Lösningar tentamen

①

2023-01-10

Problem 1

(a) x_j = antal tillverkade enheter av produkt $j = 1, 2, 3, 4$ och

y_1 = antal flyttade timmar $A \to C$

y_2 = " " " $B \to C$

ger problemet

$$\max z = 17x_1 + 22x_2 + 9x_3 + 18x_4$$

$$\begin{aligned}
\text{u.b.}\quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 160 - y_1 \\
& 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 180 + y_1 + y_2 \\
& x_1 \leq 50 \quad (1) \\
& x_2 \leq 60 \\
& x_3 \leq 85 \\
& x_4 \leq 70 \quad (2) \\
& y_1 \leq 0.2 \times 160 \\
& y_2 \leq 0.3 \times 200
\end{aligned}$$

$$x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 4, \quad y_1, y_2 \geq 0$$

Problem 1

2

(b) x_{11} = antal enheter av produkt 1 som säljs som produkt 1

x_{14} = antal enheter av produkt 1 som säljs istället för produkt 4

ger problemet

$$\max \quad z = 17x_{11} + 16x_{14} + 22x_3 + 9x_3 + 18x_4$$

samt (1) ändras till $x_{11} \leq 50$ och (2) till $x_4 + x_{14} \leq 17$. Dessutom tillkommer villkoren $x_1 = x_{11} + x_{14}$ och $x_{11}, x_{14} \geq 0$.

Problem 2

(Skall vara max, sorry!)

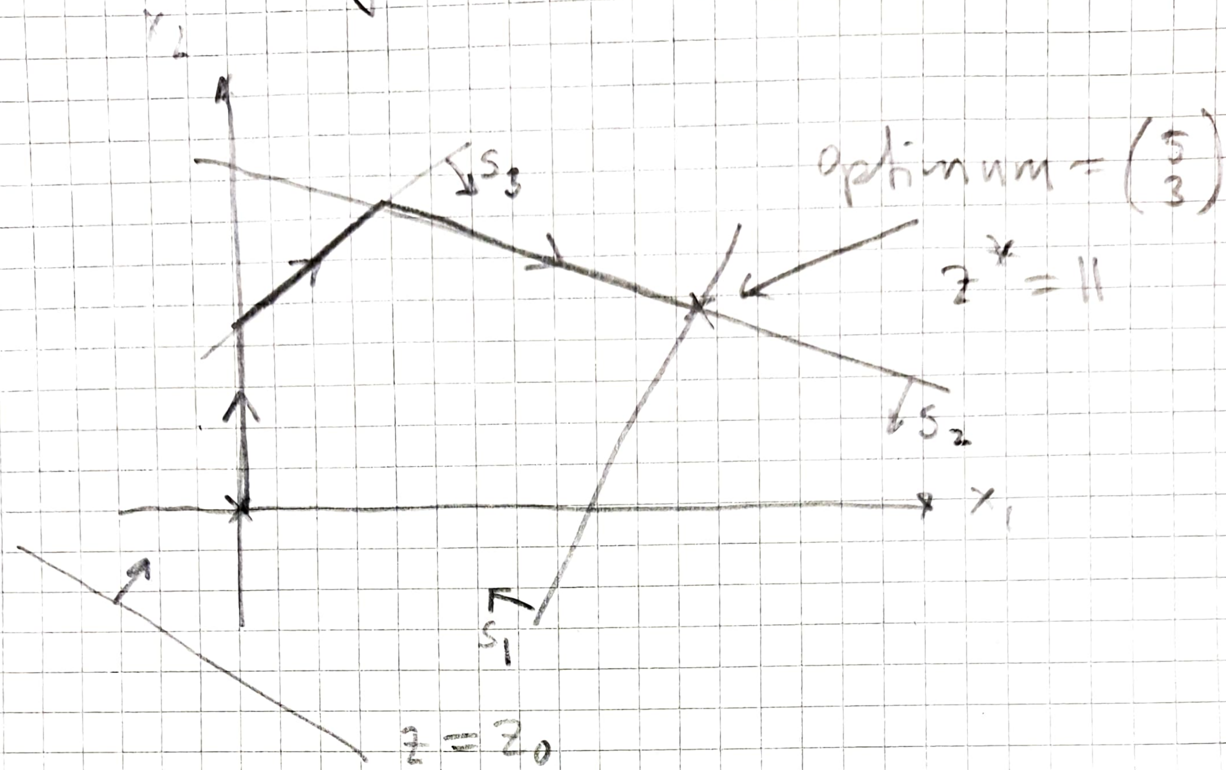
Inför slackvariabler $s_1, s_2, s_3 \geq 0$.

Iterationssekvens: x_2 inkom., s_3 utg.
x_1 inkom., s_2 utg.
x_3 inkom., s_1 utg.

