



ÖREBRO  
UNIVERSITET

## LÖSNINGSFÖRSLAG:

## DISTANSTENTAMEN:

### Våg- och materiefysik för civilingenjörer

**FY501G-0100**

2021-01-12, kl. 08:15-13:15

---

**Hjälpmedel:** Skrivmateriel, lärobok<sup>1</sup> och miniräknare.

**Betygskriterier:** Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga deluppgifter kan ge 5 poäng och bedöms utifrån kriterier för *kunskap och förståelse; färdighet, förmåga och värderingsförmåga; samt skriftlig avrapportering*. För betyg 3/4/5 räcker det med 4 poäng inom vart och ett av områdena *vågrörelselära, elektromagnetism, kvantmekanik och materiens struktur* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

**Anvisningar:** Motivera väl med sidhänvisningar och formelnummer från läroboken, redovisa alla väsentliga steg, rita tydliga figurer och svara med rätt enhet. Skriv din ladokkod i hörnet uppe till höger på varje sida. Redovisa inte mer än en huvuduppgift per sida och scanna in i uppgiftsordning i god tid.

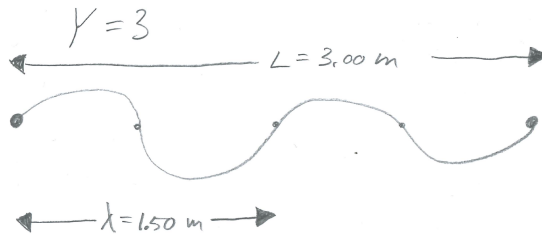
**Skrivningsresultat:** Meddelas inom 15 arbetsdagar.

**Examinator:** Magnus Ögren.

**Lycka till!**

---

1. a) Vi fördelar  $Y$  noder jämt mellan ändpunkterna på den  $L = 3.00$  m långa strängen. Enligt (16-60) kan vi för en konstant tid  $t = t_0$  skriva den stående vågen  $y(x) = 2y_m \cos(\omega t_0) \sin(kx) = A_{t_0} \sin(kx)$  där  $A_{t_0}$  är en amplitud. Tex för  $Y = 3$  kan det då se ut så här:



Då avståndet mellan två noder motsvarar en halv våglängd, kan vi beräkna våglängden enligt  $(Y + 1) \lambda / 2 = L \Rightarrow \lambda = 2L / (Y + 1) = L / 2 = 1.50$  m för  $Y = 3$ .

**Svar a):** Se skiss, våglängden är 1.50 m.

b) Vi börjar med formel (16-13)  $v = f\lambda = (Y + 1) \cdot 10.0 \cdot 2L / (Y + 1) = 60.0$  m/s. Vi jämför nu med formel (16-26)  $v = \sqrt{\tau/\mu} = \sqrt{\tau/(m/L)} = \sqrt{12/(10.0 \cdot 10^{-3}/3.00)} = \sqrt{3.6 \cdot 10^3} = 60$  m/s.

**Svar b):** Vi får  $v = 60$  m/s i båda fallen.

---

<sup>1</sup>Principles of Physics 10.th ed. Halliday, Resnick, Walker

**2. a)** För att få samma interferensmönster behöver materievågorna ha samma våglängd som röntgenstrålningen vars våglängd är 0.15 nm. Enligt (38-17)  $\lambda = h/p$  behöver vi känna rörelsemängden för elektronerna för att beräkna deras våglängd. Vi kan få ett samband mellan rörelsemängden och accelerationsspänningen genom att jämföra den slutliga rörelseenergin med den elektriska energin som tillförs under accelerationen

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{p^2}{2m} = |q|U = eU \Rightarrow U = \frac{p^2}{2me} = \frac{h^2}{2me\lambda^2} \\ &= \frac{(6.626 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot (0.15 \cdot 10^{-9})^2} = 66.86 \text{ V}. \end{aligned} \quad (1)$$

Om vi nu ur formeln ovan löser ut våglängden som funktion av spänningen får vi  $\lambda = h/p = h/\sqrt{2meU}$ , dvs våglängden minskar när spänningen ökar. Det kanske enklaste sättet att kvalitativt koppla detta till diametern på ringarna, dvs på storleken av vinkeln som elektronerna kommer ut från provet med ( $2\theta$  i "FIG. 3"), är genom gitterformeln (35-14) (eller med Braggs lag)

$$d \sin(\varphi) = m\lambda. \quad (2)$$

Från denna ser vi att en mindre våglängd medför en mindre vinkel, dvs en mindre diameter för ringarna.

**Svar a):** Accelerationsspänningen bör vara 67 V för att interferensmönstret från elektronernas materievågor skall bli det samma som från röntgenstrålningen. Vi argumenterar ovan mha (38-17) och (35-14) för varför diametrarna på ringarna minskar med ökad spänning.

