ÖREBRO UNIVERSITET

Flervariabelanalys för civilingenjörer

MA505G-0100

2019-06-08, kl. 08:15–13:15

Hjälpmedel: Endast skrivmateriel. Formelblad delas ut tillsammans med skrivningen.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga uppgifter bedöms utifrån kriterier för *problemlösning* och *redovisning*. För betyg 3/4/5 räcker det med 4 poäng inom vart och ett av huvudområdena *differentialkalkyl*, *integralkalkyl* och *vektoranalys* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg, rita tydliga figurer och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Andreas Bergwall.

Lycka till!

Grundläggande uppgifter (6p/uppgift)

1. Låt $f(x, y) = x^2 - \ln(xy)$. Sett från punkten $(1, 2)$, i vilken av riktningarna $(2, 1)$ och $(1, -2)$ växer $f(x, y)$ snabbast?

2. Visa att $(\pi/2, 0)$ är en lokal extrempunkt till $f(x, y) = \sin(x) + \cos(xy)$ och bestäm punktens karaktär.

3. Beräkna $\displaystyle\iint_D 2x\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ där $D = \{(x, y) : x^2 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1\}$.

4. Bestäm tröghetmomentet för ett halvklot K med radie 1 med avseende på halvklotets symmetriaxel. Densiteten antas vara $\rho = 1$.

   Anm: Tröghetsmomentet med avseende på z-axeln är $\displaystyle\iiint_K (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

5. Beräkna det arbete som kraftfältet $\boldsymbol{F} = (y^2, z^2, x^2)$ uträttar på en partikel som färdas ett varv längs randkurvan till ytan

   $$\Gamma : \quad z = x + 1, \quad x^2 + y^2 \le 1.$$

   Välj själv orientering på $\partial\Gamma$.

   Anm: Arbetet ges av $\displaystyle\int_{\partial\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

Kom ihåg att illustrera relevanta definitionsmängder, integrationsområden och orienteringar med tydliga figurer.

Fördjupade uppgifter (10p/uppgift)

6. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = xy^2 + x^2 - x$ då $x^2 + y^2 \leq 2$.

7. Låt K vara den homogena kropp som begränsas av ytorna $z = x^2 + y^2$ och $x + z = 0$. Bestäm K:s volym och x-koordinaten för K:s tyngdpunkt.

   Anm: Om V är K:s volym så ges tyngdpunktens x-koordinat av

$$x_t = \frac{1}{V} \iiint\limits_K x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

8. Beräkna flödet av vektorfältet $\boldsymbol{u} = (3x - y, yz, x + z)$ genom den del av cylinderytan $x^2 + y^2 = 4$ som uppfyller att $-1 \leq z \leq 1$. Flödet ska räknas positivt bort från z-axeln.

Kom ihåg att illustrera relevanta definitionsmängder, integrationsområden och orienteringar med tydliga figurer.

Kommentarer till Flervariabelanalys för civilingenjörer 20190608

1. Jämför riktningsderivatorna av f i punkten $(1,2)$ med avseende på riktningarna $\boldsymbol{v}_1 = (2,1)/\sqrt{5}$ och $\boldsymbol{v}_2 = (1,-2)/\sqrt{5}$. Eftersom $\operatorname{grad} f(1,2) = (1,-1/2)$ så är

$$f'_{\boldsymbol{v}_1}(1,2) = (1,-\frac{1}{2}) \cdot (2,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$f'_{\boldsymbol{v}_2}(1,2) = (1,-\frac{1}{2}) \cdot (1,-2) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Den sistnämnda är störst, så f växer snabbast i riktningen $(1,-2)$.

Det är svårt att med säkerhet hävda att så är fallet bara genom att rita en figur och studera vilken av vektorerena $(2,1)$ och $(1,-2)$ som verkar avvika minst från $(1,-1/2)$.

2. Kontrollera först att $\operatorname{grad} f(\pi/2,0) = (0,0)$. Detta betyder *inte* att $(\pi/2,0)$ är en lokal extrempunkt, bara att det är en stationär punkt. Men denna kontroll är viktig. Varför?

Bestäm sedan den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = f''_{xx}(\frac{\pi}{2},0)h^2 + 2f''_{xy}(\frac{\pi}{2},0)hk + f''_{yy}(\frac{\pi}{2},0)k^2 = -h^2 - \pi^2k^2/4.$$

Eftersom $Q(h,k) < 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$ så är $Q(h,k)$ negativt definit, och då är $(\pi/2,0)$ en lokal maxpunkt.

3. Det är lättast att integrera m.a.p. x först. Observera därför att D lika väl kan beskrivas av olikheterna $0 \le x \le \sqrt{y}$, $0 \le x \le 1$. Detta ändrar inte på D, det är bara en mer passande beskrivning av D.

Integralen är alltså

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} 2x \,\mathrm{d}x \right) \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

4. Halvklotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$, $z \ge 0$, har z-axeln som symmetriaxel. Rymdpolära koordinater funkar bra, särskilt om man först utnyttjar symmetrier:

$$\iiint_K (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\iiint_K (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \frac{2}{3}\iiint_{[0,1]\times[0,\pi/2]\times[0,2\pi]} r^4 \sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi}{15}.$$

Gör man variabelbytet direkt så åker man på att integrera $\sin^3\theta$.

Det går också bra med upprepad integration i kombination med planpolära koordinater. Med en inre dubbelintegral får vi:

$$\iiint_K (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 \left(\iint\limits_{[0,\sqrt{1-z^2}]\times[0,2\pi]} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-z^2}} \right)\cdot 2\pi\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 (1-z^2)^2\,\mathrm{d}z = \frac{4\pi}{15}.$$

Med en inre enkelintegral får vi

$$\iiint_K (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{x^2+y^2\le 1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint r^2\sqrt{1-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

där man sedan kan göra variabelbytet $t = 1-r^2$.

