ÖREBRO
UNIVERSITET

LÖSNINGSFÖRSLAG

Våg- och materiefysik för civilingenjörer

FY501G-0100

2020-03-18, kl. 14:15–19:15

Hjälpmedel: Skrivmateriel, lärobok[1] och miniräknare.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga deluppgifter kan ge 2 poäng och bedöms utifrån kriterier för *kunskap och förståelse*; *färdighet, förmåga och värderingsförmåga;* samt *skriftlig avrapportering*. För betyg 3/4/5 räcker det med 4 poäng inom vart och ett av områdena *vågrörelselära*, *elektromagnetism*, *kvantmekanik och materiens struktur* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl med sidhänvisningar och formelnummer från läroboken, redovisa alla väsentliga steg, rita tydliga figurer och svara med rätt enhet. Redovisa inte mer än en huvuduppgift per blad och lämna in i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Magnus Ögren.

Lycka till!

1.

a) Den linjära densiteten $\mu = m/L = \rho V/L = \rho\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 /L$ för de två olika strängarna leder till förhållandet

$$\frac{\mu_T}{\mu_L} = \frac{3.2}{0.26} = \frac{d_T^2}{d_L^2} \Rightarrow \frac{d_T}{d_L} = \sqrt{\frac{3.2}{0.26}} = 3.508.$$

Svar a): Förhållandet mellan diametrarna för de två strängarna är 3.5.

b) För grundtonerna på strängen gäller enligt (16-65) $\lambda = 2L = 2 \cdot 0.500 = 1.00$ m.

Om vi använder sambandet (16-26) får vi de två grundtonerna

$$v = f\lambda \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{\lambda} \Rightarrow \begin{cases} f_T = \frac{\sqrt{\frac{38.7}{3.2\cdot 10^{-3}}}}{1.00} = 109.97\,\text{Hz}, \\ f_L = \frac{\sqrt{\frac{38.7}{0.26\cdot 10^{-3}}}}{1.00} = 385.81\,\text{Hz}. \end{cases} \tag{1}$$

Svar b): De två frekvenserna är 110 Hz och 386 Hz.

c) Vi vill nu uppnå $f_T = 385.81$ Hz genom att öka F för den tunga strängen. Från (1) ovan kan vi lösa ut F

---

[1] *Principles of Physics* 10.th ed. Halliday, Resnick, Walker

$$F = \mu_T f_T^2 \lambda^2 = 3.2 \cdot 10^{-3} \cdot 385.81^2 \cdot 1.00^2 = 476.32\,\mathrm{N}.$$

Svar c): Den tunga strängen ska då ha spännkraften 476 N.

d) Från (1) kan vi istället lösa ut $L = \lambda/2$ för den tunga strängen då $F = 38.7$ N

$$f = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{2L} \Rightarrow L = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{2f} = \frac{\sqrt{\frac{38.7}{3.2\cdot 10^{-3}}}}{2 \cdot 385.81} = 0.14252\,\mathrm{m}$$

Svar d): Den nya (effektiva) längden för den tunga strängen ska då vara 14.3 cm.

e) Den springande dirigenten är här 'detektorn' som rör sig med farten v_D mot en stillasittande källa ($v_S = 0$), vi antar att ljudhastigheten i luften är (tex) $v = 329$ m/s, och (17-47) ger då

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v \pm v_S} \Rightarrow 440 = 435\frac{329 + v_D}{329 \pm 0}\ [Hz] \Rightarrow v_D = 329\left(\frac{440}{435} - 1\right) = 3.7816\,\mathrm{m/s}. \tag{2}$$

Svar e): Dirigenten skall springa med farten 3.78 m/s (ca 14 km/h) mot orkestern.

2.

a) Den beskrivna situationen kan modelleras med formel (35-14)

$$d \sin(\theta) = m\lambda,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ . \tag{3}$$

Vinkeln θ uttrycks med trigonometri som $\theta = \arctan(0.030/5.0)$ för $m = 1$, avståndet mellan spalterna är $d = 0.10 \cdot 10^{-3}$ m. Våglängden blir då

$$\lambda = d\sin(\theta) = 0.10 \cdot 10^{-3} \sin(\arctan(0.030/5.0)) = 5.9999 \cdot 10^{-7}\ [m], \tag{4}$$

ev kan Taylorapproximationen $\sin(\arctan(0.030/5.0)) \approx \arctan(0.030/5.0) \approx 0.030/5.0$ användas.

