, I(0) = 0\,.$$

Notera att $L > 0$ så att en ekvivalent beskrivning, villkret undantaget, ges av

$$I'(t) + \frac{R}{L} \cdot I(t) = \frac{V}{L}\,.$$

En integrarande faktor fås av $e^{(R/L)t}$ (visa detta) som multiplicerat i båda led av differentialekvationer ger att

$$\begin{aligned} e^{(R/L)t} I'(t) + e^{(R/L)t} \cdot \frac{R}{L} \cdot I(t) &= e^{(R/L)t} \cdot \frac{V}{L} \\ \left(e^{(R/L)t} I(t)\right)' &= e^{(R/L)t} \cdot \frac{V}{L} \\ e^{(R/L)t} I(t) &= e^{(R/L)t} \cdot \frac{V}{R} + C \\ I(t) &= \frac{V}{R} + Ce^{-(R/L)t}\,. \end{aligned}$$

Villkoret $I(0) = 0$ ger att (visa detta) $C = -V/R$ så att

$$I(t) = \frac{V}{R} \cdot \left(1 - e^{-(R/L)t}\right)\,.$$

Notera att $R/L > 0$ så att

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} I(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{V}{R} \cdot \left(1 - e^{-(R/L)t}\right) \\ &= \frac{V}{R} \cdot \lim_{t\to\infty} \left(1 - e^{-(R/L)t}\right) = \frac{V}{R}\,. \end{aligned}$$

Slutligen vill vi finna t_0 så att $I(t_0) = 0{,}5V/R$. Vi får detta t_0 enligt

$$\begin{aligned}
\frac{V}{R} \cdot \left(1 - e^{-(R/L)t_0}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{V}{R} \\
1 - e^{-(R/L)t_0} &= \frac{1}{2} \\
e^{-(R/L)t_0} &= \frac{1}{2} \\
(R/L)t_0 &= \ln 2 \\
t_0 &= \frac{L}{R} \cdot \ln 2 \,.
\end{aligned}$$

Svar: Lösningen till differentialekvationen ges av $I(t) = (V/R)(1 - e^{-(R/L)t})$ som konvergerar mot V/R då $t \to \infty$. Vi har även att strömmen uppnått hälften av gränsvärdet vid tiden $(L/R)\ln 2$ sekunder.

3. Differentialekvationen är på formen $y'' + ay' + by = f(x)$ där a och b är konstanter. Med andra ord är det en differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Notera även att $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$. Detta ger att lösningarna till differentialekvationen ges av $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2}$ där y_h är allmän lösning till homogena ekvationen

$$y'' + y = 0\,,$$

y_{p_1} en partikulärlösning till ekvationen

$$y'' + y = x$$

och y_{p_2} en partikulärlösning till ekvationen

$$y'' + y = \sin(x)\,.$$

Vi bestämmer först y_h. Den karaktäristiska ekvationen ges av

$$r^2 + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = \pm i\,.$$

Därmed fås, enligt formelblad, att

$$y_h = A\cos(x) + B\sin(x)\,.$$

Nu till y_{p_1} där en naturlig ansättning ges av $y_{p_1} = ax + b$ där

$$\begin{aligned}
y'_{p_1} &= a \\
y''_{p_1} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Insättning i ekvationen $y'' + y = x$ ger, efter förenkling,

$$ax + b = x\,.$$

Identifiering ger att $a = 1$ och $b = 0$ så att

$$y_{p_1} = x\,.$$

Slutligen till y_{p_2}. Notera att ansättningen $y_{p_2} = a\cos(x) + b\sin(x)$ ingår i den homogena lösningen och därför duger inte denna. Vi studerar därför hjälpekvationen

$$u'' + u = e^{ix}\,.$$

Med en partikulärlösning u_p fås önskad partikulärlösning y_{p_2} genom att ta imaginärdelen av u_p. Ansätt $u_p(x) = z(x)e^{ix}$. Då följer att

$$\begin{aligned} u_p' &= (z' + iz)e^{ix} \\ y_p'' &= (z'' + 2iz' - z)e^{ix}\,. \end{aligned}$$

Insättning i ekvationen $y'' + y = e^{ix}$ ger, efter förenkling,

$$z'' + 2iz' = 1\,.$$

Vi ser att ekvationen är uppfylld om till exempel $z' = 1/2i = -i/2$ så att $z_p = -ix/2$ duger. Detta ger att

$$u_p = -\frac{ix}{2}\cdot(\cos(x) + i\sin(x)) = \frac{x}{2}\cdot\sin(x) - \frac{ix}{2}\cdot\cos(x)\,.$$

Då fås y_{p_2} genom att vi tar imaginärdelen av u_p som ger

$$y_{p_2} = -\frac{x}{2}\cdot\cos(x)\,.$$

Svar: $y = A\cos(x) + B\sin(x) + x - (x/2)\cos(x)$.

