Tentamen i Optimering

MA112G

2018-03-19, kl. 08.15–13.15

Hjälpmedel: Inga

Betygskriterier: Framgår av separat dokument publicerat på Blackboard. Totalt antal poäng är 60 och för godkänt krävs minst 30 poäng.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Var tydlig med vad som antas och vad som visas. Det är huvudsakligen motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Tentan innehåller lättare och svårare uppgifter blandat. Välj de uppgifter som passar dig. Samtliga uppgifter behöver inte lösas.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Mårten Gulliksson.

Lycka till!

---

1. Två städer A och B producerar 500 ton respektive 400 ton hushållsavfall per dag. Avfallet måste först brännas vid någon av anläggningarna C eller D, båda med kapaciteten 500 ton per dag. Kostnaden vid C är 320 kronor per ton och vid D 240 kronor per ton. Vid förbränningen förvandlas 1 ton avfall till 200 kg slagg vilket måste dumpas vid någon av slutstationerna E eller F. Varje slutstation kan ta emot som mest 150 ton slagg per dag. Transportkostnaden är 150 kronor per ton och mil, både för avfallet och slaggen. Avståndet i mil mellan de olika platserna framgår av tabellerna nedan [10p]

	C	D
A	7	1
B	8	9

	E	F
C	1	3
D	3	2

Formulera problemet att på billigaste sätt ta hand om hushållsavfallet.

Lösning: Inför de obekanta variablerna $x_{ij} =$ antal ton som transporteras från i till j

[10p]

där $i = A,B,C,D$, $j = C,D,E,F$. så får man modellen

$$
\begin{array}{ll}
\min & 320(x_{AC}+x_{BC})+240(x_{AD}+x_{BD})+150(7x_{AC}+x_{AD}) \\
 & +150(8x_{BC}+9x_{BD}+x_{CE}+3x_{CF}+3xc_{DE}+2x_{DF}) \\
\text{u.b.} & x_{AC}+x_{AD}=500 \\
 & x_{BC}+x_{BD}=400 \\
 & x_{AC}+x_{BC}\le 500 \\
 & x_{AD}+x_{BD}\le 500 \\
 & 0.2x_{AC}+0.2x_{BC}-x_{CE}-x_{CF}=0 \quad \text{avfall in ska balansera slagg ut} \\
 & 0.2x_{AD}+0.2x_{BD}-x_{DE}-x_{DF}=0 \quad \text{avfall in ska balansera slagg ut} \\
 & x_{CE}+x_{DE}\le 150 \\
 & x_{CF}+x_{DF}\le 150 \\
 & x_{AC},x_{AD},x_{BC},x_{BD},x_{CE},x_{CF},x_{DE},x_{DF}\ge 0
\end{array}
$$

2. Betrakta det ickelinjära optimeringsproblemet [10p]

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_1^2-3x_1+2x_2+\frac{1}{2}x_3^2 \\
\text{u.b.} & x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1 \\
 & x_1^2-1\le x_2
\end{array}
$$

(a) Avgör om problemet är konvext. Motivera ert svar noga. [4p]

(b) Man kan visa för detta problem att det inte finns några lokala minpunkter sådana att båda bivillkoren är aktiva (vilket ni inte behöver göra). Bestäm en punkt där KKT-villkoren är uppfyllda. Är det en global minpunkt? Motivera ert svar. [6p]

Lösning:

(a) Målfunktionen är konvex på $\mathbb{R}^3$ och eftersom alla bivillkorsfunktioner är konvexa är problemet konvext.