**b)** Vi kan igen titta (kvalitativt) på (35-14) (eller Braggs lag), dvs (2) ovan. Då det finns två olika avstånd ( $d_{10}$  och  $d_{11}$ ) i kristallstrukturen ("FIG. 4") fungerar dessa som två olika gitterkonstanter för materievågor och ger upphov till varsin ring.

**Svar b):** Vi får två ringar för att det finns två olika karakteristiska avstånd i kristallstrukturen.

**3. a)** Om den elektriska fältstyrkan  $|\vec{E}|$  är  $(X + 1)$  N/C i punkten B, blir den  $E_A = 2(X + 1)$  N/C i punkten A. Storleken på den elektriska kraften på en partikel med laddningen  $q_0 = (Y + 1)$  C i punkten A blir då enligt (22-1)  $F = E_A q_0 = 2(X + 1)(Y + 1)$  N. I denna uppgiften är  $X$  den näst sista siffran i din ladokkod och  $Y$  är den sista siffran i din ladokkod. Riktningen för kraften blir till vänster i bild, detta då kraftriktningen på en positivt laddad partikel är den samma som riktningen på fältlinjerna (se bilden).

**Svar a):** Vi får en kraft av storleken  $2(X + 1)(Y + 1)$  N riktad åt vänster.

**b)** Om vi använder Gauss sats för elektriska fält (23-7) kan vi beräkna den totala elektriska laddningen inuti kuben  $q_{enc}$  enligt följande ytintegral

$$q_{enc} = \varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (3)$$

För den kubiska geometrin här kan ytintegralen delas upp i 6 termer, en för varje sida på kuben. Varje sida har då storleken  $|d\vec{A}_j| = 2.0^2 = 4.0 \text{ m}^2$ , och riktningen på vektorn  $d\vec{A}_j$  blir (tex)  $\pm \vec{e}_x$  för  $j = 1, 2$  (där  $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$  är enhetsvektorn längs med  $x$ -axeln);  $\pm \vec{e}_y$  för  $j = 3, 4$ ;  $\pm \vec{e}_z$  för  $j = 5, 6$ . Vi kan då skriva den totala ytintegralen (3) enligt

$$q_{enc} = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^6 \vec{E}_j \cdot d\vec{A}_j = 4.0\varepsilon_0 ((1, 0, |z|) \cdot (1, 0, 0) + (1, 0, |z|) \cdot (-1, 0, 0) + (|x - 2|, 0, |z|) \cdot (0, 1, 0) + (|x - 2|, 0, |z|) \cdot (0, -1, 0) + (|x - 2|, 0, 2) \cdot (0, 0, 1) + (|x - 2|, 0, 0) \cdot (0, 0, -1)) = 8\varepsilon_0 = 7.0832 \cdot 10^{-11}, \quad (4)$$

där endast en av de 6 termerna bidragit till integralens värde.

**Svar b):** Den totala elektriska laddningen inne i kuben är  $7.1 \cdot 10^{-11}$  C.

**4. a)** Vi utgår från brytningslagen (33-40)  $n_2 \sin(\theta_2) = n_1 \sin(\theta_1)$ , som gäller vid gränssytor mellan två medier med brytningsindex  $n_1$  och  $n_2$ , men där  $n_2$  kan variera pga våglängden för ljuset. För den första brytningen i figurens vänstra del (dvs från luft med  $n_1 = 1.0$  till glas) ser vi att det violetta ljuset bryts mest mot normalen (dvs har minst  $\theta_2$ ) även då alla våglängder inkommer med samma vinkel  $\theta_1$ . Tittar en då på (33-40) betyder det att  $n_2$  är störst för violett.

**Svar a):** Brytningsindex är störst för det violetta ljuset.

**b)** Från gitterformeln (35-14) för  $m = 1$

$$d \sin(\theta) = m\lambda \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{\lambda}{d}\right), \quad (5)$$

ser vi att vinkeln är mindre för en mindre våglängd (oberoende av värdet på gitterkonstanten  $d = 2.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ ). Då violett har kortare våglängd är rött, betyder detta att det violetta ljuset nu bryts minst (tvärtemot för prismet!). Detta stämmer också med vad vi ser i Figure 36-24, på sidan 994 i kursboken.

**Svar b):** Brytningen är störst för det röda ljuset.

**5. a)** Intensiteten vid cylinderns undersida blir  $I = P/A_{laser} = P/(\pi D^2/4) = 4.60/(\pi (3.00 \cdot 10^{-3})^2/4) = 6.5077 \cdot 10^5 \left[\frac{W}{m^2}\right]$ . Då det står att undersidan är reflekterande använder vi formel (33-33) för att beräkna kraften uppåt

$$F_{upp} = \frac{2IA_{cyl}}{c} = \frac{2 \cdot 6.5077 \cdot 10^5 \pi (2.60 \cdot 10^{-3})^2/4}{2.998 \cdot 10^8} = 2.3050 \cdot 10^{-8} [N]. \quad (6)$$

