ÖREBRO
UNIVERSITET

LÖSNINGSFÖRSLAG

Våg- och materiefysik för civilingenjörer

FY501G-0100

2020-01-14, kl. 08:15–13:15

Hjälpmedel: Skrivmateriel, lärobok[1] och miniräknare.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga deluppgifter kan ge 2 poäng och bedöms utifrån kriterier för *kunskap och förståelse*; *färdighet, förmåga och värderingsförmåga;* samt *skriftlig avrapportering*. För betyg 3/4/5 räcker det med 4 poäng inom vart och ett av områdena *vågrörelselära*, *elektromagnetism*, *kvantmekanik och materiens struktur* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl med sidhänvisningar och formelnummer från läroboken, redovisa alla väsentliga steg, rita tydliga figurer och svara med rätt enhet. Redovisa inte mer än en huvuduppgift per blad och lämna in i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Magnus Ögren.

Lycka till!

1.

a) För en punktformig ljudkälla kan vi använda (17-28)

$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2} = \frac{12.0}{4\pi \cdot 2.5^2} = 0.1528 \left[\frac{W}{m^2}\right].$$

Svar a): Ljudintensiteten är 0.15 W/m^2.

b) Om vi betecknar de två olika ljudnivåerna med β_1 och β_2 gäller (tex) $\beta_2 - \beta_1 = 6.00\,dB$. Vi vet från (17-29) att relationen till intensitet ges av

$$\beta = (10\,dB)\log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

så att

$$\beta_2 - \beta_1 = (10\,dB)\left[\log(I_2) - \log(I_0) - \log(I_1) + \log(I_0)\right] = 6.00\,dB$$

$$\Rightarrow\ \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = \frac{3}{5}\ \Rightarrow\ \frac{I_2}{I_1} = 10^{3/5} = 3.9811 \approx 4 = 2^2.$$

Dvs varje ökning av ljudnivån med 3 dB motsvarar ungefär en fördubbling av intensiteten.

[1] *Principles of Physics* 10.th ed. Halliday, Resnick, Walker

Svar b): Kvoten mellan intensiterna är $\frac{I_2}{I_1} = 3.98$.

c) Låt L beteckna stångens längd. Då blir tiden det tar för ljudet att gå i luften $t_{luft} = L/v_{luft}$ och tiden det tar för ljudet att gå i stången $t_{stång} = L/v_{stång} = L/(15v_{luft})$. Enligt texten gäller nu

$$\Delta t = t_{luft} - t_{stång} = L/v_{luft}(1 - 1/15) = \Delta t \Rightarrow L = \frac{15}{14} v_{luft} \Delta t = \frac{15}{14} \cdot 343 \cdot 60 \cdot 10^{-3} = 22.05\,[m]\,. \tag{1}$$

Svar c): Stångens längd var 22 m.

d) I detta fall är ljudkällan A 'source' (S) och B 'detector' (D). Då både S och D rör sig mot varandra bidrar de båda till att öka frekvensen, detta avgör vilka tecken vi använder från (17-47) nedan

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v \pm v_S} = f\frac{v + v_D}{v - v_S} = 2000\frac{329 + 80}{329 - 20} = 2647\ [Hz]\,. \tag{2}$$

Svar d): I referenssystemet B uppmäts frekvensen $2.65 \cdot 10^3$ Hz.

e) Efter reflektionen är det B som är 'source' (S) och A blir 'detector' (D). Då både S och D fortfarande rör sig mot varandra bidrar de båda till att öka frekvensen och (17-47) ger

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v \pm v_S} = f\frac{v + v_D}{v - v_S} = 2647\frac{329 + 20}{329 - 80} = 3710\ [Hz]\,. \tag{3}$$

Svar e): I referenssystemet A uppmäts nu frekvensen $3.71 \cdot 10^3$ Hz.

