ÖREBRO UNIVERSITET

Omtentamen

Funktioner och derivator

MA502G

2017-01-07, kl. 14:15–19:15

Hjälpmedel: Endast skrivmateriel. Miniräknare och formelsamling *ej* tillåtna.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Uppgifterna på grundläggande nivå (uppgift 1–6) är uppdelade efter huvudområde och kan ge upp till 6 poäng vardera, varav 4 poäng utifrån kriterier för *metod* och 2 poäng utifrån kriterier för *motivering*. Uppgifterna på fördjupad nivå (uppgift 7–8) kan ge upp till 12 poäng vardera, varav 8 poäng utifrån kriterier för *metod* och 4 poäng utifrån kriterier för *motivering*. För betyg 3/4/5 krävs 3 poäng på per huvudområde på den grundläggande nivån, 3 poäng för såväl *metod* som *motivering* på den grundläggande nivån, samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Andreas Bergwall.

Lycka till!

Grundläggande nivå—Algebra

1. Gör *en* av uppgifterna nedan. Lämna *inte* in lösningar till båda uppgifterna.

   (a) Lös ekvationen $\cos(x) = \cos(2x)$.

   (b) Lös olikheten $|x+1| \geq |2x-1|$.

2. Vilken kurva beskrivs av ekvationen $4x^2 + 16x + 9y^2 - 18y = 11$? Rita!

Grundläggande nivå—Funktioner

3. Bestäm *två* av gränsvärdena nedan. Lämna *inte* in lösningar till alla tre.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + \ln x}{1+e^x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-4}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(2x)}{\ln(1+3x)}$

4. För vilka reella värden på a och b gäller att

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & \text{om } x < 0 \\ b + \sqrt{x} & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

   är både kontinuerlig och injektiv?

   Rita grafen för något val av sådana värden på a och b och bestäm f^{-1} för just detta val.

Grundläggande nivå—Derivator

5. Finns det något intervall där $f(x) = x - \ln(1+x^2)$ både är växande och konkav?

6. En 4 dm djup vattenbehållare har en sådan form att sambandet mellan vattendjup h och volym V i behållaren är $V = 24h + 3h^2 - h^3$, $0 \leq h \leq 4$, förutsatt att djup mäts i dm och volym i liter.

   Antag att man tömmer ut 3 liter vatten per minut genom ett hål i behållarens botten.

   (a) Hur snabbt sjunker vattendjupet vid den tidpunkt då djupet är 2 dm?

   (b) Vid vilket vattendjup sjunker djupet långsammast?

Fördjupad nivå

7. Låt $f(x) = 2 - x - \dfrac{4}{x-1}$.

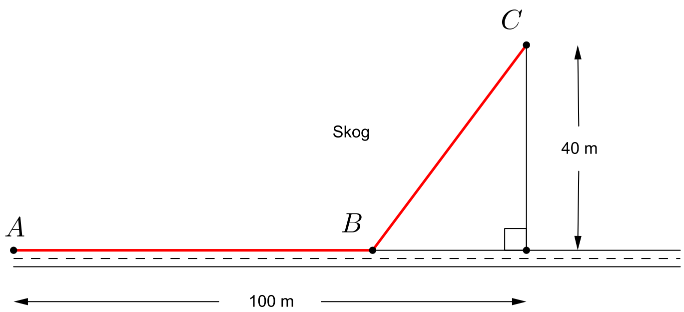
   Bestäm alla asymptoter och lokala extrempunkter samt var funktionen är konvex respektive konkav. Gör en tydlig skiss av funktionens graf och ange värdemängden.

   Använd resultaten från dina beräkningar ovan för att också skissa kurvan $y = \arctan f(x)$.

8. Civan och Civert (båda civilingenjörer) vill dra in fiber till sin fjällstuga. Fiberkabeln kan anslutas till befintligt fibernät i punkt A och sedan dras en bit längs med en väg fram till en punkt B. Därifrån kan kabeln sedan dras genom skogen fram till stugan i punkt C. Problemet är att kostnaden per meter är dubbelt så stor när kabeln dras genom skogen som när den dras längs med vägen. Civan och Civert behöver därför räkna ut var längs med vägen som punkten B ska ligga för att totalkostnaden ska bli så liten som möjligt.

