ÖREBRO
UNIVERSITET

Tentamen i funktioner och derivator

MA502G
2019-10-29, kl. 8:15–13:15

Hjälpmedel: Skrivdon (penna, sudd, linjal, gradskiva)

Betygskriterier: Framgår av separat dokument publicerat på Blackboard. Totalt kan man få 60 poäng. Uppgifterna på Del 1 är uppdelade i de tre huvudområdena Algebra, Funktioner, och Derivator, och kan tillsammans ge 12 poäng per huvudområde. Uppgifterna på Del 2 kan tillsammans ge 24 poäng. För betyg 3/4/5 krävs 3/4/5 poäng per huvudområde på Del 1 och 30/40/50 poäng totalt.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Svara på högst en uppgift per blad.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Niklas Eriksen och Mac Panahbehagh

Lycka till!

Del 1

Algebra

1. Lös olikheten $\frac{x^2+1}{x+3} \geq 1$. (4p)

Vi ska bestämma de x som uppfyller

$$\frac{x^2+1}{x+3} - 1 \geq 0.$$

Vi börjar med att förenkla vänsterledet, och använder då pq-formeln:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{x+3} - 1 &= \frac{x^2+1}{x+3} - \frac{x+3}{x+3} \\ &= \frac{x^2-x-2}{x+3} \\ &= \frac{(x+1)(x-2)}{x+3}\end{aligned}$$

Denna kvot är odefinierad vid $x = -3$, och 0 vid $x = -1$ och $x = 2$. Teckenstudium visar nu att olikheten

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x+3} \geq 0$$

är uppfylld för $-3 < x \leq -1$ och $2 \leq x$.

2. Bestäm värdet på $\sin 2\alpha$ om $\tan\alpha = \sqrt{3}$ och $\alpha \in [0, \pi/2]$. (4p)

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \sqrt{3} && \iff \\
\alpha &= \tan^{-1}(\sqrt{3}) && \iff \\
\alpha &= \frac{\pi}{3} && \implies \\
\sin 2\alpha &= \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

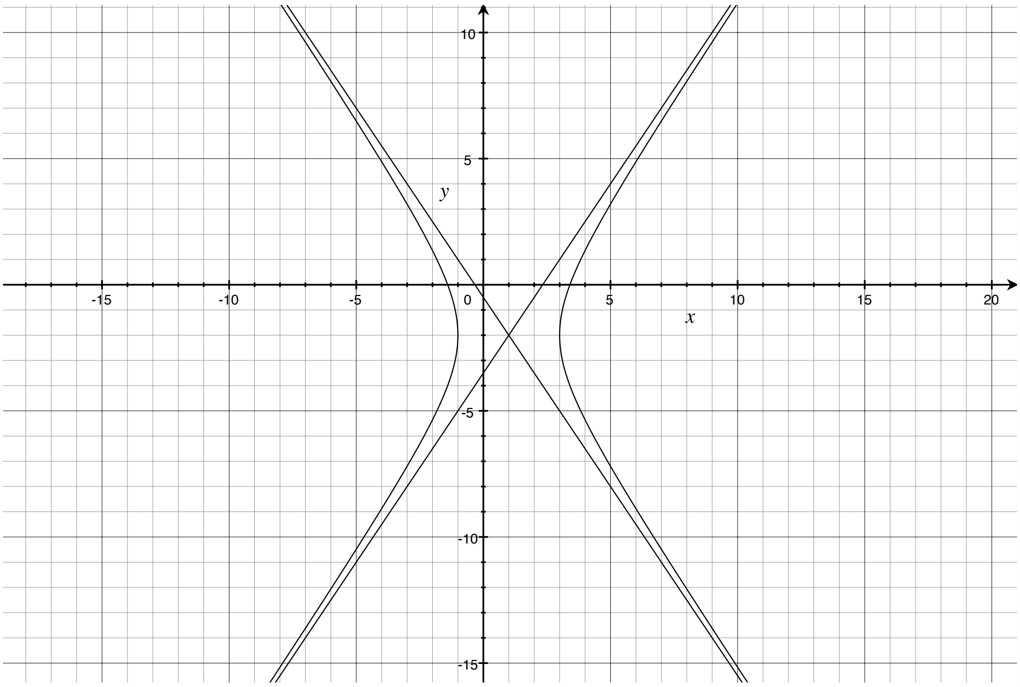
3. Vilken kurva beskrivs av ekvationen $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y = 43$? Rita detaljerad figur med eventuella asymptoter. (4p)

$$\begin{aligned}
9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y &= 43 && \iff \\
9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 4y + 4) &= 43 + 9 - 16 && \iff \\
9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 &= 36 && \iff \\
\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} &= 1 && \implies
\end{aligned}$$

Aymptoterna kan fås genom att lösa ekvationen:

$$\begin{aligned}
&\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 0 && \iff \\
&y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \quad \text{and} \\
&y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ekvationen representerar en hyperbel med medelpunkten (1,-2).



