LÖSNINGSFÖRSLAG - TENTAMEN 2017-03-17

1 a) $A^7 v = (-1)^7 v = -v$.

b) Alla värden på a.

c) $(3\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w} = -15$

d) Skärningspunkten är $(x_0, y_0) = (4, 1)$.

---

2 a) Vi ställer upp totalmatrisen för systemet och fortsätter sedan med Gauss-elimination:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2 \quad -3 \quad -5 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & -22 & 2 & -10 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times\left(\frac{1}{7}\right) \\ -2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/7 & 5/7 & 6/7 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 11 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/7 & 5/7 & 6/7 \\ 0 & 0 & 40/7 & 20/7 & 10/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \times\left(\frac{7}{40}\right) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/7 & 5/7 & 6/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{3}{7} \quad 1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 5/2 & 13/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Det återstår nu att läsa av lösningarna till systemet. Ingen ledande 1:a i kolumn 4 $\Rightarrow$ x_4 blir fri variabel. Sätt $x_4 = t$. Från den reducerade trappstegsmatrisen får vi då lösningarna $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1-t, \frac{3}{4} - \frac{t}{2}, \frac{1}{4} - \frac{t}{2}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Ställ upp totalmatrisen och börja eliminera:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & b_1 \\ 2 & 4 & -1 & b_2 \\ -1 & 2 & 5 & b_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & b_1 \\ 0 & -8 & -9 & b_2-2b_1 \\ 0 & 8 & 9 & b_3+b_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & b_1 \\ 0 & -8 & -9 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3+b_2-b_1 \end{array}\right]$$

Studera nu sista raden: För att systemet ska vara lösbart måste $b_3+b_2-b_1=0$, vilket också kan skrivas $\underline{\underline{b_1=b_2+b_3}}$. Detta är den sökta ekvationen.

$\boxed{3}$ a) Använd rad- och kolumnoperationer för att förenkla determinanten

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a & a & 2 \\ a & 1 & 2 & a \\ a & 2 & 1 & a \\ 2 & a & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & -1 & 0 \\ 2 & a & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

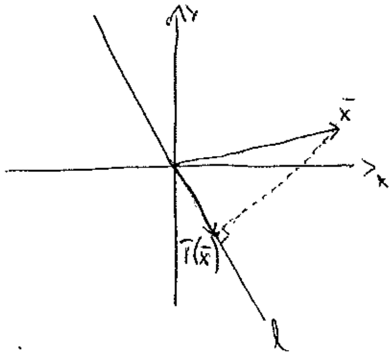
$$= \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3a & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Kofaktorutveckla} \\ \text{längs 4:e kolumnen} \end{bmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 4 & 3a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a & 3 & 0 \\ 4 & 3a & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Kofaktorutveckla} \\ \text{längs 3:e kolumnen} \end{bmatrix} = -\begin{vmatrix} 2a & 3 \\ 4 & 3a \end{vmatrix} =$$

$$= -(6a^2-12) = 6(2-a^2)$$

b) Systemet $A\bar{x}=\bar{b}$ är lösbart för varje högerled $\bar{b}$ omm matrisen A är inverterbar, och A är inverterbar omm $\det(A) \neq 0$. Från a) får vi nu att detta inträffar för alla värden på a utom de som uppfyller $\det(A) = 0 \iff 6(2-a^2) = 0 \iff a = \pm\sqrt{2}$.

$\boxed{4}$ a) Följande figur beskriver avbildningens verkan:



Vi observerar först att vektorn $\bar{v} = (1,-2)$ är en riktningsvektor för l och att $\|\bar{v}\| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$.

För att bestämma avbildningen T:s matris behöver vi beräkna $T(\bar{e}_1)$ och $T(\bar{e}_2)$. Vi använder formeln för ortogonal projektion:

$$T(\bar{e}_1) = \frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}\|^2}\bar{v} = \frac{1}{(\sqrt{5})^2}(1,-2) = \frac{1}{5}(1,-2)$$

$$T(\bar{e}_2) = \frac{\bar{e}_2 \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}\|^2}\bar{v} = -\frac{2}{(\sqrt{5})^2}(1,-2) = -\frac{2}{5}(1,-2)$$

Till sist sätter vi in dessa vektorer som <u>kolumner</u> i T:s matris:

$$A = \left(T(\bar{e}_1) \,\vdots\, T(\bar{e}_2) \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

---

b) Bestäm A:s reducerade trappstegsform R:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\times 5) \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Den ledande 1:an är markerad i matrisen R.