2.

a) Den beskrivna situationen kan modelleras med formel (35-14)

$$d \sin(\theta) = m\lambda,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\,. \tag{4}$$

Vinkeln θ uttrycks med trigonometri som $\theta = \arctan(0.030/5.0)$ för $m = 1$, avståndet mellan spalterna är $d = 0.10 \cdot 10^{-3}$ m. Våglängden blir då

$$\lambda = d \sin(\theta) = 0.10 \cdot 10^{-3} \sin(\arctan(0.030/5.0)) = 5.9999 \cdot 10^{-7}\ [m]\,, \tag{5}$$

ev kan Taylorapproximationen $\sin(\arctan(0.030/5.0)) \approx \arctan(0.030/5.0) \approx 0.030/5.0$ användas.

Svar a): Ljusets våglängd är $6.0 \cdot 10^{-7}$ m.

b) Ett i huvudsak likadant interferensmönster kan erhållas om våglängden för elektronerna är samma som för röntgenstrålningen. Enligt de Broglie gäller (38-17) för elektronerna, $\lambda = h/p$, där p relateras till elektronernas rörelseenergi $E = p^2/(2m) = qU$ så att $(q = e)$ $p = \sqrt{2meU}$. Vi kan nu lösa ut spänningen U enligt

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \Rightarrow U = \frac{h^2}{2me\lambda^2} = \frac{\left(6.6261 \cdot 10^{-34}\right)^2}{2 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot \left(0.15 \cdot 10^{-9}\right)^2} = 66.86\,[V]\,. \tag{6}$$

Svar b): Elektronernas accelerationsspänning är 67 V.

c) Från tex ekvation (6) ovan ser vi att elektronerna våglängd λ minskar när spänningen U ökar. Diametrarna på ringarna som observerades på labben är ekvivalenta med (första ordningens, $m = 1$) maxima för motsvarande ljusmaxima i ett gitter-experiment. Från tex gitterformeln $d \sin(\theta) = \lambda$ ser vi att en mindre våglängd ger en mindre vinkel θ, vilket innebär en mindre diameter på ringen.

Svar c): Enligt resonemangen ovan minskar diametern då spänningen ökar.

d) Om vinkeln θ i ekvation (1) från problemtexten är liten gäller

$$\theta = \frac{1}{4} \arcsin\left(\frac{D}{2R}\right) \approx \frac{D}{8R}. \tag{7}$$

Tillsammans med Braggs lag, för små vinklar, får vi då

$$2d \sin(\theta) \approx 2d\theta \approx d\frac{D}{4R} \approx n\lambda, \tag{8}$$

vilket blir det sökta sambandet för $n = 1$. Att n verkligen är 1 här beskrivs i "Instruktion till laborationen ELEKTRONDIFFRAKTION" som studenterna läste innan laborationen.

Svar d): Vi har visat sambandet $d \approx 4R\lambda/D$ ovan.

e) Enligt ovan förekommer alltså bara (synliga) ringar för $n = 1$ i Braggs lag på laborationen. Istället kommer de två olika ringarna ifrån att provet har två olika d, som vi kallade d_{10} och d_{11} (se bilden på tentamen). Detta ger då enligt Braggs lag två olika vinklar, som vi kan kalla för θ_{10} och θ_{11}, vilket svarar mot två olika diametrar D_{10} och D_{11}.

Svar e): Två kvalitativt olika avstånd i kristallstrukturen gav upphov till varsin ring enligt resonemanget ovan.