Funktioner

4. Beräkna gränsvärdena (6p)

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x-5}{x^3-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2-2\cos x}$ (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(3x+e^{-x})^2}{\ln x^4 - 3x^2}$

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x-5}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5}{(x^2+x+1)} = \dfrac{5}{3}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2-2\cos x} = \left[\dfrac{0}{0} \implies \text{L'Hopitals regel}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2\sin x} = \dfrac{1}{0} = \infty$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(3x+e^{-x})^2}{\ln x^4 - 3x^2} = \left[\text{dominanta termer}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{9x^2}{-3x^2} = -3$

5. För vilka reella värden på a och b gäller att (6p)

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 1 & x < 1 \\ b + \ln x & x \geq 1 \end{cases}$$

är både kontinuerlig och deriverbar. Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ för intervallet $x \geq 1$ och rita grafen med din version av a och b värden.

Funktionen $f(x)$ är ett polynom i intervallet $x < 1$ och logaritmisk när $x > 1$ och måste därför vara kontinuerlig och deriverbar.
Det enda x-värde som återstår att undersöka är när $x = 1$.

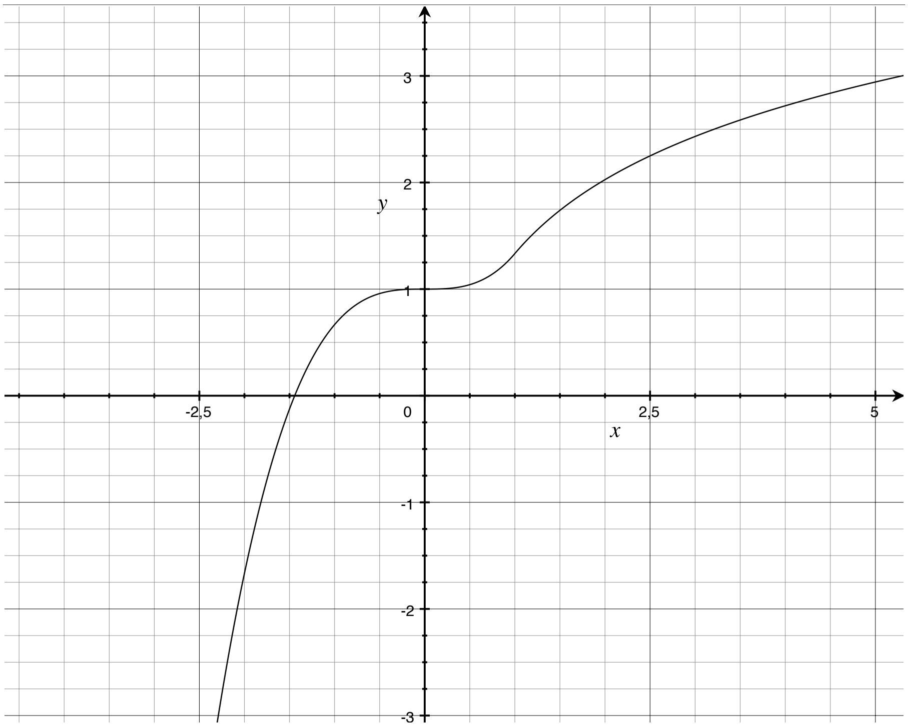
$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) \implies 3a = 1 \implies a = \frac{1}{3}$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \implies a + 1 = b + \ln 1 \implies a + 1 = b \implies b = \frac{4}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + 1 & x < 1 \\ \frac{4}{3} + \ln x & x \geq 1 \end{cases}$$

Inversen till funktionen $f(x)$ i intervallet $x \geq 1$ är:

$$y = \frac{4}{3} + \ln x \iff$$
$$x = e^{y - \frac{4}{3}} \implies$$
$$f^{-1}(x) = e^{x - \frac{4}{3}} \qquad \text{i intervallet:} \quad x \geq \frac{4}{3}$$

och slutligen kommer grafen till funktionen $f(x)$.



