ÖREBRO UNIVERSITET

Tentamen i Flervariabelanalys för civilingenjörer

MA505G, 2022-05-31, 08:15–13:15

Tillåtna hjälpmedel: Skrivmateriel samt utdelat formelblad. Miniräknare är ej tillåtet!

Anvisningar: Motivera väl, rita tydliga figurer, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Var tydlig med vad som antas och vad som visas. Det är huvudsakligen motiveringarna som ger poäng, inte svaret.

Ansvariga lärare: Johan Andersson och Andreas Bergwall.

Lycka till!

Grundläggande nivå 6p/uppgift

1. Bestäm gränsvärdet eller visa att det inte existerar.
   a) $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to\infty} e^{-x^2-4xy-4y^2}$
   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

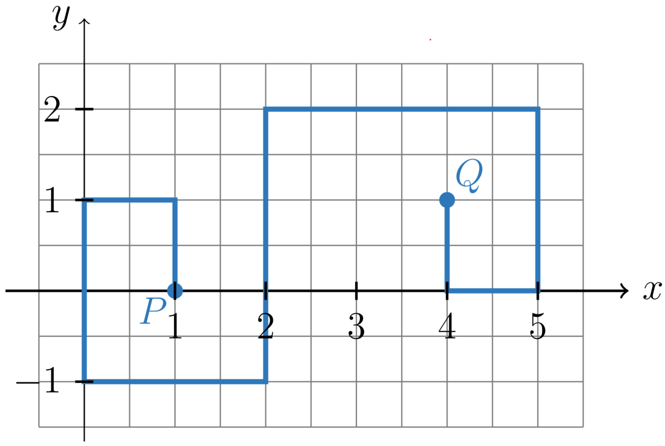
2. Låt $f(x,y,z) = xyz + 2x - 2y + 3z$ och låt punkten P ha koordinaterna $(-1,-1,1)$.
   a) Bestäm gradienten till funktionen f i punkten P.
   b) Bestäm tangentplanet till nivåytan $f(x,y,z) = 4$ i punkten P.
   c) När du befinner dig i punkten P bestäm i vilken av riktningarna $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ samt $(0,1,1)$ som funktionen f växer snabbast.

3. En homogen cirkulär kon K har höjd H och en basyta med radie R. Konens spets ligger i origo, har z-axeln som symmetriaxel och ligger ovanför xy-planet.
   a) Beskriv kroppen K med olikheter.
   b) Bestäm z-koordinaten för konens tyngdpunkt. Ni får använda att z-koordinaten för en homogen kropp K ges av $z_T = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_K z\,dxdydz$, där V är K:s volym.

4. Beräkna $\displaystyle\iint_D (x^2-4y^2)e^{x+2y}\,dxdy$ där D ges av olikheterna $-1 \le x+2y \le 1$ och $-1 \le x-2y \le 1$.

5. a) Avgör om $\boldsymbol{F} = \left(\dfrac{2x}{1+x^2+2y^2}, \dfrac{4y}{1+x^2+2y^2} \right)$ är ett potentialfält i $\mathbb{R}^2$.

   b) Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\gamma \frac{2xdx + 4ydy}{1+x^2+2y^2}$ över kurvan γ som går från P till Q enligt nedanstående figur.



Fördjupad nivå 10p/uppgift

6. Låt $f(x, y) = xy - x^2y - y^2$.

   a) Finn alla stationära punkter till funktionen f och klassificera dem som sadelpunkter, lokala minimipunkter eller lokala maximipunkter.

   b) Bestäm det största och det minsta värdet av $f(x, y)$ på triangelskivan $x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

7. Låt $\boldsymbol{F} = (y^2 - x^2, xe^{xyz}, 2zx)$ och låt K vara kuben som ges av olikheterna $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ samt $0 \leq z \leq 1$.

   a) Använd Gauss sats för att bestämma flödet av fältet $\boldsymbol{F}$ ut genom randytan ∂K till kuben K.

   b) Om sidan $z = 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, tas bort från ∂K så fås en yta Γ med fem sidor (en ”låda utan lock”). Bestäm flödet av fältet $\boldsymbol{F}$ ut genom Γ.

8. Konen $x^2+y^2 = (az)^2$ delar klotet $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ i tre delar. Bestäm konstanten $a > 0$ så att alla delarna får lika stor volym.

Lösningsförslag till Flervariabelanalys för civilingenjörer 20220531

1. Kom ihåg att en undersökning av funktionens beteende längs två olika kurvor enbart kan användas för att bevisa att ett gränsvärde *inte* finns.

