Tentamen

Optimering för civilingenjörer, MA507G

Examinator: Mårten Gulliksson

Tid: Torsdag 11 januari 2024 klockan 08:15-13:15

Hjälpmedel

Formelsamling,miniräknare och skrivverktyg.

Betygskriterier

Framgår av separat dokument publicerat på Blackboard. Totalt antal poäng är 60 och för godkänt krävs minst 30 poäng.

Anvisningar

Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Var tydlig med vad som antas och vad som visas. Det är huvudsakligen motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Tentan innehåller lättare och svårare uppgifter blandat. Välj de uppgifter som passar dig. Samtliga uppgifter behöver inte lösas.

Lycka till!

Problem 1 (12 poäng)

Betrakta följande linjära optimeringsproblem

$$\begin{aligned}
&\min x_1 - 2x_2 \\
&\text{u.b.} \quad x_1 + 3x_2 \leq 1 \\
&\qquad\quad x_1 - x_2 \leq 1 \\
&\qquad\quad x_i \geq 0, i = 1, 2
\end{aligned}$$

(a) Illustrera i en figur den tillåtna mängden.

(b) Skriv problemet på standardform och lös det med simplexalgoritmen.

(c) Antag att förutsättningarna till vårt problem ändras så att första komponenten i högerledeti första bivillkoret ökas med δ. Ange ett intervall för δ där lösningen är densamma som i orginalproblemet.

(d) Antag att koefficienten framför x_1 i målfunktionen ändras med ϵ.Ange ett intervall för ϵ som inte kräver att problemet löses igen.

(e) Förutsätt att problemet i (d) inte behöver lösas igen dvs vi har samma lösning som ursprungsproblemet. Ange hur mycket objektfunktionen ändras som funktion av ϵ.

(f) Formulera det duala problemet och ange dess lösning med eller utan att använda simplexmetoden för det duala problemet. Avgör om det råder stark eller svag dualitet.

Problem 2 (8 poäng)

Rogert ska ha fest. Han planerar en trerättersmiddag, och det ska vara mycket smak. Tyvärr visar det sig att han har begränsade mängder med kryddor hemma, och han hinner inte åka och handla mer. Han vägrar göra smaklös mat, så mängden kryddor per enhet mat är given. Det betyder att det enda han kan variera är hur mycket av varje maträtt han kan göra. Nedanstående tabell visar hur mycket av varje krydda (av de han har begränsat mängd av) som ska ingå i en enhetsportion av varje rätt, och hur mycket det finns av kryddan, allt uttryckt i lämplig sort.

Krydda	Förrätt	Huvudrätt	Dessert	Tillgänglig mängd
Vitlök	2	4	0	20
Koriander	3	4	1	15
Habanero	0	5	0	17

Salt, socker och andra kryddor har han mer än tillräckligt av. Formulera optimeringsproblemet som ger hur många enhetsportioner av de olika rätterna han ska göra. Som målfunktionskoefficienter använder han ettor, dvs. alla rätterna är värda lika mycket.

Problem 3 (14 poäng)

Betrakta det icke-linjära optimeringsproblemet

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

där $f(x) = \sqrt{x_1^2 + 1} + x_2^2$.

(a) Är detta ett konvext optimeringsproblem?

(b) Starta i punkten $x^{(0)} = (2, 1)$ och utför ett steg med Newton's metod. Använd en steglängd t som ges av det största av värdena $1, 1/2, 1/4, \ldots$ sådant att $f(x^{(0)} + td^{(0)}) < f(x^{(0)})$ där $d^{(0)}$ är Newtonriktningen i $x^{(0)}$.

(c) Antag nu att det tillåtna området begränsas till

$$\mathcal{F} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \right\}.$$

Avgör om punkten $x^* = (1, 0)$ uppfyller KKT-villkoren. Är x^* ett lokalt eller globalt minimum? Motivera svaret.

(d) Betrakta nu istället samma problem som i (a) men med bivillkorsmängden

$$\mathcal{F} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}.$$

Avgör om punkten $x^* = (1, 0)$ uppfyller KKT-villkoren. Är x^* ett lokalt eller globalt minimum? Motivera svaret.

Problem 4 (6 poäng)

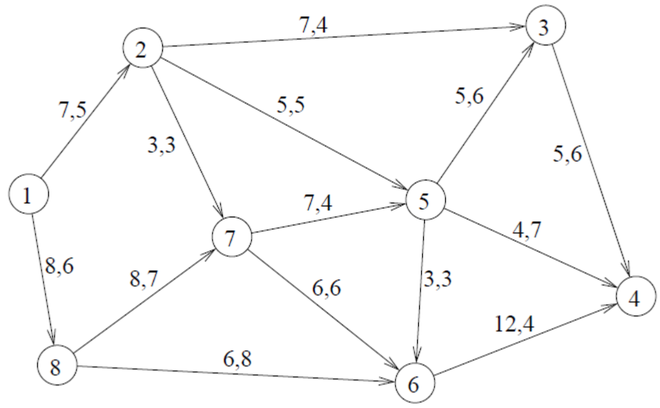
Elberta är på filmfestival. Det visas filmer i flera lokaler samtidigt. Hon vill planera vilka filmer hon ska se. Nedan ges en lista på filmer som hon skulle vilja se, med start- och sluttid. Om två filmer överlappar i tid kan hon inte se båda, eftersom hon bara kan befinna sig på en plats i taget, och hon vill bara se hela filmer. Målet är att se så många filmer som möjligt.

	Film	Starttid	Sluttid
1	Aja baja Alfons Åberg	17:00	17:36
2	Barbie	18:00	19:54
3	De ostyriga	20:00	22:15
4	Meg 2: The Trench	21:00	22:56
5	Mord i Venedig	19:30	21:13
6	Oppenheimer	17:30	20:30

Formulera problemet att hitta den bästa tillåtna kombinationen av filmer som ett linjärt optimeringsproblem med binära variabler.

Problem 5 (10 poäng)

Pelle sitter och tittar på en karta över en stad långt bort och drömmer sig bort. Han konstruerar följande graf där bågarna är mäkta med kostnad och kapacitet.



(a) Finn billigaste väg från nod 1, hamnen, till nod 4, jänvägsstationen.

(b) Vilken kostnad får båge (6,4) ha om en billigaste väg ska gå via nod 6, parken? Motivera.

(c) Antag att bågarna ä oriktade och man vill finna en billigaste rundtur som passerar alla noder. Vilket optimeringsproblem är det?

Problem 6 (10 poäng)

Definiera och ge ett enkelt exempel för följande begrepp: konvext hölje, relaxation, metaheuristik, konvexkombination, minkostnadsflödesproblem. Ett exempel ska innehålla något av följande: en matematisk formulering, en illustrativ figur eller en metod för en viss metodklass.