ÖREBRO
UNIVERSITET

Flervariabelanalys för civilingenjörer

MA505G-0100

2021-06-03, kl. 14:15–19:15

Hjälpmedel: Endast skrivmateriel. Formelblad delas ut tillsammans med skrivningen.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga uppgifter bedöms utifrån kriterier för *problemlösning* och *redovisning*. För betyg 3/4/5 räcker det med 4 poäng inom vart och ett av huvudområdena *differentialkalkyl*, *integralkalkyl* och *vektoranalys* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg, rita tydliga figurer och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Andreas Bergwall.

Lycka till!

Grundläggande uppgifter (6p/uppgift)

1. Bestäm ekvationen för det plan som tangerar nivåytan $x^2z - 2y + e^z = 1$ i origo. Om det skulle gå att lösa ut z ur nivåytans ekvation, vad skulle $z'_y(0,0)$ bli?

2. Visa att $f(x,y) = \dfrac{2}{3}x^3 - x^2 - \dfrac{1}{2}x^2y + xy + \dfrac{1}{2}y^2$ har exakt en lokal extrempunkt.

3. Beräkna volymen av det begränsade området mellan ytorna $z = 1 - x^2$ och $z = -1 + y^2$.

4. Beräkna $\int_\gamma 2xz\,\mathrm{d}x - 2\,\mathrm{d}y + (x^2 + e^z)\,\mathrm{d}z$, dels om γ är linjestycket från $(0,0,0)$ till $(1,2,3)$, dels om γ är parameterkurvan $\boldsymbol{r}(t) = (t, 2t^2, 3t^3)$, $0 \le t \le 1$.

5. Beräkna flödet av vektorfältet $\boldsymbol{u} = (x\sin y, ze^{xyz}, z)$ in genom randytan till rätblocket $K = [0,1] \times [-1,1] \times [0,1]$.

Kom ihåg att illustrera relevanta definitionsmängder, integrationsområden och orienteringar med tydliga figurer.

Fördjupade uppgifter (10p/uppgift)

6. Betrakta ytan $z = x^2 + 2xy$, $2x^2 + y^2 \leq 1$.

   (a) Tänk dig att du står i en punkt (x, y, z) på ytan och tittar åt det håll som den lutar brantast uppåt. Hur stor är lutningen?

   (b) I vilken punkt på ytan finns den allra största lutningen och hur stor är den?

   Ledning: Som vanligt tänker vi oss att det är z-axeln som går rakt uppåt. Ditt svar i (a) ska vara ett uttryck i x och y. I (b) ska du bestämma största värdet hos detta uttryck då $2x^2 + y^2 \leq 5$.

7. Bestäm tyngdpunkten hos

   (a) ett homogent halvklot K, och

   (b) halvklotets randyta ∂K.

   Ledning: I (a) ges tyngdpunktens x-koordinat av

   $$x_t = \frac{\iiint_K x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_K \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

   och motsvarande för övriga koordinater. I (b) får trippelintegralerna bytas mot ytintegraler över ∂K.

8. Låt $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ vara en enhetsvektor och låt Γ vara den cirkelskiva som har radie 1, centrum i origo, och normalvektor $\boldsymbol{n}$. Låt $\partial\Gamma$ vara den positivt orienterade randkurvan till Γ.

   (a) Beräkna $\displaystyle\int_{\partial\Gamma} (y + z^2)\,\mathrm{d}x + (2z + x^2)\,\mathrm{d}y + (3x + y^2)\,\mathrm{d}z$. Tänk på att Γ ligger i planet $ax + by + cz = 0$ och utnyttja symmetrier!

   (b) Hur ska a, b och c väljas för att integralen i (a) ska få ett så stort värde som möjligt?

Kom ihåg att illustrera relevanta definitionsmängder, integrationsområden och orienteringar med tydliga figurer.

Kommentarer till Flervariabelanalys för civilingenjörer 20210603

1. Låt $g(x, y, z) = x^2z - 2y + e^z$. Då är $\nabla g(0, 0, 0) = (0, -2, 1)$ en normal till ytan och till tangentplanet. Planets ekvation är alltså $0x - 2y + 1z = 0$, d.v.s. $z = 2y$.

