Tentamen

Optimering för civilingenjörer, MA507G

Examinator: Mårten Gulliksson

Tid: Tisdag 10 Januari 2023 klockan 08:15-13:15

Hjälpmedel

Formelsamling, miniräknare och skrivverktyg.

Betygskriterier

Framgår av separat dokument publicerat på Blackboard. Totalt antal poäng är 60 och för godkänt krävs minst 30 poäng.

Anvisningar

Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Var tydlig med vad som antas och vad som visas. Det är huvudsakligen motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Tentan innehåller lättare och svårare uppgifter blandat. Välj de uppgifter som passar dig. Samtliga uppgifter behöver inte lösas.

Lycka till!

Problem 1 (10 poäng)

Ett företag monterar fyra produkter (1, 2, 3 och 4) utifrån inköpta komponenter. Monteringen sker i tre steg (A, B och C). Monteringen av en enhet av en produkt kräver ett visst antal mantimmar i vart och ett av stegen. I varje steg finns ett givet antal mantimmar tillgängliga. Varje enhet av en produkt som monteras och säljs ger en viss vinst, och under en given tidsperiod har varje produkt en viss maximal efterfrågan. Man behöver dock inte uppfylla hela efterfrågan. Tabellen nedan ger numeriska värden för de beskrivna förutsättningarna.

	tidsåtgång per enhet				tillgängliga
	1	2	3	4	mantimmar
steg A	2	2	1	1	160
steg B	2	4	1	2	200
steg C	3	6	1	5	180
vinst per enhet	17	22	9	18	
maximal efterfrågan	50	60	85	70	

Det är möjligt att flytta mantimmar från A och B till C. Från A dock högst 20 och från B högst 30. Företaget vill finna en produktion och en eventuell omfördelning av mantimmarna sådana att den totala vinsten maximeras.

(a) Formulera företagets frågeställning som ett linjärt optimeringsproblem.

(b) Antag att efterfrågan på produkt 4 även kan tillgodoses med produkt 1, men att vinsten per enhet då blir bara 16 (istället för 17 eller 18). Hur ska modellen modifieras för att inkludera denna möjlighet?

Problem 2 (10 poäng)

Betrakta följande linjära programmeringsproblem.

$$\begin{array}{lll} \max & z = x_1 + 2x_2 & \\ \text{u.b.} & 3x_1 - x_2 & \leq \ 12 \\ & x_1 + 4x_2 & \leq \ 17 \\ & -x_1 + x_2 & \leq \ 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

(a) Starta i origo och lös problemet med Simplexmetoden. Illustrera sekvensen av iterationspunkter med en figur i $(x_1, x_2)-$rummet.

(b) Sätt upp det duala problemet.

Problem 3 (10 poäng)

Givet följande obegränsade ickelinjära optimeringsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = \frac{1}{2} x_1^2 x_2 - 2x_1 - 2x_2.$$

(a) Utför en iteration med brantaste lutningsmetoden (steepest descent) från punkten $x^0 = (2, 2)^T$ där ni ska använda exakt linjesökning.

(b) Beräkna Newtonriktningen i x^0 ovan och avgör om den är en avtaganderiktning (descent direction).

(c) Avgör om f är konvex eller ej på $\mathbb{R}^2$.

Problem 4 (10 poäng)

Betrakta optimeringsproblemet

$$\begin{array}{lrcl} \min & f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3) + 4x_1 + 3x_2 + x_3 & & \\ \text{u.b.} & 2x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 4 \\ & -x_1 - 2x_2 - x_3 & \leq & -4. \end{array}$$

(a) Avgör om problemet är konvext.

(b) Avgör om $\hat{x} = (1, 1, 1)^T$ är en KKT-punkt.

Problem 5 (10 poäng)

Betrakta följande linjära programmeringsproblem

$$\begin{array}{lrcll} \min & z = 7x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 8x_4 & & & \\ \text{u.b.} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 & \leq & 24 & \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 & \leq & 17 & \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 & \leq & 29 & (*) \\ & x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 4. & & & \end{array}$$

Problemet har flera optimala lösningar.

(a) Formulera det duala problemet.

(b) Formulera komplementaritetsvillkoren.

(c) Vilken egenskap har det duala problemet då det primala har flera optimala lösningar?

(d Bland lösningarna finns en som uppfyller att $x_1 > 0, x_2 > 0$ och som uppfyller bivillkor (*) med strikt olikhet. Använd komplementaritetsvillkoren för att beräkna samtliga optimallösningar på parameterform.

Problem 6 (10 poäng)

Lös följande delproblem.

(a) Förklara vad en heuristisk optimeringsalgoritm är och beskriv så detaljerat ni kan minst tre olika sådana.

(b) Definiera för linjära programmeringsproblem begreppen slackvariabel, baslösning, tillåten lösning och obegränsad lösning.