Lösningsförslag omtentamen 220608

1a)

$$\cos^2(x) = \left(\frac{1}{2}\cdot\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\left(e^{i(2x)} + e^{-i\cdot(2x)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \cos(2x)\right). \qquad \square$$

1b) Vi söker primitiv $f(\theta)$ till

$f'(\theta) = \cos^2(\theta)$ så att $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{7}{4}$.

$$\int \cos^2(\theta)d\theta = \int \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\theta)\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta) + C$$

så $f(\theta) = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta) + C$

där C bestäms av $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{7}{4}$:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} + C$$

$$\frac{7}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + C$$

så att $C = \frac{6}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{8}$.

Alltså, $\underline{\underline{f(\theta) = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta) + \frac{3}{2} - \frac{\pi}{8}}}$. $\square$

2.

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y^2+1, \quad x > 0$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\arctan(y) + C_1 = \ln x + C_2$$

$$\arctan(y) = \ln x + C$$

$x > 0$

$C = C_2 - C_1$

$y(1) = 1$:

$$\arctan(1) = \ln 1 + C$$

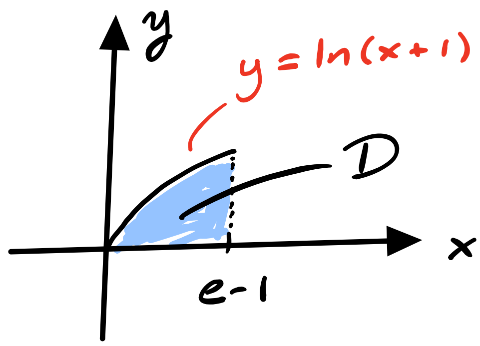
$$\frac{\pi}{4} = 0 + C$$

$$C = \frac{\pi}{4}.$$

$$\arctan(y) = \ln x + \frac{\pi}{4}$$ så att

$$y = \tan\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right).$$ □

3.



Arean ges av

$$A(D) = \int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$$

$$= \int_0^{e-1} 1 \cdot \ln(x+1)\,dx$$

$$= \Big[(x+1)\cdot\ln(x+1)\Big]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \cancel{(x+1)} \cdot \frac{1}{\cancel{x+1}}\,dx$$

$$= e\cdot\ln e - 1\cdot\ln 1 - \int_0^{e-1} 1\,dx$$

$$= e - 0 - (e-1-0)$$

$$= \cancel{e} - \cancel{e} + 1 = \underline{\underline{1}}. \qquad \square$$

4. $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots$

så att

$$\arctan(2x) = 2x - \frac{8x^3}{3} + \frac{32x^5}{5} - \cdots$$

$$= 2x - \frac{8x^3}{3} + x^5 \cdot B_1(x)$$

där $B_1(x)$ begränsad nära $x=0$.

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots$$

så att

$$\sin(2x) = 2x - \frac{8x^3}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{32x^5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} - \cdots$$

$$= 2x - \frac{4x^3}{3} + x^5 \cdot B_2(x)$$

där $B_2(x)$ begränsad nära $x=0$.

Vi får då

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(2x) - \sin(2x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x - \frac{8x^3}{3} + x^5 \cdot B_1(x) - \left(2x - \frac{4x^3}{3} + x^5 \cdot B_2(x)\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{4x^3}{3} + x^5 \cdot B_1(x) - x^5 \cdot B_2(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(-\frac{4}{3} + \underbrace{x^2 \cdot B_1(x)}_{\to 0} - \underbrace{x^2 \cdot B_2(x)}_{\to 0}\right)$$

$$= -\frac{4}{3} + 0 + 0 = \underline{-\frac{4}{3}}. \qquad \square$$

5. Låt
$$f(x) = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x^4+x^2}.$$

Då är $f(x) \geq 0$ på $\mathbb{R}$, speciellt då $x \geq 0$. Dessutom kan vi skriva om $f(x)$ som $g(x)\cdot h(x)$ där $g(x) \geq 0$ om $x \geq 0$ och
$$h(x) \to A > 0 \text{ då } x \to +\infty:$$

