LÖSNINGSFÖRSLAG

TILL TENTAMEN 23-06-07

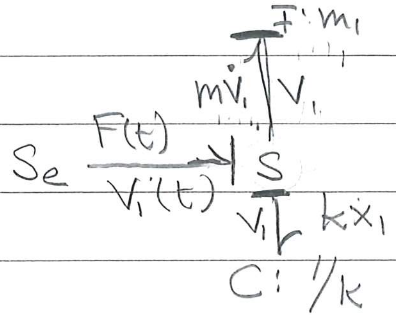
DT504A

MODELLERING OCH

NUMERISK SIMULERING

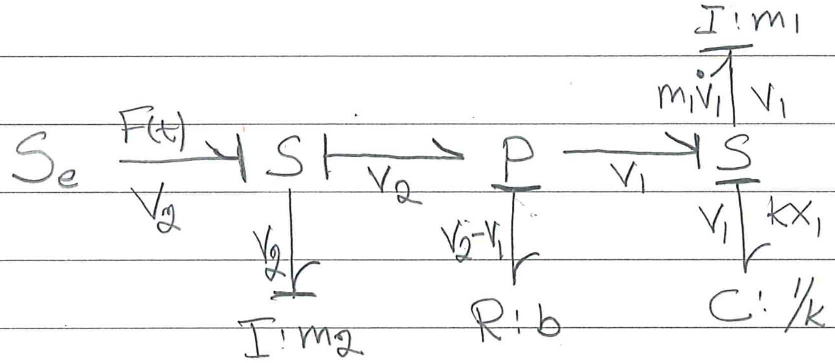
# Uppgift 1

(a) Energi lagras som potentiell energi i fjädern och rörelseenergi i massan. Bara en hastighet $\Rightarrow$ seriekoppling




Konfliktfri kausalitet

b)




Konfliktfri kausalitet

Här behövs en p-nod eftersom det finns två delar i systemet som rör sig med olika hastigheter.

(c) I det här fallet är det lämpligt att använda de båda hastigheterna $v_1$ och $v_2$ som tillståndsvariabler tillsammans med motsvarande lägeskoordinater, $x_1$ och $x_2$. Vi får då tillståndsbeskrivningen

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 \qquad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} \qquad (2)$$

Newton II för massa 1 ger

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = -kx_1 - b(v_1 - v_2)$$

Broms om $v_1 > v_2$

Newton II för massa 2 ger

$$m_2 \frac{dv_2}{dt} = F(t) + b(v_1 - v_2)$$

Påskjutande kraft om $v_1 > v_2$

Dessa båda ekvationer kan "städas" och ger då

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{k}{m_1}x_1 - \frac{b}{m_1}(v_1 - v_2) \qquad (3)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{b}{m_2}(v_1 - v_2) + \frac{1}{m_2}F(t) \qquad (4)$$

(1), (2), (3) o (4) ger en tillståndsformulering.

Uppgift 2

$$\begin{cases} x'(t) = (\lambda_1 - \gamma_1)x + \alpha_1 xy \\ y'(t) = (\lambda_2 - \gamma_2)y - \alpha_2 xy \end{cases}$$

(a) $y = 0$, inga byten
$x(0) = 1500$

$$\Rightarrow x'(t) = (\lambda_1 - \gamma_1)x \iff x' + (\gamma_1 - \lambda_1)x = 0$$

Denna DE har lösningen

$$x(t) = C \cdot e^{(\lambda_1 - \gamma_1)t} = x(0) \cdot e^{(\lambda_1 - \gamma_1)t}$$

vilket med användning av de numeriska parametrarna ger

Svar $x(t) = 1500 \cdot e^{-t}$, (rovdjuren dör ut)

(b) Stationärtillstånden ges av

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = (\lambda_1 - \gamma_1)x + \alpha_1 xy & (1) \\ 0 = (\lambda_2 - \gamma_2)y - \alpha_2 xy & (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = \alpha_2(\lambda_1 - \gamma_1)x + \alpha_1\alpha_2 xy & (3) \\ 0 = \alpha_1(\lambda_2 - \gamma_2)y - \alpha_1\alpha_2 xy & (4) \end{cases}$$

$$(3)+(4) \Rightarrow \alpha_1(\lambda_2 - \gamma_2)y + \alpha_2(\lambda_1 - \gamma_1)x = 0$$

$$\iff y = -\frac{\alpha_2(\lambda_1 - \gamma_1)}{\alpha_1(\lambda_2 - \gamma_2)}x$$

2:2

Vi har alltså ett förhållande mellan x och y. Använd det i ekv (1)

