



ÖREBRO
UNIVERSITET

Tentamen i Matematisk statistik och sannolikhetslära MA506G

2022-06-01, kl. 8.15–13.15

Hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare med tomt minne

Betygskriterier: Maxpoäng på tentan är 60 poäng, och den nedre gränsen för betyg k ($k \in \{3, 4, 5\}$) är $10k$ poäng.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Besvara högst en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning om ni vill att rättaren ska hitta dem och ge poäng för lösningen.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Henrik Olsson.

Lycka till!

- Skål 1 innehåller fyra röda kulor och sex blå kulor. Man väljer 6 av de 10 kulorna slumpmässigt (utan återläggning) och lägger dem i Skål 2, som var tom tidigare.
 - Vad är sannolikheten att man flyttat 2 röda kulor och 4 blå kulor till Skål 2. [4p]
 - En kula dras sedan slumpmässigt från Skål 2. Givet att denna kula är blå, vad är sannolikheten att det var två röda och fyra blå kulor som flyttades från Skål 1 till Skål 2? [4p]
- Låt X vara en diskret slumpvariabel som har tre möjliga utfall $X \in \{-2, 0, 2\}$.
 - Om $p_X(0) = \frac{1}{3}$, vad blir $E(X^2)$? [4p]
 - Bestäm $p_X(-2)$ och $p_X(2)$ om $p_X(0) = \frac{1}{3}$ och $E(X) = \frac{2}{3}$. [4p]
- Låt X och Y ha den gemensamma täthetssfunktionen

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- Bestäm $F_{XY}(x,y)$. [4p]
- Bestäm $P(X+Y \leq 1)$. [4p]

4. Vikten av en slumpmässigt vald paracetamoltablett är en stokastisk variabel med väntevärdet 0.65 och standardavvikelsen 0.02.

- (a) Beräkna väntevärdet och standardavvikelsen för sammanlagda vikten av 100 paracetamoltabletter (vars vikter anses oberoende). [4p]
- (b) En ask med tabletter bör innehålla 100 tabletter. För att förenkla påfyllningen håller man upp tabletter på en våg och slutar så snart vikten överstiger 65 g. Beräkna med centrala gränsvärdessatsen sannolikheten att asken kommer att innehålla minst 100 tabletter. Bortse från felvisning hos vågen. (Ledning: Vad innebär detta för vikten av 99 tabletter?) [4p]

5. Antag att antalet kunder X som besöker en affär mellan 9:00 och 10:00 följer en Poisson-fördelning med parameter λ . Man har observerat antalet kunder 10 olika dagar och fått följande värden:

9 8 9 15 12 13 12 7 3 12

Bestäm ML-skattningen av λ och avgör om den är väntevärdesriktig. [8p]

6. Vid en undersökning på $n = 20$ nyfödda barn och en viss sjukdom undersöktes bilirubinhalt (x) och proteinkoncentration (y) i ryggmärgsvätskan. Resultatet blev:

x	0.14	0.08	0.07	0.26	0.08	0.02	0.03	0.22	0.06	0.23
y	83	65	71	140	135	30	30	128	80	168
x	0.29	0.04	0.13	0.14	0.07	0.05	0.13	0.06	0.05	0.08
y	139	88	121	125	56	98	101	96	73	116

- (a) Bestäm parametrarna i en linjär regressionslinje anpassad till data från mätningarna. [5p]
- (b) Bestäm 95 % konfidensintervall till parametrarna. [5p]

Till din hjälp har du följande beräkningar:

$$\sum x_i = 2.23, \sum x_i^2 = 0.3701, \sum y_i = 1943, \sum y_i^2 = 215061, \sum x_i y_i = 259.79$$

7. År 1878 studerade Charles Darwin majsplantor (*Zea Mays*) för att bestämma [10p]
om pollineringsättet (korspollinering eller självpollinering) påverkade hur höga plantorna blev. Han hade femton krukor av olika sort och satte en korspollinerad planta och en självpollinerad planta i varje kruk och ställde dem på olika ställen i sitt växthus och i trädgården. Darwins misstanke var att de korspollinerade plantorna (x_{kp}) skulle bli högre än de som var självpollinerade (x_{sp}). Efter 4 veckor mätte han plantornas höjd och fick följande värden. (Darwin mätte i enheten tum och med en noggrannhet på 1/8 tum, men det behöver du inte bekymra dig om.):

Kruka	1	2	3	4	5	6	7	8
Korspollinerad (x_{kp})	23.500	12.000	21.000	22.000	19.125	21.500	22.125	20.375
Självpollinerad (x_{sp})	17.375	20.375	20.000	20.000	18.375	18.625	18.625	15.250
Kruka	9	10	11	12	13	14	15	
Korspollinerad (x_{kp})	18.250	21.625	23.250	21.000	22.125	23.000	12.000	
Självpollinerad (x_{sp})	16.500	18.000	16.250	18.000	12.750	15.500	18.000	

Testa med 5% felrisk hypotesen $H_0: \mu_{kp} = \mu_{sp}$ mot $H_1: \mu_{kp} > \mu_{sp}$ för att avgöra om pollineringsättet ger någon skillnad i plantornas höjd. Till din eventuella hjälp har du nedanstående beräkningar. (Du behöver kanske inte alla summorna.)

$$\sum x_{kp} = 302.875, \sum x_{sp} = 263.625, \sum x_{kp}^2 = 6298.7$$

$$\sum x_{sp}^2 = 4692.1, \sum (x_{kp} - x_{sp})^2 = 414.344, \sum x_{kp}x_{sp} = 1010.5$$