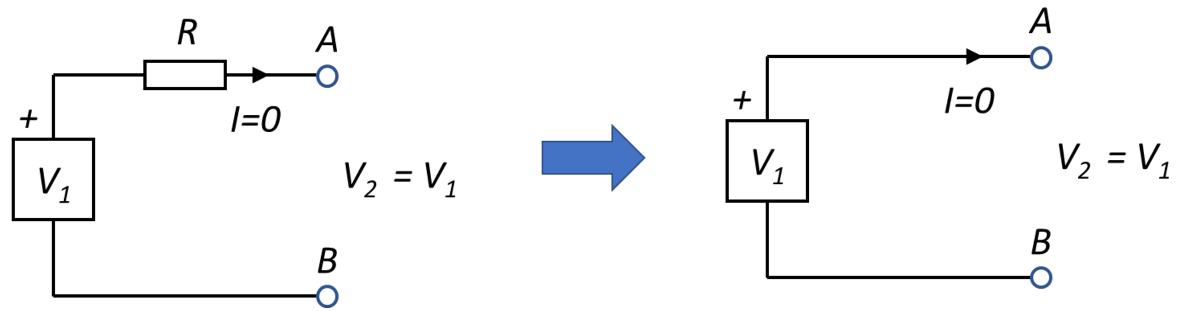
Allmänna tips:

a) Om ett motstånd (eller annan komponent) är **kortsluten**, så menar man att $R = 0$, det kan flyta hur stor ström som helst (Ohms lag)

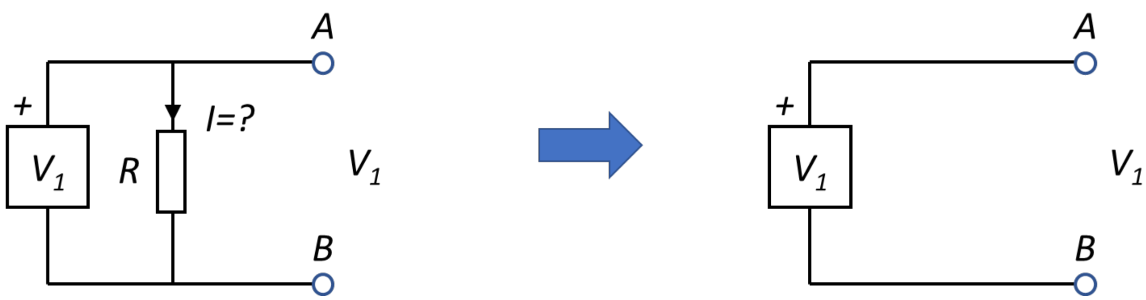
b) Om ett motstånd (eller annan komponent) har **avbrott**, så menar man att $R \to \infty$, ingen ström kan flyta

c) Om en krets är ”öppen”, alltså inte en sluten slinga, kan ingen ström flyta. Om ingen ström flyter genom ett motstånd blir det ingen spänningsskillnad (spänningsfall) över motståndet (Ohms lag).



Man får samma spänning på båda sidorna av motståndet. Motståndet kan tänkas bort och ersättas med en kortslutning.

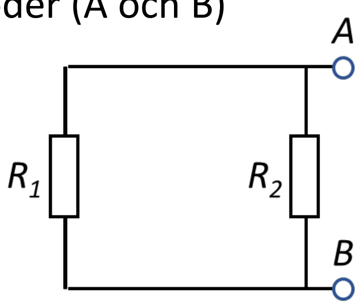
d) Om en ideal spänningskälla kopplas till ett motstånd kommer spänningen V_1 ej att påverkas. Visserligen kommer det att gå ström i motståndet, men den är inte intressant för spänningen som är V_1



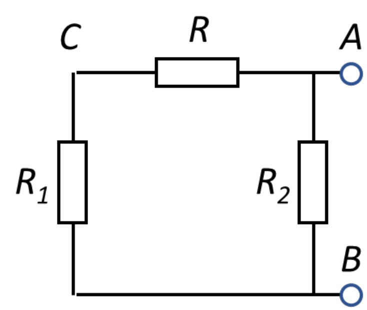
Motståndet kan tänkas bort och ersättas med ett avbrott.

