



Övningstentamen 2 på kursen Integraler och differentialekvationer MA504G

Hjälpmedel: Skrivmateriel och eget medtaget handskrivet formelblad i A4-format där det endast är tillåtet med formler och definitioner och endast på ena sidan av bladet.

Betygskriterier: För betyget 3/4/5 krävs minst 3 poäng på differentialekvationer på grundläggande delen samt totalt 30/40/50 poäng på tentamen.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Marcus Sundhäll.

Lycka till!

Grundläggande del

1. Beräkna gränsvärdet [6p]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n} - 2 \right)^2 .$$

2. Bestäm ett positivt rationellt tal a så att $|\sin 0.1 - a| < 10^{-7}$. [6p]

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen [6p]

$$xy' + 10y = \ln x ,$$

som uppfyller villkoret $y(1) = 0$.

4. Bestäm x så att [6p]

$$\int_x^5 \frac{2}{t^2 - 1} dt = \ln \left(\frac{4}{3} \right) .$$

5. Bestäm integralen [6p]

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx .$$

6. Sök en så liten konstant C som möjligt så att [6p]

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{e^k - e^{-k}} < C$$

för alla heltal $n \geq 2$.

Fördjupad del

7. Ur ett sfäriskt skal med radie R skärs ett band ut med hjälp av två parallella plan med inbördes avstånd h . Använd integraler för att härleda arean av bandet i termer av R och h . [8p]

Tips till uppgift 7: Det kan vara användbart att påminna sig om hur en sfär kan erhållas genom att rotera lämplig kurva kring lämplig axel.

8. Bestäm alla två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner $y(x)$ som är lösningar till integralekvationen [8p]

$$y(x) = \cos(x) + \int_x^\pi \left(\int_0^t y(s) ds \right) dt.$$

9. Avgör om den generaliserade integralen [8p]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|x|}(1+|x|)} dx$$

är konvergent och beräkna i så fall dess värde.