3.

a) Energin som åtgår är $E = IU\Delta t = \frac{\Delta q}{\Delta t}U\Delta t = \Delta qU = e \cdot 1.0 = 1\ [eV] = 1.602 \cdot 10^{-19}\ [J]$. Från definitionen av arbete $A = F\Delta x$ följer

$$F = \frac{A}{\Delta x} = \frac{E}{\Delta x} = \frac{1.602 \cdot 10^{-19}\ [Nm]}{0.010\ [m]} = 1.602 \cdot 10^{-17}\ [N]\,. \tag{9}$$

Svar a): Kraften som åtgår är $1.6 \cdot 10^{-17}$ N.

b) Från definitionen av elektrisk fältstyrka (22-1) får vi styrkan av det elektriska fältet

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\left|\vec{F}\right|}{q} = \frac{1.602 \cdot 10^{-17}\ [N]}{1.602 \cdot 10^{-19}\ [C]} = 1.0 \cdot 10^{2}\left[\frac{N}{C}\right]. \tag{10}$$

Samma resultat får vi från den välkända formeln som gäller för parallella plattor

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{U}{\Delta x} = \frac{1.0\ [V]}{0.010\ [m]} = 1.0 \cdot 10^{2}\left[\frac{V}{m}\right]. \tag{11}$$

Svar b): Den elektriska fältstyrkan är $1.0 \cdot 10^2$ N/C.

c) Elektronens framfart med farten $v = 1.0$ m/s vinkelrätt mot ett magnetfält med styrkan B ger enligt (28-3) en kraft med storleken

$$F = |q|\, vB\sin(\phi) = evB \Rightarrow B = \frac{F}{ev} = \frac{1.602 \cdot 10^{-17}\ [N]}{1.602 \cdot 10^{-19}\ [C] \cdot 1.0\ \left[\frac{m}{s}\right]} = 1.0{\cdot}10^{2}\left[\frac{Ns}{C} = T\right] \tag{12}$$

Svar c): Storleken på den magnetiska kraften är samma som i **a)** om $B = 1.0 \cdot 10^2$ T (ett mycket starkt B-fält!).

d) En förskjutningsström bildas genom ett i tiden varierande elektriskt fält enligt (32-10)

$$i_d = \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0\frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t} = \varepsilon_0\frac{A\Delta E}{\Delta t} = \varepsilon_0\frac{\pi R^2\Delta E}{\Delta t}$$

$$= 8.854{\cdot}10^{-12}\left[\frac{F}{m}\right]{\cdot}\frac{\pi \cdot 0.10^2\ \left[m^2\right] \cdot 1.0 \cdot 10^2\ \left[\frac{N}{C}\right]}{1.0\ [s]} = 2.78{\cdot}10^{-11}\left[\frac{FNm^2}{mCs} = \frac{s^4A^2Nm}{m^2kgCs} = A\right], \tag{13}$$

där vi satt in $\Delta E = \left(1.0 \cdot 10^2 - 0\right)$ N/C enligt **b)**.

Svar d): Förskjutningsströmmen mellan plattorna är $2.8 \cdot 10^{-11}$ A.

e) Vi kan finna magnetfältetsstyrka inuti en cirkulär plattkondensator mha (32-16) som gäller för homogen strömdensitet

$$B = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi R^2} r = \frac{1.257 \cdot 10^{-6} \cdot 2.78 \cdot 10^{-11}}{2\pi \cdot 0.10^2} 0.050 = 2.78 \cdot 10^{-17} \ [T] \tag{14}$$

Svar e): Magnetfältets styrka är $2.8 \cdot 10^{-17}$ T.

4.

a) De 'strålar' från fiskens ögon som 'reflekteras' i vattenytan har en infallsvinkel som är större än gränsvinkeln för totalreflektion. Låt n vara brytningsindex för vatten och $n_{luft} = 1$, då gäller enligt (33-40) $n_2 \sin(\theta_2) = n_1 \sin(\theta_1)$ med $\theta_1 \approx 97.2/2 = 48.6°$ att

$$1 \cdot \sin(90°) = n \sin(48.6°) \ \Rightarrow \ n = \frac{1}{\sin(48.6°)} = 1.3331.$$

Svar a): Brytningindex för vattnet är (som förväntat) 1.33.