Derivator

6. Bestäm alla inflexionspunkter och största och minsta värdet av $f(x) = (\sin x)e^{-x}$ (6p) på intervallet $(-3, 3)$.

Funktionen $f(x)$ är både kontinuerlig och deriverbar i intervallet $(-3, 3)$ och därför kan man hitta alla lokala extremvärden genom att lösa ekvationen $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = (\cos x)e^{-x} - (\sin x)e^{-x} = (\cos x - \sin x)e^{-x}$$
$$f''(x) = (-\sin x - \cos x)e^{-x} - (\cos x - \sin x)e^{-x} = (-2\cos x)e^{-x}$$
$$f'(x) = 0 \iff \cos x - \sin x = 0 \iff \tan x = 1 \implies x = \frac{\pi}{4} \quad \text{eller} \quad x = \frac{-3\pi}{4}$$
$$f''(\frac{\pi}{4}) = (-2\cos(\frac{\pi}{4}))e^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{-2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}} < 0 \implies x = \frac{\pi}{4} \quad \text{är en lokal max punkt}$$
$$f''(\frac{-3\pi}{4}) = (-2\cos(\frac{-3\pi}{4}))e^{-\frac{-3\pi}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{\frac{-3\pi}{4}} > 0 \implies x = -\frac{3\pi}{4} \quad \text{är en lokal min punkt}$$

Alla inflexionspunkter kan hittas genom att lösa ekvationen $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \iff \cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} \quad \text{eller} \quad x = -\frac{\pi}{2}$$
$$f''(\frac{\pi}{2} + \epsilon) > 0 \text{ och } f''(\frac{\pi}{2} - \epsilon) < 0 \implies x = \frac{\pi}{2} \quad \text{är en inflexionspunkt.}$$
$$f''(-\frac{\pi}{2} + \epsilon) < 0 \text{ och } f''(-\frac{\pi}{2} - \epsilon) > 0 \implies x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{är en inflexionspunkt.}$$

7. Ekvationen $x^3 + y^3 = \frac{9xy}{2}$ bildar en ögla i första kvadranten. Visa att kurvan innehåller punkten $(x, y) = (1, 2)$ och bestäm tangenten i denna punkt. (6p)

Genom insättning får vi 9 i såväl höger- som vänsterled. Genom implicit derivering får vi

$$3x^2 + 3y^2y' = \frac{9}{2}(y + xy')$$

som ger

$$y'(x) = \frac{\frac{9}{2}y - 3x^2}{3y^2 - \frac{9}{2}x}.$$

Insättning av $(x, y) = (1, 2)$ ger nu

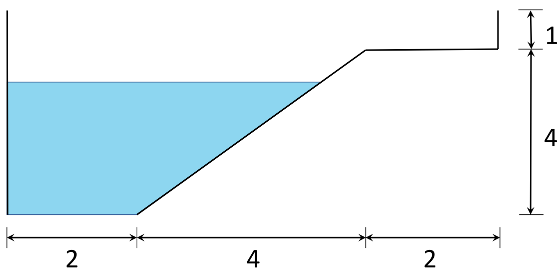
$$y'(1) = \frac{9 - 3}{12 - \frac{9}{2}} = \frac{6}{15/2} = \frac{4}{5}.$$

Tangenten ges av:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \implies y - 2 = \frac{4}{5}(x - 1) \implies y = \frac{4}{5}x + \frac{6}{5}$$

Del 2

8. En simbassäng är 10 m bred och 8 m lång enligt bilden nedan. Om vatteninflödet till bassängen är 0.1 m^3/s, beräkna hur fort vattenytan stiger när vattendjupet är 2 m i den djupaste delen av bassängen. (8p)



Första steget är att bestämma volymen som funktion av höjden i det intervall som är relevant.

$$
\begin{aligned}
V(h) &= 10(2h + \frac{h^2}{2}) = 20h + 5h^2 \qquad 0 \leq h \leq 4 \\
V'(h) &= 20 + 10h
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{kedjeregeln} \quad &\Longrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} \\
&\Longrightarrow 0.1 = V'(h)\frac{dh}{dt} \\
&\Longrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{0.1}{V'(h)} = \frac{0.1}{V'(2)} = \frac{0.1}{40} = 0.0025 \ \ \text{m/s}
\end{aligned}
$$

