

Tentamen i Modellering och numerisk simulering

DT504A–A001, 4 HP

2023-06-07, kl. 8:15–13:15

Hjälpmedel: Skrivmaterial, miniräknare samt kursboken “Modellbygge och simulering” av Lennart Ljung och Torkel Glad. Ni får markera sidor i boken med hjälp av post-it-flikar eller liknande. Boken kan också få innehålla anteckningar i form av några få ord per sida. Omfattande egna anteckningar är däremot inte tillåtna.

Betygskriterier: Skrivningen består av 6 uppgifter och maxpoängen är 60. För betyg 3/4/5 krävs respektive 30/40/50 poäng.

Anvisningar: Motivera dina lösningar väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Var tydlig med vad som antas och vad som visas. Det är huvudsakligen motiveringarna och själva lösningen som ger poäng, inte det slutgiltiga svaret. Tentamen innehåller lättare och svårare uppgifter blandat. Börja därför med att läsa igenom hela tesen och lös sedan uppgifterna i en ordning som passar dig. Redovisa inte mer än en huvuduppgift (1–6) per blad och lämna in lösningarna i uppgiftsordning.

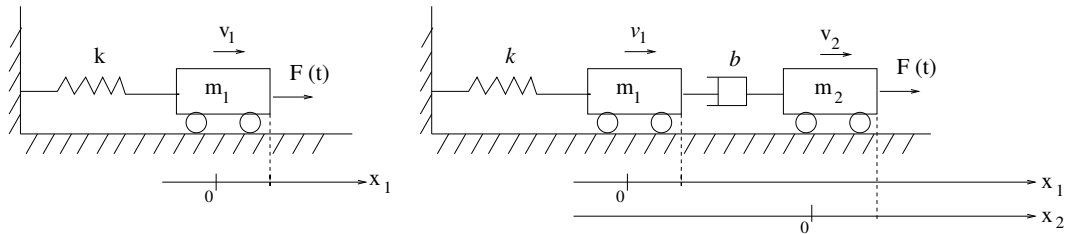
Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Ansvariga lärare:

- Peter Johansson, uppgift 1–4, tel. 070-393 3093
- Franziska Klügl, uppgift 5–6, tel. 070-668 9179

Examinator: Peter Johansson

Uppgift 1



Figuren ovan visar två snarlika mekaniska system, det till vänster med en enda massa m_1 , och det till höger med två massor, m_1 och m_2 . I båda fallen kan massorna röra sig friktionsfritt i x -led med positioner x_1 och x_2 och hastigheter v_1 och v_2 . Massa 1 är i båda fallen länkad till en fast vägg via en fjäder med fjäderkonstanten k .

I systemet med två massor är dessa båda sammankopplade av en dämpare som ger en viskös friktionskraft proportionell, med proportionalitetskonstanten b , mot skillnaden mellan de båda massornas hastigheter. I båda fallen verkar en yttre kraft $F(t)$ på massan längst till höger. Nollpunkten för koordinaten x_1 är vald så att fjäderkraften ska bli noll då $x_1 = 0$.

- (a) Rita en bindningsgraf för systemet med en massa och kausalitetsmarkera grafen. [3 p]
- (b) Rita en bindningsgraf för systemet med två massor och kausalitetsmarkera grafen. [2 p]

- (c) Härled systemekvationerna på tillståndsform för systemet med två massor. [5 p]

Uppgift 2

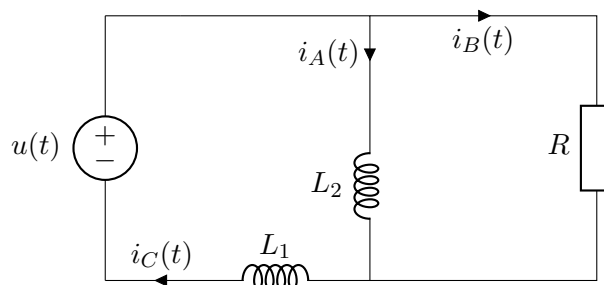
Under kursens gång studerade vi en modell som beskriver samspelet mellan populationerna av två olika arter, dels en rovdjursart med x individer, dels en bytesdjursart med y individer. Antalet individer kan enligt den modellen anses variera i tiden enligt sambanden (differentialekvationerna)

$$\begin{cases} x'(t) = (\lambda_1 - \gamma_1)x + \alpha_1xy, \\ y'(t) = (\lambda_2 - \gamma_2)y - \alpha_2xy. \end{cases}$$

De konstanter som ingår i sambanden har värdena $\lambda_1 = 1$, $\gamma_1 = 2$, $\lambda_2 = 2.5$, $\gamma_2 = 1$, $\alpha_1 = 10^{-4}$ och $\alpha_2 = 2 \times 10^{-3}$.

- (a) Antag att det inte finns några bytesdjur och att antalet rovdjur i ursprungsläget är $x(0) = 1500$. Hur utvecklas antalet rovdjur med tiden? [2 p]
- (b) Bestäm systemets stationärtillstånd. [4 p]
- (c) Härled linjariserade differentialekvationer som beskriver hur populationerna utvecklas i tiden i närheten av det icke-triviala stationärtillståndet (där alltså både x och y är skilda från noll). [4 p]

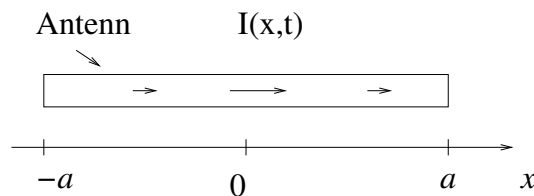
Uppgift 3



Figuren visar en elektrisk krets som har en tidsberoende spänningskälla $u(t)$ som insignal. Samtliga komponenter, motståndet med resistansen R liksom de båda spolarna med induktanserna L_1 respektive L_2 , är linjära.

