Örebro Universitet
Institutionen för Naturvetenskap och teknik
Anders Södergren

Linjär algebra för civilingenjörer, MA503G
2017-01-12, kl. 08.15–13.15

Tentamen

Tillåtna hjälpmedel: Endast skrivmateriel.

Betygskriterier: Denna tentamen innehåller uppgifter om totalt 60 poäng och dessa är fördelade på två nivåer. En *grundläggande nivå* om totalt 36 poäng bestående av uppgifterna 1-6 (var och en värd 6 poäng) och en *fördjupad nivå* om totalt 24 poäng bestående av uppgifterna 7-9 (var och en värd 8 poäng). Enligt kursens betygskriterier (tillgängliga på kursens Blackboardsida) kommer lösningarna bedömas efter de två kriterierna *metod och problemlösning* och *teori, resonemang och motivering.*

För betyget 3 krävs minst 30 poäng totalt. För betyget 4 krävs minst 40 poäng totalt samt att minst en uppgift på tentamen ska ha belönats med full poäng. För betyget 5 krävs minst 50 poäng totalt samt att minst tre uppgifter på tentamen ska ha belönats med full poäng.

Anvisningar: Om inte annat anges skall samtliga lösningar vara försedda med utförliga förklaringar. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Grundläggande nivå

1. På denna uppgift ska enbart svar anges (lämna alltså inte in några uträkningar). Skriv svaren på alla deluppgifter på samma blad. En poäng per korrekt angivet svar på deluppgifterna a) och b). Två poäng per korrekt angivet svar på deluppgifterna c) och d).

   a) Låt $\boldsymbol{u} = (1,1,1)$, $\boldsymbol{v} = (1,0,3)$ och $\boldsymbol{w} = (0,2,1)$. Beräkna $(3\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$.

   b) Antag att A är en inverterbar 5×5-matris. Ange dimensionen av A:s nollrum.

   c) Ange en (nollskild) vektor som är ortogonal mot de båda vektorerna $\boldsymbol{u} = (1,2,2)$ och $\boldsymbol{v} = (-1,2,5)$.

   d) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + 4y + z = 2 \\ 2ax + 5y + z = 1 \\ 2x - ay - z = -4 \end{cases}$$

   för alla värden på den reella konstanten a.

3. Låt ℓ vara linjen i $\mathbb{R}^2$ som ges av ekvationen $(x,y) = t(1,1)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara matrisavbildningen som beskriver ortogonal projektion på linjen ℓ.

   a) Bestäm avbildningen T:s (standard-) matris A.

   b) Bestäm baser i matrisen A:s radrum, kolumnrum och nollrum (det vill säga, bestäm en bas i matrisen A:s radrum, bestäm en bas i matrisen A:s kolumnrum och bestäm en bas i matrisen A:s nollrum).

4. Låt $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestäm A:s egenvärden och motsvarande egenrum.

5. a) Låt V vara ett vektorrum. Ge definitionen för att vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ är linjärt oberoende.

   b) Låt $\mathcal{P}_3$ beteckna vektorrummet av alla polynom av grad mindre än eller lika med tre. Avgör om polynomen $p_1(x) = 3 - x + x^2$, $p_2(x) = 4 - 7x + 3x^2 + 2x^3$ och $p_3(x) = 3 + 7x - 2x^2 - 6x^3$ är linjärt oberoende i $\mathcal{P}_3$.

6. Studenten Stina laborerar med följande två symboliska matriser i Matlab:

```
>> syms a
>> A = sym([1 1; 1 -1; 2 1]); b = [a; 1; 2];
```

   Stina försöker lösa ekvationssystemet `A*x=b` och kontrollera lösningen enligt följande:

```
>> x = A\b
x =

                                 [ 13          ]
                                 [ -- + 1/14 a ]
                                 [ 14          ]
                                 [             ]
                                 [- 2/7 + 2/7 a]
>> check = A*x - b
check =

                                 [9/14 - 9/14 a]
                                 [             ]
                                 [3/14 - 3/14 a]
                                 [             ]
                                 [- 3/7 + 3/7 a]
```

   a) För vilka a-värden är `x` ovan den exakta lösningen till ekvationssystemet?

   b) Välj ett värde på parametern a sådant att `x` inte är den exakta lösningen och visa för detta a-värde att `x` uppfyller `A^T*(A*x-b)=0`.

   c) Vad är betydelsen av `x` i de fall där `x` inte är den exakta lösningen?

Fördjupad nivå

7. Låt ℓ vara linjen som ges av ekvationen $(x,y,z) = (-1,2,1) + t(2,-3,1)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt Π vara planet som ges av ekvationen $x + y + 2z = 1$. Bestäm ekvationen på parameterform för spegelbilden av ℓ i Π.

8. Betrakta matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

   a) Vilken storlek (på formen $m \times n$) måste matrisen X ha för att vänsterledet ska vara väldefinierat?

   b) Lös matrisekvationen.

9. a) Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifiera att vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är egenvektorer till matrisen A och ange motsvarande egenvärden.

b) Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$. Förklara noggrant hur du går till väga.

c) Beräkna A^{100}.

Lycka till!