ÖREBRO
UNIVERSITET

Tentamen på kursen Integraler och differentialekvationer

MA504G

2022-03-23, kl. 15:15–20:15

Hjälpmedel: Skrivmateriel och bifogat formelblad.

Betygskriterier: För betyget 3/4/5 krävs minst 3 poäng på differentialekvationer på grundläggande delen samt totalt 30/40/50 poäng på tentamen.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Marcus Sundhäll.

Lycka till!

Grundläggande del

1. (a) Bestäm $|zw|$, $|z/w|$, $\arg(zw)$ och $\arg(z/w)$ om $z = (2-2i)^2$ och $w = \sqrt{3}+i$. [3p]

   (b) Bestäm värdet för integralen [3p]

$$\int_{-2}^{2} \left(x + \sqrt{16-4x^2}\right) dx\,.$$

2. Bestäm $y(x)$ så att [6p]

$$y'(x) - 2xy(x) = x\,,\ y(0) = 2\,.$$

3. Rita området $D = \{(x,y) : 1 \le y \le e^{2x}\,, 0 \le x \le 1\}$. Markera ett horisontellt areaelement dA med höjden dy och motivera att $dA = (1-\frac{1}{2}\ln(y))dy$. Beräkna sedan D:s area med hjälp av integralen [6p]

$$\int_{1}^{e^2} \left(1 - \frac{1}{2}\ln(y)\right) dy\,.$$

4. Använd lämpliga Maclaurinutvecklingar för att beräkna gränsvärdet [6p]

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin(2x)}{x(1-\cos(3x))}\,.$$

   Avgör därefter om den generaliserade integralen

$$\int_{0}^{1} \frac{2x - \sin(2x)}{x^2(1-\cos(3x))}\, dx$$

   är konvergent eller divergent.

5. Beräkna integralen [6p]

$$\int_0^1 (x-1)\sqrt{2x+1}\,dx\,.$$

6. Enligt Torricellis lag kan vi anta att en viss behållare med vatten hela tiden töms i en takt enligt [6p]

$$6h \cdot \frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$$

där $k > 0$ och $h = h(t)$ är vattennivån i behållaren vid tiden t. Antag att $h(0) = 4$ och att $h(1) = 1$. Använd givna antaganden och villkor för att bestämma $h(t)$.

Fördjupad del

7. Bestäm volymen V av den rotationskropp som uppstår då cirkelskivan [8p]

$$D = \big\{(x,y) : (x-2)^2 + y^2 \leq 4\big\}$$

roteras ett varv kring y-axeln. Gör detta genom att:

(a) använda Pappus-Guldins regel. Den säger att volymen är $V = 2\pi d \cdot A(D)$ där $A(D)$ är arean av det plana område D som roteras och d är avståndet från områdets tyngdpunkt till rotationsaxeln.

(b) utan att använda Pappus-Guldins regel.

Anmärkning till (a)-uppgiften: Det är tillåtet att hänvisa till tyngdpunkt för kända geometriska objekt, alternativt till symmetrier som troliggör identifiering av tyngdpunkt.

8. Bestäm den deriverbara funktionen $y(x)$ sådan att [8p]

$$y'(x) = 2 + \int_0^x (2t - y'(t))\,dt\,,$$

och $y(0) = -1$.

9. Bestäm värdet av den generaliserade integralen [8p]

$$\int_2^\infty \frac{x}{x^4-1}\,dx\,.$$

Använd detta värde för att göra lämplig uppskattning av serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^4-1}\,.$$