



Tentamen i
Matematisk statistik och sannolikhetslära
MA506G

2022-01-04, kl. 8.15–13.15

Hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare med tomt minne

Betygskriterier: Maxpoäng på tentan är 60 poäng, och den nedre gränsen för betyg k ($k \in \{3, 4, 5\}$) är $10k$ poäng.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Besvara högst en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning om ni vill att rättaren ska hitta dem och ge poäng för lösningen.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Niklas Eriksen.

Lycka till!

1. Vi har en urna med tre sorters kort: två kort som är vita på båda sidor, tre kort med en röd och en vit sida, och två kort som är röda på båda sidor.
 - (a) Vi tar upp ett kort på måfå och konstaterar att dess ena sida är röd. Med vilken sannolikhet är även den andra sidan röd? [5p]
 - (b) Lägg tillbaka kortet i urnan. Plocka därefter upp två kort utan återläggning och titta på en av deras sidor. Hur stor är sannolikheten att båda korten visar en vit sida? [5p]
2. Antag att 48 personer singlar slant 5 gånger var, och låt X beteckna antalet personer som får antingen fem krona eller fem klave.
 - (a) Vilken fördelning har X ? [3p]
 - (b) Beräkna $\mathbf{E}(X)$ och $\mathbf{V}(X)$. [2p]
 - (c) Beräkna approximativt $\mathbf{P}(X \leq 3)$. [5p]
3. Betrakta funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{7}{3} - \frac{2}{3}x & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- (a) Beräkna fördelningsfunktionen till X och skissa dess graf. [5p]

- (b) Bestäm väntevärdet för X . [5p]
4. Låt X vara medeltemperaturen i Örebro under juli. På SMHIs nätsidor kan man läsa att den medeltemperatur som i genomsnitt underskrids vart tionde år är $14,2\text{ }^{\circ}\text{C}$ och den medeltemperatur som i genomsnitt överskrids vart tionde år är $18,0\text{ }^{\circ}\text{C}$.
- (a) Motivera att X är ungefärligen normalfördelad och beräkna väntevärdet och standardavvikelsen för X ? [4p]
- (b) Medeltemperaturen under juli i år var $18,3\text{ }^{\circ}\text{C}$. Hur stor är sannolikheten att juli under ett godtyckligt valt år är $18,3\text{ }^{\circ}\text{C}$ eller varmare? [3p]
- (c) Vilken värme når man upp till (i genomsnitt) en gång per sekel? (Varmaste juli som man mätt var 1914, med $21,6\text{ }^{\circ}\text{C}$.) [3p]
5. (a) Låt X vara en diskret slumpvariabel med sannolikhetsfunktionen [6p]

$$p_X(k) = (k-1)(1-p)^{k-2}p^2$$

för $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$ och $0 \leq p \leq 1$. Vi tar ett stickprov och får då följande värden på X : 16, 8, 9, 10, 27 och 12. Bestäm Maximum-likelihood-skattningen av p .

- (b) Låt $Y_j \sim \text{Bin}(5, p)$ för $1 \leq j \leq 2$. Två skattningar av sannolikheten p är [4p]

$$\hat{p}_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{10}$$

och

$$\hat{p}_2 = \frac{3Y_1 + Y_2}{20}.$$

Visa att båda skattningarna är väntevärdesriktiga.

6. Ett tegelbruk vill undersöka om bränntemperaturerna påverkar densiteten. Av fem olika lerblandningar skapas två kuber per blandning, där den ena bränns i $150\text{ }^{\circ}\text{C}$ och den andra i $200\text{ }^{\circ}\text{C}$. Vi får då följande resultat: [10p]

Blandning	1	2	3	4	5
$150\text{ }^{\circ}\text{C}$	33.2	32.9	32.8	32.0	34.5
$200\text{ }^{\circ}\text{C}$	33.6	33.1	33.0	32.9	35.5

Avgör genom att bilda ett 95 % konfidenintervall om de olika förbrännings-temperaturerna ger någon skillnad i densitet.