b) Enligt (33-35) gäller för trycket på en perfekt reflekterande yta

$$p_r = \frac{2I}{c} = \frac{2 \cdot 1.0 \cdot 10^3 \ \left[\frac{W}{m^2}\right]}{2.998 \cdot 10^8 \ \left[\frac{m}{s}\right]} = 6.671 \cdot 10^{-6} \left[\frac{N}{m^2}\right]. \tag{15}$$

Svar b): Trycket på solseglet är 6.7 μPa.

c) För att använda fotonteorin räknar vi först ut hur många fotoner, N, med energin $E = hf = hc/\lambda$, som flödar mot seglet pga solstrålningen per sekund för en kvadratmeter.

$$\frac{Nhc}{\lambda} = E_{tot} = 1.0 \cdot 10^3 \left[\frac{J}{m^2}\right] \Rightarrow N = \frac{E_{tot}\lambda}{hc} = \frac{1.0 \cdot 10^3 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{6.6261 \cdot 10^{-34} \cdot 2.998 \cdot 10^8} = 2.517 \cdot 10^{21} \left[\frac{1}{m^2}\right]. \tag{16}$$

En perfekt reflekterande spegel ger en ändring i en fotons rörelsemängd $\Delta p = 2p = 2h/\lambda$, där vi använt (38-7). För alla fotonerna (per sekund, $\Delta t = 1$ s, och per kvadratmeter) får vi då en kraft $F = \Delta p_{tot}/\Delta t = N\Delta p = 2Nh/\lambda = 2 \cdot 2.517 \cdot 10^{21} \cdot 6.6261 \cdot 10^{-34}/500 \cdot 10^{-9} = 6.671 \cdot 10^{-6}$ N/m^2.

Svar c): Trycket på solseglet är 6.7 μPa.

d) I uträkning för **b)** ovan, ser vi inte våglängden någonstans. I uträkning för **c)** ovan ser vi då vi för samman hela beräkningen i ett steg

$$F = N\Delta p = \frac{2Nh}{\lambda} = \frac{2E_{tot}\lambda h}{\lambda hc} = \frac{2E_{tot}}{c},$$

att inte den uträkningen heller beror på våglängden. Vi drar slutsatsen att våglängden inte påverkar trycket på seglet i vår enkla modell.

Svar d): Trycket påverkas inte av våglängden.

e) Enligt Rayleigh's kriterie (36-14) applicerat på problemet med små vinklar sprids ljuset från lasern till en diameter $2R$ på sträckan L enligt

$$1.22 \cdot \frac{\lambda}{d} \simeq \frac{R}{L} \Rightarrow R \propto \frac{L}{d}\lambda,$$

där d är diametern för öppningen på lasern. Vi ser då att ljuset sprids mera, större R, för en större våglängd. Så detta kan vara ett argument för att välja en kortare våglängd.

Svar e): En större våglängd ökar spridningen av ljuset vilket kan leda till att en del av ljuset hamnar utanför seglets yta.

5.

a) Vanligtvis används Newtons andra lag $F = ma$ för att eliminera $kg = \frac{Ns^2}{m}$. Tillsammans med $J = Nm$ är vi sedan färdiga, dvs

$$Js = kgm^2s^{-1} \Leftrightarrow Nms = \frac{Ns^2}{m}m^2s^{-1} = Nms. \tag{17}$$

Svar a): Se ovan.

b) Ljuset med frekvensen $\Delta\nu_{Cs} = 9192631770$ $[Hz]$ har våglängden $\lambda = c/f = 2.998 \cdot 10^8/9192631770 = 0.0326$ m. Ljus med så lång våglängd kan ingen människa se, studera tex Figure 33-2 på sidan 878 i kursboken.

