ÖREBRO
UNIVERSITET

Flervariabelanalys för civilingenjörer

MA505G-0100

2017-05-29, kl. 08:15–13:15

Hjälpmedel: Endast skrivmateriel. Formelblad delas ut tillsammans med skrivningen.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga uppgifter bedöms utifrån kriterier för *problemlösning* och *redovisning*. För betyg 3/4/5 räcker det med 6 poäng inom vart och ett av områdena *differentialkalkyl*, *integralkalkyl* och *vektoranalys* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg, rita tydliga figurer och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Andreas Bergwall.

Lycka till!

Differentialkalkyl

1. Bestäm gradienten av $f(x, y, z) = (xy - 2)e^z$. I vilken riktning växer $f(x, y, z)$ snabbast sett från punkten $(2, 1, 0)$? Hur stor är riktningsderivatan i den riktningen? [6p]

2. Bestäm alla stationära punkter till $f(x, y) = x^3 + 5x^2 + 3y^2 - 6xy$ och avgör deras karaktär. [10p]

Integralkalkyl

3. En triangulär skiva D med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$ har ytdensiteten $\rho(x, y) = 2x/(1 + y^3)$. Bestäm skivans massa, d.v.s. beräkna dubbelintegralen av $\rho(x, y)$ över D. [6p]

4. Beräkna volymen av det begränsade området mellan ytorna $z = x^2 + y^2$ och $2x + 2y + z = 1$. [10p]

5. En homogen kropp K ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1/2$. Bestäm kroppens volym V och tyngdpunkt (x_t, y_t, z_t). [10p]

$$x_t = \frac{1}{V}\iiint\limits_K x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \quad y_t = \frac{1}{V}\iiint\limits_K y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \quad z_t = \frac{1}{V}\iiint\limits_K z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Vektoranalys

6. Är något av vektorfälten nedan ett potentialfält i $\mathbb{R}^2$? Vilket/vilka? [8p]

   (a) $(P, Q) = (y^2, 2xy - 1)$ (b) $(P, Q) = (2xy - 1, y^2)$

   Välj ett av fälten ovan och beräkna $\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ för en valfri kurva γ från $(-2, 1)$ till $(3, 0)$.

7. Beräkna flödet av vektorfältet $\boldsymbol{u} = (1+x^2, 1+y^2, 1+z^2)$ upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$. [10p]

Flervariabelanalys för civilingenjörer 20170529—lösningsförslag

1. Vi har att $\nabla f(x,y,z) = (ye^z, xe^z, (xy-2)e^z)$. Sett från punkten $(2,1,0)$ så växer alltså f snabbast i riktningen $\nabla f(2,1,0) = (1,2,0)$ och riktningsderivatan är $|(1,2,0)| = \sqrt{5}$.

2. Vi har att

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 10x - 6y = 0 \\ f'_y = 6y - 6x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ 3x^2 + 4x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = 0 \\ \text{eller} \\ x = y = -4/3 \end{cases}$$

så det finns två stationära punkter. Vi undersöker den kvadratiska formen $Q(h,k) = f''_{xx}(x,y)h^2 + 2f''_{xy}(x,y)hk + f''_{yy}(x,y)k^2$ i dessa. Eftersom $f''_{xx} = 6x+10$, $f''_{xy} = -6$ och $f''_{yy} = 6$ så får vi ...

- I punkten $(0,0)$: $Q(h,k) = 10h^2 - 12hk + 6k^2 = 10(h-0.6k)^2 + 2.4k^2$. $Q(h,k) > 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$, d.v.s. $Q(h,k)$ är positivt definit. Alltså är den stationära punkten $(0,0)$ en lokal minpunkt.
- I punkten $(-4/3,-4/3)$: $Q(h,k) = 2h^2 - 12hk + 6k^2 = 2(h-3k)^2 - 12k^2$. $Q(h,k)$ antar såväl positiva som negativa värden i varje omgivning av $(h,k) = (0,0)$, d.v.s. $Q(h,k)$ är indefinit. Alltså är den stationära punkten $(-4/3,-4/3)$ en sadelpunkt.

Anm. Man kvadratkompletterar Q för att kunna dra slutsatser om Q:s tecken enbart utifrån vilka tecken kvadraternas koefficienter har. För att detta ska fungera så ska man skriva om till en summa av så få kvadrater som möjligt. Man behöver aldrig ha fler termer än antalet variabler men man kan klara sig med färre. Vill man reda ut det här ordentligt får man läsa på om diagonalisering av kvadratiska former!

Om vi för punkten $(0,0)$ ovan använder omskrivningen

$$Q(h,k) = 10h^2 - 12hk + 6k^2 = (h-6k)^2 + 9h^2 - 30k^2$$

så har vi fler kvadrater än nödvändigt. Här ser vi också att vi får både positiva och negativa koefficienter trots att den kvadratiska formen faktiskt är positivt definit.

3. Skivan D ges av olikheterna $0 \le x \le y$, $0 \le y \le 1$. Skivans massa är alltså

$$\iint_D \frac{2x}{1+y^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+y^3} \underbrace{\int_0^y 2x\,\mathrm{d}x}_{=y^2} \right) \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{3}\ln(1+y^3)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{3}.$$

Den omvända integrationsordningen ger en mycket svårare integration m.a.p. y (vad är $\int 1/(1+y^3)\,\mathrm{d}y$?) och är direkt olämplig.