   Hur löser du detta problem? Var ska punkten B ligga?

   Stugans läge framgår av figuren nedan. Kabeldragningen är rödmarkerad.



Lösningsförslag, Funktioner och derivator, 2017-01-07

1. (a) Ekvationen kan t.ex. lösas på följande vis:

$$\cos(x) = \cos(2x) \Leftrightarrow x = \pm 2x + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x = n \cdot 2\pi \text{ eller } x = n \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Olikheten kan lösas på flera olika sätt. Observera att den är ekvivalent med $|x-(-1)| \geq 2|x-(1/2)|$.

Alt 1. Vi ska bestämma de punkter x på tallinjen som minst har dubbelt så stort avstånd till -1 som till $1/2$. Eftersom avståndet mellan dessa två tal är $3/2$ l.e. (längdenheter) så går en gräns $3/2$ l.e. till höger om $1/2$ (då är ju avståndet 3 l.e. till -1) och en annan $1/2$ l.e. till vänster om $1/2$ (då är ju avståndet 1 l.e. till -1). Detta ger oss att lösningarna är alla x mellan 0 och 2 inklusive dessa tal.

Alt 2. Kvadrering av båda leden ger att

$$(x+1)^2 \geq (2x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 4x^2 - 4x + 1$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x \leq 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2.$$

Det sista steget motiveras av att faktorerna x och $x-2$ måste ha olika tecken för att deras produkt ska vara negativ. Gör gärna teckentabell.

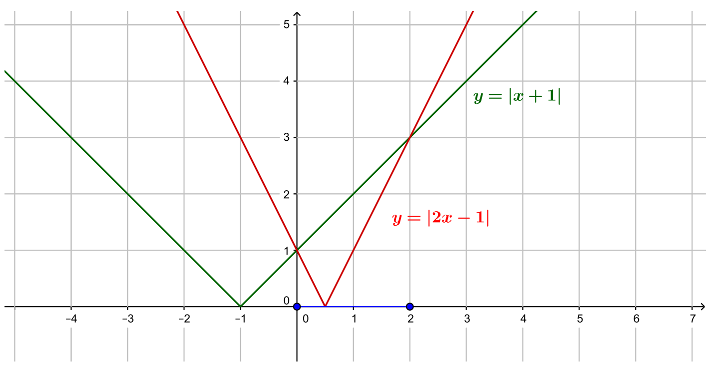
Alt 3. Med falluppdelning får vi:

- Fallet $x < -1$: $-(x+1) \geq -(2x-1) \Leftrightarrow x \geq 2$. Eftersom det inte finns några $x \geq 2$ som uppfyller antagandet $x < -1$ så har vi inga lösningar i detta intervall.
- Fallet $-1 \leq x < 1/2$: $x+1 \geq -(2x-1) \Leftrightarrow x \geq 0$. Alla $x \geq 0$ som uppfyller antagandet $-1 \leq x < 1/2$ är alltså lösningar, d.v.s. alla x i intervallet $[0, 1/2[$.
- Fallet $x \geq 1/2$: $x+1 \geq 2x-1 \Leftrightarrow x \leq 2$. Alla $x \leq 2$ som uppfyller antagandet $x \geq 1/2$ är alltså lösningar, d.v.s. alla x i intervallet $[1/2, 2]$.

Sammanfattningsvis är det alla $x \in [0, 2]$ som är lösningar.

OBS! Utredningen i fall 2 säger *inte* att alla $x \geq 0$ är lösningar. Den säger bara att av de x som ligger mellan -1 och 1/2 så är det de som också är ≥ 0 som är lösningar. Fall 2 ger alltså bara att alla x sådana att $0 \leq x < 1/2$ är lösningar.

Alt. 4 Rita hörger- och vänsterledets grafer:



Här ser vi också att lösningarna är alla tal i $[0, 2]$.