e) Om en krets endast består av motstånd (passiv komponent, tillför ingen energi) och en spännings-källa t ex V_1, spelar det ingen roll hur många motstånd man kopplar ihop och hur, det kommer aldrig att finnas några spänningar som är större än V_1 någonstans i kretsen (orimligt)

f) Om två komponenter (t ex motstånd) är **parallellkopplade** måste de båda vara anslutna till **samma två** noder (A och B)



$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



$$\cancel{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

R_1 och R_2 parallellkopplade

R_1 och R_2 **EJ** parallellkopplade

Uppgift 1a (medel 3.5 p)

Inre resistansen R_i sätts in i spänningsdelningsformeln, lös ut R_1 så fås:

$$E = V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = V_1 \frac{R_i}{R_1} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{V_1}{E} R_i = \frac{10}{6} 6 \cdot 10^3 = 10 \cdot 10^3 \ \Omega$$

Utgå från inre resistansen och lös ut R_2:

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \ \Rightarrow \ R_2 = \frac{R_i R_1}{R_1 - R_i} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3 - 6 \cdot 10^3} = 15 \cdot 10^3 \ \Omega$$

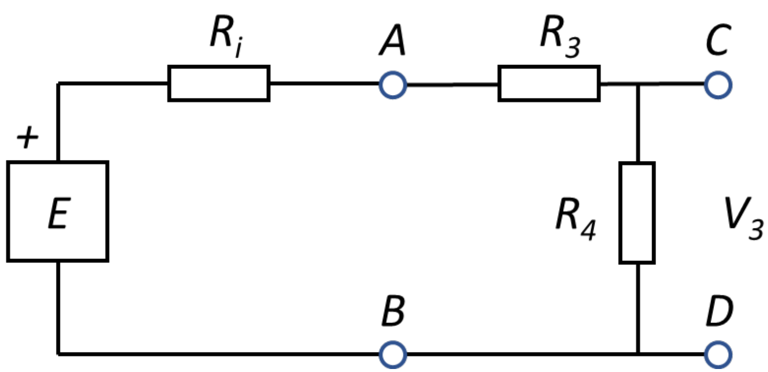
Uppgift 1b (medel 3.4 p)

$V_2 = E$, fås med spänningsdelning och blir exakt detsamma som tomgångsspänningen i tvåpolen:

$$V_2 = V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 10 \frac{15 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3 + 15 \cdot 10^3} = 6 \text{ V}$$

Uppgift 1c (medel 0.9 p)

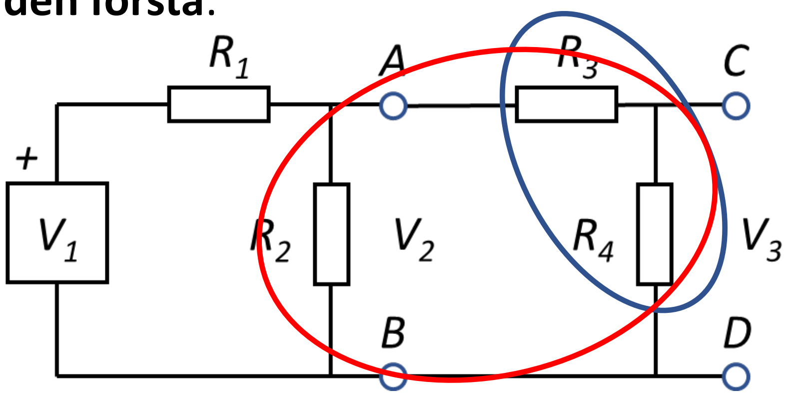
Här kan man göra på flera sätt, ett enkelt sätt är att återanvända tvåpolen, spänningsdelning ger:



$$V_3 = E\frac{R_4}{R_3 + R_i + R_4} = 6\frac{15\cdot 10^3}{10\cdot 10^3 + 6\cdot 10^3 + 15\cdot 10^3} = 2.90 \text{ V}$$