   Eftersom ytan och tangentplanet har samma lutning så kan vi derivera tangentplanets ekvation för att komma fram till att $z'_y(0, 0) = 2$.

   Obs! När man ska bestämma tangentplan till en yta så måste man anpassa sin metod efter vilken typ av beskrivning man har av ytan:

   - För en funktionsyta $z = f(x, y)$ så gäller att tangentplanet i punkten $(a, b, f(a, b))$ ges av $z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$.
   - För en nivåyta $g(x, y, z) = C$ så gäller att tangentplanet i en punkt (a, b, c) på ytan ges av $g'_x(a, b, c)(x - a) + g'_y(a, b, c)(y - b) + g'_z(a, b, c)(z - c) = 0$. Men det räcker egentligen att veta att $\nabla g(a, b, c)$ ger tangentplanets normal. Vet man det så måste planets ekvation bli $g'_x(a, b, c)x + g'_y(a, b, c)y + g'_z(a, b, c)z = D$. Konstanten D kan man sen bestämma genom att sätta in (a, b, c) i vänsterledet.

   Om man har en parameteryta så finns ett tredje sätt att bestämma tangentplanet—kolla i boken!

   En ekvation måste alltid innehålla både vänster- och högerled. I den här uppgiften kan man inte svara med $-2y+z$ eller Tangentplanet$=-2y+z$. Det säger ingenting! Hur ska man utifrån en sådan beskrivning kunna avgöra om en viss punkt ligger i planet eller ej? Det går inte!

   Kom också ihåg att den punkt man bestämmer tangentplanet i måste själv uppgylla planets ekvation. Om man i den här uppgiften svarar med $-2y+z = 1$ så är det ett orimligt svar. Det var tangenplanet i origo som skulle bestämmas och det är uppenbart att origo inte uppfyller denna ekvation.

2. f är partiellt deriverbar överallt så det är endast stationära punkter som kan vara lokala extrempunkter.

   Vi har att

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x - xy + y = 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y)(x - 1) = 0 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - x \end{cases}$$

   Om $x = 1$ så får vi $y = -1/2$, så $(1, -1/2)$ är en stationär punkt. Om vi sätter in $y = 2x$ i den andra ekvationen så fås

$$2x = \frac{1}{2}x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = 6.$$

   Det ger oss ytterligare två stationära punkter: $(0, 0)$ och $(6, 12)$.

I var och en av de tre stationära punkterna bestämmer vi nu värdet på $A = f''_{xx} = 4x - 2 - y$, $B = f''_{xy} = -x + 1$ och $C = f''_{yy} = 1$ och studerar den kvadratiska formen $Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$:

- I punkten $(1, -1/2)$ får vi

$$Q(h,k) = \frac{5}{2}h^2 + k^2$$

  vilket är en positivt definit kvadratisk form. $(1, -1/2)$ är alltså en lokal minpunkt.

- I punkten $(0, 0)$ får vi

$$Q(h,k) = -2h^2 + 2hk + k^2 = (k+h)^2 - 3h^2$$

  vilket är en indefinit kvadratiskform. $(0, 0)$ är alltså en sadelpunkt.

- I punkten $(6, 12)$ får vi

$$Q(h,k) = 10h^2 - 10hk + k^2 = (k - 5h)^2 - 15h^2$$

  vilket också är en indefinit kvadratiskform. Alltså är även $(6, 12)$ en sadelpunkt.

Därmed har vi visat att det bara finns en lokal extrempunkt, nämligen $(1, -1/2)$ som är en lokal minpunkt.

3. I området K mellan de två ytorna gäller att $-1 + y^2 \leq 1 - x^2$, d.v.s. att $x^2 + y^2 \leq 2$. Låt D vara denna cirkelskiva i xy-planet. Volymen ges då av

$$\iint_D (1 - x^2 + 1 - y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[0,\sqrt{2}]\times[0,2\pi]} (2 - r^2)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \left[r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} \cdot 2\pi = 2\pi.$$

