Newton's andra lag $F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$ för en fjäderkraft $F = -kx$ ger en andra ordningens differentialekvation i x

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \tag{1}$$

där vinkelfrekvensen ges av $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

När en har att göra med roterande rörelse som beskrivs av en vinkel θ gäller en motsvarande 'andra lag' för momentet (*torque*) τ och vinkelaccelerationen $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (se tex sektion 10.7 sidan 243 i kursboken)

$$\tau = I\frac{d^2\theta}{dt^2}, \tag{2}$$

där det så kallade tröghetsmomentet (*mass moment of inertia*) I beskriver ett 'motstånd' mot att accelerera i likhet med massan m i Newton's andra lag.

Om vi har en elektrisk dipol så ges momentet av (22-35) vilket kan Taylorutvecklas för små vinklar (jämför med härledningen av frekvensen för en pendel)

$$\tau = -pE\sin\theta \approx -pE\theta. \tag{3}$$

Ekvationerna (2) och (3) ger nu tillsammans

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{I}\theta = 0, \tag{4}$$

där vi i analogi med (1) definierar en vinkelfrekvensen $\omega = \sqrt{\frac{pE}{I}}$ så att $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}}$.

SVAR: Frekvensen för en dipol som oscillerar med små vinklar är $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}}$.

Genom att titta på energibidragen kan vi komma till samma slutsats med Hamiltonsk mekanik (finns en bredvidläsnings text om detta på BB som vi nämner då vi introducerar Schrödingerekvationen). Med summan av kinetisk (rotations-) energi och potentiell energi (22-37) för dipolen får vi Hamiltonianen (OBS att p nedan inte är rörelsemängd)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - pE\cos\theta. \tag{5}$$

Jämfört med notationen i *BB_1_Hamiltonskmekanik_2017-11-13.pdf* sätter vi här $q = \theta$ och $p = I\frac{d\theta}{dt}$, så att Hamiltonsekvationer ger

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} \Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -pE\sin\theta, \tag{6}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{d\theta}{dt}. \tag{7}$$

Vi ser då att (6) är ekvivalent med (4) efter en Taylorutveckling. Alternativt kan en Taylorutveckla (ingenjörsspråk: sätta upp en approximativ) energin först, så att

$$\mathcal{H} \approx \frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - pE \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right). \tag{8}$$

Vilket ger

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \Rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -pE\theta. \tag{9}$$