$\Rightarrow$

$$0 = (\lambda_1 - \gamma_1)x + \alpha_1 x \cdot \left(-\frac{\alpha_2(\lambda_1 - \gamma_1)}{\alpha_1(\lambda_2 - \gamma_2)}\right) x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha_2}{\lambda_2 - \gamma_2} x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ eller } x = \frac{\lambda_2 - \gamma_2}{\alpha_2}$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$$x_0 = \frac{\lambda_2 - \gamma_2}{\alpha_2} \Rightarrow y_0 = \frac{\gamma_1 - \lambda_1}{\alpha_1}$$

Det icke-triviala stationära tillståndet $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

Svar ges alltså av

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{2{,}5 - 1}{2 \cdot 10^{-3}} = 750 \\ y_0 &= \frac{2 - 1}{10^{-4}} = 10.000 \end{aligned}\right\}$$

750 rovdjur
10 000 bytesdjur.

---

(c) Inför nya "skillnadsvariabler"

$$\begin{cases} \xi = x - x_0 = \text{"}\Delta x\text{"} \\ \eta = y - y_0 = \text{"}\Delta y\text{"} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \xi + x_0 \\ y = \eta + y_0 \end{cases}$$

Då gäller att $x' = \frac{dx}{dt} = \xi' = \frac{d\xi}{dt}$
och $y' = \frac{dy}{dt} = \eta' = \frac{d\eta}{dt}$

Vi måste linjarisera högerleden

Formellt ger det ekvationerna

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

där matrisen $A$ ges av

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}\Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \text{med} \quad \begin{matrix} f = (\lambda_1 - \gamma_1)x + \alpha_1 xy \\ g = (\lambda_2 - \gamma_2)y - \alpha_2 xy \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \gamma_1 + \alpha_1 y_0 & \alpha_1 x_0 \\ -\alpha_2 y_0 & \lambda_2 - \gamma_2 - \alpha_2 x_0 \end{bmatrix} =$$

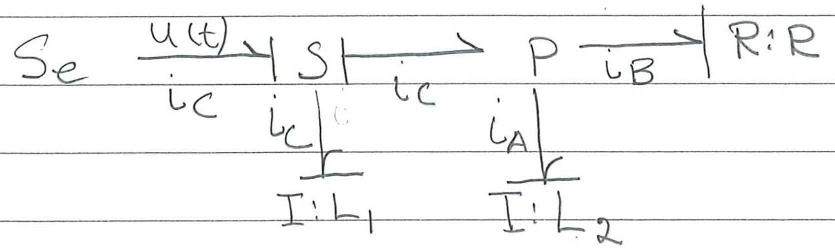
$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(\lambda_2 - \gamma_2) \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\lambda_1 - \gamma_1) & 0 \end{bmatrix}$$

Svar : Linjariserade ekvationer är alltså

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(\lambda_2 - \gamma_2)\eta \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\lambda_1 - \gamma_1)\xi \end{cases}$$

## Uppgift 3

(a) Utifrån kretsschemats parallell- och seriekopplingen får vi följande bindningsgraf:




Kausalitetsmarkeringen är inte konfliktfri här (inget streck vid p-noden

(b) Vi kan teckna samband för $i_A$, $i_B$ och $i_C$ med hjälp av KVL och KCL.

Väster maska (KVL) ⇒

$$u(t) - L_2 \frac{di_A}{dt} - L_1 \frac{di_C}{dt} = 0 \qquad (1)$$

Höger maska (KVL) ⇒

$$-R i_B + L_2 \frac{di_A}{dt} = 0 \qquad (2)$$

KCL ⇒ $i_C = i_A + i_B$ (3)

Ekv. (1), (2) och (3) kan skrivas om på DAE-formen

$$E\dot{z} + Fz = G \quad \text{som} \qquad \Big\} \; z = \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_2 & 0 & L_1 \\ L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{z} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) De båda första raderna i E-matrisen har full rang (är linjärt oberoende) men hela E har förstås inte full rang. Vi behöver göra en derivering av den sista ekvationen

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} L_2 & 0 & L_1 \\ L_2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \dot{z} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left( \tilde{E}\dot{z} + \tilde{F}z = \tilde{G} \right)$$

En derivering räckte alltså för att den nya E-matrisen, $\tilde{E}$, skulle få full rang med tre linjärt oberoende rader.

Svar DAE-systemet har index $\underline{\underline{1}}$.