5. Vi har $\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = (-2z,-2x,-2y) \neq \boldsymbol{0}$ så $\boldsymbol{F}$ är inte ett potentialfält.

   Lösning med Stokes sats: Om γ orienteras moturs sett ”uppifrån”, och om Γ ges den “övre” normalriktningen, så är γ positivt orienterad rand Γ. Det betyder att det orienterade ytelementet kan väljas som $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = (-1,0,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   På Γ är $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = 2x+2-2y$. Stokes sats och symmetrier i x- och y-led ger att arbetet är

$$\iint_\Gamma \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\cdot(\text{enhetscirkelns area}) = 2\pi.$$

   Lösning med parametrisering: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t+1)$, $0\le t\le 2\pi$, är en parametrisering av γ genomlupen moturs sett ”uppifrån”. Det orienterade bågelementet är då $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (-\sin t, \cos t, -\sin t)\,\mathrm{d}t$ så

$$\int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + (\cos t+1)^2\cos t - \cos^2 t\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

   Integralen blir inte så svår om man är med på att vid integrering av udda potenser av $\sin t$ och $\cos t$ över en hel period så får man alltid noll.

6. Största och minsta värde finns eftersom f är kontinuerlig och $D = \{(x,y) : x^2+y^2\le 2\}$ är kompakt. Optimum finns i inre stationär punkt eller i randpunkt.

Inre stationära punkter: Systemet $f'_x = f'_y = 0$ har tre lösningar: $(0, \pm 1)$ och $(1/2, 0)$. Alla ligger i D:s inre och funktionsvärdena är $f(0, \pm 1) = 0$ och $f(1/2, 0) = -1/4$.

Randpunkter: Sätt in $y^2 = 2 - x^2$ i funktionsuttrycket så fås $g(x) = x - x^3 + x^2$ som nu ska optimeras då $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. g har två stationära punkter, $x = -1/3$ och $x = 1$. I dessa har vi funktionsvärdena $f(-1/3, \pm\sqrt{17}/3) = -5/27$ och $f(1, 1) = 1$. I ändpunkterna är värdena $f(\pm\sqrt{2}, 0) = 2 \mp \sqrt{2}$.

Jämförelse av erhållna värden visar att $f(-\sqrt{2}, 0) = 2 + \sqrt{2}$ är största värde och $f(1/2, 0) = -1/4$ minsta värde.

Randundersökningen kan också göras utifrån principen att i intressanta punkter så kommer grad f och gradienten till $x^2 + y^2$ att vara parallella.

7. För att kunna ställa upp korrekta integraler måste man allra först kolla var ytorna skär varandra:

$$-x = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Om D är det plana området innanför denna cirkel så är K:s volym

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (-x - (x^2 + y^2))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (\frac{1}{4} - (x + \frac{1}{2})^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{16} - \iint_D ((x + \frac{1}{2})^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Byt till polära koordinater, $x + (1/2) = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, så fås

$$V = \frac{\pi}{16} - \iint\limits_{[0,1/2]\times[0,2\pi]} r^3\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{64}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{32}.$$

Härnäst ska x integreras över hela kroppen. Det blir lite risiga räkningar. Ett knep kan vara att först göra variabelbytet $u = x + 1/2$, $v = y$. Då blir integrationsområdet $u^2 + v^2 \leq 1/4$ istället. Fördelen är att alla termer i integranden som är udda funktioner av u eller v då kan strykas eftersom integralen av dem är 0.

Samma idé, men utan ett extra variabelbyte, kan genomföras på följande sätt: Skriv x som $(x+1/2)-1/2$ och utnyttja att symmetrin då finns kring $x = -1/2$ (det görs i näst sista likheten nedan). Om man är observant så upptäcker man att samma integral som för volymen V återkommer:

$$\begin{aligned}
Vx_t &= \iiint_K x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D x \left(\int_{x^2+y^2}^{-x} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D x((-x - (x^2 + y^2)) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D ((x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2})(\frac{1}{4} - (x + \frac{1}{2})^2 - y^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D (-\frac{1}{2})(\frac{1}{4} - (x + \frac{1}{2})^2 - y^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}V.
\end{aligned}$$

Utan att veta V kan man alltså se att $x_t = -1/2$.

8. Den givna ytan är en cylinderyta, alltså ett ”rör”.

   Lösning med Gauss sats: Slut ytan genom att lägga till lock ($z = 1$) och botten ($z = -1$) med uppåt- respektive nedåtriktad normal. Då innesluts en cylinderkropp K och flödet ut ur den är

$$\iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_K (4 + z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4 \cdot (K\text{:s volym}) = 32\pi.$$

   Här uttnyttjades också symmetrin i z-led.

   På locket/botten är $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = \pm x + 1$. Symmetrin i x-led ger att x-termen inte bidrar. Flödet genom var och en av dessa ytor är alltså lockets/bottens area 4π.

   Flödet genom enbart cylinderytan är alltså $32\pi - 2 \cdot 4\pi = 24\pi$.

   Lösning med parametrisering: $\boldsymbol{n} = (x, y, 0)/2$ är enhetsnormal riktad bort från z-axeln. Alltså är $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = (3x^2 - xy + y^2 z)/2$ på den givna ytan. Av symmetriskäl kommer enbart första termen att bidra. Dessutom ger integrering av $3(x^2 + y^2)/4$ samma resultat. På ytan är $x^2 + y^2 = 4$. Flödet är alltså

$$\iint_Y 3 \,\mathrm{d}S = 3 \cdot (Y\text{:S area}) = 24\pi.$$