Svar a): Ljusets våglängd är $6.0 \cdot 10^{-7}$ m.

b) Ett i huvudsak likadant interferensmönster kan erhållas om våglängden för elektronerna är samma som för röntgenstrålningen. Enligt de Broglie gäller (38-17) för elektronerna, $\lambda = h/p$, där p relateras till elektronernas rörelseenergi $E = p^2/(2m) = qU$ så att ($q = e$) $p = \sqrt{2meU}$. Vi kan nu lösa ut spänningen U enligt

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \Rightarrow U = \frac{h^2}{2me\lambda^2} = \frac{(6.6261 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot (0.15 \cdot 10^{-9})^2} = 66.86\,[V]\,. \tag{5}$$

Svar b): Elektronernas accelerationsspänning är 67 V.

c) Från tex ekvation (5) ovan ser vi att elektronerna våglängd λ minskar när spänningen U ökar. Diametrarna på ringarna som observerades på labben är ekvivalenta med (första ordningens, $m = 1$) maxima för motsvarande ljusmaxima i ett gitter-experiment. Från tex gitterformeln $d \sin(\theta) = \lambda$ ser vi att en mindre våglängd ger en mindre vinkel θ, vilket innebär en mindre diameter på ringen.

Svar c): Enligt resonemangen ovan minskar diametern då spänningen ökar.

d) Om vinkeln θ i ekvation (1) från problemtexten är liten gäller

$$\theta = \frac{1}{4} \arcsin\left(\frac{D}{2R}\right) \approx \frac{D}{8R}. \tag{6}$$

Tillsammans med Braggs lag, för små vinklar, får vi då

$$2d \sin(\theta) \approx 2d\theta \approx d\frac{D}{4R} \approx n\lambda, \tag{7}$$

vilket blir det sökta sambandet för $n = 1$. Att n verkligen är 1 här beskrivs i "Instruktion till laborationen ELEKTRONDIFFRAKTION" som studenterna läste innan laborationen.

Svar d): Vi har visat sambandet $d \approx 4R\lambda/D$ ovan.

e) Enligt ovan förekommer alltså bara (synliga) ringar för $n = 1$ i Braggs lag på laborationen. Istället kommer de två olika ringarna ifrån att provet har två olika d, som vi kallade d_{10} och d_{11} (se bilden på tentamen). Detta ger då enligt Braggs lag två olika vinklar, som vi kan kalla för θ_{10} och θ_{11}, vilket svarar mot två olika diametrar D_{10} och D_{11}.

Svar e): Två kvalitativt olika avstånd i kristallstrukturen gav upphov till varsin ring enligt resonemanget ovan.

3.

a) Ampere-Maxwells lag (32-11) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_{enc}$, övergår då inga tidsberoende elektriska fält finns i närheten, till Amperes lag (29-14)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \int ds = B 2\pi R = \mu_0 i_{enc} = \mu_0 I \;\Rightarrow\; B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R},$$

där vi valt en cirkel med radien R runt ledaren med strömmen I som integrationsväg. Magnetfältet är parallellt med cirkeln varför $\vec{B} \cdot d\vec{s} = Bds$ (se figur 29-4).

Svar a): Härledning enligt ovan.

b) Denna härledning återfinns på sidan 751 i läroboken

Svar b): Härledning enligt ovan.

c) Vi skriver om formel (4) från tentamen enligt

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\frac{L}{2}}{R\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{2}\sqrt{\frac{R^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} + 1}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2R}{L}\right)^2 + 1}} \rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \text{då} \frac{L}{R} \rightarrow \infty. \tag{8}$$

Svar c): Som vi visat ovan kan formel (4) skrivas om till formel (3) då L är mycket större än R.

d) Då den lilla magnetiska dipolen befinner på avståndet 1.0 m från en rak oändligt lång ledare med strömmen 1.0 A, blir (det homogena) magnetfältet för dipolen $B = \mu_0 I/(2\pi R) = \mu_0/(2\pi) = 1.257 \cdot 10^{-6}/(2\pi) = 2.000 \cdot 10^{-7}$ T. Enligt (28-38) ges energin för en magnetisk dipol i ett magnetiskt fält av $E = -\vec{\mu} \bullet \vec{B}$, varför skillnaden i energi mellan en parallell och en anti-parallell dipol är

$$\Delta E = 2\,|\vec{\mu}|\,\left|\vec{B}\right| = 4.0 \cdot 10^{-7} \text{ J}. \tag{9}$$

Från formeln ovan kan vi då beräkna dipolsmomentet

$$|\vec{\mu}| = \frac{\Delta E}{2B} = \frac{4.0 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 2.000 \cdot 10^{-7}} = 1.0 \text{ J/T}. \tag{10}$$

Svar d): Det magnetiska dipolsmomentet är 1.0 J/T.

e) Enligt (28-36) ges det mekaniska momentet M av

$$M = |\vec{\mu}| \left|\vec{B}\right| \sin(\theta) = 1.0 \cdot 2.000 \cdot 10^{-7} \cdot \sin(90^\circ) = 2.000 \cdot 10^{-7}\ [Nm] \tag{11}$$

Svar e): Det krävs det mekaniska momentet $2.0 \cdot 10^{-7}$ Nm.