4. För att beräkna integralen är det här lämpligt att initialt använda partiell integration:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2\cdot\arctan x\,dx &= \left[\frac{x^3}{3}\cdot\arctan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\,. \end{aligned}$$

Eftersom $x^3 = x(x^2 + 1 - 1)$ så följer att

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1) - x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}\,.$$

Insätt detta i den återstående integralen så fås att

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \cdot \arctan x \, dx &= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1) \right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln(2) \right) \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \ln(2) = \frac{\pi - 2 + 2\ln(2)}{12} .
\end{aligned}$$

Svar: $(\pi - 2 + 2\ln(2))/12$.

5. I denna uppgift vill vi använda relationen mellan integraler och serier för att kunna uppskatta serien. Låt därför

$$f(x) = \frac{2}{x^3 - x} .$$

Då följer att $f'(x) = -2(x^3 - x)^{-2}(3x^2 - 1) < 0$ om $x \geq 2$ och är alltså avtagande på $[2,n]$ för alla val av $n = 3,4,\cdots$. Då ger jämförelsesats att

$$\int_2^n f(x) + f(n) \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_2^n f(x)\, dx + f(2) .$$

Notera att $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ och att $f(2) = 1/3$. Förutsatt att $\int_2^\infty f(x)\, dx$ är konvergent så följer att

$$\int_2^\infty \frac{2}{x^3 - x}\, dx \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^3 - k} \leq \int_2^\infty \frac{2}{x^3 - x}\, dx + \frac{1}{3} .$$

Återstår att undersöka om $\int_2^\infty f(x)\, dx$ är konvergent och beräkna dess värde. Notera att $f(x) \geq 0$ för alla $x \geq 2$ så att den generaliserade integralen är konvergent om och endast om den är ändlig. Detta kan ses vid beräkning av gränsvärdet

$$\int_2^\infty f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^R f(x)\, dx .$$

För att kunna utföra denna beräkning behöver vi göra en partialbråksuppdelning

$$f(x) = \frac{2}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} .$$

Bestämning av konstanterna A, B och C (gör denna!) ger att $A = -2$, $B = 1$ och $C = 1$ så att

$$f(x) = \frac{2}{x^3 - x} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} .$$

Detta ger att

$$
\begin{aligned}
\int_2^\infty f(x)\,dx &= \lim_{R\to\infty} \int_2^R \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[-2\ln(x) + \ln(x+1) + \ln(x-1)\right]_2^R \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right]_2^R \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\ln\left(1 - \frac{1}{R^2}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{4}\right)\right) \\
&= \ln(1) - \ln\frac{3}{4} = \ln\frac{4}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Insättning i dubbelolikheten ovan ger att

$$
\ln\frac{4}{3} \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^3 - k} \le \frac{1}{6} + \ln\frac{4}{3}\,.
$$

Svar: $A = \ln(4/3)$ och $B = (1/3) + \ln(4/3)$.

6. Maclaurinutveckling ger att

$$
\begin{aligned}
\ln(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + t^3 B_1(t) \\
e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^3 B_2(t)
\end{aligned}
$$

där $B_1(t)$ och $B_2(t)$ är begränsade nära $t = 0$. Ersätt nu t med x^2 och vi får att

$$
\begin{aligned}
\ln(1+x^2) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + x^6 B_1(x^2) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{2} + x^5 B_3(x)\,, \\
e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + x^6 B_2(x^2) \\
&= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + x^5 B_4(x)
\end{aligned}
$$

där $B_3(x)$ och $B_4(x)$ är begränsade nära $x = 0$. Detta ger gränsvärdesberäkningen

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2}{e^{x^2} - 1 - x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{2} + x^5 B_3(x)}{\frac{x^4}{2} + x^5 B_4(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + x B_3(x)}{\frac{1}{2} + x B_4(x)} = -1\,.
\end{aligned}
$$

7. Ellipsskivan är innesluten i ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,.$$

Notera att ellipsskivan alltså är uppåt begränsad av $y = b\sqrt{1-(x/a)^2}$ och nedåt begränsad av $y = -b\sqrt{1-(x/a)^2}$. En liten delarea vid x, i intervallet, $-a \leq x \leq a$, ges approximativt av arean av rektangeln med höjden $2b\sqrt{1-(x/a)^2}$ och bredden Δx. Om indelningen av intervallet $[-a,a]$ görs oändligt fin så kovergerar summan av alla delareor $\Delta A = 2b\sqrt{1-(x/a)^2}\Delta x$ mot arean av ellipsskivan given av

$$A = \int_{-a}^{a} dA = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,.$$

Eftersom integranden är jämn med avseende på $x = 0$ (visa detta) och vi integrerar över ett jämnt intervall med centrum i $x = 0$ så följer att

$$A = 4b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx\,.$$

Med variabelbytet $x = a\sin(t)$ fås att $t = 0$ motsvarar $x = 0$ och $t = \pi/2$ motsvarar $x = a$, där vi även får att $0 < t < \pi/2$ motsvarar $0 < x < a$. Dessutom fås att $dx = a\cos(t)dt$ och att