Uppgift 1d (medel 0.6 p)

Beräkna först V_2, därefter V_3, ta hänsyn till att den andra spänningsdelaren kommer att **belasta den första**:



$$V_2 = V_1 \frac{(R_3+R_4)//R_2}{R_1+(R_3+R_4)//R_2}$$

Seriekoppling

Parallellkoppling

$$V_3 = V_2 \frac{R_4}{R_3+R_4} = V_1 \frac{R_4}{R_3+R_4} \frac{(R_3+R_4)//R_2}{R_1+(R_3+R_4)//R_2} =$$

$$V_1 \frac{R_4}{R_3+R_4} \frac{\dfrac{(R_3+R_4)R_2}{R_2+R_3+R_4}}{R_1+\dfrac{(R_3+R_4)R_2}{R_2+R_3+R_4}} = V_1 \frac{R_4R_2}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)}$$

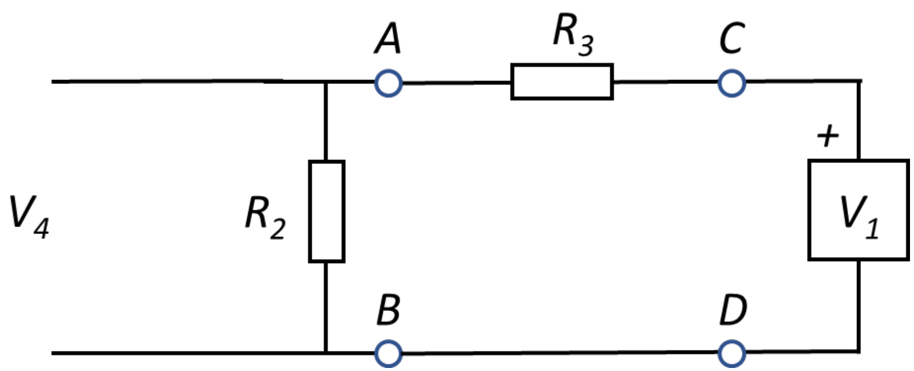
Lös ut R_1:

$$R_1 = \frac{\left(\dfrac{V_1}{V_3}-1\right)R_2R_4 - R_2R_3}{R_2+R_3+R_4} = \frac{\left(\dfrac{10}{3}-1\right)15\cdot 10^3\cdot 15\cdot 10^3 - 15\cdot 10^3\cdot 10\cdot 10^3}{15\cdot 10^3+10\cdot 10^3+15\cdot 10^3} = 9.375\ \text{k}\Omega$$

(Det går att köra maskanalys också)

Uppgift 1e (medel 0.3 p)

Eftersom V_1 är en ideal spänningskälla spelar R_4 ingen roll och kan tas bort. Eftersom "utgången" till vänster är öppen flyter ingen ström, så R_1 kan betraktas som en kortslutning. Återstår en vanlig spänningsdelning:



$$V_4 = V_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 10 \frac{15 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3} = 6 \text{ V}$$

Allmänna tips:

a) En **differentialekvation** består av en okänd funktion (t ex *I(t)*)och dess derivator, exempel:

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{LC}I(t)=\frac{1}{L}\frac{dE}{dt}$$

