



**Hemtentamen på kursen
Matematisk statistik och sannolikhetslära
MA506G**

2020-06-02, kl. 14:00–19:15

Hjälpmedel: Miniräknare med tomt minne samt formelsamling och kursboken. Det är **inte** tillåtet att samarbeta.

Betygskriterier: Maximalt 60 poäng kan erhållas. För betyget $i \in \{3, 4, 5\}$ krävs $10i$ poäng.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och skriv tydliga svar. Skriv för hand, med papper och penna. Redovisa högst en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning. Skicka dem som **en pdf-fil** via Blackboard senast kl. 19:15.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar

Examinator: Mikael Hansson

Lycka till!

1. En snickare köper paket med 200 små skruvar eller med 100 stora skruvar. Två av tre paket innehåller små skruvar. I genomsnitt innehåller paketen 12 defekta små skruvar och 8 defekta stora skruvar. Snickaren tar på måfå en skruv ur ett paket. [10p]
 - (a) Med vilken sannolikhet är skruven defekt?
 - (b) Med vilken sannolikhet är skruven liten och defekt?
 - (c) Givet att skruven är defekt, med vilken sannolikhet är den stor?

Tips: Lös (c) före (b).
2. Låt den simultana täthetsfunktionen för (X, Y) ges av $f_{X,Y}(x, y) = c(x + y)$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$. [10p]
 - (a) Bestäm konstanten c .
 - (b) Bestäm den marginella täthetsfunktionen för, och väntevärdet av, X .
 - (c) Beräkna $P(|X - Y| > 1)$.
3. Anta att X är en slumpvariabel med värdemängd $\{0, 1, \dots, n\}$ för något heltal $n \geq 2$. Visa att $E(X) = g'_X(1)$ och $V(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$, där $g_X(s) = E(s^X)$ är den sannolikhetsgenererande funktionen. [6p]
4. Vid en viss tentamen når de 60 tentanderna de olika betygsgränserna oberoende av varandra. En tentand får betyg 5 med sannolikheten 6 %. [12p]
 - (a) Bestäm sannolikheten att minst 5 % av tentanderna får betyg 5.

- (b) Använd en lämplig approximation för att beräkna sannolikheten att minst 10 % av tentanderna får betyg 5.
- (c) Efter tentamen hämtar tentanderna sina väskor i kapprummet, där belysningen tyvärr har gått sönder. Varje tentand tar därför en väska på måfå. Bestäm väntevärdet och variansen för antalet tentander som får med sig rätt väska.
Tips: Definiera lämpliga indikatorvariabler.
5. (a) För att undvika framtida nedsläckningar av kapprummet, bestämmer sig vaktmästaren för att testa en ny typ av lysrör, vars livslängd är $\text{Exp}(\lambda)$ dagar. Han installerar 20 lysrör och tänder alla vid samma tidpunkt. När han kommer tillbaka exakt två dagar senare är det tyvärr bara 17 lysrör som fortfarande lyser. Bestäm ML-skattningen av λ . [12p]
Tips: Betrakta en binomialfördelad slumpvariabel som betecknar antalet lysrör som fungerar efter två dagar. Skriv parametern p som en funktion av λ .
- (b) På en högskola har 800 studenter genom åren läst en viss statistikkurs. Lärarna vill visa att en majoritet av dessa hade velat ha fler tentamensuppgifter med approximation av fördelningar. De tar kontakt med 150 av studenterna, av vilka 85 svarar att de hade velat ha fler sådana uppgifter. Har lärarna fått ett signifikant resultat vid 5 % felrisk?
Vilka antaganden om de kontaktade studenterna måste man göra?
6. Ett företag vill tillverka handsprit, med alkoholhalt 70 eller 80 volymprocent. [10p]
I två oberoende stickprov, som kan antas komma från $N(\mu_1, \sigma^2)$ respektive $N(\mu_2, \sigma^2)$, har man observerat att 70-procentspriten **inte** dödar 2.12, 3.14, 3.56, 3.08 procent av alla virus, medan motsvarande data för 80-procentspriten är 2.84, 1.23, 2.52, 2.07, 2.19.
- (a) Bestäm ett 99 % konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$.
- (b) Kan man visa att 80-procentspriten är bättre vid 5 % felrisk?
-