4

- Raderna i R som innehåller ledande 1:or bildar en bas i A:s radrum. Alltså är $\{(1,-2)\}$ en bas i radrummet.

- Kolumnerna i A som motsvarar de kolumner i R som innehåller ledande 1:or bildar en bas i kolumnrummet. Alltså är $\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\right\}$ en bas i kolumnrummet.

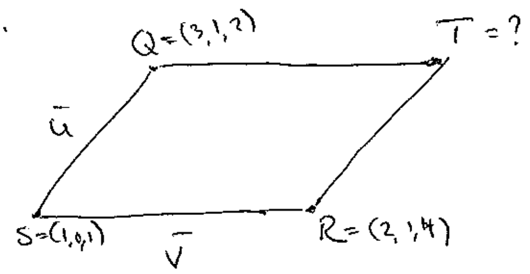
- A:s nollrum består av alla lösningar till systemet $A\bar{x} = \bar{0}$.

Lös alltså systemet:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$(\;x \quad\; y\;)$$

enligt ovan. Sätt $y = t$. Då blir $x = 2t$. Alltså får vi den allmänna lösningen $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, och det följer att $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ är en bas i A:s nollrum.

$\boxed{5}$ a) Vi börjar med att rita en figur. Vi kallar det återstående hörnet T.



Vi inför också beteckningarna:
$$\begin{cases} \bar{u} = \overrightarrow{SQ} = (3,1,2) - (1,0,1) = (2,1,1) \\ \bar{v} = \overrightarrow{SR} = (2,1,4) - (1,0,1) = (1,1,3) \end{cases}$$

Vi söker punkten T:s koordinater. Det är ekvivalent att bestämma vektorn $\overrightarrow{OT}$:s koordinater i standardbasen (här betecknar O origo).

$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{OR} + \bar{u} = (2,1,4) + (2,1,1) = (4,2,5)$,

Alltså gäller $T = (4,2,5)$.

b) $\text{Area}(P) = \|\bar{u} \times \bar{v}\|$ där $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är som i figuren ovan.

Beräknar alltså $\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (2, -5, 1)$.

Det följer att $\text{Area}(P) = \|\bar{u} \times \bar{v}\| = \|(2,-5,1)\| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{30}}}$

c) Det sökta planet har normal $\bar{n} := \bar{u} \times \bar{v} = (2,-5,1)$. Planet innehåller dessutom (t.ex) punkten $R = (2,1,4)$, så planets ekvation blir

$$2(x-2) - 5(y-1) + (z-4) = 0$$

$$\iff \underline{\underline{2x - 5y + z - 3 = 0}}.$$

$\boxed{6}$ a) Svaret är att ja, det går att avgöra att de tre vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ faktiskt utgör en ON-bas. Det går att argumentera på olika vis. Enklast är nog att följa den givna koden och förklara vad som händer i varje steg.

- Raderna 1-5 säger att vektorn $\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ har längd $\|\bar{v}_1\| = 1$.
- På raderna 6-7 introduceras vektorerna $\bar{u}_2$ och $\bar{v}_2$. Observera nu att rad 7 känns igen från Gram-Schmidts metod applicerad på vektorerna $\bar{v}_1$ och $\bar{u}_2$. Den resulterande vektorn $\bar{v}_2$ blir då enligt G-S <u>ortogonal mot</u> den första vektorn $\bar{v}_1$. (Detta inses också direkt med en kort beräkning: $\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 = \left(\bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1\right) \cdot \bar{v}_1 = \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \|\bar{v}_1\|^2 = 0$)
- På rad 8 normaliseras sedan $\bar{v}_2$ så att den nya vektorn,

som också kallas $\bar{v}_2$, för längd $\|\bar{v}_2\| = 1$.

- På rad 9 används till sist kryssprodukten för att skapa vektorn $\bar{v}_3$ som $\bar{v}_3 = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2$. Här gäller nu i) att $\bar{v}_3$ är ortogonal mot $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$

  ii) att $\|\bar{v}_3\| = \|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2\|$ = Area av det parallellogram som $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ spänner upp $= 1$ eftersom $\|\bar{v}_1\| = \|\bar{v}_2\| = 1$ och $\bar{v}_1$ är ortogonal mot $\bar{v}_2$.

(i) och ii) följer från kända egenskaper hos kryssprodukten.)

