ÖREBRO
UNIVERSITET

Hemtentamen på kursen Integraler och differentialekvationer

MA504G

2020-03-23, kl. 14:15–19:15

Hjälpmedel: Anteckningar och kursbok. Alla former av samarbete är strikt förbjudet!

Betygskriterier: För betyget 3/4/5 krävs minst 3 poäng på differentialekvationer på grundläggande delen samt totalt 30/40/50 poäng på tentamen.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Det är viktigt att det framgår att det är din egen lösning som redovisas så du uppmuntras till att lägga särskild vikt vid att synliggöra det. Vid frågor under tentamen kan du kontakta marcus.sundhall@oru.se

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Marcus Sundhäll.

Lycka till!

Grundläggande del

1. Beräkna gränsvärdet [6p]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n} + 1 \right)^2 .$$

2. Bestäm allmän lösning $y(x)$ till differentialekvationen [6p]

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = xe^{-x} .$$

3. Avgör om det finns något tal x så att [6p]

$$\int_1^x \frac{1}{t^2+t}\, dt = \frac{1}{2}$$

och bestäm i så fall x.

4. Beräkna [6p]

$$\int_0^{\pi/4} (\tan^3(x) + \tan(x))\, dx .$$

5. Bestäm den kontinuerliga funktion $y(x)$ sådan att [6p]

$$y(x) = 2 + \int_0^x (t - y(t))\, dt .$$

6. Använd lämplig Maclaurinutveckling för att visa att [6p]

$$\left| e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right| < \frac{1}{16}$$

om $|x| \leq 1/2$.

Fördjupad del

7. Bestäm volymen av den glassformade kropp som fås då området [8p]

$$\left\{ (x,y) : \; x \leq y \leq \sqrt{8 - x^2}\,, 0 \leq x \leq 2 \right\}$$

roteras kring y-axeln. Ge två väsentligen olika lösningar och förklara på vilket sätt de skiljer sig åt.

8. En behållare med höjden H fylls på med vatten, där volymen vatten vid vattennivån (höjden) h ges av [8p]

$$V(h) = \int_0^h \pi y \, dy \,.$$

Om vi gör ett litet hål i botten på behållaren så kan vi, enligt Torricellis lag, anta att volymen vätska som rinner ut ur hålet per tidsenhet hela tiden är proportionell mot kvadratroten ur aktuell vattennivå. Antag att det tar 10 sekunder från att behållaren är full tills vattennivån är en fjärdedel av behållarens höjd. Bestäm tiden det tar att helt tömma behållaren om den från början är helt fylld med vatten.

9. Betrakta den generaliserade integralen [8p]

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-1}} \, dx \,.$$

Avgör med hjälp av jämförelsesatser om den generaliserade integralen är konvergent eller divergent. Om integralen är konvergent, bestäm i så fall dess värde.
