1 a) 2 röda kulor kan väljas på $\binom{4}{2}$ sätt.

4 blå kulor kan väljas på $\binom{6}{4}$ sätt.

6 kulor kan väljas på $\binom{10}{6}$ sätt.

Låt A vara händelsen att man flyttar 2 röda och 4 blå kulor.

Multiplikationsprincipen och den klassiska definitionen av sannolikhet ger:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{4}}{\binom{10}{6}} = \frac{\frac{\cancel{4}\cdot 3}{\cancel{2}\cdot 1}\cdot\frac{6\cdot 5}{\cancel{2}\cdot 1}}{\frac{10\cdot 9\cdot\cancel{8}\cdot 7}{\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}\cdot 1}} = \frac{6\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{3}}{\underset{2}{\cancel{10}}\cdot\cancel{3}\cdot 7} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

Svar $P(A) = 3/7$

b) Låt B vara händelsen att vi drar en blå kula ur Skål 2.

Vi söker då $P(A|B)$ och enligt Bayes sats är

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$$

$P(B)$ är händelsen att vi drar en blå kula.

$P(B) = \frac{6}{10}$ (Det spelar ingen roll att vi gör det i två steg. Det är fortfarande en slumpmässig kula av de 10.)

$P(B|A)$ är sannolikheten att dra en blå från 2 röda och 4 blå.

$$P(B|A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Så

$$P(A|B) = \frac{2/3 \cdot 6/14}{6/10} = \frac{2 \cdot \cancel{6}}{3 \cdot 14} \cdot \frac{10}{\cancel{6}} = \frac{10}{21}$$

Svar: $P(A|B) = 10/21$.

2. $X \in \{-2, 0, 2\}$

a) $P_X(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow P_X(-2) + P_X(2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$E(X^2) = \sum_{i \in \{-2,0,2\}} i^2 \cdot P_X(i) = (-2)^2 \cdot P_X(-2) + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + (2)^2 P_X(2) =$$

$$= 4\left(P_X(-2) + P_X(2)\right) = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Svar: $E(X^2) = \frac{8}{3}$

b) $E(X) = \sum_i i \cdot p_X(i) = -2 \cdot p_X(-2) + 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot p_X(2) = \frac{2}{3}$

Så vi har

$$p_X(-2) + p_X(2) = \frac{2}{3} \quad \text{från a)}$$

och $$-2\,p_X(-2) + 2\,p_X(2) = \frac{2}{3} \quad \text{från b)}$$

Detta ger

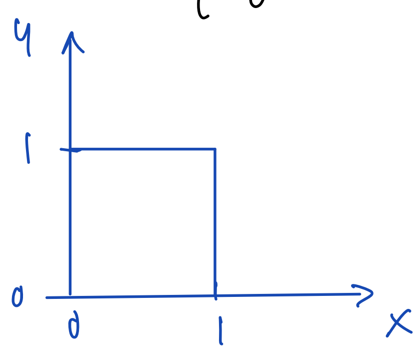
$$4\,p_X(2) = 2 \Leftrightarrow p_X(2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{och } p_X(-2) = \frac{1}{6}$$

Test: $-2 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$ ok!

<u>Svar:</u> $p_X(-2) = \frac{1}{6}$, $p_X(2) = \frac{1}{2}$

3. $$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



a) $$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^y \int_0^x (x+y)\, dx\, dy = \int_0^y \int_0^x x\, dx\, dy + \int_0^y \int_0^x y\, dx\, dy$$

för $0 \le x \le 1$
$0 \le y \le 1$

$$\int_0^y \int_0^x t\, dt\, ds = \int_0^y \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x ds = \int_0^y \frac{x^2}{2}\, ds = \left[\frac{x^2}{2} s\right]_0^y =$$

$$= \frac{x^2 y}{2}$$

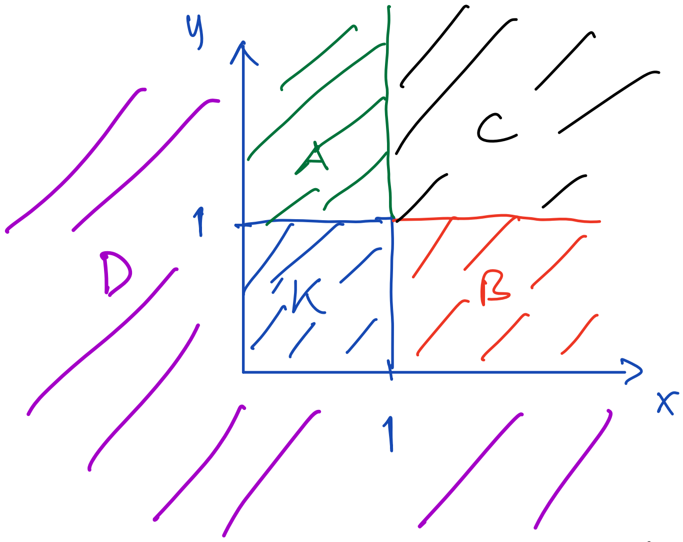
på samma sätt

$$\int_0^y \int_0^x s\, dt\, ds = \frac{y^2 x}{2}$$

så $F_{XY}(x,y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2 x}{2} = \frac{xy(x+y)}{2}$

