LÖSNINGAR TILL ÖVNINGSTENTAN DEL 2, FY501G, MÖ

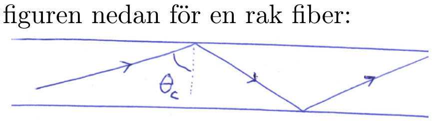
4.

a) Enligt (35-3) gäller $v = c/n = 2.998 \cdot 10^8/1.33 = 2.254 \cdot 10^8$ m/s, där $n = 1.33$ är brytningsindex för vatten vid $T = 20°\mathrm{C}$ och $\lambda = 589$ nm (se tex Table 33-1, sidan 896, från index I-10 *index of refraction*).
Svar a): Ljusfarten i rumstempererat vatten är $2.25 \cdot 10^8$ m/s.

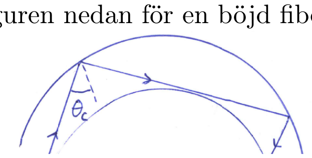
b) Enligt (33-45) för $n_2 = 1$ (luft) sker totalreflektion inne i fibern (n_1) om

$$\theta_c \geq \arcsin\left(\frac{1}{n_1}\right), \tag{1}$$

se figuren nedan för en rak fiber:



Om en böjer samma fiber för mycket kan den infallande vinkeln bli för liten för att uppfylla olikheten (1) ovan, och ljuset kan tränga igenom fiberns yta, se figuren nedan för en böjd fiber:



Svar a): En böjd fiber får mindre infallande vinklar och villkoret för totalreflektion kan upphöra att gälla.

c) Enligt figuren i uppgiften är brytningsindex n_1 större för en kortare våglängd (gäller i vart fall i det illustrerade intervallet). Så en kortare våglängd ger mindre $1/n_1$ och följdaktligen en mindre kritisk vinkel θ_c ($\arcsin(\cdot)$ är en växande funktion).
Svar c): Om en använder en kortare våglängd kan samma fiber böjas mera innan ljuset börjar läcka ut.

d) Enligt (38-15) sidan 1054 gäller följande förhållande (den sk Wiens förskjutningslag) mellan våglängden för maximal spektral radians och temperaturen för en svart kropp

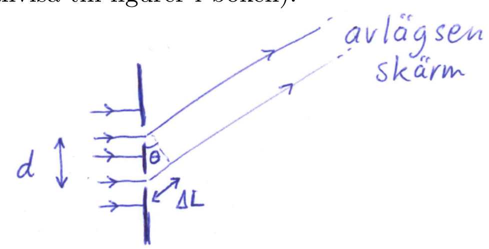
$$\lambda_{\max} T = 2.898 \cdot 10^{-3}\ [m \cdot K]\,. \tag{2}$$

Så att temperaturen i Kelvin blir $T = 2.898 \cdot 10^{-3}/\lambda_{\max} = 2.898 \cdot 10^{-3}/\left(2300 \cdot 10^{-9}\right) = 1260\ [K]$ (ca 1000 grader Celcius).
Svar d): Temperaturen för kroppen är $1.3 \cdot 10^3$ K.

e) Beteckningarna i formeln $d \sin \theta = m\lambda$, betyder: d avstånd mellan de två spalterna, θ vinkel mellan normalen till spaltplanet och ljusstrålen, $m = 1, 2, ..., m_{max}$ heltal, λ våglängden för ljuset.

Principen för koherent ljus genom en dubbelspalt är att strålar som går genom olika spalter kan ha olika väg till en skärm och därigenom kan en fasskillnad uppstå när strålarna sammanstrålar på skärmen (kapitel 35).

För att underlätta härledningen antas strålarna som skall sammanstråla på skärmen vara parallella då de lämnar spalterna (en bra approximation om avståndet till skärmen är mycket längre än avståndet mellan spalterna) (Se boken sidan 951). En skiss som kan ge oss det sökta sambandet är då (Ni får gärna hänvisa till figurer i boken):



Härur ser vi att vägskillnaden för de två strålarna är $\Delta L = d \sin \theta$. Vi får positiv interferens (ljusmaxima) om denna vägskillnad svarar mot ett helt antal våglängder $\Delta L = m\lambda$ (35-10). Vi har då kommit fram till formeln $d \sin \theta = m\lambda$. Vi noterar att m inte kan vara hur stort som helst eftersom $\sin \theta \leq 1$.

5.

a) Enligt (33-5) gäller $c = E/B$, där $B = \left|\vec{B}\right| = 9.0 \cdot 10^{-4}$ T. Så att $E = \left|\vec{E}\right| = cB = 2.998 \cdot 10^{8} \cdot 9.0 \cdot 10^{-4} = 2.698 \cdot 10^{5}$ N/C.

Svar a): Styrkan av det elektriska fältet är $2.7 \cdot 10^{5}$ N/C.

b) Utbredningsriktningen $\vec{v}$ är den riktning i vilken energi transporteras och sammanfaller då i riktning med Poynting vector $\vec{S}$ (sidan 885) för vilken gäller (33-19)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}. \tag{3}$$

Alltså gäller att en okänd riktning (E_x, E_y, E_z) för E-fältet skall uppfylla (där k är en konstant)

$$\vec{v} = (1, 0, 0) = \vec{e}_x = k\,(E_x, E_y, E_z) \times (0, 0, 1) = k\,(E_x, E_y, E_z) \times \vec{e}_z, \tag{4}$$

så att $k\,(E_x, E_y, E_z) = (0, 1, 0) = \vec{e}_y$.