<u>Sammanfattning:</u> • $\|\bar{v}_1\| = \|\bar{v}_2\| = \|\bar{v}_3\| = 1$

• $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3 = \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3 = 0$

Alltså är $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ en ON-bas i $\mathbb{R}^3$.

---

b) Observera att om $\bar{v}_1 = (-1, 0, 0)$ så säger rad 7 att

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} v_1 = (2, 0, 0) - \frac{(-2)}{1^2}(-1, 0, 0) = (2,0,0) - (2,0,0) = (0,0,0).$$

Detta ger att $\|\bar{v}_2\| = \text{norm}(v_2) = 0$, och på rad 8 delar vi alltså med 0. Detta ger upphov till felmeddelandet.

---

7 a) Sätt $S = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subseteq V$. S är en bas i V om S är linjärt oberoende och $V = \text{span}(S)$.

b) Vi betraktar mängden $V = \{ A \in M_{22} \mid BA = 0 \} \subseteq M_{22}$.

För att visa att V är ett delrum av M_{22} använder vi bokens sats 4.2.1.

Behöver visa: i) $A_1, A_2 \in V \Rightarrow A_1 + A_2 \in V$

ii) $k \in \mathbb{R}$, $A \in V \Rightarrow kA \in V$.

Alla matriser i M_{22} kan skrivas på formen $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Om dessutom $BA=0$ gäller:

$$BA=0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a+2c=0 \\ b+2d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2c \\ b=-2d \end{cases}.$$

Alltså kan alla matriser i V skrivas på formen $\boxed{A=\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix},\ (c,d\in\mathbb{R})}$ $(*)$

<u>Visar nu i):</u> Skriv $A_1=\begin{pmatrix} -2c_1 & -2d_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ och $A_2=\begin{pmatrix} -2c_2 & -2d_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$.

Då blir $A_1+A_2=\begin{pmatrix} -2c_1 & -2d_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2c_2 & -2d_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2(c_1+c_2) & -2(d_1+d_2) \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$,

vilket är på formen $(*)$. Alltså gäller $A_1+A_2\in V$.

<u>Visar ii):</u> Skriv $A=\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$. Då blir $kA=k\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2(kc) & -2(kd) \\ kc & kd \end{pmatrix}$, vilket är på formen $(*)$. Det följer att $kA\in V$.

<u>Alltså är V ett delrum av M_{22}.</u> För att bestämma en bas i V så använder vi $(*)$. Matriserna i V kan skrivas $A=\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}=$

$=c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Detta visar att $\left\{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ <u>spänner upp V</u>, dvs att $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = V$.

Observera nu att matriserna $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ är <u>linjärt oberoende</u> i M_{22} då ingen är en multipel av den andra. Det följer att $\left\{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ utgör en bas i V. Detta ger också att <u>$\dim(V)=2$</u>.

Till sist är $\dim(M_{22}) = 4$ eftersom $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ är en bas i M_{22}.

$\boxed{8}$ a) Vi bestämmer den karaktäristiska ekvationen:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(6-\lambda) - 16 - 16$$
$$- \left(16(6-\lambda) + 4(3-\lambda) + 4(3-\lambda) \right)$$

$$= (9 - 6\lambda + \lambda^2)(6-\lambda) - 32 - (120 - 24\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 .$$

Test ger att $\lambda = -2$ är en rot till ekvationen. Alltså är $\lambda + 2$ en faktor ovan.

Polynomdivision ger nu att $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 14\lambda + 49)$
$$= -(\lambda+2)(\lambda-7)^2$$

Alltså är den karaktäristiska ekvationen $\boxed{-(\lambda+2)(\lambda-7)^2 = 0}$. Alltså har A egenvärdena -2 (multiplicitet 1) och 7 (multiplicitet 2).

<u>Bestämmer egenrummet hörande till $\lambda = -2$</u>; Vi söker alla lösningar till det homogena systemet $(A + 2I)\bar{x} = \bar{0}$. Här gäller $A + 2I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ och

systemets totalmatris blir:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \times\left(-\tfrac{1}{2}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} (-4) \\ (-5) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & 9 & 0 \\ 0 & 18 & 9 & 0 \end{array}\right) (-1) \left(\times\tfrac{1}{18}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) (4)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Den allmänna lösningen är $\bar{x} = \begin{pmatrix} -t \\ -t/2 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Egenrummet är $\operatorname{span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\bar{u}_1} \right\}$.

