ÖREBRO
UNIVERSITET

LÖSNINGSFÖRSLAG:

DISTANSTENTAMEN:

Våg- och materiefysik för civilingenjörer

FY501G-0100

2021-03-20, kl. 08:15-13:15

Hjälpmedel: Skrivmateriel, lärobok[1] och miniräknare.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga deluppgifter kan ge 5 poäng och bedöms utifrån kriterier för *kunskap och förståelse*; *färdighet, förmåga och värderingsförmåga;* samt *skriftlig avrapportering*. För betyg 3/4/5 räcker det med 4 poäng inom vart och ett av områdena *vågrörelselära*, *elektromagnetism*, *kvantmekanik och materiens struktur* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl med sidhänvisningar och formelnummer från läroboken, redovisa alla väsentliga steg, rita tydliga figurer och svara med rätt enhet. Skriv din ladokkod i hörnet uppe till höger på varje sida. Redovisa inte mer än en huvuduppgift per sida och scanna in i uppgiftsordning i god tid.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Magnus Ögren.

Lycka till!

---

1. a) Pris: $\frac{20[EUR]}{1[MWh]} = \frac{200 \cdot 100[öre]}{1 \cdot 10^3[kWh]} = 20\left[\frac{öre}{kWh}\right]$

Svar a): Elpriset för PWR BLOK 400-F är 20 öre per kWh.

Using $v = \sqrt{\tau / \mu} = \sqrt{\tau L / m}$, we find the length of the string to be

b)

$$L = \frac{mv^2}{\tau} = \frac{(2.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(120\ \text{m/s})^2}{7.00\ \text{N}} = 4.11\ \text{m}.$$

The wavelength of the wave with the lowest resonant frequency f_1 is $\lambda_1 = 2L$,

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{120\ \text{m/s}}{2(4.11\ \text{m})} = 14.6\ \text{Hz}.$$

Svar b): Strängens längd är 4.11 m och strängen har den lägsta resonansfrekvensen 14.6 Hz.

---

[1] *Principles of Physics* 10.th ed. Halliday, Resnick, Walker

2.
Uppgifterna "b" och "c" nedan, motsvarar 2 a.
Uppgifterna "d" och "e" nedan, motsvarar 2 b.

2.

a) Grundtonens frekvens uppfyller $f = \frac{v}{4L} = \frac{343}{4 \cdot 0.035} = 2450$ Hz (17-41). **Svar a):** Grundtonens frekvens i hörselgången på en människa är ca $f = 2.5$ kHz.

b

(~~a~~) The intensity is given by $I = P/4\pi r^2$ when the source is "point-like." Therefore, at $r = 4.20$ m,

$$I = \frac{3.00 \times 10^{-6}\ \text{W}}{4\pi(4.20\ \text{m})^2} = 1.35 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2.$$

c

(~~b~~) The sound level there is

$$\beta = (10\ \text{dB}) \log\left(\frac{1.35 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2}{1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2}\right) = 41.3\ \text{dB}.$$

At the beginning of the exercises and problems section in the textbook, we are told to assume $v_{sound} = 343$ m/s unless told otherwise. The second harmonic of pipe A is found from Eq. 17-39 with $n = 2$ and $L = L_A$, and the 5th harmonic of pipe B is found from Eq. 17-41 with $n = 5$ and $L = L_B$. Since these frequencies are equal, we have

$$\frac{2v_{sound}}{2L_A} = \frac{5v_{sound}}{4L_B} \Rightarrow L_B = \frac{5}{4} L_A.$$

d

(~~a~~) Since the fundamental frequency for pipe A is 425 Hz, we immediately know that the second harmonic has $f = 2(425\ \text{Hz}) = 850$ Hz. Using this, Eq. 17-39 gives

$$L_A = (2)(343\ \text{m/s})/2(850\ \text{s}^{-1}) = 0.4035\ \text{m} \approx 40.4\ \text{cm}.$$

e

(~~b~~) The length of pipe B is $L_B = \frac{5}{4} L_A = \frac{5}{4}(0.4035\ \text{m}) = 0.504\,\text{m} = 50.4\,\text{cm}$.