   (a) Observera att $f(x, y) = e^{-x^2-4xy-4y^2} = e^{-(x+2y)^2}$. På linjen $x + 2y = 0$ så är alltså $f(x, y) = 1$, oavsett storlek på x^2+y^2. På y-axeln gäller däremot att $f(x, 0) = e^{-x^2} \to 0$ då $x \to \infty$. Gränsvärdet finns alltså inte.

   Obs! Med planpolära koordinater får man att exponenten är $-r^2(\cos\varphi + 2\sin\varphi)^2$. Det är visserligen sant att $(\cos\varphi+2\sin\varphi)^2 \leq 9$ men det innebär att exponenten är $\geq -9r^2$. Alltså är $f(x, y) \geq e^{-9r^2}$. Eftersom olikheten är vänd åt detta håll så är det inte till någon hjälp att $e^{-9r^2} \to 0$ då $r \to \infty$.

   (b) Låt $f(x, y) = xy^2/(x^2 + y^2)$. På x-axeln har vi $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$, så om $(x, y) \to (0, 0)$ längs x-axeln så blir gränsvärdet 0. Samma resultat får man om man istället följer y-axeln (studera $f(0, y)$) eller linjen $y = x$ (studera $f(x, x)$). Det betyder inte att gränsvärdet måste finnas. Men det *kan* finnas och har i så fall värdet 0.

   För att bevisa att gränsvärdet verkligen finns så kan man använda planpolära koordinater:

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r\cos\varphi \cdot r^2\sin^2\varphi}{r^2} = r\cos\varphi\sin^2\varphi.$$

   Eftersom $|\cos\varphi\sin^2\varphi| \leq 1$ för alla φ så är $\cos\varphi\sin^2\varphi$ en begränsad funktion. När $r \to 0$ så kan vi då vara säkra på att $r\cos\varphi\sin^2\varphi \to 0$ helt oberoende av φ. Alltså finns gränsvärdet och det är 0.

2. (a) $\nabla f(x, y, z) = (yz + 2, xz - 2, xy + 3)$ så $\nabla f(-1, -1, 1) = (1, -3, 4)$.

   (b) Man kan kontrollera att $f(-1, -1, 1) = 4$, så punkten ligger verkligen på ytan (det hade varit en taskig tentauppgift annars). $\nabla f(-1, -1, 1) = (1, -3, 4)$ är en normal till tangentplanet så det ges alltså av

$$1(x + 1) - 3(y + 1) + 4(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 4z = 6.$$

   Observera att svaret måste vara en linjär ekvation i de tre variablerna x, y och z och att det ska vara en 0:a i högerledet i ekvationen till vänster.

   (c) Frågan kan besvaras genom att undersöka vilken av de tre riktningarna som ger störst värde på riktningsderivatan i punkten $(-1, -1, 1)$. Det är alltså samma punkt men tre olika riktningar som ska undersökas. Riktningsderivatan ges av

$$f'_{\boldsymbol{v}}(-1, -1, 1) = \nabla f(-1, -1, 1) \cdot \boldsymbol{v} = (1, -3, 4) \cdot \boldsymbol{v}$$

   där $\boldsymbol{v}$ ska vara normerad.

Eftersom alla tre riktningar ges av vektorer med längden $\sqrt{2}$ så handlar det dock i slutändan om att avgöra vilket av talen $(1,-3,4)\cdot(1,1,0) = -2$, $(1,-3,4)\cdot(1,0,1) = 5$ och $(1,-3,4)\cdot(0,1,1) = 1$ som är störst. Uppenbarligen är det riktningen $(1,0,1)$ som ger snabbast tillväxt. Riktningsderivatan i den riktningen är $5/\sqrt{2}$.

3. Rita figur!

   (a) Om "standardkonen" $x^2+y^2 = z^2$ har höjden H så blir radien också H. Genom att modifiera ekvationen till $x^2+y^2 = (Rz/H)^2$ så fås radien R när $z = H$. Det givna området K ges alltså av olikheterna $x^2+y^2 \leq (Rz/H)^2$, $0 \leq z \leq H$.

   (b) Om man vet att K:s volym ges av $V = \pi R^2 H/3$ så får man utnyttja det. Annars får man beräkna volymen genom att integrera en 1:a över K.

   För att beräkna trippelintegralen av z över K så kan man dela upp integreringen i en inre dubbelintegral m.a.p. x och y över cirkelskivan $x^2+y^2 \leq (Rz/H)^2$ och en yttre enkelintegral m.a.p. z över intervallet $[0,H]$. Observera att den inre dubbelintegralen bara ger cirkelskivans area, d.v.s. $\pi(Rz/H)^2$:

$$\iiint_K z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^H \left(z \iint_{x^2+y^2 \leq (Rz/H)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$
$$= \int_0^H \left(z\pi\frac{(Rz)^2}{H^2} \right) \mathrm{d}z = \frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H z^3\,\mathrm{d}z = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{H^4}{4} = \frac{\pi R^2 H^2}{4}$$

   Division med V ger $z_T = \frac{3H}{4}$.

