ÖREBRO
UNIVERSITET

# Tentamen i Linjär algebra för civilingenjörer

**MA503G, 2018-03-16, kl. 08:15–13:15**

---

**Hjälpmedel:** Skrivdon

**Betygskriterier:** Framgår av separat dokument publicerat på Blackboard. Uppgifterna är fördelade på två nivåer. En *grundläggande nivå* om totalt 36 poäng bestående av uppgifterna 1-6 (var och en värd 6 poäng), och en *fördjupad nivå* om totalt 24 poäng bestående av uppgifterna 7-9 (var och en värd 8 poäng). Totalt kan man få 60 poäng. Betyg 3 respektive 4 ges till den som erhåller minst 30 respektive 40 poäng på tentan. För betyg 5 krävs minst 50 poäng på tentan samt att minst två av uppgifterna är belönade med full poäng.

**Anvisningar:** Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Svara på högst en uppgift per blad.

**Skrivningsresultat:** Meddelas inom 15 arbetsdagar.

**Examinator:** Jens Fjelstad

**Lycka till!**

---

## Grundläggande nivå

**1.** På denna uppgift ska endast svar anges, lämna alltså inte in några beräkningar. Skriv svaren på alla deluppgifter på samma blad.

(a) Låt $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{w} = (3, 2, 1)$. Beräkna $\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ och $\mathbf{w} \bullet \mathbf{u}$. (2p)

(b) $A$ är en $5 \times 5$-matris sådan att den allmäna lösningen till det homogena linjära ekvationssystemet med koefficientmatris $A$ (dvs ekvationssystemet med matrisform $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) har 2 fria parametrar. Ange $A$:s rang. (1p)

(c) Beräkna $(3, 5, 1) \times (2, 1, -2)$. (1p)

(d) Beräkna determinanten (2p)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

**2.** Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4v &= a \\ x + y + z + v &= b \\ 2x + 3y + 4z + 5v &= c \end{cases} .$$

(a) Lös ekvationssystemet för $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. (3p)

(b) För vilka värden på $a$, $b$ och $c$ är ekvationssystemet konsistent? (3p)

**3.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} .$$

Bestäm baser för kolonnrummet $K(A)$ och nollrummet $N(A)$, och ange dessutom dimensionerna hos båda dessa rum.

**4.** (a) Ge definitionen för att vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ i vektorrummet $V$ är linjärt oberoende. (3p)

(b) Är $2 \times 3$ matriserna (3p)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

linjärt oberoende i vektorrummet av reella $2 \times 3$-matriser?

**5.** Betrakta följande funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$:

$$S(x, y) = (-y, x), \; T(x, y) = (x + y, y).$$

(a) Bestäm standardmatriserna $[S]$ och $[T]$ för $S$ respektive $T$. (4p)

(b) Bestäm standardmatriserna för $S \circ T$ och för $T \circ S$. (2p)

**6.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} .$$

Bestäm matrisen $A$:s egenvärden och egenrum.

---

## Fördjupad nivå

**7.** En plan skiva sitter fast i punkterna $P : (1, 0, 3)$ och $Q : (1, 1, 1)$, samt är upphängd i en vajer som sitter fäst i skivan i origo $O : (0, 0, 0)$. Vajern är dessutom fäst i taket och hänger lodrätt mellan tak och skiva. Spännkraften $\vec{F}$ är riktad längs vajern och har storleken 28N. Bestäm kraftens komposanter ortogonalt mot och parallellt med skivan.

**8.** Låt

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm alla matriser $X$ som uppfyller $MN + MXN = I$.

**9.** Låt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifiera att vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

är egenvektorer till $B$ och ange motsvarande egenvärden. Bestäm en ortogonal matris $P$ och en diagonalmatris $D$ sådana att $B = PDP^T$. Beräkna dessutom matrisen $B^5$.