4. Eftersom
$$2x + 2y + x^2 + y^2 = 1 \Longleftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 3$$
så ges området av olikheterna
$$x^2 + y^2 \le z \le 1 - 2x - 2y, \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 \le 3$$
där den sista olikheten beskriver en cirkelskiva D i xy-planet med centrum i $(-1,-1)$ och radie $\sqrt{3}$. Observera att området ligger över paraboloiden och under planet. Volymen är alltså
$$\begin{aligned}
&\iint_D \big((1-2x-2y) - (x^2+y^2)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \big(3 - (x+1)^2 - (y+1)^2\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{[0,\sqrt{3}]\times[0,2\pi]} (3-r^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \left[-\frac{1}{4}(3-r^2)^2\right]_0^{\sqrt{3}} \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$
I andra likheten har vi gjort ett polärt variabelbyte: $x+1 = r\cos\varphi$, $y+1 = r\sin\varphi$.

Om man istället gör variabelbytet $x+1 = \sqrt{3}\,r\cos\varphi$, $y+1 = \sqrt{3}\,r\sin\varphi$, så får man integrationsintervallet $[0,1]$ m.a.p. r. Men då får man också en annan funktionaldeterminant.

5. Observera att ett tvärsnitt genom kroppen, vinkelrätt mot z-axeln, alltid är cirkulärt och har radien $\sqrt{1-z^2}$. Projektionen av ett sådant tvärsnitt på xy-planet ges ju av olikheten $x^2+y^2 \le 1-z^2$. Nedan betecknar D_z detta område. Notera att D_z:s area är $\pi(1-z^2)$.

K:s volym är
$$V = \iiint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{1/2} \left(\iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \int_0^{1/2} \pi(1-z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{11\pi}{24}$$
Av symmetriskäl är $z_t = y_t = 0$. Eftersom
$$\begin{aligned}
&\iiint_K z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{1/2} \left(\iint_{D_z} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{1/2} \pi z(1-z^2)\,\mathrm{d}z = \left[-\frac{\pi}{4}(1-z^2)^2\right]_0^{1/2} = \frac{7\pi}{64}
\end{aligned}$$
så är $z_t = (7\pi/64)/(11\pi/24) = 21/88$.

Rymdpolära koordinater är olämpliga eftersom både r, θ och φ varierar på den del av randen där $z = 1/2$. Om man använder rymdpolära koordinater och integrationsintervallen $0 < r < 1$, $\pi/3 < \theta < \pi/2$, $0 < \varphi < 2\pi$, så får man inte med den koniska kärna som ges av $x^2+y^2 \le z^2$, $0 \le z \le 1/2$.

Det är direkt olämpligt att börja med en omskrivning som $\iint(\int \mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ eftersom den "övre" begränsningsytan ges av olika uttryck på olika ställen. Över cirkelringen $(3/4) \leq x^2 + y^2 \leq 1$ så ges den av den sfäriska ytan $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Men över cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq (3/4)$ så ges den av planet $z = 1/2$.

Det är möjligt att genomföra båda integralberäkningarna på följande sätt: Integrera först över hela halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$. Integrera sedan över $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 1/2$. Subtrahera sedan resultaten. Då kan man använda rymdpolära koordinater i den första integralen och det går bra att jobba med upprepad integration på formen $\iint(\int \mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ i den andra.

6. I (a) har vi att $P'_y = 2y = Q'_x$ i hela $\mathbb{R}^2$, så det vektorfältet är ett potentialfält i $\mathbb{R}^2$. I (b) däremot så är $P'_y = 2x \neq 0 = Q'_x$, så det vektorfältet är inte ett potentialfält.

   Vi jobbar vidare med fältet i (a). Eftersom (P, Q) är ett potentialfält så är integralen oberoende av vägen, d.v.s. valet av kurva kommer inte att påverka resultatet. Men istället för att välja en kurva och parametrisera den så kan vi bestämma en potential och beräkna potentialskillnaden mellan slut- och startpunkt. T.ex. är $U(x, y) = xy^2 - y$ en potential och då följer direkt att

$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = U(3, 0) - U(-2, 1) = 0 - (-3) = 3.$$

7. Låt Γ vara den givna halvsfären med "uppåtriktad" normal. Slut ytan genom att lägga till den cirkulära skivan

$$B: \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

   Ge B den "undre" normalriktningen, d.v.s. $\boldsymbol{n} = (0, 0, -1)$. Då är $\Gamma + B$ den slutna begränsningsytan till halvklotet

$$K: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0$$

   och den har orienterats så att normalen alltid pekar ut från K. Gauss sats ger nu att

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Gamma+B} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{u}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_K (2x + 2y + 2z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \begin{bmatrix}\text{symmetri kring} \\ x = 0 \text{ och } y = 0\end{bmatrix} = \iiint_K 2z\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \begin{bmatrix}\text{rymdpolära} \\ \text{koordinater}\end{bmatrix} = \iiint_{[0,2]\times[0,\pi/2]\times[0,2\pi]} 2r\cos\theta r^2 \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\int_0^2 r^3 \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2 \cdot 4 \cdot \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = 8\pi.
\end{aligned}$$

Till sist måste vi subtrahera flödet ”ner” genom B. På B är

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S = (1 + x^2, 1 + y^2, 1) \cdot (0, 0, -1)\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = -\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

så detta flöde är

$$\iint_B \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S = -\iint_{x^2+y^2 \leq 4}\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = -4\pi.$$

Flödet genom Γ är alltså $8\pi - (-4\pi) = 12\pi$.