Svar b): Ett mänskligt öga kan inte se ljus med frekvensen $\Delta\nu_{Cs}$.

c) Låt osäkerheten i läge vara av samma storleksordning som brunnen, dvs $\Delta x \sim 1 \cdot 10^{-9}$ m. Låt osäkerheten i rörelsemängd vara av samma storleksordning som rörelsemängden för elektronen, dvs $\Delta p \sim p$. Enligt (38-28) gäller då $\Delta x \Delta p \geq \hbar = h/(2\pi)$, så att rörelseenergin för elektronen blir av storleksordningen

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \sim \frac{\Delta p^2}{2m} \sim \frac{\left(\frac{\hbar}{\Delta x}\right)^2}{2m} = \frac{\left(\frac{1.0546\cdot 10^{-34}}{1\cdot 10^{-9}}\right)^2}{2\cdot 9.109\cdot 10^{-31}} = 6.1\cdot 10^{-21}\ [J] = 0.038\ [eV]\,.$$

Svar c): Uppskattningen av elektronens energi blir 0.038 eV.

d) Strömmen $I = \Delta q/\Delta t = 10$ A innebär att varje sekund, $\Delta t = 1$ s, förflyttas laddningen $\Delta q = 10$ C genom batteri-cellen. Uttryckt i antal (N) elementarladdningar (e) innebär det

$$\Delta q = Ne \;\Rightarrow\; N = \frac{\Delta q}{e} = \frac{10}{1.602\cdot 10^{-19}} = 6.24\cdot 10^{19}.$$

Svar d): Det går $6.2\cdot 10^{19}$ litiumjoner per sekund från minuspolen till pluspolen.

e) Enligt uppgift **d)** rör sig $6.24\cdot 10^{19}$ litiumjoner per sekund för varje cell, dvs för effekten 37 W. Totala effekten 20 kW kräver då $20\cdot 10^3/37 \approx 540.5$ battericeller. För tiden 1 $[h] = 3600$ $[s]$ blir då totala antalet litiumjoner $N = 3600\cdot 540.5\cdot 6.24\cdot 10^{19} = 1.21\cdot 10^{26}$. Varje litiumjon har, enligt Appendix F i kursboken, massan $m_{Li} \simeq 6.9\ [u] = 6.9\cdot 1.661\cdot 10^{-27}\ [kg] = 1.146\cdot 10^{-26}\ [kg]$. Totala massan blir $Nm_{Li} = 1.21\cdot 10^{26}\cdot 1.146\cdot 10^{-26} = 1.39$ kg.

Svar e): Enligt ovanstående förenklade modell blir den totala massan av litiumjonerna som används under 1 timma 1.4 kg.

6.

a) Enligt (39-4) ges energinivåerna för elektronen av följande formel

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2. \tag{18}$$

Energin vid övergång från första exciterade tillståndet ($n = 2$) till grundtillståndet ($n = 1$) uppfyller då

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}\left(2^2 - 1^2\right) = \frac{3h^2}{8mL^2} = 2.5\,eV = 4.005\cdot 10^{-19}\,J$$

$$\Rightarrow\; L = \sqrt{\frac{3h^2}{8m\Delta E}} = \sqrt{\frac{3\cdot(6.6261\cdot 10^{-34})^2}{8\cdot 9.109\cdot 10^{-31}\cdot 4.005\cdot 10^{-19}}} = 6.72\cdot 10^{-10}\,m.$$

Svar a): Brunnen skall ha bredden 0.67 nm.

b) Enligt formeln för en fotons energi $E = hf = hc/\lambda$ kan vi lösa ut våglängden

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6.6261 \cdot 10^{-34} \cdot 2.998 \cdot 10^{8}}{4.005 \cdot 10^{-19}} = 4.960 \cdot 10^{-7}\, m \approx 500\, nm.$$

Vi kan se från tex Figure 33-1 på sidan 877 att detta innebär grön färg.