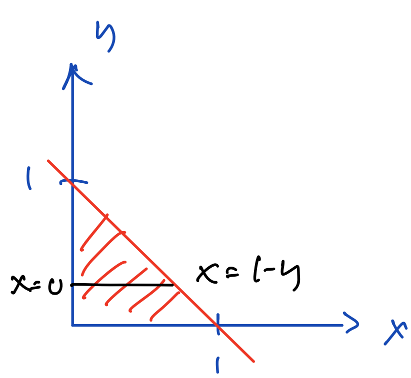
för $0 \le x \le 1$
och $0 \le y \le 1$

Vad gäller om vi är utanför kvadraten?



Svar: $F_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+y)}{2} & \text{för } 0 \le x \le 1 \text{ och } 0 \le y \le 1 \quad K \\ \dfrac{x(x+1)}{2} & \text{för } 0 \le x \le 1 \text{ och } y \ge 1 \quad A \\ \dfrac{y(y+1)}{2} & \text{för } 0 \le y \le 1 \text{ och } x \ge 1 \quad B \\ 1 & \text{för } y \ge 1 \text{ och } x \ge 1 \quad C \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

b) $P(X+Y \le 1)$



$$P(x+y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-y} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^{1-y} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-y)^2}{2} + (1-y)\cdot y \quad dy = \int_0^1 \left(\frac{1-2y+y^2}{2} + y - y^2\right) dy$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(y - \frac{2y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

<u>Svar</u> $P(X+Y \leq 1) = \frac{1}{3}$

4. $E(X_i) = 0{,}65 \quad V(X_i) = 0{,}02^2$

a) $X_{tot} = \sum X_i$ Antag oberoende X_i

$E(X_{tot}) = n \cdot 0{,}65 = 65$

$V(X_{tot}) = n \cdot V(X_i) = n \cdot 0{,}02^2 = 0{,}04$

$D(X_{tot}) = \sqrt{V(X_{tot})} = 0.2$

b)

Att den innehåller minst 100 tabletter är samma som sannolikheten att 99 tabletter väger mindre än 65 g

99 tabletter så vi kan anta att

$X_{tot} = \sum X_i \in N(99 \cdot 0{,}65,\ 99 \cdot 0{,}02^2)$

$P(X_{tot} \leq 65) = \Phi\left(\frac{65 - 99 \cdot 0{,}65}{\sqrt{99 \cdot 0{,}02^2}}\right) =$

$= \Phi(3.27) = 0{,}99946$

<u>Svar</u>: Sannolikheten att den innehåller minst 100 tabletter är ungefär 0.9995.

5. $X_i \in Po(\lambda)$

$$p_{X_i}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$L(\lambda) = \underbrace{\frac{\lambda^9}{9!} \cdot e^{-\lambda}}_{p_{X_i}(9)} \cdot \underbrace{\frac{\lambda^8}{8!} \cdot e^{-\lambda}}_{p_{X_i}(8)} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda^{12}}{12!} e^{-\lambda}$$

$$\ln(L(\lambda)) = l(\lambda) = 9 \cdot \ln(\lambda) - \ln(9!) - \lambda + \ldots$$

$$\frac{dl(\lambda)}{d\lambda} = \frac{9}{\lambda} + \frac{8}{\lambda} + \ldots - n \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\sum X_i\right) - 10$$

$$\frac{dl(\lambda)}{d\lambda} = 0 \quad \text{om } \lambda \cdot 10 = \sum X_i$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{1}{10} \sum X_i = \bar{x}$$

Teckenstudie ger maxpunkt

ML-skattningen är alltså medelvärdet

$$\lambda^*_{ML} = \frac{1}{10}(9+8+9+\ldots+12) = 10$$

$E(\lambda^*) = E(\bar{x}) = E(X) = \lambda$ så V.v.r.