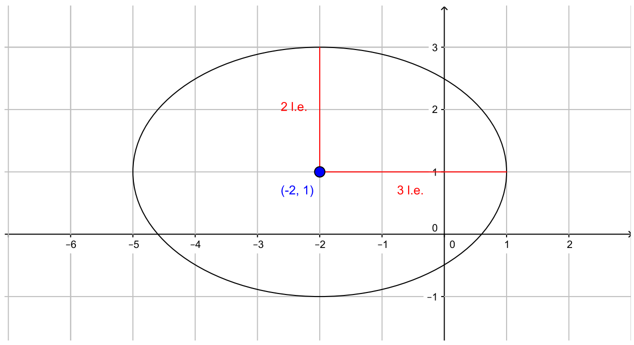
2. Eftersom (kvadratkomplettera!)

$$4x^2 + 16x + 9y^2 - 18y = 4(x+2)^2 + 9(y-1)^2 - 25$$

så är den givna ekvationen ekvivalent med (addera 25 till båda leden och dividera sedan med 36)

$$\frac{(x+2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1.$$

Denna ekvation beskriver en axelparallell ellips med centrum i $(-2, 1)$ och halvaxellängder 3 respektive 2.



3. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overbrace{x}^{\to 0} + \overbrace{\ln x}^{\to -\infty}}{1 + \underbrace{e^x}_{\to 1}} = -\infty.$

   Anm: Det är gränsvärdet när $x \to 0$ som ska undersökas, inte gränsvärdet när $x \to \infty$. P.g.a. logaritmfunktionen är det faktiskt bara gränsvärdet då $x \to 0_+$ som kan undersökas.

   (b) Gränsvärdet är av typ 0/0. Genom att bryta ut $x - 2$ i täljare och nämnare och förkorta får vi

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+5}{x+2} = \frac{7}{4}.$$

   (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\overbrace{\sin(2x)}^{\text{begränsad}}}{\underbrace{\ln(1+3x)}_{\to +\infty}} = 0.$

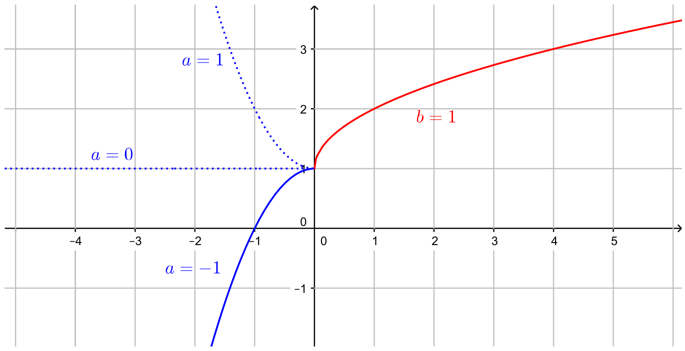
   Anm: Det är gränsvärdet när $x \to +\infty$ som ska undersökas, inte gränsvärdet när $x \to 0$. Observera också att $\sin(2x)$ inte har något gränsvärde när $x \to +\infty$, men att begränsningen räcker.

4. Kontinuiteten: Oavsett val av a och b så är funktionen kontinuerlig då $x \neq 0$. Vi har att $f(0) = b$, $\lim_{x\to 0_+} f(x) = b$ och $\lim_{x\to 0_-} f(x) = 1$. Funktionen är alltså kontinuerlig även i $x = 0$ omm $b = 1$.

   Injektiviteten: $1 + \sqrt{x}$ är strängt växande i $[0, +\infty[$. I intervallet $]-\infty, 0[$ så är $ax^2 + 1$ strängt växande om $a < 0$, konstant om $a = 0$ och strängt avtagande om $a > 0$. Injektivitet fås alltså omm $a < 0$.

Inversen: Om vi t.ex. väljer $a = -1$ så blir inversen

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x} & \text{om } x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{om } x \geq 1 \end{cases}.$$



5. Vi har att

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2} \geq 0$$

för alla x så f är en växande funktion, t.o.m. strängt växande i hela $\mathbb{R}$.