Bestämmer egenrummet hörande till $\lambda = 7$; Vi söker den allmänna lösningen till systemet $(A - 7I)\bar{x} = \bar{0}$. Totalmatrisen blir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-1) \\ \times(-1) \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Den allmänna lösningen är

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -\frac{s}{2} + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}. \Rightarrow \text{Egenrummet är } \operatorname{span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\bar{u}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\bar{u}_3} \right\}$$

---

b) Vi behöver nu en ON-bas i varje egenrum.

• $\underline{\lambda = -2}$: En ON-bas i motsvarande egenrum är $\bar{v}_1 = \frac{1}{\|\bar{u}_1\|}\bar{u}_1 = \frac{1}{3/2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

• $\underline{\lambda = 7}$: Motsvarande egenrum är tvådimensionellt. En bas ges av $\{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, men detta är <u>inte</u> en ON-bas. Använd Gram-Schmidt för att bestämma en ortogonal bas i egenrummet: Sätt $\bar{w}_2 = \bar{u}_2$ och beräkna

$$\bar{w}_3 = \bar{u}_3 - \frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{u}_2}{\|\bar{u}_2\|^2}\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{(5/4)}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi normerar nu $\{\bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ för att erhålla en ON-bas:

$$\bar{v}_2 := \frac{1}{\|\bar{w}_2\|}\bar{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{(5/4)}}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_3 := \frac{1}{\|\bar{w}_3\|}\bar{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{(9/5)}}\begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

<u>Slutsats</u>: $\{\bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ är en ON-bas i egenrummet hörande till $\lambda = 7$.

Enligt standardmetoden får jag D och P genom att placera A:s egenvärden på diagonalen i D (observera att 7 förekommer 2 ggr på diagonalen eftersom egenvärdet $\lambda = 7$ har multiplicitet 2) och ON-baser för motsvarande egenrum som kolumner i P:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/\sqrt{5} & 4/(3\sqrt{5}) \\ -1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/(3\sqrt{5}) \\ 2/3 & 0 & 5/(3\sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

Här gäller nu att P är ortogonal (dvs $P^{-1} = P^T$) och $\underline{A = PDP^T}$.

c) Genomför variabelbytet $\bar{x} = P\bar{y}$ (eller ekvivalent $\bar{y} = P^{-1}\bar{x} = P^T\bar{x}$) med P som deluppgift b). Då kan vi skriva den kvadratiska formen som

$$\bar{x}^T A \bar{x} = (P\bar{y})^T A P\bar{y} = \bar{y}^T P^T A P \bar{y} = \bar{y}^T(P^T A P)\bar{y} = \bar{y}^T(P^T P D P^T P)\bar{y}$$

Använd $A = PDP^T$

$$= y^T(IDI)\bar{y} = y^T D\bar{y} = -2y_1^2 + 7y_2^2 + 7y_3^2$$

. Detta är den sökta formen.

$P^T = P^{-1}$ dvs $P^TP = I$

---

9 a) Ställer upp totalmatrisen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 17 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right)(-3)\ (-4)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 12 & 35 \end{array}\right)(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 20 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-5} \end{array}\right)$$

Den här raden visar att systemet saknar lösning!

b) En minsta-kvadrat lösning till $A\bar{x} = \bar{b}$ är en vektor $\bar{y} \in \mathbb{R}^3$ sådan att

$$\|\bar{b} - A\bar{y}\| \leq \|\bar{b} - A\bar{x}\| \quad \text{för \underline{alla}} \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^3.$$

c)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Det följer att
$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix}$$

och att
$$A^T \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 30 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Kom ihåg:
Minsta-kvadratlösningen till $A\bar{x} = \bar{b}$ sammanfaller med lösningen till normalekvationen

$A^T A \bar{y} = A^T \bar{b}$. Vi ställer upp totalmatrisen:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 10 & 31 \\ 0 & 10 & 0 & 30 \\ 10 & 0 & 34 & 100 \end{array}\right)\begin{array}{l}(\times \frac{1}{4}) \\ (\times \frac{1}{10}) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/2 & 31/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 10 & 0 & 34 & 100 \end{array}\right)(-10) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/2 & 31/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 45/2 \end{array}\right)(\times \tfrac{1}{9}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/2 & 31/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 \end{array}\right)(-5/2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 \end{array}\right)$$

Alltså är $\bar{y} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 5/2 \end{pmatrix}$ den sökta minsta-kvadrat-lösningen.