6. y = proteinkoncentration

x = bilirubinhalt

Linjär regression

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon$$

a) Enligt formelsamling:

$$\beta^* = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{43,146}{0,12146} = 355.2$$

$$S_{xy} = \underbrace{\sum_j x_j y_j}_{259.79} - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} =$$

$$= 43,146$$

$$\left(\bar{x} = \frac{2.23}{20} \quad \bar{y} = \frac{1943}{20} \quad n = 20 \right)$$

$$S_{xx} = \sum_j x_j^2 - n\bar{x}^2 =$$

$$= 0,3701 - 20 \cdot \left(\frac{2,23}{20}\right)^2 = 0,12146$$

$$\alpha^* = \bar{y} - \beta^* \cdot \bar{x} = \frac{1943}{20} - 355.2 \cdot \frac{2.23}{20} = 57.55$$

Svar: Regressionslinjeparametrarna blir $\alpha^* = 57.55$ och $\beta^* = 355.2$

b) Enligt formelsamling:

$$I_\alpha = \left(\alpha^* \pm t_{p/2}(n-2) \cdot s \cdot \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \cdot S_{xx}}}\right)$$

$$I_\beta = \left(\beta^* \pm t_{p/2}(n-2) \cdot s / \sqrt{S_{xx}}\right)$$

I vårt fall är $n = 20$, $p = 0{,}05$

så $t_{p/2}(n-2) = t_{0{,}025}(18) = 2{,}1009$

Enligt formelsamling är

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\left(S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right) =$$

$$= \frac{1}{18}\left(26299 - \frac{43.146^2}{0{,}12146}\right) = 609.6$$

$$\left(S_{yy} = \sum y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2 = 215061 - 20 \cdot \left(\frac{1943}{20}\right)^2 = 26299\right)$$

$$s = \sqrt{609.6} = 24.69$$

så

$$I_\alpha = \left(\underbrace{\alpha^*}_{57.55} \pm \underbrace{t_{0.025}(18)}_{2.1009} \cdot \underbrace{s}_{24.69} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n S_{xx}}}}_{\underbrace{\sqrt{\frac{0{,}3701}{20 \cdot 0{,}12146}}}_{=0{,}3903}}\right)$$

Svar:

$$= (57{,}55 \pm 20.25) = \underline{(37{,}30\ ,\ 77{,}80)}.$$

$$I_\beta = \left(\underbrace{\beta^*}_{355.2} \pm \underbrace{t_{p/2}(n-2)}_{2.1009} \cdot \underbrace{s/\sqrt{S_{xx}}}_{= \frac{24.69}{\sqrt{0.12146}} = 70.84}\right) =$$

$$= (355{,}2 \pm 148{,}8) = \underline{(206{,}4\ ,\ 504)}$$

7. Plantorna står två och två (en från korspollinering och en från självpollinering) i olika sorters krukor och på olika ställen. Vi har alltså observationer i par och är intresserade av

$$z_i = x_{ikp} - x_{isp}$$

Antag $\mu_{ikp} = \mu_{isp} + \Delta$

och studera de 15 värdena

$$z_i = x_{ikp} - x_{isp}$$

$$E(z_i) = \Delta$$

Vi kan anta att alla z_i är oberoende
Hypotesen blir då

$H_0: \Delta = 0 \qquad (\mu_{kp} = \mu_{sp})$

$H_1: \Delta > 0$

5% felrisk

Med antagande om att $\bar{Z}$ är normalfördelad
CGS

blir vår testvariabel:

$$T = \frac{\bar{Z} - 0}{s/\sqrt{n}} = \frac{2,62}{4.716/\sqrt{15}} = 2,152$$

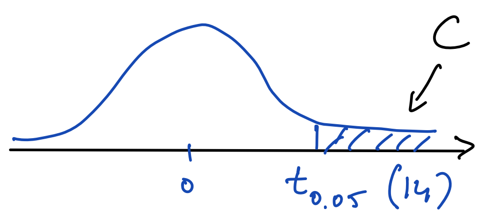
$$\bar{Z} = \frac{1}{15} \sum X_{kp} - X_{sp} = \frac{302,875 - 263,625}{15} = 2,62$$

$$s^2 = \frac{1}{14} \sum (Z_i - \bar{Z})^2 = \frac{1}{14} \left(\sum (X_{kp} - X_{sp})^2 - 15 \cdot \bar{Z}^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{14} \left(414.344 - 15 \cdot 2,62^2 \right) = 22,24$$

$$s = \sqrt{22.24} = 4.716$$

och det kritiska området ges av



t fördelning
eftersom σ okänd

$$t_{0,05}(14) = 1,7613$$

tabell

Eftersom $T > t_{0,05}(14)$ så är

vi i kritiska området och H_0

förkastas till förmån för

$H_1: \Delta > 0$ dvs $\mu_{kp} > \mu_{sp}$