(d) Om vi begränsat oss till att na två tillståndsvariabler, $i_A$ och $i_C$, kan de båda första ekvationerna i DAE-formuleringen (med hjälp av KCL) skrivas

$$
\begin{cases}
(4) \quad L_1 \dfrac{di_C}{dt} + L_2 \dfrac{di_A}{dt} = u(t) \\
(5) \quad L_2 \dfrac{di_A}{dt} - R(i_C - i_A) = 0
\end{cases}
$$

Använd (5) i (4) och skriv om båda ekvationerna $\Rightarrow$

$$
\begin{cases}
\dfrac{di_C}{dt} = \dfrac{1}{L_1}\left[u(t) + R(i_A - i_C)\right] \\
\dfrac{di_A}{dt} = \dfrac{1}{L_2} R(i_C - i_A)
\end{cases}
$$

Vilket är en tillståndsformulering

Svar: Det egentliga antalet tillståndsvariabler är 2.

## Uppgift 4

(a) För att kunna lösa problemet måste vi sätta upp matrisen A som kopplar ihop de aktuella storheterna med (grund)enheter och bestämma A:s nollrum

| Enheter (Dimensioner) \ Storheter | $P$ | $I_0$ | $a$ | $\omega$ | $c$ | $\varepsilon_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| M | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 |
| L | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | −3 |
| T | −3 | 0 | 0 | −1 | −1 | 4 |
| I | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |

Matrisen A finns här inom den heldragna ramen. De två kolumner som kräver lite eftertanke för att kunna skrivas ned är den första och sista, P och $\varepsilon_0$. Uttryckt i SI-enheter har vi:

$$[P] = W = \frac{J}{s} = \frac{Nm}{s} = \frac{kg\,m \cdot m}{s^2 \cdot s} = \frac{kg\,m^2}{s^3}$$

och

$$[\varepsilon_0] = \frac{As}{Vm} = \frac{As}{(W/A)m} = \frac{A^2 s}{Wm} = \frac{A^2 s\, s^3}{m\,kg\,m^2} = \frac{A^2 s^4}{kg\,m^3}$$

Om vi nu tittar närmare på A-matrisen ser vi direkt att kolumnerna 2, 3, och 4 är linjärt oberoende och vidare att kolumn 1 då också är linjärt oberoende av 2, 3 och 4, eftersom den har en etta i första raden.

4:2

Detta betyder att rang(A) = 4, högre rang kan A inte ha.

Svar: Antalet dimensionslösa variabler = = (antalet storheter) - rang(A) = 6-4=2

(b) Det finns alltså två dimensions-lösa variabler som kan tecknas

$$\pi = P^{e_1} I_0^{e_2} a^{e_3} \omega^{e_4} c^{e_5} \varepsilon_0^{e_6}$$ där

vektorn $\vec{e} = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6]^T$

uppfyller $A\vec{e} = 0$

En av variablerna kan vi konstruera genom att bara titta på kolumn 3, 4 o 5

Storheten $\boxed{\Pi_1 = \frac{a\omega}{c}}$ är dimensionslös.

Det går även att hitta en andra dimensionslös variabel genom ett resonemang steg för steg

Den första ekvationen man får från $A\vec{e} = 0$ ger $e_1 - e_6 = 0$,

(4:3)

Den sista (fjärde) ekvationen ger

$$e_2 + 2e_6 = 0 \Leftrightarrow e_2 = -2e_6 = -2e_1$$

$\pi_2$ ska alltså ha formen

$$\pi_2 = \frac{P\varepsilon_0}{I_0^2} a^{e_3} \omega^{e_4} c^{e_5}$$ om vi väljer $e_1 = 1$.

Nu har $\frac{P\varepsilon_0}{I_0^2}$ dimensionen

$$\left[\frac{P\varepsilon_0}{I_0^2}\right] = \frac{ML^2T^4I^2}{T^3\,ML^3\,I^2} = \frac{L^2T^4}{L^3T^3} = \frac{T}{L}$$

följaktligen är $\pi_2 = \frac{P\varepsilon_0}{I_0^2} c$ dimensionslös

Svar: ∴ Två dimensionslösa variabler kan skrivas som

$$\pi_1 = \frac{\omega a}{c} \quad \text{och} \quad \pi_2 = \frac{P\varepsilon_0 c}{I_0^2}.$$

Andra alternativ möjliga

(c) $$[c^2] = \frac{1}{[\varepsilon_0][\mu_0]} \Leftrightarrow [\mu_0] = \frac{1}{[\varepsilon_0][c^2]} =$$

$$= \frac{Vm}{As}\frac{s^2}{m^2} = \frac{Vs}{Am} = \frac{Ws}{A^2m} = \frac{kg\,m^2 s}{s^3A^2m} = \frac{kg\,m}{A^2s^2}$$

Svar: $[\mu_0] = \frac{kg\,m}{A^2s^2}$