- (a) Rita bindningsgraf för systemet. [2 p]
- (b) Teckna ett ekvationssystem på DAE-form för det fall att de generaliserade tillståndsvariablerna ges av strömmarna $i_A(t)$, $i_B(t)$ och $i_C(t)$ d.v.s. den generaliserade tillståndsvektorn ges av $\vec{z}(t) = [i_A(t), i_B(t), i_C(t)]^T$ (T står här för transponatet). [3 p]
- (c) Bestäm index för den DAE-beskrivning du funnit i deluppgift (b). [3 p]
- (d) Hur många egentliga tillståndsvariabler har systemet? [2 p]

Uppgift 4



En enkel modell för en antenn som sänder ut radiovågor, till exempel antennen i en mobiltelefon, består av en rak elektrisk ledning med längden $2a$ där strömmen i ledningen varierar med x (positionen i ledningen) och tiden t enligt

$$I(x, t) = I_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \omega t.$$

Modellen illustreras schematiskt i figuren ovan (en riktig antenn måste dock ha en källa som matar in ström på mitten av antennen). Strömmens storlek i en viss punkt vid en viss tidpunkt bestäms alltså, förutom av x och t , av konstanten I_0 som har enheten ampere. Den effekt P som antennen skickar ut beror på I_0 , a och ω samt på två konstanter, ljushastigheten $c = 3 \times 10^8$ m/s och den så kallade vakuumpermittiviteten $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ As/(Vm). (Ni har kanske tidigare träffat på ε_0 i Coulombs lag för kraften mellan två laddningar.)

Sambandet mellan storheterna P , I_0 , a , ω , c och ε_0 som vi infört ovan kan skrivas på formen

$$F(P, I_0, a, \omega, c, \varepsilon_0) = 0.$$

Sambandet måste dock också kunna uttryckas på dimensionslös form,

$$G(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0,$$

där π_1 etc. är dimensionslösa storheter.

- (a) Hur många (m stycken) dimensionslösa variabler finns det i det här fallet? [4 p]
- (b) Ta fram uttryck för de dimensionslösa variablerna π_1 , π_2 , etc. [4 p]
- (c) Ljushastigheten c bestäms av ε_0 tillsammans med en annan fundamental konstant, μ_0 , (som kallas permeabiliteten för vakuum) enligt sambandet

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}.$$

Vilken SI-enhet har μ_0 ? [2 p]

Uppgift 5

- (a) Under which circumstances is the reachability graph of a Petri Net equal to the coverability graph? Explain the difference between the two. [1p]
- (b) Consider the following Petri Net in Figure 1.

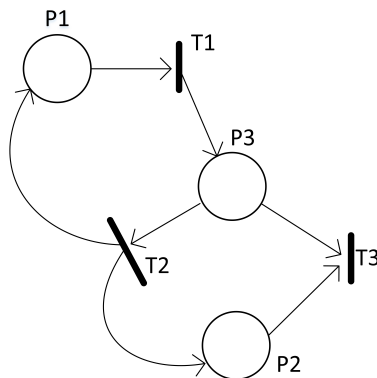


Figure 1: Petri Net

Give a constellation of token in the above Petri Net, so that the Petri Net is unbound?

Is there a constellation of token with which the Petri Net is bound.

What about deadlocks? Is there a start constellation of tokens that may end in a deadlock situation?

Justify your answers showing the coverability or reachability graph [3+2+2p].

- (c) Look at Figure 2. Is there a difference between the two Petri Nets? [2p]

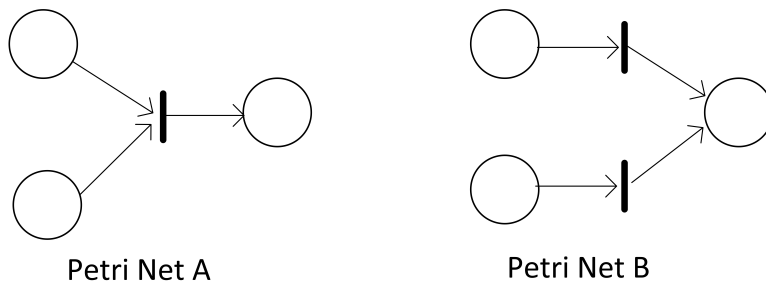


Figure 2: Petri Net A and B

Uppgift 6

The task is to model the public transport system of a town consisting of buses that follow schedules on different lines, stop at bus stops where passengers enter and leave buses (ignore other types of vehicles such as trams, taxis, cars, bicycles...). The municipality management wants to optimize the public transportation system and tasks you to create a discrete-event simulation for it.

- (a) Which basic events would you consider modelling the public transportation system? Explain your selection! [3p]
- (b) Does it make sense to organize events in a process-oriented way? What would be the entities that you would associate processes with, what would be the resources? Justify your answer! [2p]
- (c) If you would model the system as a queuing system, which elements would be the servers, what could be a queue? Justify your choices, what do you see as main challenges? [3p]
- (d) Which of the data that you need can you collect while simulating your model? [2p]