$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x^4+x^2} \overset{x>0}{=} \frac{1+x\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x^4\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{x}{x^4}\cdot\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{g(x)}\cdot\underbrace{\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{1+\frac{1}{x^2}}}_{h(x)}$$

Notera att $g(x) \geq 0$ om $x \geq 0$
och att $\int_1^\infty g(x)\,dx$ konvergent.

$$\left[\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ konv. om } \alpha > 1 \right]$$

Dessutom,

$$h(x) = \frac{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{1 + \frac{1}{x^2}} \to \frac{0 + \sqrt{0+1}}{1+0} = 1 > 0$$

då $x \to \infty$.

Enligt jämförelsesats följer då
att $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent. $\square$

6. Derivera båda led av

$$x^2-1+y(x)=\int_x^2 t\cdot y(t)\,dt\,.$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2-1+y(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(-\int_2^x t\cdot y(t)\,dt\right)$$

$$2x-0+y'(x)=-\,x\cdot y(x)$$ analysens huvudsats

$$y'+x\cdot y=-2x$$

En IF ges då av $e^{\frac{x^2}{2}}$ så att

$$\frac{d}{dx}\left(y\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\right)=-2x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y\cdot e^{\frac{x^2}{2}}=\int(-2x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\left[u=\frac{x^2}{2}\ ,\ du=x\,dx\right]$$

$$=\int(-2)\cdot e^{u}du$$

$$=-2e^{u}+C=\left[u=\frac{x^2}{2}\right]=-2e^{\frac{x^2}{2}}+C$$

så att

$$y(x) = -2 + C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Notera även att

$$x^2 - 1 + y(x) = \int_x^2 t \cdot y(t)\,dt$$

ger att

$$2^2 - 1 + y(2) = \int_2^2 t \cdot y(t)\,dt$$

$$3 + y(2) = 0 \quad \text{så att } y(2) = -3.$$

Insättning i $y(x) = -2 + C \cdot e^{-x^2/2}$:

$$y(2) = -2 + C \cdot e^{-2}$$

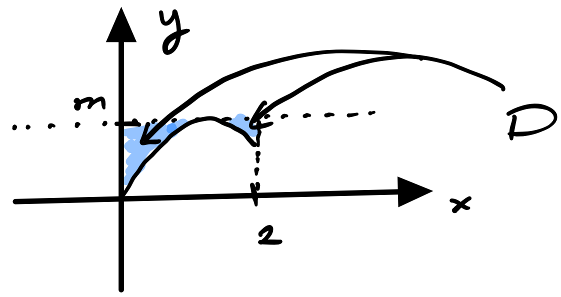
$$-3 = -2 + C \cdot e^{-2}$$

$$C \cdot e^{-2} = -1, \quad C = -e^{2}.$$

Alltså, $y(x) = -2 - e^{2} \cdot e^{-x^2/2}$

$$= \underline{\underline{-2 - e^{2 - x^2/2}}}. \quad \square$$

7.



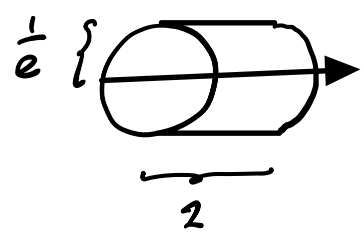
$m = ?$ $\quad y = x \cdot e^{-x}$ ger att

$$y' = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$
$$= e^{-x} \cdot (1 - x)$$