Svar b): E-fältet är riktat i positiva $y-$axelns riktning.

c) Vi får styrkan för dipolen [se runt (22-8) och (22-9)]:

$$|\vec{p}| = qd = 6 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{-10} = 6 \cdot 10^{-30}\, Cm. \tag{5}$$

Enligt (22-37) och (22-38) gäller för dipolens energi i E-fältet $U = -\vec{p} \bullet \vec{E} = -|\vec{p}| \left|\vec{E}\right| \cos\theta$. Då en (medel-) dipol skall ändra sin orientering från 90° mot E-fältet till att bli parallellt med E-fältet, ges ändringen i energi av

$$\Delta U = U(90^\circ) - U(0^\circ) = -|\vec{p}| \left|\vec{E}\right| (\cos(90^\circ) - \cos(0^\circ)) =$$

$$|\vec{p}| \left|\vec{E}\right| = 6 \cdot 10^{-30}\ [Cm] \cdot 2.698 \cdot 10^{5}\ [N/C] = 1.6188 \cdot 10^{-24}\, Nm. \tag{6}$$

Svar c): Energin som omsätts är $1.6 \cdot 10^{-24}$ J.

d) Effekten för mikrovågorna är $P = 800 \cdot 0.70 = 560$ W. Varje foton har energin $E = hf = hc/\lambda \simeq 1.6 \cdot 10^{-24}$ J, samma som i **c)**. Antalet fotoner, N, som bildas i mikrovågsgeneratorn varje sekund är då

$$N = \frac{P}{E} = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{560 \cdot 0.122}{6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 2.998 \cdot 10^{8}} = 3.439 \cdot 10^{26}\ \left[s^{-1}\right]. \tag{7}$$

Svar d): Varje sekund skapas $3.4 \cdot 10^{26}$ fotoner i mikrovågsugnen.

e) Enligt sidan 878 kan en generera EM-vågor med våglängder av storleksordningen 1 m med en svängningskrets vars vinkelfrekvens $\omega = 1/\sqrt{LC}$ blir vinkelfrekvensen för EM-vågen, så att $(f = c/\lambda)$

$$\omega = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 C} = \frac{0.122^2}{4\pi^2 \left(2.998 \cdot 10^{8}\right)^2 1.00 \cdot 10^{-9}} = 4.194659 \cdot 10^{-12}\, [H]. \tag{8}$$

Svar e): Induktansen i LC-kretsen som genererar EM-mikrovågorna är 4.19 pH.

6.

a) Det sitter elektroner i fyra olika energinivåer.
Svar a): Fyra olika energinivåer.

b) Varje tillstånd (definierade av tre kvanttal) kan rymma två elektroner, en med spinn-upp och en med spinn-ner. Det sitter totalt 11 elektroner i spinn-upp tillstånd och 11 elektroner i spinn-ner tillstånd. Alltså finns det elektroner i 11 tillstånd (definierade av tre kvanttal).
Svar b): Det finns elektroner i 11 olika tillstånd.

c) Vi summerar energierna för alla elektronerna, under antagandet att de energinivåer utan angiven energi ligger mitt i mellan de med angiven energi. Om vi kallar den lägsta energinivån för $E_1 = 0.2403 \cdot 10^{-18}$ J, blir alltså $E_2 = (E_3 + E_1)/2$ och $E_4 = (E_5 + E_3)/2$. Totalt har vi

$$E_{tot} = 2(E_1 + 3E_2 + 6E_3 + E_4) = 2\left(E_1 + \frac{3}{2}(E_3 + E_1) + 6E_3 + \frac{1}{2}(E_5 + E_3)\right)$$

$$= 5E_1 + 16E_3 + E_5 = (5 \cdot 0.2403 + 16 \cdot 0.5607 + 0.8811) \cdot 10^{-18} = 1.1054 \cdot 10^{-17}\, J \tag{9}$$

Svar c): Systemets energi i grundtillståndet är $1.11 \cdot 10^{-17}$ J.

d) Energinivåerna från Schrödingerekvationen (eller Bohrs semiklassiska modell), för potentialen i en väteatom (39-32), ges av (39-34):

$$E_n = \frac{-13.6\ [eV]}{n^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{10}$$

Avståndet mellan efterföljande energinivåer, $E_{n+1} - E_n$, är alltså inte konstant som för figuren och därför kan det inte vara energinivåerna till en vätelik atom.
Svar d): Systemet kan inte vara en vätelik atom.

e) Energinivåerna från Schrödingerekvationen för en kubisk oändlig låda ges av (39-21) med $L_x = L_y = L_z = L$:

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8mL^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right),\ n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \ldots . \tag{11}$$

Om konstanterna $\frac{h^2}{8mL^2}$ är sådana att det lägsta energivärdet är $E_{1,1,1} = 0.2403 \cdot 10^{-18}$, så har de tre olika tillstånden $(n_x, n_y, n_z) = (2,1,1)$, $(1,2,1)$ och $(1,1,2)$ alla energin $E = 2E_{1,1,1}$. Följande olika tillstånd $(n_x, n_y, n_z) = (2,2,1)$, $(1,2,2)$ och $(2,1,2)$ har alla energin $E = 3E_{1,1,1}$. Följande olika tillstånd $(n_x, n_y, n_z) = (3,1,1)$, $(1,3,1)$ och $(1,1,3)$ har alla energin $E = \frac{11}{3}E_{1,1,1} < 4E_{1,1,1}$. Avståndet mellan efterföljande energinivåer är alltså inte konstant som för figuren och därför kan det inte vara energinivåerna till en kubisk oändlig låda. En alternativ lösning kan grunda sig på antalet tillstånd i varje energinivå.

Svar e): Systemet kan inte vara en kubisk oändlig låda.