Vidare är

$$f''(x) = -\frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = -2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

så $f''(x) \leq 0$ omm $|x| \leq 1$.

Funktionen är alltså både växande och konkav i intervallet $[-1, 1]$.

Anm: Man kan *inte* säga att en funktion är växande/avtagande/konvex/konkav i en enstaka punkt. Detta är egenskaper som gäller i intervall. Notera också att om t.ex. $f'(x) > 0$ överallt utom i enstaka punkter så räcker det för att man ska kunna vara säker på att f är strängt växande överallt.

Just den här uppgiften kan också lösas på följande sätt: Både f' och f'' är kontinuerliga. Eftersom man (efter derivering) lätt ser att $f'(0) > 0$ och $f''(0) < 0$ så kan man därför vara säker på att det finns ett (litet) intervall kring $x = 0$ där det gäller att $f'(x) > 0$ och $f''(x) < 0$. I detta intervall är alltså f både växande och konkav! Detta sätt att resonera ger ingen exakt information om hur stort intervallet är, bara att det finns.

6. (a) Observera att volymen är en funktion av djupet (som ges av uttrycket $V = 24h + 3h^2 - h^3$) men att både volym och djup också behöver ses som funktioner av tiden t eftersom de förändras (minskar) när man tömmer behållaren.

Det som söks är dh/dt då $h = 2$. Det är givet att $dV/dt = -3$. Kedjeregeln ger

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = (24 + 6h - 3h^2)\frac{dh}{dt}.$$

Insättning av givna värden ger

$$-3 = (24 + 12 - 12)\frac{dh}{dt} \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{24}.$$

Vattendjupet sjunker alltså med $1/8$ dm/min.

(b) $-dh/dt$ är ett positivt mått på hur fort djupet minskar. Eftersom

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{3}{24 + 6h - 3h^2}$$

så minskar djupet som långsammast när nämnaren $f(h) = 24 + 6h - 3h^2$ är som störst.

Vi har $f'(h) = 6 - 6h = 0$ omm $h = 1$. Detta ger ett maxvärde eftersom $f''(h) = -6 < 0$. Slutsatsen är att djupet minskar som allra långsammanst när det är 1 dm djupt, och då är minskningstakten $3/f(1) = 1/9$ dm/min.

Anm: Observera att vi faktiskt bestämt största värdet hos dV/dh. Det visar sig att dV/dh måste vara vattenbehållarens tvärsnittsarea h dm ovanför botten. Vi har så att säga tagit reda på var behållaren är som allra vidast. Det är kanske inte så konstigt att djupet ändras långsammast när det ligger på precis den nivån?

Anm: Det går naturligtvis lika bra att minimera $3/(24 + 6h - 3h^2)$ (genom att derivera, bestämma derivatans nollställe och kontrollera att nollstället är en minpunkt) som att maximera $24 + 6h - 3h^2$.

7. $f(x)$ är definierad för alla $x \neq 1$. Vi börjar därför med att undersöka gränsvärdet när $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1_\pm} \underbrace{2 - x}_{\to 1} - \frac{4}{\underbrace{x - 1}_{\to 0_\pm}} = \mp\infty.$$

Alltså är $x = 1$ en lodrät asymptot.

Eftersom $4/(x - 1) \to 0$ då $x \to \pm\infty$ så ser vi direkt att $y = 2 - x$ är sned asymptot då $x \to \pm\infty$. Speciellt gäller att $f(x) \to \mp\infty$ då $x \to \pm\infty$.

