ÖREBRO
UNIVERSITET

Flervariabelanalys för civilingenjörer

MA505G-0100

2018-10-31, kl. 08:15–13:15

Hjälpmedel: Endast skrivmateriel. Formelblad delas ut tillsammans med skrivningen.

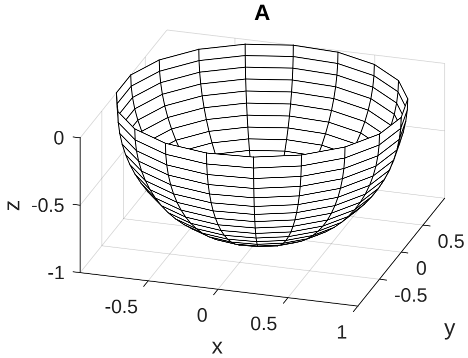
Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga uppgifter bedöms utifrån kriterier för *problemlösning* och *redovisning*. För betyg 3/4/5 räcker det med 6 poäng inom vart och ett av huvudområdena *differentialkalkyl*, *integralkalkyl* och *vektoranalys* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

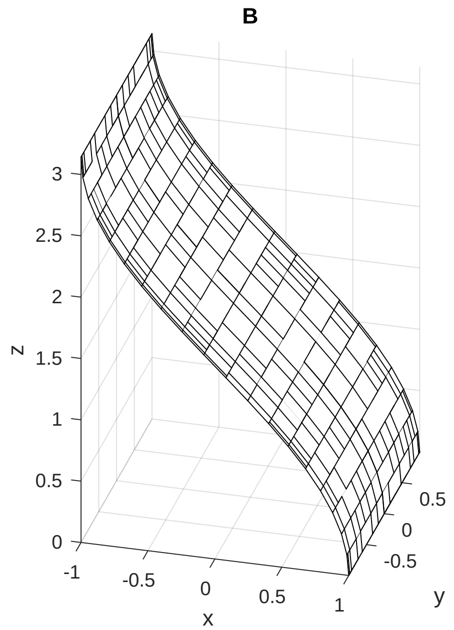
Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg, rita tydliga figurer och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Andreas Bergwall.

Lycka till!





1. Studera ytorna ovan. x-axeln pekar åt höger, y-axeln in i pappret och z-axeln uppåt. Vilken/vilka ekvationer nedan kan användas för att beskriva respektive yta? Komplettera med definitionsmängder eller andra lämpliga restriktioner! [8p]

   (a) $z = \sin x + \cos y$

   (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

   (c) $x - \cos(z) = 0$

   (d) $(x, y, z) = (\cos(s), \sin(t), s)$

   (e) $(x, y, z) = (\cos(s), \sin(s), t)$

   (f) $(x, y, z) = (\sin s \cos t, \sin s \sin t, \cos t)$

2. Antag att $\operatorname{grad} f(x,y) = (6x^2y - 12xy, 2x^3 - 6x^2 - 8y)$ och att $f(1,-3) = -5$. [8p]

   (a) Bestäm tangentplanet till $z = f(x,y)$ i den punkt där $(x,y) = (1,-3)$.

   (b) Visa att $(2,-1)$ är en lokal maxpunkt till $f(x,y)$.

3. Vilken punkt i planet $x - 2y + 2z = 3$ ligger närmast punkten $(1,0,0)$? [8p]

   Ledning: Bestäm först en funktion som beskriver avståndet från en godtycklig punkt (x,y,z) till punkten $(1,0,0)$?

   Anmärkning: Uppgiften ska lösas med optimeringsmetoder från den här kursen och inte med ortogonal projektion eller andra metoder från linjär algebra.

Obs! I uppgifterna 4–7 nedan ska integrationsområden och orienteringar (där sådana är relevanta) illustreras med tydliga figurer.

4. Vilken dubbelintegral kan skrivas som nedanstående upprepade enkelintegral? [8p]

$$\int_0^1 \left(\int_{e^x}^{e} \frac{x}{\ln y}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

   Beräkna den dubbelintegralen!

5. Kroppen $K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$ har densiteten $\rho(x,y,z) = z$. [10p]
   Då gäller att K:s tröghetsmoment med avseende på z-axeln ges av

$$J = \iiint_K (x^2 + y^2) z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

   Beräkna denna trippelintegral på två olika sätt!

6. Låt γ vara halvcirkelbågen i övre halvplanet från punkten $(-\pi, 0)$ till punkten $(\pi, 0)$. Beräkna [8p]

$$\int_\gamma (y \sin(x) + e^y)\, \mathrm{d}x + (xe^y - \cos(x))\, \mathrm{d}y.$$

7. Beräkna $\int_\gamma xyz\, \mathrm{d}x - z\, \mathrm{d}y + y\, \mathrm{d}z$ där γ är skärningen mellan ytorna $y^2 + z^2 = 1$ och $x + z = 1$. Kurvan γ ska genomlöpas moturs sett från origo. [10p]

Kommentarer till Flervariabelanalys för civilingenjörer 20181031

1. (a) Ytan i bild A är "undre halvan" av enhetssfären, d.v.s. ges av (b) med tillägget att $z < 0$. Med sfäriska koordinater (s, t) kan den parametriseras som $(x, y, z) = (\sin s \cos t, \sin s \sin t, \cos s)$ med definitionsmängd $\pi/2 < s < \pi$, $0 < t < 2\pi$, vilket är snarlikt, men inte identiskt med, uttrycket i (f). Ytan i (f) är faktiskt inte alls sfärisk. Prova gärna att plotta den med Matlab! Om man projicerar den på koorinatplanen så får man för fixt s en cirkel i xy-planet, en ellips i yz-planet och en rät linje i xz-planet.