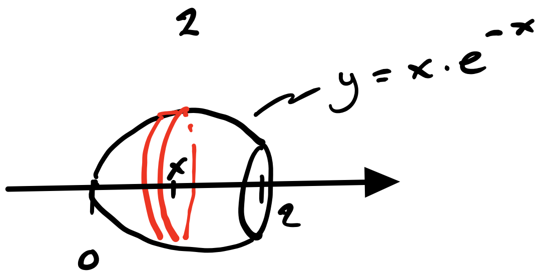
$$y' = 0 \iff x = 1.$$

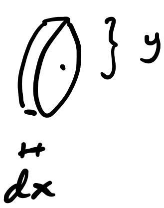
$$m = y(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Sökt volym ges av $V = V_1 - V_2$:



$$V_1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^2 \cdot 2 = 2\pi \cdot \frac{1}{e^2}$$





$$dV = \pi \cdot y^2 \cdot dx$$
$$= \pi \cdot x^2 \cdot e^{-2x} dx$$

$$V_2 = \int_0^2 \pi x^2 \cdot e^{-2x} dx$$

Vi får

$$V_2 = \int_0^2 \pi x^2 \cdot e^{-2x} \, dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^2 e^{-2x} \cdot x^2 \, dx$$

$$= \pi \cdot \left(\left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \cdot x^2 \right]_0^2 - \int_0^2 -\cancel{\frac{1}{2}} \cdot e^{-2x} \cdot \cancel{2} x \, dx \right)$$

$$= \pi \cdot \left(-2 \cdot e^{-4} + 0 + \int_0^2 e^{-2x} \cdot x \, dx \right)$$

$$= \pi \cdot \left(-2 \cdot e^{-4} + \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \cdot x \right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{1}{2} e^{-2x} \cdot 1 \, dx \right)$$

$$= \pi \cdot \left(-2 e^{-4} - e^{-4} + 0 + \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-2x} \, dx \right)$$

$$= \pi \cdot \left(-3 \cdot e^{-4} + \left[-\frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^2 \right.$$

$$= \pi \cdot \left(-3 \cdot e^{-4} - \frac{1}{4} e^{-4} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{13}{4} \cdot e^{-4} \right)$$

Tillsammans fås att

$$V = V_1 - V_2$$

$$= 2\pi e^{-2} - \pi \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{13}{4} e^{-4} \right)$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{2}{e^2} - \frac{1}{4} + \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{e^4} \right)$$

$$= \pi \cdot \frac{8e^2 - e^4 + 13}{4e^2} \quad \text{v.e.}$$

8.

$$x'' + \frac{k}{m}x = \frac{a}{m} \cdot \cos(\omega t)$$

där $\omega^2 = \frac{k}{m}$:

$$x'' + \omega^2 x = \frac{a}{m} \cdot \cos(\omega t).$$

x_h: $x'' + \omega^2 x = 0$ har kar.ekv.

$$r^2 + \omega^2 = 0 \iff r = \pm i \cdot \omega$$

$$X_h(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t).$$

x_p: Ansättn. $c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2 \cdot \sin(\omega t)$

identisk med x_h, fungerar ej.

Kan använda komplex metod:

y_p till $y'' + \omega^2 y = \frac{a}{m} \cdot e^{i\omega t}$

där $x_p = \operatorname{Re} y_p$.

Välj $y_p = z(t) \cdot e^{i\omega t}$ som ger

$$y_p' = (z' + i\omega z)e^{i\omega t} \text{ och}$$

$$y_p'' = (z'' + 2i\omega z' - \omega^2 z)e^{i\omega t}.$$

Insättning i $y'' + \omega^2 y = \frac{a}{m} e^{i\omega t}$

ger att

$$(z'' + 2i\omega z')\cancel{e^{i\omega t}} = \frac{a}{m} \cdot \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$z'' + 2i\omega z' = \frac{a}{m}$$

där $z' = \frac{a}{2im} = -\frac{a}{2m} i$ duger.

$z = -\frac{a}{2m} i \cdot t + C$ där $C = 0$ duger.

$$z_p = -\frac{a}{2m} i \cdot t \, .$$

Vi får då

$$y_p = -\frac{a}{2m} i \cdot t \cdot e^{i\omega t}$$

$$= -\frac{a}{2m} i \cdot t \cdot \left(\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t) \right)$$

$$= -\frac{a}{2m} t \cdot \cos(\omega t) \cdot i + \underbrace{\frac{a}{2m} t \cdot \sin(\omega t)}_{\text{Re } y_p}$$

Alltså $x_p = \frac{a}{2m} t \cdot \sin(\omega t)$.