Optimaltablå:

bas	$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	h.l
$-z$	1	0	0	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{7}{13}$	0	-11
s_3	0	0	0	$\frac{5}{13}$	$-\frac{2}{13}$	1	5
x_1	0	1	0	$\frac{4}{13}$	$\frac{1}{13}$	0	5
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	0	5

Problem 2 forts...



Problem 3

(a) Vi har $\nabla f = (x_1 x_2 - 2, \frac{1}{2} x_1^2)^T$ och $\nabla f(2,2) = (2,0)^T$ så vi kan ta $\bar{d} = -(1,0)^T$ som ger $\bar{x}(t) = \bar{x} + t\bar{d} = (2-t, 2)^T$, $t \geq 0$. Låt $\varphi(t) = f(\bar{x}(t)) = (2-t)^2 - 2(2-t) - 4$ så blir

$$\varphi'(t) = 2t - 2 \begin{cases} \leq 0, & t \leq 1 \\ \geq 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

så $\varphi(t)$ har minimum för $t = 1$ och $\bar{x}(1) = (1,2)^T$.

Problem 3

(b) Hessianen är $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & 0 \end{bmatrix}$

så $H(2,2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ som ger

Newtonriktning

$$\bar{d} = -H(2,2)^{-1} \nabla f(2,2) =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ och}$$

$\nabla f(2,2)^T \bar{d} = 0$ dvs riktningen är <u>inte</u> en nedförsriktning.

(c) Alternativ 1: Sätt $x_2 = x_1$

och betrakta $f(x_1, x_1) = \frac{1}{2} x_1^3 - 4x_1$ som inte är konvex och då är $f(\bar{x})$ inte heller konvex.

Alternativ 2: Tag t.ex. $\bar{x} = (1,0)^T$, bestäm egenvärdena till $H(1,0) =$

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ som blir $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

dvs en sadelpunkt.

Problem 4

(a) Problemet är kvadratiskt med linjära bivillkor så det räcker med att avgöra om $f(x_1, x_2)$ är konvex. Hessianen är

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$ med egenvärden

$\lambda_1 = 1 \geq 0$, $\lambda_2 = (5+\sqrt{5})/2 \geq 0$ och

$\lambda_3 = (5-\sqrt{5})/2 \geq 0$ så problemet är konvext.

(b) KKT-villkoren blir

$$\nabla f + y_1 \nabla g_1 + y_2 \nabla g_2 + y_3 \nabla g_3 = 0 \quad (1)$$
$$y_1, y_2 \geq 0 \quad (2)$$
$$g_1, g_2 \leq 0 \quad (3)$$
$$y_1 g_1 = 0, \; y_2 g_2 = 0 \quad (4)$$

För $\bar{x} = (1,1,1)^T$ fås $g_1(\bar{x}) = 0$ och $g_2(\bar{x}) = 0$ (3), (4) är uppfyllda. Från (1) fås

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

och $y_1 = 2$, $y_2 = 1$ båda positiva så $(1,1,1)^T$ är en KKT-punkt.

Problem 5

(a) Dualen blir

$$\min \quad v = 24y_1 + 17y_2 + 29y_3$$

$$\text{u.b.} \quad 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 7$$
$$4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10$$
$$y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3$$
$$2y_1 + 4y_2 + 5y_3 \geq 8$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

(b) Komplementaritetsvillkoren blir

$$x_1(3y_1 + 2y_2 + 4y_3 - 7) = 0 \quad (i)$$
$$x_2(4y_1 + 3y_2 + y_3 - 10) = 0 \quad (ii)$$
$$x_3(y_1 + y_2 + 2y_3 - 3) = 0 \quad (iii)$$
$$x_4(2y_1 + 4y_2 + 5y_3 - 8) = 0 \quad (iv)$$

Komplementaritetsvillkoren för primala problemet är också möjlig lösning.

(c) Dualen är degenererad.

Problem 5 (Svår...)

(d) Här är det enklast att använda primala komplementaritetsvillkoren

$$y_1(24 - 3x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4) = 0 \quad (v)$$

$$y_2(17 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4) = 0 \quad (vi)$$

$$y_3(29 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4) = 0 \quad (vii)$$

Från (i) och $x_1 > 0$ fås $3y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 7$ och $x_2 > 0$ ger $4y_1 + 3y_2 + y_3 = 10$ och (vii) ger $y_3 = 0 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0$ som med (iv) ger $x_4 = 0$. Från (v), (vi) har vi

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$$

som parametriserad med $x_3 = t$ ger $x_1 = 4 + t$, $x_2 = 3 - t$, $x_3 = t$, $x_4 = 0$, $0 \leq t \leq 2$ och $z^* = 58$.

Problem 6

Se boken.