   Man kan också välja att dela upp trippelintegralen i en inre enkelintegral m.a.p. z från $(H/R)\sqrt{x^2+y^2}$ till H. Den yttre dubbelintegralen med avseende på x och y blir då över $x^2+y^2 \leq R^2$.

   Rymdpolära koordinater passar inte eftersom konens ovansida är platt.

4. Rita integrationsområdet!

   Via variabelbytet $u = x+2y$, $v = x-2y$ så motsvaras integrationsområdet D av rektangeln $[-1,1]\times[-1,1]$ i uv-planet. Funktionaldeterminanten är

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = -4 \text{ så } \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = -\frac{1}{4}.$$

   Alltså är $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (1/4)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Observera att integranden kan skrivas $(x+2y)(x-2y)e^{x+2y}$. Variabelbytet ger alltså att

$$\iint_D (x^2-4y^2)e^{x+2y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\iint_{[-1,1]\times[-1,1]} uve^u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{4}\int_{-1}^1 ue^u\mathrm{d}u\int_{-1}^1 v\mathrm{d}v.$$

Här är den andra enkelintegralen 0 så det är också svaret på uppgiften.

Direkt efter variabelbytet kan man se att man får en integrand som är en udda funktion av u. Eftersom integrationsområdet är spegelsymmetriskt i linjen $u = 0$ så kan man redan där säga att dubbelintegralens värde är 0.

5. (a) Låt P och Q vara $\boldsymbol{F}$:s två komponenter. Partiell derivering ger att

$$P'_y = -\frac{8xy}{(1+x^2+2y^2)^2} \text{ och } Q'_x = -\frac{8xy}{(1+x^2+2y^2)^2}.$$

Alltså är $Q'_x = P'_y$ i hela $\mathbb{R}^2$, vilket garanterar att det finns en potential.

(b) En potential U har dels egenskapen att $U'_x = P$, d.v.s. att $U = \ln(1 + x^2 + 2y^2) + g(y)$. Men den har också egenskapen att $U'_y = Q$, vilket i så fall gäller omm $g'(y) = 0$, d.v.s. omm $g(y) = C$. Potentialerna ges alltså av $U = \ln(1 + x^2 + 2y^2) + C$.

Kurvintegralens värde är då $U(4, 1) - U(1, 0) = \ln(19/2)$.

6. (a) De stationära punkterna är de punkter där $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Vi har $f'_x = y - 2xy = y(1 - 2x) = 0$ omm $y = 0$ eller $x = 1/2$. Insättning av $y = 0$ i ekvationen $f'_y = x - x^2 - 2y = 0$ ger $x - x^2 = 0$, d.v.s. $x = 0$ eller $x = 1$. Insättning av $x = 1/2$ i samma ekvation ger $(1/4) - 2y = 0$, d.v.s. $y = 1/8$. Vi har alltså tre stationära punkter: $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1/2, 1/8)$.

För att avgöra deras karaktär studerar vi den kvadratiska formen

$$Q(h, k) = f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2 = -2bh^2 + 2(1-2a)hk - 2k^2$$

i var och en av de tre punkterna.

Om $(a, b) = (0, 0)$ får vi $Q(h, k) = 2hk - 2k^2 = -2(k - h/2)^2 + h^2/2$. Eftersom det är olika tecken framför kvadraterna så antar $Q(h, k)$ både positiva och negativa värden, d.v.s. $Q(h, k)$ är indefinit. $(0, 0)$ är alltså en sadelpunkt.

Om $(a, b) = (1, 0)$ får vi $Q(h, k) = -2hk - 2k^2 = -2(k + h/2)^2 + h^2/2$. Även nu är det olika tecken framför kvadraterna så $Q(h, k)$ antar både positiva och negativa värden, d.v.s. $Q(h, k)$ är indefinit. $(1, 0)$ är alltså också en sadelpunkt.

Om $(a, b) = (1/2, 1/8)$ får vi $Q(h, k) = -h^2/4 - 2k^2$. Nu är det negativa koefficienter framför båda kvadraterna så $Q(h, k)$ antar enbart negativa värden när $(h, k) \neq (0, 0)$. $Q(h, k)$ är alltså negativt definit och därmed är $(1/2, 1/8)$ en lokal maximipunkt. Det lokala maximivärdet är $f(1/2, 1/8) = 1/64$.

Observera att kvadratkompletteringarna är viktiga för att kunna avgöra karaktären. I ett tvåvariabelproblem är det också viktigt att kvadratkompletteringen leder till ett uttryck med högst två kvadrater i (och där de kvadrerade uttrycken inte är multipler av varandra). Annars räcker det inte att studera koefficienternas tecken för att komma fram till karaktären.

