

Test 6 - Behandlas på räkneövningen fredag vecka 11

Testet är uppbyggt av uppgifter från de moment som behandlats under vecka 11. Tills på fredag förväntas ni gjort egna lösningar på uppgifterna nedan. Läraren kommer att dela in er i grupper där ni gruppvis reder ut eventuella frågetecken. Läraren avgör om och på vilket sätt vi tillsammans reder ut frågetecken som hela klassen har kring något moment. Det som reds ut beror mycket på vad ni som studenter bidrar med i form av frågor och förslag på lösningar. Det är därför viktigt att vi antränger oss för att få till en stämning där alla vill och vågar dela med sig av sina matematiska idéer. Till exempel förväntas att vi alla är på plats när passet börjar, stannar kvar hela passet och att frågor från studiekamrater möts med nyfikenhet. Det kommer inte läggas ut några lösningar på blackboard så vi räknar med hög närvaro och aktivt deltagande.

- (1) I en IR-krets ges strömmen, vid tiden t sekunder efter att strömbrytaren slagits på, av $I(t)$ i ampere enligt differentialekvationen

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V,$$

där $I(0) = 0$. Induktansen L , resistansen R och spänningen V är positiva konstanter. Lös differentialekvationen och bestäm $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t)$. Ge ett uttryck för hur lång tid det tar efter att strömbrytaren slagits på till att strömmen uppnår hälften av gränsvärdet.

- (2) Antag att $y(x)$ är kontinuerlig med kontinuerlig derivata. Lös integralekvationen

$$y(x) = 1 + \int_1^x \frac{y(t)}{t(t+1)} dt.$$

- (3) Bestäm alla positiva egenvärden λ och egenfunktioner $y(t)$ till egenvärdesproblemet $A(y) = -\lambda y$ där $A(y) = 9y''$ och $y(0) = y(\pi) = 0$.
- (4) Antag att en behållare med formen av en kub, med sidan 1 dm, är fylld med vatten. Vi gör ett hål i botten av kuben så att vattnet börjar rinna ut. Enligt Torricellis lag minskar volymen vatten i behållaren hela tiden i en takt som är proportionell mot kvadratroten av vattennivån. Bestäm en differentialekvation som beskriver förloppet. Antag att kuben är helt fylld med vatten från start och att endast $1/4$ av kuben är fylld med vatten efter 2 minuter. Hur lång tid tar det att tömma kuben på vatten? Om behållaren haft annan form, säg klotformad eller konformad, hade du kunnat lösa uppgiften på liknande sätt?
- (5) På en fest med 80 inbjudna gäster dyker plötsligt en oinbjuden person upp och startar en ryktesspridning. Efter en timme har hälften av de inbjudna gästerna nåtts av ryktet. Hur många av de inbjudna gästerna har nåtts av ryktet efter tre timmar om vi antar att ryktet hela tiden sprids med en hastighet som är proportionell mot antalet inbjudna gäster som ännu ej nåtts av ryktet?