3. Vi använder laddningarna +1 elementarladdning (e) för en proton och -1 elementarladdning för en elektron. Vi kan använda formeln (22-3) för att beräkna (styrkan av) det elektriska fältet från en punktladdning och delar upp riktningsvektorn i två komponenter (z-koordinaten kan antas vara noll då alla laddningar ligger i ett plan). En elektron ger tex en positiv y-komponent för det elektriska fältet då riktningen sammanfaller med kraften på en positiv testladdning.

a) Vi summerar alla x- och y-komponent ($\theta_0 = 0$):

$$E_{x,tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta_1 - \cos(\theta_1+\theta_2) - \cos(\theta_3+\theta_4) + \cos\theta_4\right) e = 0.2575 \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{1}$$

$$E_{y,tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta_1 - \sin(\theta_1+\theta_2) + \sin(\theta_3+\theta_4) - \sin\theta_4\right) e = -1.061 \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{2}$$

Med siffervärden på konstanterna och $r = 0.0250$ m erhåller vi $E_{x,tot} = 5.932 \cdot 10^{-7}$ N/C och $E_{y,tot} = -2.444 \cdot 10^{-6}$ N/C. Så att $\left|\vec{E}\right| = \sqrt{E_{x,tot}^2 + E_{y,tot}^2} = 2.515 \cdot 10^{-6}$ N/C och $\theta = \arctan\left(\frac{E_{y,tot}}{E_{x,tot}}\right) = -76.36°$ (verkar rimligt map figuren).

Svar a): Styrkan för E-fältet är $2.52 \cdot 10^{-6}$ N/C och dess riktning är $-76.4°$.

b) Gauss sats för elektriska fält (23-7):

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}. \tag{3}$$

Då $\vec{E}$-fältet är parallellt med z-axeln kan endast den övre och den undre ytan på kuben ge bidrag till skalärprodukten i integralen, så att

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = -34\vec{e_z} \bullet \left(0.040^2\vec{e_z}\right) + 20\vec{e_z} \bullet \left(-0.040^2\vec{e_z}\right) = (-34 - 20)\, 0.040^2\vec{e_z} \bullet \vec{e_z} = -0.0864 = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}. \tag{4}$$

Den totala elektriska laddningen inne kuben är då $q_{enc} = -0.0864 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} = -7.6499 \cdot 10^{-13}$ C.

Svar b): I kuben finns totalt laddningen $-7.6 \cdot 10^{-13}$ C.

4.

a) Enheten, här betecknad med [...], för vänsterledet i ekvation (1) på tentan är

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right][E_x] = \left[\frac{\partial}{\partial x}\right]^2 [E_x] = \frac{[E_x]}{[x]^2}.$$

Enheten för högerledet är

$$\frac{1}{[c]^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right][E_x] = \frac{[t]^2}{[x]^2}\frac{[E_x]}{[t]^2} = \frac{[E_x]}{[x]^2}.$$

Enheten för vänsterledet i ekvation (2) på tentan är

$$[c] = \frac{[x]}{[t]}. \tag{5}$$

En bland många möjliga lösningar kan vara att nu titta på vänsterledet och den första termen i högerledet av Ampere-Maxwell lag (32-5), där $[\Phi_E] = [EA] = \frac{N}{C} \cdot m^2$ (23-2)

$$\left[\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}\right] = Tm = \left[\mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\right] = [\mu_0\varepsilon_0]\, \frac{\frac{N}{C}m^2}{s},$$

så att

$$[\mu_0 \varepsilon_0] = \frac{TCs}{Nm} = \frac{\left(\frac{Ns}{Cm}\right) Cs}{Nm} = \frac{s^2}{m^2},$$

där vi använt (tex) formel (28-2) för att uttrycka Tesla i Newton-sekund per Coulombmeter.

Enheten för högerledet är då

$$\frac{1}{\sqrt{[\varepsilon_0]\,[\mu_0]}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{s^2}{m^2}}} = \frac{[x]}{[t]},$$

i överensstämmelse med vänsterledet i (2).

Först och främst mäts det elektriska fältet och det magnetiska fältet i olika enheter, varför deras styrkor inte direkt kan jämföras. Ett argument som brukar användas för att det elektriska fältet inte är *starkare* än det magnetiska är att energin pga det elektriska fältet och energin pga det magnetiska fältet är lika stora i en EM-våg, se sidan 886 (och 799) i kursboken.

Svar a): Vi visar ovan att vänsterledet och högerledet i ekvation (1) och (2) på tentan har samma enhet. Ett bra argument för att det elektriska fältet inte är starkare än det magnetiska är att energibidragen från de magnetiska- och elektriska-fälten i en EM-våg är lika stora.

b) Enligt (33-19) transporteras energin i riktningen som ges av Poynting vector $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{\left|\vec{E}\right|}{\mu_0}\vec{e}_x \times (0, B_y, B_z) = \frac{\left|\vec{E}\right|}{\mu_0}(0, -B_z, B_y)\,,$$

där kryssprodukten tex kan beräknas från minnesregeln $\vec{E}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix}$ (Appendix E), alternativ kan ekvationssystem sättas upp mha bla skalärprodukterna $\vec{S} \cdot \vec{E} = 0$ och $\vec{S} \cdot \vec{B} = 0$.