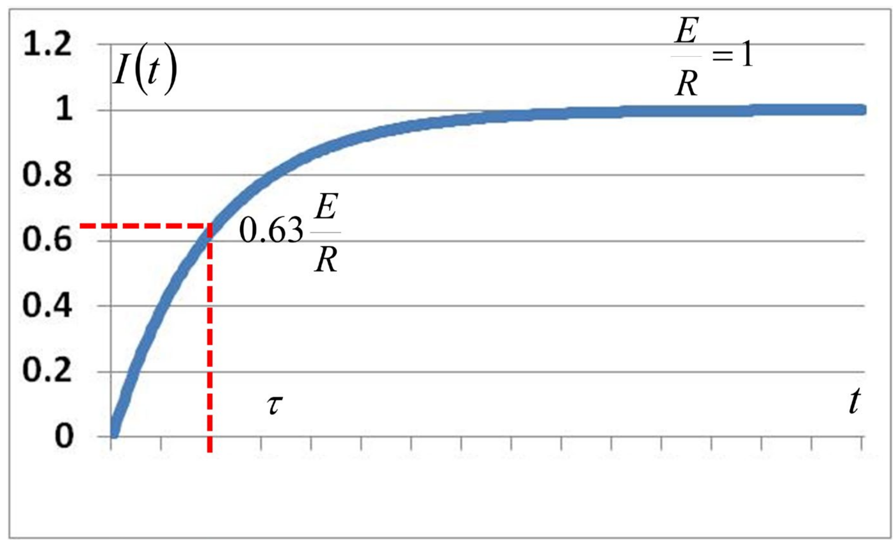
Lösningen till differentialekvationen kan vara t ex: $I(t)=ae^{-\omega_0\zeta t}\sin(\omega_d t)$

b) När en RL-krets laddas upp följer strömmen funktionen (formelsamlingen): $I(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

där tidskonstanten är: $\tau=\frac{L}{R}$

Vid tidskonstanten har strömmen kommit upp till 63% av slutvärdet. Det innebär att om strömmen ska upp till 80% av slutvärdet, måste tiden som åtgår vara större än tidskonstanten.

Får man ett svar som är mindre än tidskonstanten är det orimligt.



Uppgift 2a (medel 2.6 p)

Ur kretsschemat ser man att det är en **serieresonanskrets**. Tittar man på kurvan och jämför med lösningarna i formelsamlingen, ser man att kurvan beskriver en funktion i stil med:

$$I(t) = ae^{-\omega_0 \zeta t}\sin(\omega_d t)$$

En sinussvängning som dämpas exponentiellt. Det innebär att $\zeta < 1$ och att vi har ett underdämpat system. (Komplexa rötter till karaktäristiska funktionen).

När *t* går mot oändligheten, och svängningarna upphört (stationärvärde), ligger vi stadigt på nivån 10 V enligt figuren. Kondensatorn har då laddats upp till spänningskällans värde *E* = 10 V.

Uppgift 2b (medel 2.0 p)

KVL ger: $E = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,d\tau$

som uppstädat blir: $\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC}I(t) = \frac{1}{L}\frac{dE}{dt}$

Uppgift 2c (medel 2.2 p)

Om kondensatorn kortsluts blir kretsen ett RL-nät, differentialekvationen blir då:

$$E = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = \frac{1}{L}E$$

När tiden *t* går mot oändligheten planar kurvan ut och derivatan blir noll:

$$\frac{R}{L}I(t \to \infty) = \frac{1}{L}E \Rightarrow I(t \to \infty) = \frac{E}{R} = \frac{10}{100} = 0.1\ \mathrm{A}$$

Uppgift 2d (medel 2.3 p)

Ur formelsamlingen fås:

$$I_C(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \Rightarrow t = -\frac{L}{R}\ln\left(1 - \frac{RI_C(t)}{E}\right) = -1.6\ln\left(1 - \frac{100 \cdot 0.08}{10}\right) = 2.58\text{ s}$$

Notera att tider *t* kortare än tidskonstanten är orimliga.