4.

a) Vi placerar en positiv testladdning i punkten P. Från punktladdningen $q > 0$ erfar testladdningen en repulsiv kraft riktad längs den positiva x-axeln. Från alla delar av den utspridda laddningen $Q > 0$ erfar testladdningen också repulsiva krafter, med resultanten riktad längs den positiva x-axeln (y- och z-komponenter tar ut varandra pga symmetrin). Sammantaget blir det elektriska fältets riktning i punkten P det samma som riktningen för den resulterande kraften på den positiva testladdningen i punkten P, dvs längs med den positiva x-axeln.

Svar a): Det elektriska fältets riktning i punkten P är längs med den positiva x-axeln.

b) Enligt (22-3) kan vi beräkna styrkan enligt (dvs kraften enligt Coulombs lag delat med testladdningen q_T)

$$E = \frac{F}{q_T} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2.00^2} = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0}q \left[\frac{N}{C}\right]. \tag{12}$$

Svar b): Den elektriska fältstyrkan i punkten P är $q/(16\pi\varepsilon_0)$ N/C.

c) Om vi använder Gauss lag (23-7) med sfären med radie $R = 2.00$ som yta, och $q_{enc} = Q$, får vi det elektriska fältets styrka någonstans på denna yta (pga symmetri) enligt

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \varepsilon_0 \left|\vec{E}\right| 4\pi R^2 = q_{enc} = Q \Rightarrow \left|\vec{E}\right| = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi R^2} = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0}. \tag{13}$$

Svar c): Den elektriska fältstyrkan i punkten P är $Q/(16\pi\varepsilon_0)$ N/C (vi får alltså samma resultat som om Q vore en punktladdning, men detta är ett icke-trivialt sammanträffande, se sidan 602).

d) Enligt Gauss lag (23-7) med sfären med radie $R = 2.00$ som yta, och $q_{enc} = q + Q = 1.00 + \rho_Q \cdot 4\pi \cdot 1.00^2$, är det elektriska fältets styrka i P (pga symmetri) $\left|\vec{E}\right| = 0$ då $q_{enc} = 0$, så att

$$q_{enc} = q + Q = 1.00 + \rho_Q \cdot 4\pi \cdot 1.00^2 = 0 \Rightarrow \rho_Q = -\frac{1.00}{4\pi} = -7.96 \cdot 10^{-2} \left[C/m^2\right]. \tag{14}$$

Svar d): Laddningsdensiteten är $-7.96 \cdot 10^{-2}\ [C/m^2]$.

e) Enligt **b)** är $E = q/(16\pi\varepsilon_0)$ N/C i punkten P, sätter vi in detta i Gauss lag (23-7) får vi

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \varepsilon_0 \frac{1.00}{16\pi\varepsilon_0} 4\pi \cdot 2.0^2 = 1.00 = q_{enc}, \tag{15}$$

vilket bevisar Gauss lag för det här exemplet.

Svar e): Enligt ovan stämmer Gauss lag för detta exempel.

5.

a) Enligt Wien's förskjutningslag (38-15) $\lambda_{max}T = 2898 \cdot 10^{-6}$ mK, får vi för temperaturen $T = 500$ K

$$\lambda_{max} = \frac{2898 \cdot 10^{-6}}{T} = \frac{2898 \cdot 10^{-6}}{500} = 5.796 \cdot 10^{-6} \ [m] \,. \tag{16}$$

Svar a): Värmeutstrålningen domineras av våglängden $5.8 \cdot 10^{-6}$ m (dvs något längre våglängd än för det röda synliga ljuset, därför kallas det för infraröd strålning).

b) Enligt (38-16) gäller för den totala utstrålade effekten (där vi, som vanligt, sätter $\varepsilon = 1$ i brist på information om denna parameter)

$$P = \sigma\varepsilon AT^4 = 5.6704 \cdot 10^{-8} \cdot 1 \cdot 1.0 \cdot 500^4 = 3544 \ [W] \,. \tag{17}$$

Svar b): Effekten 3.5 kW kommer från kaminen som värmestrålning (de 0.5 kW som nu fattas i beskrivning kan tex värma upp luft som är i kontakt med kaminens yta).

c) Varje foton har energin $E = hf = hc/\lambda = 6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 2.998 \cdot 10^8 / (5.796 \cdot 10^{-6}) = 3.43 \cdot 10^{-20}$ J. Antalet fotoner per sekund, N, blir då

$$N = \frac{P}{E} = \frac{3544}{3.43 \cdot 10^{-20}} = 1.03 \cdot 10^{23},$$

där vi använt $\lambda = \lambda_{max}$ från **a)** samt P från **b)**.