Tillsammans fås då allmän lösning till $x'' + \omega^2 x = \frac{a}{m}\cos(\omega t)$

av

$$x = x_h + x_p$$

$$= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{a}{2m} t \cdot \sin(\omega t). \quad \square$$

9. Notera att

$$f(x) = (e^x + 3 + 2e^{-x})^{-1} \text{ så att}$$

$$f'(x) = -(e^x + 3 + 2\cdot e^{-x})^{-2} \cdot (e^x + 0 - 2e^{-x})$$

$$= -\frac{e^x - \frac{2}{e^x}}{(e^x + 3 + 2\cdot e^{-x})^2}$$

$$= -\frac{e^{2x} - 2}{e^x \cdot (e^x + 3 + 2e^{-x})^2} < 0$$

om $e^{2x} - 2 > 0$ vilket sker

då $x > \frac{1}{2} \underbrace{\ln(2)}_{\text{mindre än } 1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{2x} = 2 \\ 2x = \ln 2 \\ x = \frac{1}{2} \ln 2 \end{array} \right.$$

Med andra ord, $f'(x) < 0$ om $x \geq 1$

så att $f(x)$ avtagande där.

$f(x)$ även positiv så jämförelsesats

kan tillämpas:

$$\int_1^n f(x)\,dx + f(n) \le \sum_{k=1}^{n} f(k) \le \int_1^n f(x)\,dx + f(1)$$

Notera även att

$$f(n) = \frac{1}{e^n+3+2\cdot e^{-n}} = \overset{\to 0}{\frac{1}{e^n}} \cdot \frac{1}{1+\underset{\to 0}{\frac{3}{e^n}}+\underset{\to 0}{\frac{2}{e^{2n}}}}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0 \cdot \frac{1}{1+0+0} = 0$$

och att

$$f(1) = \frac{1}{e+3+2\cdot e^{-1}} = \frac{e}{e^2+3e+2}.$$

Önskad uppskattning ges då av

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \le \int_1^\infty f(x)\,dx + \frac{e}{e^2+3e+2}$$

när vi bestämt värdet för

$$\int_1^\infty f(x)\,dx.$$

Primitiva till $f(x)$?

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+3e^x+2}\,dx$$

$$= \begin{bmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{1}{t^2+3t+2}\,dt$$

Vi gör en partialbråksuppdelning:

$$t^2+3t+2=0 \iff t = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}$$

$$\iff t = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\iff t=-1 \text{ el. } t=-2.$$

Ansätt: $\dfrac{1}{t^2+3t+2} = \dfrac{1}{(t+1)(t+2)} = \dfrac{A}{t+1} + \dfrac{B}{t+2}$

Mult. med $(t+1)(t+2)$: $1 = A(t+2)+B(t+1)$

$$1 = (A+B)t + 2A + B$$

$$\begin{cases} A+B=0 & (1) \\ 2A+B=1 & (2) \end{cases}$$

(2) − (1) : $A = 1$, insatt i (1):

$$1 + B = 0 \iff B = -1.$$

Vi får

$$\frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$$

så att

$$\int \frac{1}{t^2+3t+2}\,dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt$$

$$= \ln|t+1| - \ln|t+2| + C$$

$$= \ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + C.$$

Med $t = e^x$ fås att

$$\int f(x)\,dx = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right) + C.$$

Så att

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R f(x)\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right)\right]_1^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\ln\left(\frac{e^R+1}{e^R+2}\right) - \ln \frac{e+1}{e+2} \right)$$

$$\overset{(*)}{=} \underbrace{\ln 1}_{=0} + \ln \frac{e+2}{e+1} = \ln \frac{e+2}{e+1}$$

$$(*) \quad \frac{e^R+1}{e^R+2} = \frac{1+\frac{1}{e^R}}{1+\frac{2}{e^R}} \xrightarrow{R\to\infty} \frac{1+0}{1+0} = 1 .$$

Vi får

$$\ln \frac{e+2}{e+1} \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \le \ln \frac{e+2}{e+1} + \frac{e}{e^2+3e+2} . \quad \square$$