Nu undersöker vi derivatan:

$$f'(x) = -1 + \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1)^2 + 4}{(x-1)^2} = \frac{(3-x)(1+x)}{(x-1)^2}.$$

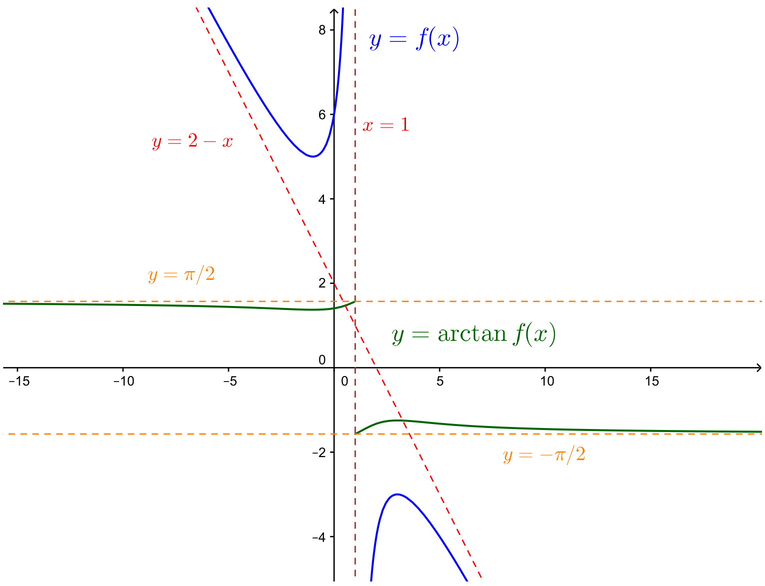
Alltså finns det två stationära punkter, $x = -1$ och $x = 3$. Där är funktionsvärdena $f(-1) = 5$ respektive $f(3) = -3$. Teckentabellen nedan visar att det första är lokalt minvärde och det andra ett lokalt maxvärde.

x		-1		1		3	
$3 - x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$1 + x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$*$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\vert$	$\nearrow$		$\searrow$

Nu till 2:a-derivatan: $f''(x) = -\dfrac{8}{(x-1)^3}$.

Här ser vi att $f''(x)$ saknar nollställe men att $f''(x) > 0$ om $x < 1$ och att $f''(x) < 0$ om $x > 1$. Alltså är $f(x)$ konvex då $x < 1$ och konkav då $x > 1$. Någon inflexionspunkt finns ej (eftersom $f(1)$ är odefinierat).

Värdemängden består av alla tal ≤ -3 och alla ≥ 5.



Eftersom $\arctan t \to \pm\pi/2$ då $t \to \pm\infty$ så har inte kurvan $y = \arctan f(x)$ någon lodrät asymptot men väl två vågräta. Derivatan har samma teckenväxling som f' eftersom

$$(\arctan f(x))' = \underbrace{\frac{1}{1+(f(x))^2}}_{>0} \cdot f'(x).$$

Alltså har kurvan $y = \arctan f(x)$ lokala max- och minpunkter på samma ställen som $f(x)$.

8. Låt $100 - x$ vara avståndet mellan A och B. Då ger Pythagoras sats att avståndet mellan B och C är $\sqrt{x^2 + 40^2}$. Om vi använder kostnaden per meter längs med vägen som kostnadsenhet (k.e.) så blir totalkostnaden

$$f(x) = 100 - x + 2\sqrt{x^2 + 40^2} \quad \text{k.e..}$$

Vi söker f:s minsta värde då $x \geq 0$.

Vi får att

$$f'(x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 40^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 40^2} = 2x \Leftrightarrow x^2 + 40^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x = x^* = \frac{40}{\sqrt{3}}$$

där alla ekvivalenser gäller under förutsättning att $x \geq 0$.

Det gäller att $f(0) = 180$ och att $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Eftersom f är både kontinuerlig och deriverbar så kan den stationära punkten x^* alltså bara vara en minpunkt eller en terasspunkt. Vi har att

$$f(x^*) = 100 - x^* + 2\underbrace{\sqrt{(x^*)^2 + 40^2}}_{=2x^*} = 100 + 3x^* = 100 + 3 \cdot \frac{40}{\sqrt{3}} < 100 + 2 \cdot 40 = 180.$$

vilket visar att x^* är en minpunkt och att $f(x^*)$ är f:s minsta värde.

Slutsatsen är att punkten B ska placeras $100 - (40/\sqrt{3}) \approx 77$ m från A.