Svar b): Det utsända ljuset har färgen grön.

c) Enligt (39-21) ges energinivåerna för elektronen av följande formel för $L_x = 2L_y = 2L_z$

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right) = \frac{h^2}{8mL_x^2}\left(n_x^2 + 4n_y^2 + 4n_z^2\right). \tag{19}$$

Grundtillståndet för $(n_x, n_y, n_z) = (1, 1, 1)$ blir då $E_{1,1,1} = \frac{9h^2}{8mL_x^2}$ och det första exciterade tillståndet erhålls för $(n_x, n_y, n_z) = (2, 1, 1)$ så att $E_{2,1,1} = \frac{12h^2}{8mL_x^2}$, så att energin för fotonen uppfyller

$$\Delta E = E_{2,1,1} - E_{1,1,1} = \frac{3h^2}{8mL_x^2} = 2.5\, eV = 4.005 \cdot 10^{-19}\, J \tag{20}$$

$$\Rightarrow\ L_x = \sqrt{\frac{3h^2}{8m\Delta E}} = \sqrt{\frac{3 \cdot (6.6261 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 4.005 \cdot 10^{-19}}} = 6.72 \cdot 10^{-10}\, m. \tag{21}$$

Svar c): Brunnens bredd i x-led blir 0.67 nm.

d) Vi ser direkt från formeln

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8mL_x^2}\left(n_x^2 + 4n_y^2 + 4n_z^2\right), \tag{22}$$

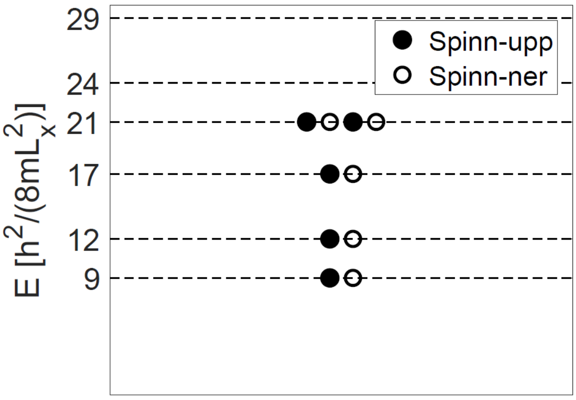
att tex $(n_x, n_y, n_z) = (1, 1, 2)$ och $(1, 2, 1)$ har samma energi, vilken med $L_x = 6.72 \cdot 10^{-10}$ m blir

$$E_{1,1,2} = \frac{21h^2}{8mL_x^2} = \frac{21 \cdot \left(6.6261 \cdot 10^{-34}\right)^2}{8 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot (6.72 \cdot 10^{-10})^2} = 2.80 \cdot 10^{-18}\, J. \tag{23}$$

Svar d): Enligt ovan har vi visat att tillstånden $(1, 1, 2)$ och $(1, 2, 1)$ båda har energin $2.80 \cdot 10^{-18}$ J.

e) Vi börjar med att pröva oss fram till i vilken ordning olika kvanttalsuppsättningar (n_x, n_y, n_z) bygger upp energinivåerna för potentialen. I figuren nedan har vi skrivit ut de sex första olika energinivåerna. Vi ser tex att de degenererade tillstånden

$(1, 1, 2)$ och $(1, 2, 1)$ från **d)** med energin $21 \cdot \frac{h^2}{8mL_x^2}$ utgör den fjärde energinivån. En atom med 10 protoner i kärnan har också 10 elektroner för att vara elektriskt oladdad. Därför kan vi fylla alla tillstånden med en spinn-upp och en spinn-ner elektron tills dess att vi har 10 elektroner. Det vi ser på bilden nedan är då grundtillståndet för atomen.



För att erhålla det första exciterade mångpartikel-tillståndet skall vi flytta en elektron från grundtillståndets konfiguration till en högre energinivå. Vi inser att vi kan flytta en valfri elektron från energinivån märkt 21 till den som är märkt 24. Energin för detta exciterade tillstånd blir då

$$E = (2 \cdot 9 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 17 + 3 \cdot 21 + 24)\frac{h^2}{8mL_x^2} = \frac{163h^2}{8mL_x^2} \tag{24}$$

Svar e): Energin för atomens första exciterade tillstånd blir $\frac{163h^2}{8mL_x^2}$.