Svar b): EM-vågen transporterar energi i riktningen $(0, -B_z, B_y)$.

5.

a) Problemet handlar om fotoelektrisk effekt. Vi använder (38-5) för att se om elektronerna kan ha någon positiv kinetisk energi, dvs om de lossnar.

$$hf = K_{max} + \Phi \Rightarrow K_{max} = h\frac{c}{\lambda} - \Phi = 6.63 \cdot 10^{-34} \frac{3.00 \cdot 10^{8}}{0.55 \cdot 10^{-6}} - 0.35 \cdot 10^{-18} = 1.16 \cdot 10^{-20} J.$$

Svar a): Ja det lossnar elektroner, som får den kinetiska energin $1.2 \cdot 10^{-20}$ J.

b) Strålarnas fart i plast ges av $c_j = c/n_j,\ j = 1, 2$. Strålarnas våglängd i plasten ges av $\lambda_j = c_j/f = \lambda/n_j,\ j = 1, 2$, där vi utnyttjat att frekvensen $f = c/\lambda$ är samma i de båda medierna $j = 1, 2$.

Vi får då antalet våglängder som respektive stråle har i plastmaterialen enligt $N_j = L_j/\lambda_j = L_j n_j/\lambda$, dvs

$$N_1 = \frac{L_1 n_1}{\lambda} = \frac{4.00 \cdot 10^{-6} \cdot 1.42}{600 \cdot 10^{-9}} = 9.4667,\ N_2 = \frac{L_2 n_1}{\lambda} = \frac{3.50 \cdot 10^{-6} \cdot 1.60}{600 \cdot 10^{-9}} = 9.3333. \tag{6}$$

Nu gäller att $L_2 < L_1$, så stråle $j = 2$ behöver gå ytterliggare sträckan $L_1 - L_2$ med våglängden λ i luft för att jämföras med stråle $j = 1$, detta bidrar med följande antal våglängder

$$N = \frac{(L_1 - L_2)\, n}{\lambda} = \frac{(4.00 - 3.50) \cdot 10^{-6} \cdot 1}{600 \cdot 10^{-9}} = 0.8333. \tag{7}$$

Totalt är skillnaden i antalet våglängder $\Delta N = N_2 + N - N_1 = 9.3333 + 0.8333 - 9.4667 = 0.6999 \simeq 0.7$

Om fasskillnaden är ett heltal är strålarna i fas och det blir det konstruktiv interferens.

Om fasskillnaden är ett halvtal är strålarna helt i ofas och det blir det destruktiv interferens.

I detta fall är svaret ovan (0.7) närmare ett halvtal än ett heltal, så interferensen ligger närmare destruktiv än konstruktiv.

Svar b): När båda strålarna passerat plastmaterialen skiljer deras fas med en multipel 0.7 av den ursprungliga våglängden. Om strålarna interfererar efter passagen av plastmaterialen är resultatet mera destruktivt än konstruktivt.

6.

a) Enligt (39-4) ges grundtillståndet för elektronen av följande formel för $n = 1$

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \Rightarrow L = \frac{hn}{\sqrt{8mE_n}} = \frac{6.6261 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{8 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 1.0 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}}} = 6.133 \cdot 10^{-10} m \simeq 0.61 nm. \tag{8}$$

Svar a): Stämmer!

b) Sannolikhetstätheten blir absolutkvadraten på vågfunktionen, dvs funktionen vi ser i figuren är

$$\left|\Psi_{n_x, n_y}(x, y)\right|^2 = \frac{4}{L_x L_y} \sin^2\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \sin^2\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right). \tag{9}$$

Denna funktion (figuren) har 1 nollställe inuti intervallet $0 < x < L_x$ samt 2 nollställen inuti intervallet $0 < y < L_y$. Detta uppfylls endast om $n_x = 2$ och $n_y = 3$.

Ett (av många möjliga) illustrerande exempel är de två olika vågfunktionerna (39-19) $n_x = 1$, $n_y = 4$ samt $n_x = 2$, $n_y = 2$, som enligt (39-20) båda har samma energi för $L_y = 2L_x$, dvs

$$E(n_x = 1,\ n_y = 4) = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right) = \frac{h^2}{8mL_x^2}\left(n_x^2 + \frac{n_y^2}{4}\right) = \frac{h^2}{8mL_x^2}(1+4) \tag{10}$$

$$= \frac{h^2}{8mL_x^2}(4+1) = E(n_x = 2,\ n_y = 2). \tag{11}$$

Svar b): Kvanttalen är $n_x = 2$ och $n_y = 3$. Enligt (tex) exemplet ovan.