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$$

eftersom $0 \leq t \leq \pi/2$. Tillsammans ger detta att

$$\begin{aligned} A &= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt \\ &= 2ab\int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t))\ dt \\ &= 2ab \cdot \left[t + \frac{1}{2}\cdot\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} \\ &= 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab\,, \end{aligned}$$

vilket skulle visas. Nu betraktar vi tyngdpunkten som enligt antagande har x-koordinaten

$$x_{tp} = \frac{1}{A}\int_{-a}^{a} x\,dA$$

där dA är areaelementet då vi strimlar i x-led och y-koordinaten

$$y_{tp} = \frac{1}{A}\int_{-b}^{b} y\,dA$$

där dA är areaelementet då vi strimlar i y-led. Låt oss börja med x_{tp}. Notera att

$$dA = 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

så att

$$x_{tp} = \frac{2}{\pi a}\int_{-a}^{a} x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx\,.$$

Med variabelbytet $x = au$ kan vi skriva om integralen (visa detta!) enligt

$$\begin{aligned} x_{tp} &= \frac{2a}{\pi}\int_{-1}^{1} u\sqrt{1-u^2}\,du \\ &= \frac{2a}{\pi}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot(1-u^2)^{3/2}\right]_{-1}^{1} = 0\,. \end{aligned}$$

Notera at vi även kan se detta direkt eftersom integranden är en udda funktion med avseende på $x = 0$ och vi integrerar över ett jämnt intervall. Motsvarande resonemang visar att y_{tp} där vi kan notera att

$$dA = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,.$$

Integranden som fås är en udda funktion kring $y = 0$ och vi integrerar över ett jämnt intervall med centrum i $y = 0$ så denna integral blir 0. Vilket skulle visas.

8. Låt $h(t)$ vara vattenhöjden i tanken i antal meter efter t minuter. Då ges volymen vatten vid tiden t av

$$V(t) = \pi R^2 h(t) = \pi h(t)\,.$$

Enligt antagande är $V'(t)$ proportionell mot $H - h(t) = 3 - h(t)$, med proportionalitetskonstant π. Detta ger att

$$\begin{aligned} (\pi h(t))' &= \pi(3-h(t)) \\ h'(t) &= 3-h(t) \\ h'(t)+h(t) &= 3\,. \end{aligned}$$

En integrerande faktor ges av e^t vilken efter multiplicering i båda led och förenkling ger att

$$\begin{aligned} (h(t)e^t)' &= 3e^t \\ h(t)e^t &= 3e^t + C \\ h(t) &= 3 + Ce^{-t}\,. \end{aligned}$$

Eftersom tanken är tom vid start fås att $h(0) = 0$. Detta villkor ger att $C = -3$ (visa detta!) och vi har därmed

$$h(t) = 3 - 3e^{-t} = 3(1 - e^{-t})\,.$$

Vi söker nu tiden t_1 sådan att tanken är halvfull. Detta fås genom att lösa ekvationen $h(t_1) = 1{,}5$:

$$\begin{aligned}
h(t_1) &= 1{,}5 \\
3(1 - e^{-t}) &= 1{,}5 \\
1 - e^{-t} &= \frac{1}{2} \\
e^{-t} &= \frac{1}{2} \\
-t &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \\
t &= \ln(2)\,.
\end{aligned}$$

Svar: Tanken är halvfull efter $\ln(2)$ minuter.

9. I denna uppgift är det viktigt att förstå hur mängden ser ut, där det kan underlätta att rita bild (gör detta). Det är området som begränsas av linjen $y = 2$ och kurvan $y = 1 + \ln x$ som får rotera kring linjen $y = 1$ på intervallet $1 \le x \le e$. Geometriskt innebär detta att vi ur en liggande cylinder med radien 1 och höjden $e-1$, således med volym $V_1 = \pi \cdot 1^2 \cdot (e-1) = \pi(e-1)$, ska plocka bort den volym V_2 som fås då kurvan $y = 1 + \ln x$ får rotera kring linjen $y = 1$ på intervallet $1 \le x \le e$. För att beräkna V_2, dela in intervallet $1 \le x \le e$ i delintervall Δx. De delvolymer som fås ges av

$$\Delta V = \pi(f(x) - 1)^2 \Delta x = \pi(\ln x)^2 \Delta x\,.$$

Om delvolymerna summeras och indelningen görs oändligt fin fås att

$$V_2 = \pi \int_1^e (\ln x)^2\, dx\,.$$

Med partiell integration fås att

$$\begin{aligned}
V_2 &= \pi \int_1^e 1 \cdot (\ln x)^2\, dx \\
&= \pi \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \pi \int_1^e 2 \ln x\, dx \\
&= \pi e - \pi \left[2x \ln x\right]_1^e + \pi \int_1^e 2\, dx \\
&= \pi e - 2\pi e + 2\pi(e - 1) = \pi(e - 2)\,.
\end{aligned}$$

Sökt volym fås då av $V_1 - V_2 = \pi$ v.e.

Svar: Rotationsvolymen är π v.e.