Svar c): Varje sekund lämnar 10^{23} fotoner kaminen.

d) Den totala tiden delas upp i den tiden det tar för laserljuset att gå sträcka $2L_1$ i luft, samt tiden att gå sträcka $2L_2$ i vätskan ($L = L_1 = L_2 = 0.100$ m)

$$t_{tot} = t_1 + t_2 = \frac{2L_1}{c_1} + \frac{2L_2}{c_2} = \frac{2L}{c}(1+n_2) \Rightarrow n_2 = \frac{ct_{tot}}{2L} - 1 = \frac{2.998 \cdot 10^8 \cdot 1.56 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 0.100} - 1 = 1.3384,$$

där vi approximerat $c_1 \simeq c$ (dvs luft med vaccum), samt använt oss av formel (35-3).

Svar d): Den drickbara vätskan har brytningsindex 1.33 (samma som tex vatten).

e) Elbilarnas energiförbrukning på ett år blir

$$E = 5 \cdot 10^6 \cdot 2000 \cdot 2.0 = 2 \cdot 10^{10} \ [kWh] \,. \tag{18}$$

Då (medel-) effekten är energin dividerat med tiden 1 år, får vi

$$P = \frac{E}{t} = \frac{2 \cdot 10^{10} \ [kWh]}{365 \cdot 24 \ [h]} = 2.28 \cdot 10^6 \ [kW] \approx 10^9 \ [W] \,. \tag{19}$$

Svar e): Storleksordningen av effekten på en kärnreaktor i Ringhals är 1 GW.

6.

För en kvadratisk tvådimensionell oändligt djup brunn gäller enligt (39-20) för energinivåerna

$$E_{n_x,n_y} = \frac{h^2}{8mL^2}\left(n_x^2 + n_y^2\right) . \tag{20}$$

a) Då $n_x, n_y \geq 1$ gäller för grundtillståndet $(n_x, n_y) = (1,1)$, emedan den första exciterade energinivån erhålls för $(n_x, n_y) = (2,1)$ eller $(n_x, n_y) = (1,2)$.

Svar a): De två olika kvanttal som har energin $E^{(1.st\, exc.)}$ är $(n_x, n_y) = (2,1)$ och $(n_x, n_y) = (1,2)$.

b) Det står att ljus kommer från övergångar från första exciterade tillståndet till grundtillståndet för en elektron, dvs för övergång från (tex) $(n_x, n_y) = (2,1)$ till $(n_x, n_y) = (1,1)$. Detta motsvarar energin

$$\Delta E = E_{2,1} - E_{1,1} = \frac{h^2}{8mL^2}\left[\left(2^2+1^2\right) - \left(1^2+1^2\right)\right] = \frac{3h^2}{8mL^2}. \tag{21}$$

Grönt ljus svarar mot en fotonenergi $E_\gamma = hf = hc/\lambda$, varför vi kan beräkna den gröna brunnens bredd enligt

$$E_\gamma = \Delta E \;\Rightarrow\; L = \sqrt{\frac{3h\lambda}{8mc}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 6.6261 \cdot 10^{-34} \cdot 530 \cdot 10^{-9}}{8 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 2.998 \cdot 10^{8}}} = 6.944 \cdot 10^{-10}\ [m]\,.$$

Svar b): Brunnens bredd är $L^{(G)} = 0.694$ nm.

c) Vi vet (tex från Maxwell's rainbow på sidan 877) att en foton av rött ljus innehåller mindre energi än en foton av grönt ljus. Då vi ser från formel (21) ovan att energin minskar för större storlek (L) på brunnen, drar vi slutsatsen att den brunnen som ger rött ljus är större.

Svar c): Enligt resonemanget ovan gäller $L^{(R)} > L^{(G)}$.

d) För en endimensionell oändlig brunn gäller enligt (39-4)

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 = E_1 n^2. \tag{22}$$

om vi då sätter $E_1 = 0.25795$ enligt figuren, kan vi förutsäga att $E_2 = E_1 \cdot 2^2 = 1.031800$ och $E_3 = E_1 \cdot 3^2 = 2.321550$. Då dessa förutsägelser inte stämmer med de numeriskt beräknade värdena kan inte brunnen vara oändlig.

Svar d): Enligt ovan gäller inte att E_2/E_1 eller E_3/E_1 är heltalsvärden, vilket bevisar att de i figuren angivna energinivåerna inte kommer från en oändlig brunn.

e) För en oändlig brunn av samma bredd gäller att vågfunktionen är strikt noll i ändarna på brunnen. Detta innebär en något kortare (materie-) våglängd för partikeln i brunnen än vad som ses på bilden på tentamen. En kortare våglängd innebär en större energi.

Svar e): Energin för en oändligt djup brunn av samma bredd (4.00) får en högre energi än 0.25795.