Nu jämför vi denna kraft med tyngdkraften på cylindern för att bestämma höjden  $H$  (omvandla densiteten till SI-enheter!).

$$F_{ner} = mg = V\rho g = \pi \frac{d^2}{4} H \rho g = F_{upp} \Rightarrow H = \frac{4F_{upp}}{\pi d^2 \rho g} = \frac{4 \cdot 2.3050 \cdot 10^{-8}}{\pi (2.60 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 1.2 \cdot 10^3 \cdot 9.82} = 3.684 \cdot 10^{-7} [m] \quad (7)$$

**Svar a):** Höjden  $H = 3.68 \cdot 10^{-7}$  m på cylindern leder till en balans med tyngdkraften.

**b)** Från figuren får vi den konstanta effekten

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{7.2 [nJ]}{2.0 [s]} = 3.6 \left[\frac{nJ}{s}\right] = 3.6 \cdot 10^{-9} \left[\frac{J}{s}\right]. \quad (8)$$

Energien för varje foton från källan är enligt (38-1) och (38-2)

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 2.998 \cdot 10^8}{600 \cdot 10^{-9}} = 3.3108 \cdot 10^{-19} [J]. \quad (9)$$

Från de två ekvationerna ovan får vi då antalet emitterade fotoner per sekund från källan i alla riktningar enligt

$$R_{emit} = \frac{P}{E} = \frac{3.6 \cdot 10^{-9} \left[\frac{J}{s}\right]}{3.3108 \cdot 10^{-19} [J]} = 1.087 \cdot 10^{10} \left[\frac{1}{s}\right]. \quad (10)$$

Nu kommer antalet fotoner som når detektorn att vara den andel av ytan på en sfär med radien  $r = 12.0$  m som täcks av detektorns area  $A = 3.00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ . Men endast 50% av dessa detekteras, varför antalet absorberade fotoner per sekund blir

$$R_{abs} = 0.50 \frac{A}{4\pi r^2} R_{emit} = 0.50 \frac{3.00 \cdot 10^{-6}}{4\pi 12.0^2} 1.087 \cdot 10^{10} = 9.013 \left[\frac{1}{s}\right]. \quad (11)$$

**Svar b):** Varje sekund absorberas 9.0 fotoner av detektorn.

6. a) Enligt (39-20) ges energinivåerna av

$$E_{n_x, n_y} = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right) = \frac{h^2}{8mL_x^2} \left( n_x^2 + \frac{L_x^2 n_y^2}{L_y^2} \right) = \frac{h^2}{8mL_x^2} (n_x^2 + 4n_y^2), \quad (12)$$

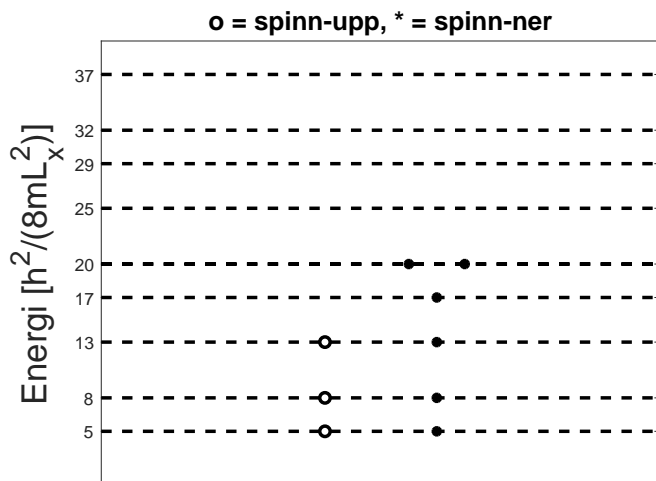
för denna lådpotential.

I tabellen nedan har vi räknat ut de 10 lägsta energinivåerna  $E$  i enheten  $h^2 / (8mL_x^2)$ :

$E$	5	8	13	17	20	25	29	32	37	40
$n_x$	1	2	3	1	4(2)	3	5	4	1	2(6)
$n_y$	1	1	1	2	1(2)	2	1	2	3	3(1)

**Svar a):** Se tabellen.

b) Nedan ser vi ett energinivådiagram enligt tabellen i a) där vi placerat ut  $X = 3$  st spinn-upp ( $\uparrow$ ) elektroner och  $Y = 6$  st spinn-ner ( $\downarrow$ ) elektroner. I denna uppgiften är  $X$  den näst sista siffran i din ladokkod och  $Y$  är den sista siffran i din ladokkod.



Energien för mångpartikel-grundtillståndet är  $E_{tot} = \frac{h^2}{8mL_x^2} (2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 13 + 17 + 2 \cdot 20) = 109 \frac{h^2}{8mL_x^2} = 109 \frac{(6.626 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot (2.0 \cdot 10^{-9})^2} = 1.6418 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$

**Svar b):** Se diagrammet ovan, vilket svarar mot energin  $1.6 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$