Uppgift 2e (medel 2.4 p)

Om motståndet *R* får ett avbrott, är kretsen inte sluten och strömmen blir noll $I(t) = 0 \text{ A}$

Allmänna tips:

a) Om man vill kolla om en ekvation är rätt eller ej kan man använda **dimensionsanalys**. Det innebär att man kollar så att enheterna på storheterna i ekvationen stämmer. Om de inte stämmer, finns anledning att tro att ekvationen är fel. Exempel, vi har fått fram uttrycket:

$$V_1 = V_2 \frac{R}{R + C}$$

Sätt in **enheterna** istället: $[\mathrm{V}] = [\mathrm{V}] \frac{[\Omega]}{[\Omega] + [\mathrm{F}]} = [\mathrm{V}] \frac{\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\right]}{\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\right] + \left[\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}\right]}$

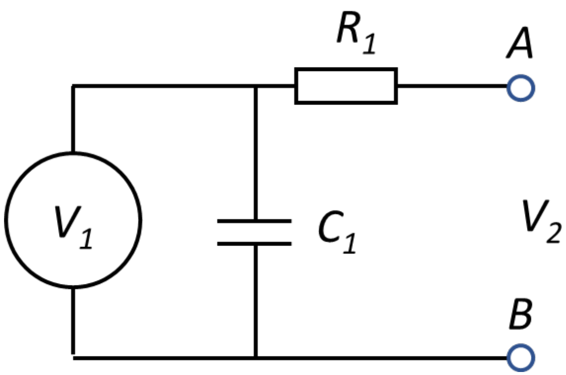
Man ser direkt att detta inte funkar. Vi kan inte addera termerna i nämnaren, eftersom de har olika enheter. Om ekvationen däremot är:

$$V_1 = V_2 \frac{R}{R + \frac{1}{j2\pi fC}}$$ ger dimensionsanalysen: $$[\mathrm{V}] = [\mathrm{V}] \frac{\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\right]}{\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\right] + \frac{1}{\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]\left[\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}\right]}} = [\mathrm{V}] \frac{\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\right]}{\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\right] + \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\right]} = [\mathrm{V}]$$

som stämmer (konstanterna *j* och *2π* är dimensionslösa).

Uppgift 3a (medel 1.5 p)

Det finns två olika sätt att tolka denna uppgift, båda ger poäng (om de är rätt räknade). **Fall 1**, antag att ingången är till vänster (V_1) och utgången till höger (V_2):



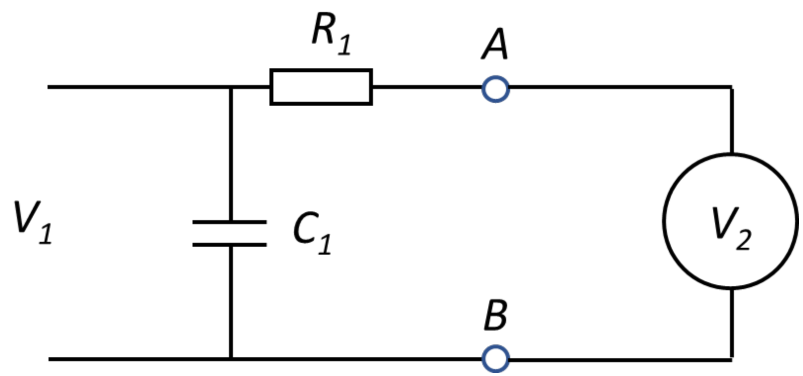
Eftersom spänningen på ingången är V_1 har kondensatorn C_1 ingen inverkan, utan kan tas bort. Strömmen som går genom kondensatorn påverkar inte resten av kretsen. Vi drar ingen ström ut ur kretsen, därför blir det inget spänningsfall över motståndet R_1 utan det kan betraktas som en kortslutning, därför:

$$V_2 = V_1 \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = 1$$

Detta är inget filter i egentlig mening, men kan betraktas som ett ”allpassfilter”, dvs alla frekvenser släpps igenom lika starkt. Av detta skäl finns ingen gränsfrekvens.