4. Låt $\boldsymbol{F} = (2xz, -2, x^2 + e^z)$. Eftersom $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ så är $\boldsymbol{F}$ ett potentialfält i $\mathbb{R}^3$ (och kurvintegralen är oberoende av vägen). Det finns alltså en potential, d.v.s. en funktion $U(x,y,z)$ sådan $\text{grad}U = \boldsymbol{F}$. Den kan t.ex. bestämmas så här:

$$U'_x = 2xz \Leftrightarrow U = x^2z + g(y,z).$$

I det här steget ska man *inte* skriva $U = x^2z + g(y) + h(z)$ för man kan inte i förväg veta om beroendet av y och z kan delas upp i varsin term. I nästa steg sätter vi in ovanstående i likheten $U'_y = -2$ och får då följande:

$$0 + g'_y(y,z) = -2 \Leftrightarrow g(y,z) = -2y + h(z).$$

Nu vet vi alltså att $U = x^2z - 2y + h(z)$. Insättning i $U'_z = x^2 + e^z$ ger till sist:

$$x^2 + h'(z) = x^2 + e^z \Leftrightarrow h'(z) = e^z \Leftrightarrow h(z) = e^z + C.$$

Det är alltså funktionerna $U = x^2z - 2y + e^z + C$ som är potentialer till $\boldsymbol{F}$.

För den avslutande beräkningen kan vi t.ex. välja $U = x^2z - 2y + e^z$. Eftersom båda kurvorna startar i punkten $(0, 0, 0)$ och slutar i punkten $(1, 2, 3)$ så är kurvintegralens värde i båda fallen $U(1, 2, 3) - U(0, 0, 0) = e^3 - 2$.

5. Eftersom det var flödet *in* genom randytan som efterfrågades så måste alla normalvektorer riktas in i K. Det måste man sedan kompensera för med ett teckenbyte när man använder Gauss sats. Det sökta flödet är därför

$$\iint_{\partial K} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S = -\iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{u}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\iiint_K (\sin y + xz^2e^{xyz} + 1)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Eftersom $\sin y$ är en udda funktion av y och K är spegelsymmetrisk i planet $y = 0$ så är $\iiint_K \sin y\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$. Av symmetriskäl kan vi alltså bortse från $\sin y$-termen i integranden. 1:an ger K:s volym, vilken är 2 (volymsenheter). Mittentermen, xz^2e^{xyz}, hanteras enklast genom att först integrera m.a.p. y, sedan x och sist z:

$$\int_{-1}^{1} xz^2e^{xyz}\, \mathrm{d}y = \Big[ze^{xyz}\Big]_{y=-1}^{1} = ze^{xz} - ze^{-xz}$$

$$\int_{0}^{1} (ze^{xz} - ze^{-xz})\, \mathrm{d}x = \Big[e^{xz} + e^{-xz}\Big]_{x=0}^{1} = e^z + e^{-z} - 2$$

$$\int_{0}^{1} (e^z + e^{-z} - 2)\, \mathrm{d}z = \Big[e^z - e^{-z} - 2z\Big]_{0}^{1} = e - e^{-1} - 2$$

Tar man det i en annan ordning så får man börja med en partiell integration.

När vi slutligen adderar de olika delresultaten får vi att flödet är

$$-\iiint_K (\sin y + xz^2e^{xyz} + 1)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -(0 + e - e^{-1} - 2 + 2) = e^{-1} - e.$$

6. Låt $f(x, y) = x^2 + 2xy$ och $g(x, y) = 2x^2 + y^2$.

   (a) Ytan lutar alltid brantast i gradientens riktning, d.v.s. i riktningen

   $$\nabla f(x, y) = (2x + 2y, 2x).$$

   I den riktningen ges lutningen av

   $$|\nabla f(x, y)| = \sqrt{(2x + 2y)^2 + (2x)^2} = 2\sqrt{(x + y)^2 + x^2}.$$

   (b) Vi söker den punkt där $|\nabla f(x, y)|$ antar sitt största värde i området $g(x, y) \leq 1$, vilket är samma punkt som $h(x, y) = (x + y)^2 + x^2$ antar sitt största värde i.

   h är kontinuerlig och området är kompakt, så största värde finns. h är till och med C^1, så maxpunkten finns i en inre stationär punkt eller i en randpunkt.

Stationära punkter: Lösning av systemet $\nabla h = \mathbf{0}$ ger att det finns en enda stationär punkt, nämligen $(0,0)$, och där är $f(0,0) = 0$.