9. Bestäm alla asymptoter och lokala extrempunkter till (8p)

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

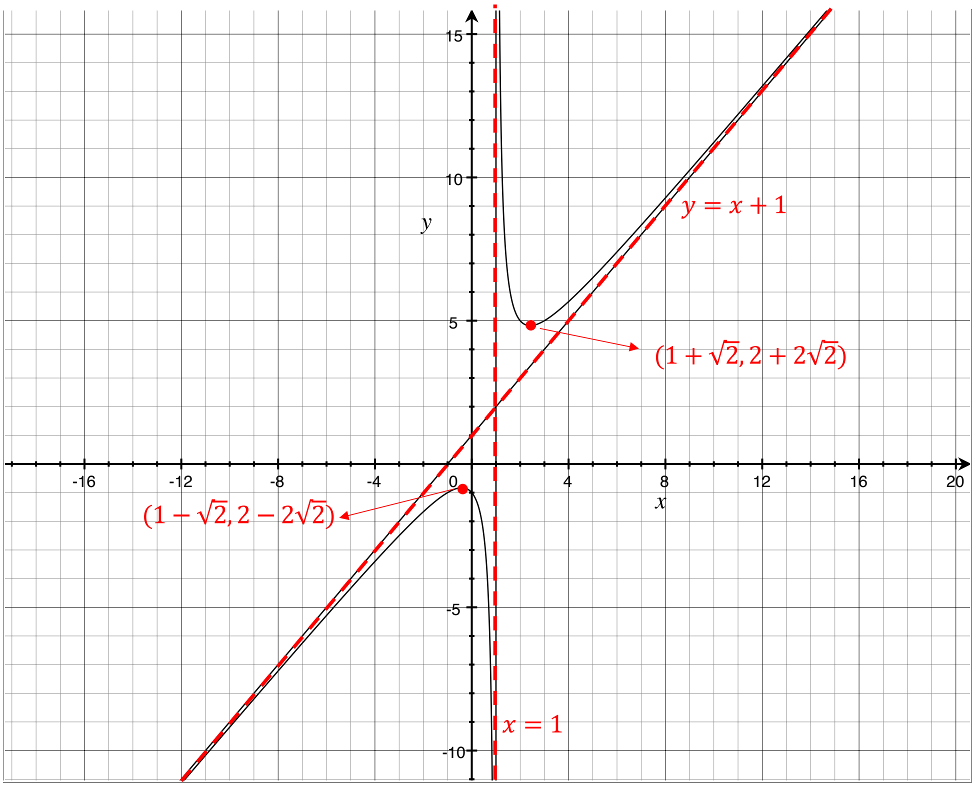
och rita grafen.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty \\
&\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty \\
&\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} x + 1 + \frac{2}{x-1} = x+1
\end{aligned}
$$

Funktionen $f(x)$ har en vertikal asymptot $x = 1$ och en sned asymptot $y = x + 1$.

Alla stationära punkter ges av:

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0 \implies x = 1 \pm \sqrt{2} \\
&f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3} \implies \\
&f''(1+\sqrt{2}) > 0 \implies \text{lokal min punkt} \\
&f''(1-\sqrt{2}) < 0 \implies \text{lokal max punkt} \\
&f(1+\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2} \\
&f(1-\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$



10. Hitta den största arean av en rektangel som är inskriven i en halvcirkel med radien r. (8p)

Halvcirkeln representeras av funktionen $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ med definitionsmängden $0 \leq x \leq r$ enligt figuren nedan. Då blir arean av rektangeln som är inskriven i halvcirkeln:

$$A(x) = 2xy = 2x\sqrt{r^2 - x^2} \implies$$
$$A'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

För att hitta alla extrempunkter löser vi ekvationen $A'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\iff \\ \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 &\iff \\ r^2 - 2x^2 = 0 &\iff \\ x = \pm\frac{r}{\sqrt{2}} & \end{aligned}$$

Den enda lösningen som är inom definitionsmängden är $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

$$A'(\frac{r}{\sqrt{2}} - \epsilon) > 0 \ \text{ och } \ A'(\frac{r}{\sqrt{2}} + \epsilon) < 0 \implies$$

$x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ är en lokal maximipunkt. Eftersom $A(0) = 0$ och $A(r) = 0$ då måste $A(\frac{r}{\sqrt{2}}) = r^2$ vara en global maximipunkt i intervallet $0 \le x \le r$.