Uppgift 3a (medel 1.5 p)

Fall 2, antag att ingången är till höger (V_2) och utgången till vänster (V_1):



$$V_1 = V_2 \frac{1}{1+j\omega C_1 R_1} \Rightarrow G(\omega) = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{1+j\omega C_1 R_1}$$

vid frekvens 0 är $G(0) = \frac{V_1}{V_2} = 1$

Gränsfrekvensen fås vid den frekvens då amplituden sjunkit med faktorn ett genom roten ur 2

$$\frac{|G(\omega_g)|}{|G(0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left|\tilde{G}(\omega_g)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_g^2 C_1^2 R_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Lös ut ω_g: $\sqrt{2} = \sqrt{1+\omega_g^2 C_1^2 R_1^2} \Rightarrow 1 = \omega_g^2 C_1^2 R_1^2 \Rightarrow \omega_g = \frac{1}{C_1 R_1}$

Uttryckt i Hz:

$$f_g = \frac{1}{2\pi C_1 R_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 1.55 \cdot 10^{-4}} = 1026\ \text{Hz}$$

(alternativt kan man använda: $\angle G(\omega_g) = -\frac{\pi}{4}$)

Uppgift 3b (medel 1.7 p)

Utgångspunkten är fall 1 enligt tidigare (ingen har använt fall 2). Vi kan fortfarande bortse från kondensatorn C_1, motståndet R_1 måste däremot tas med, eftersom vi nu drar ström genom det (belastning med R_2 och C_2). Spänningsdelare och jω-metoden ger:

Frekvensfunktion: $$\tilde{G}(\omega)=\frac{V_3}{V_1}=\frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_2}+(R_1+R_2)}=\frac{1}{1+j\omega C_2(R_1+R_2)}=\frac{1}{1+j\omega\cdot 1.15\cdot 10^{-4}}$$

Amplitudfunktion: $$\left|\tilde{G}(\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2C_2^2(R_1+R_2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\cdot 1.32\cdot 10^{-8}}}$$

Fasfunktion: $$\angle\tilde{G}(\omega)=-\arctan\left(\omega C_2(R_1+R_2)\right)=-\arctan\left(\omega\cdot 1.15\cdot 10^{-4}\right)$$

Uppgift 3c (medel 0.7 p)

Ur amplitudfunktionen ovan inser man att maxvärdet är: $\left|\tilde{G}(0)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1+0^2 C_2^2 \left(R_1+R_2\right)^2}} = 1$

Gränsfrekvensen definieras då som den frekvens ω_g där amplituden minskat till $\dfrac{\left|G\left(\omega_g\right)\right|}{\left|G(0)\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ det innebär:

$$\left|\tilde{G}\left(\omega_g\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_g^2 C_2^2 \left(R_1+R_2\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Lös ut ω_g:

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+\omega_g^2 C_2^2 \left(R_1+R_2\right)^2} \Rightarrow 1 = \omega_g^2 C_2^2 \left(R_1+R_2\right)^2 \Rightarrow \omega_g = \frac{1}{C_2\left(R_1+R_2\right)}$$

Uttryckt i Hz får vi:

$$f_g = \frac{1}{2\pi C_2\left(R_1+R_2\right)} = \frac{1}{2\pi \cdot 1.15 \cdot 10^{-4}} = 1384 \text{ Hz}$$

Uppgift 3d (medel 0.5 p)

Frekvensfunktionen blir (spänningsdelare och jω-metoden):

$$\tilde{G}(\omega)=\frac{V_4}{V_1}=\frac{\dfrac{1}{j\omega C_2}}{\dfrac{1}{j\omega C_2}+\dfrac{1}{j\omega C_1}+R_2}=\frac{1}{1+\dfrac{j\omega C_2}{j\omega C_1}+j\omega C_2 R_2}=\frac{1}{1+\dfrac{C_2}{C_1}+j\omega C_2 R_2}=\frac{1}{1.30+j\omega\cdot 6.8\cdot 10^{-5}}$$

Uppgift 3e (medel 0.8 p)

Sätt R_2 = 0 i uttrycket i d):

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{V_4}{V_1} = \frac{1}{1+\dfrac{C_2}{C_1}} = \frac{1}{1.30} = 0.77$$

Åter ett allpassfilter, alla frekvenser släpps igenom lika mycket, men med gain 0.77 gånger (dämpning). En kapacitiv spänningsdelare.