Randpunkter: Randundersökningen kan t.ex. genomföras genom att vi söker punkter där ∇h och ∇g är parallella:

$$\begin{vmatrix} 2(x+y)+2x & 2(x+y) \\ 4x & 2y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y^2 = 2x^2.$$

Insättning i $g(x,y) = 1$ ger $x = \pm 1/2$ och vart och ett av dessa värden ger sedan $y = \pm 1/\sqrt{2}$, d.v.s. fyra intressanta randpunkter. I dessa har vi

$$h(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{resp.} \quad h(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Jämförelse och slutsats: Eftersom $0 < 1 - (1/\sqrt{2}) < 1 + (1\sqrt{2})$ så är det i punkterna $\pm(1/2, 1/\sqrt{2})$ som den givna ytan lutar brantast. Om lutningen är uppåt eller neråt beror på vilket håll man tittar åt!

7. Ett halvklot K med radie R har volymen $V = 2\pi R^3/3$ och arean $A = 3\pi R^2$ så

$$\iiint_K \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{2\pi R^3}{3} \quad \text{och} \quad \iint_{\partial K} \mathrm{d}S = 3\pi R^2.$$

Observera att randytan ∂K består av två delar: en halvsfär S och en cirkelskiva C.

Om vi väljer koordinatsystem så att K ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$, så kommer såväl K som ∂K att ha sina tyngdpunkter på z-axeln, så då är det bara z-koordinaterna (z_t) som behöver beräknas.

(a) Med rymdpolära koordinater får vi att

$$V z_t = \iiint_K z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \ldots = \frac{\pi R^4}{4}$$

vilket ger $z_t = \dfrac{3R}{8}$.

(b) Eftersom $z = 0$ på cirkelskivan C så är $\iint_C z\,\mathrm{d}S = 0$.
Halvsfären S kan parametriseras med sfäriska koordinater. Det ger

$$\begin{aligned} \iint_S z\,\mathrm{d}S &= \iint\limits_{[0,\pi/2]\times[0,2\pi]} R\cos\theta \cdot R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\ &= R^3 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = R^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi R^3. \end{aligned}$$

Alltså är $A z_t = 0 + \pi R^3$ vilket ger $z_t = \dfrac{R}{3}$.

8. (a) Använd Stokes sats. Låt $\boldsymbol{F} = (y + z^2, 2z + x^2, 3x + y^2)$. Då är $\nabla \times \boldsymbol{F} = (2y - 2, 2z - 3, 2x - 1)$. Med givna orienteringar så är

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Gamma} (y + z^2)\,\mathrm{d}x + (2z + x^2)\,\mathrm{d}y + (3x + y^2)\,\mathrm{d}z \\ &= \iint_{\Gamma} (2y - 2, 2z - 3, 2x - 1) \cdot (a, b, c)\,\mathrm{d}S \\ &= \iint_{\Gamma} (2(cx + ay + bz) - (2a + 3b + c))\,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

Eftersom cirkelskivan Γ är spegelsymmetrisk i origo så kommer integralen av de linjära termerna (alltså cx, ay och bz) att vara 0. Dessa representerar ju udda funktioner av x, y resp. z. Övriga termer är konstanta. Eftersom Γ:s area är π så är alltså kurvintegralens värde $-\pi(2a + 3b + c)$.

(b) Eftersom (a, b, c) är en enhetsvektor så ska vi nu maximera $f(a, b, c) = -\pi(2a+3b+c)$ under bivillkoret $g(a, b, c) = a^2+b^2+c^2 = 1$. f är kontinuerlig och bivillkoret definierar en kompakt mängd så det finns ett största värde. Alla ingående funktioner är C^1 så i den punkt där detta inträffar så är ∇f och ∇g parallella. Vi kan t.ex. använda lagranges multiplikatormetod för att hitta dessa punkter:

$$\nabla g \parallel \nabla f \Leftrightarrow (a, b, c) = \lambda(2, 3, 1).$$

Insättning i bivillkoret ger $14\lambda^2 = 1$, d.v.s. $\lambda = \pm 1/\sqrt{14}$. Vi får alltså två punkter att jämföra, $\pm(2, 3, 1)/\sqrt{14}$. Största möjliga värde på f fås då $(a, b, c) = -(2, 3, 1)/\sqrt{14}$.