(b) Eftersom f är en C^1-funktion och området är kompakt så finns både största och minsta värde och de antas i den inre stationära punkten $(1/2, 1/8)$ eller på randen. Randen består av tre linjestycken. Vi studerar f på vart och ett av dem:

- På linjen $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$, får vi $g_1(x) = f(x, 0) = 0$ för alla x.
- På linjen $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$, får vi $g_2(y) = f(0, y) = -y^2$ som är strängt avtagande. Största värde är alltså $g_2(0) = f(0, 0) = 0$ och minsta är $g_2(1) = f(0, 1) = -1$.
- På linjen $y = 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$, får vi

  $$g_3(x) = f(x, 1-x) = x(1-x) - x^2(1-x) - (1-x)^2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

  Eftersom $g_3'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$ så är g_3 strängt växande. Minsta värde är alltså $g(0) = f(0, 1) = -1$ och största är $g(1) = f(1, 0) = 0$.

Jämförelse av alla relevanta funktionsvärden ger att $f(0, 1) = -1$ är minsta värde och $f(1/2, 1/8) = 1/64$ är största värde.

Istället för att ta med de olika linjestyckenas ändpunkter i listan ovan så kan man undersöka områdets hörn separat.

7. (a) Enligt Gauss sats så ges flödet av trippelintegralen av $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = x^2 z e^{xyz}$ över den kubiska kroppen. Integrerar man först m.a.p. y, sedan m.a.p. z och sist m.a.p. x så slipper man partiella integrationer:

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \left(\int_0^1 x^2 z e^{xyz}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \left[x e^{xyz} \right]_{y=0}^1 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,1]} (x e^{xz} - x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x e^{xz} - x)\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left[e^{xz} - xz \right]_{z=0}^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 (e^x - x - 1)\, \mathrm{d}x = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 = e - \frac{5}{2}.$$

(b) På det borttagna "locket" $z = 1$ är $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = (y^2 - x^2, x e^{xy}, 2x) \cdot (0, 0, 1) = 2x$. Flödet genom $\partial K - \Gamma$ är alltså

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} 2x\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^1 2x\, \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y = 1.$$

Flödet genom Γ är därmed $e - (5/2) - 1 = e - (7/2)$.

8. Rita en tydlig figur!

Enhetsklotets volym är $4\pi/3$. Varje del ska alltså ha volymen $4\pi/9$. Två av delarna är "strutformade". Den ena, K_1, ligger innanför konen i den övre halvan av klotet och ges av olikheterna $\sqrt{x^2+y^2}/a \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$. Den andra, K_1, ligger i nedre halvan av klotet och är spegelbild av den första. K_1 och K_1 har samma volym oavsett värde på a. Den tredje delen, K_3, är området utanför konen men inuti klotet. Om a väljs så att någon av de tre delarna får volymen $4\pi/9$ så kommer de andra delarna automatiskt att få samma volym.

Oavsett vilken del man väljer att räkna på så är det lämpligt att använda rymdpolära koordinater. K_1 ges då av olikheterna $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq v$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, där v beror på a (se nedan). K_1:s volym är

$$\iiint_{K_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{[0,1]\times[0,v]\times[0,2\pi]} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^1 r^2 \, \mathrm{d}r \int_0^v \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}(1-\cos v)2\pi$$

Eftersom volymen ska vara $4\pi/9$ så ska alltså $1-\cos v = 2/3$, d.v.s. $\cos v = 1/3$.

För att se sambandet mellan v och a, betrakta den koniska ytan rakt framifrån. Den ser då ut som två linjer i xz-planet: $z = \pm x/a$. v är vinkeln mellan z-axeln och linjen $z = x/a$. Rita linjen $z = 1$ så fås en rätvinklig triangel där kateterna är 1 och a och hypotenusan är $\sqrt{1+a^2}$. Alltså är $\cos v = 1/\sqrt{1+a^2}$. Om vi till sist löser ekvationen $\sqrt{1+a^2} = 3$ så får vi att $a = \sqrt{8}$.

Istället för rymdpolära koordinater så kan man börja med att bestämma skärningen mellan konen och sfären:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{a^2}{1+a^2}.$$

K_1:s volym kan då bestämmas genom att man beräknar dubbelintegralen av $\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}/a$ över $x^2+y^2 \leq \frac{a^2}{1+a^2}$ genom att införa planpolära koordinater.

Om man istället vill beräkna K_3:s volym så är rymdpoära koordinater det enda vettiga alternativet. Integreringen i θ-led ska då göras från v till $\pi - v$.