   (b) Ytan i bild B skär plan som är parallella med xz-planet längs med kurvan $x = \cos(z)$, $0 < z < \pi$ (om y är en konstant mellan -1 och 1). Ytan ges alltså av (c) med definitionsmängd $-1 < y < 1$, $0 < z < \pi$. Den kan parametriseras som i (d) med $0 < s < \pi$, $-\pi/2 < t < \pi/2$. (En mer naturlig parametrisering hade dock varit $(x, y, z) = (\cos(s), t, s)$, $0 < s < \pi$, $-1 < t < 1$.)

2. (a) $(f'_x(1, -3), f'_y(1, -3)) = \operatorname{grad} f(1, -3) = (18, 20)$ så tangentplanets ekvation är $z = -5 + 18(x - 1) + 20(y + 3)$.

   (b) Eftersom $\operatorname{grad} f(2, -1) = (0, 0)$ så är $(2, -1)$ är en stationär punkt, vilket är ett nödvändigt villkor för att det ska kunna vara en lokal extrempunkt (eftersom f är partiellt deriverbar överallt).

   Vidare är $A = f''_{xx}(2, -1) = -12$, $B = f''_{xy}(2, -1) = 0$ och $C = f''_{yy}(2, -1) = -8$ vilket ger att $AC - B^2 > 0$. Tillsammans med att $A < 0$ så innebär detta att den kvadratiska formen $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ (d.v.s. 2:a-gradstermerna i f:s taylorutveckling kring $(2, -1)$) är negativt definit. Då följer att $(2, -1)$ är en lokal maxpunkt.

3. Avståndet till $(1, 0, 0)$ ges av $\sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + z^2}$. Vi kan lika gärna minimera kvadraten på avståndet, d.v.s. $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 + z^2$. Detta ska göras under bivillkoret $g(x, y, z) = x - 2y + 2z = 3$. Optimum finns (hur kan man veta det?) i en punkt där $\nabla f = \lambda \nabla g$. Detta system har lösningarna $\lambda = z = -y = 2(x - 1)$ vilket insatt i bivillkoret ger $(x, y, z) = (11/9, -4/9, 4/9)$.

   Det går att krångla sig ur helt utan deriveringar om man t.ex. löser ut z ur planets ekvation, sätter in i uttrycket för $f(x, y, z)$ och sedan kvadratkompletterar. Prova gärna!

   Anm: Planet $g(x, y, z) = 3$ är inte en kompakt mängd. Om vi däremot tänker oss att vi bara söker bland punkter i detta plan som ligger högst 10 längdenheter från punkten $(1, 0, 0)$ så söker vi i en kompakt mängd och då finns garanterat både punkter som minimerar och som maximerar avståndet till $(1, 0, 0)$. Dessa punkter är antingen punkter där ∇f och ∇g är parallella eller punkter på "randen". Nu fanns det bara en punkt där ∇f och ∇g är parallella, nämligen $(11/9, -4/9, 4/9)$, och där är $f(11/9, -4/9, 4/9) = 36/81$. På "randen" är $f = 100$. Här är det alltså klart att $(11/9, -4/9, 4/9)$ verkligen är minpunkten. Och punkter längre bort än 10 längdenheter är naturligtvis ointressanta eftersom f:s värde i dessa är minst 100.

4. Den sökta dubbelintegralen är över $D = \{(x,y) : e^x \leq y \leq e,\ 0 \leq x \leq 1\}$. Denna mängd kan också beskrivas som $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \ln y,\ 1 \leq y \leq 1\}$. Byte av integrationsordning ger

$$\int_D \frac{x}{\ln y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^e \left(\int_0^{\ln y} \frac{x}{\ln y}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \ldots = \frac{1}{2}.$$

5. Tröghetsmomentet är $\pi/12$. Tre olika sätt att börja:

   - Inre dubbelintegral över skivan D_z: $x^2+y^2 \leq 1-z^2$ i xy-planet följt av interering över $[0,1]$ i z-led:

     $$J = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} (x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \ldots$$

     Det är lämpligt med övergång till planpolära koordinater i dubbelintegralen.

   - Yttre dubbelintegral över enhetscirkelskivan i xy-planet och inre enkelintegral i z-led mellan ytorna $z=0$ och $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$:

     $$J = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2)z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ldots$$

     Det är lämpligt med övergång till planpolära koordinater i dubbelintegralen.

   - Byt direkt till rymdpolära koordinater:

     $$J = \iiint\limits_{[0,1]\times[0,\pi/2]\times[0,2\pi]} r^2\sin^2\theta\cdot r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \ldots$$

6. Fältet är ett potentialfält i $\mathbb{R}^2$ (kontrollera att $Q'_x = P'_y$) så integralen är oberoende av vägen. Byt till linjestycket från $(-\pi,0)$ till $(\pi,0)$. Längs det är $y = \mathrm{d}y = 0$ så integralen blir bara $\int_{-\pi}^{\pi}\,\mathrm{d}x = 2\pi$.

7. γ är positivt orienterad rand till ytan $x = 1-z$, $y^2+z^2 \leq 1$, med orienterat ytelement $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = (-1, x'_y, x'_z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (-1,0,-1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Vektorfältets rotation är $(2, xy, -xz)$ vilket på denna yta är $(2,(1-z)y,-(1-z)z)$. Stokes sats leder till att kurvintegralen blir

   $$\ldots = \iint\limits_{y^2+z^2\leq 1} (-2+z-z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \ldots = \frac{9\pi}{4}.$$

   Man kan också se γ som postivit orienterad rand till ytan $z = 1-x$, $(1-x)^2 + y^2 \leq 1$, $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = (z'_x, z'_y, 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, om man hellre vill det.