(b) Problemet är konvext så det finns ett unik minimum där KKT-villkoren är uppfyllda. Båda villkoren kan inte vara uppfyllda samtidigt. Anatag att det andra bivillkoret är uppfyllt men inte det första. Då är dualvariabeln hörande till första bivillkoret $v_1 = 0$ och vi har från KKT-villkoren att $f+v_2\nabla g_2 = (4x_1-3,2,x_3)-v_2(2x_1,-1,0) = (0,0,0)$ som ger $x_3 = 0, v_2 = 0$ och $x_1 = 3/8$. Insatt i andra bivillkoret får vi $x_2 = -55/64$. Det är lätt att verifiera att första bivillkoret är uppfyllt och därmed är alla KKT-villkoren uppfyllda.

3. Betrakta följande LP-problem. OBS! Felformulerat i tentamen. Kommer att rättas väldigt snällt... [10p]

$$
\begin{array}{llcl}
\max & 4x_1+3x_2+3x_3+x_4+x_5 & & \\
\text{u.b.} & x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 & \le & 100 \\
 & 5x_4+3x_5 & \le & 20 \\
 & 2x_1+x_2+x_3+3x_4+4x_5 & \le & 120 \\
 & x_i\ge 0, i=1,\ldots,5 & &
\end{array}
$$

Med Simplexmetoden får man lösningen $x_1 = 20, x_2 = 80, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$ med objektfunktionsvärdet $z = 320$. Vidare är slackvariablernas värden $x_6 = 0$,$x_7 = 20$,$x_8 = 0$.

(a) Vilka bivillkor är aktiva? [1p]

(b) Formulera dualen till problemet ovan. Verifiera att lösningen till det duala problemet är $y_1 = 2, y_2 = 0, y_3 = 1$ dvs att den är tillåten och uppfyller komplementaritetsvillkoren. [3p]

(c) Antag att högerledet i andra och tredje bivillkoret ändras lika mycket. Vilken av dessa ändringar ändrar objektfunktionen mest? [3p]

(d) Om en ny variabel x_9 läggs till med kostnad 2 och bivillkorsvektor $a_9^T = [1,1,1]$ kommer det att ge någon ändring i objektfunktionen? [3p]

Lösning:

(a) Från slackvariablerna får man att bivillkor 1 och 3 är aktiva.

(b) Fås genom direkt insättning i duala problemet samt komplementaritetsvillkoren $x_6 y_1 = 0$,$x_7 y_2 = 0$,$x_8 y_3 = 0$.

(c) Skuggpriserna ger att ingen ändring uppkommer via andra bivillkoret men en enhets ökning av tredje bivillkoret ger en enhets ökning av objektfunktionen.

(d) Ny reducerad kostnad blir $\hat{c}_9 = c_9 - a_9^T y = 2 - (y_1 + y_2 + y_3) = -1 < 0$ så det ger ingen förändring.

4. Antag att vi har $m = 5$ stycken objekt som som ska delas upp och att det finns $n = 7$ alternativ för hur denna uppdelning kan göras enligt tabellen nedan [10p]

Alternativ	Kostnad	Objekt
1	12	2, 5
2	8	1, 3
3	16	2, 4, 5
4	11	2, 3
5	24	1, 2, 3, 5
6	9	3, 4
7	20	2,3,4,5

(a) Formulera problemet att välja en delmängd av alternativ som minimerar kostnaden och samtidigt väljer varje objekt. [6p]

(b) Betrakta samma problem som ovan som ett max-problem och tolka problemet som uppkommer om en del av bivillkoren istället byts ut till $\leq$-bivillkor. [2p]

(c) Lägg till villkoret i problemet i (a) att minst ett av alternativen 3 och 6 ska vara uppfyllda och formulera ett nytt problem. [2p]

Lösning: Se kursboken kapitel 13.8.

5. Definiera begreppen standardform, slackvariabel, baslösning, tillåten lösning, degenererad baslösning. Ge ett exempel för varje begrepp. [10p]

   Lösning: Se kapitel 4 och 5.

6. Beskriv hur en linjesökningsmetod för ett ickelinjärt optimeringsproblem utan bivillkor fungerar. Ni ska använda matematiska beteckningar. [10p]

   Lösning: Se kapitel 2.5.