ÖREBRO
UNIVERSITET

Lösningsförslag till övningstentamen 2 på kursen Integraler och differentialekvationer

1. Enklast är att omvandla gränsvärdet till en integral. Först identifierar vi att lämpligt val av x_i ges av $x_i = 4i/n$ så att

$$\frac{2i}{n} - 2 = \frac{1}{2} \cdot x_i - 2$$

där vi även noterar att lämpligt integrationsområde ges av [0,4] som delats in i n delar och då genererar högersumman

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

där $f(x) = x/2 - 2$ och $\Delta x = 4/n$. Sökt gränsvärde fås därför av

$$\begin{aligned} \int_0^4 \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 dx &= \left[\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3\right]_0^4 \\ &= 0 - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Svar: 16/3.

2. Utgå från Maclaurinutvecklingen för $f(x) = \sin x$ given med Lagrange restterm enligt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(5)}(\theta x)x^5}{5!}$$

där vi här har $f^{(5)}(\theta x) = \cos(\theta x)$, med $\theta \in [0,1]$. Notera att med $|x| \leq 0.1$ så fås att $|\theta x| \leq 0.1$ så att

$$\left|\frac{f^{(5)}(\theta x)x^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\right| \leq \frac{10^{-5}}{10 \cdot 12} < 10^{-7}$$

om $|x| \leq 0.1$. Olikheten gäller särskilt då $x = 0.1$. Detta innebär att $x = 0.1$ insatt i $x - x^3/6$ duger som a, vilket ger $a = 599/6000$.

Svar: $a = 599/6000$.

3. En integrerande faktor till

$$y' + \frac{10}{x} \cdot y = \frac{\ln(x)}{x}$$

ges av x^{10}. Multiplicera båda led i differentialekvationen med x^{10} och integrera, då erhålls

$$x^{10} \cdot y = \int x^9 \cdot \ln(x)\, dx = \frac{x^{10}}{10} \cdot \ln(x) - \frac{x^{10}}{100} + C\,,$$

så att

$$y(x) = \frac{\ln(x)}{10} - \frac{1}{100} + \frac{C}{x^{10}}\,.$$

Villkoret $y(1) = 0$ ger att $C = 1/100$ så att

$$y(x) = \frac{\ln(x)}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{100x^{10}}\,.$$

4. Notera att $x > 1$ eftersom integralen annars blir divergent. För att bestämma integralen

$$\int_x^5 \frac{1}{t^2-1}\, dt$$

görs partialbråkuppdelning (gör denna) av integranden enligt

$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\,.$$

Då fås att

$$\begin{aligned}
\int_x^5 \frac{2}{t^2-1}\, dt &= \int_x^5 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\
&= [\ln(t-1) - \ln(t+1)]_x^5 \\
&= \left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_x^5 \\
&= \ln\left(\frac{4}{6}\right) - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \ln\left(\frac{6}{4}\right)\,.
\end{aligned}$$

Detta ger att

$$\begin{aligned}
\int_x^5 \frac{2}{t^2-1}\, dt &= \ln\left(\frac{4}{3}\right) \\
\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \ln\left(\frac{6}{4}\right) &= \ln\left(\frac{4}{3}\right) \\
\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= \ln(2) \\
\frac{x+1}{x-1} &= 2 \\
x+1 &= 2x-2 \\
x &= 3\,.
\end{aligned}$$

Svar: $x = 3$.

5. Notera att andragradsuttrycket under rottecknet kan kvadratkompletteras där vi noterar att ett variabelbyte $t = x + 1$ ger derivatan lika med 1, så vi kan direkt erhålla

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx &= \int \left(\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} \right) dx \\ &= \sqrt{(x+1)^2+1} - \ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right) + C\,.\end{aligned}$$

6. Notera att $f(x) = 1/(e^x - e^{-x})$ är positiv och avtagande då $x > 1$ så att

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) < \sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

för alla heltal $n \geq 2$. Vi väljer däför

$$\begin{aligned} C &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R f(x)\,dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) \right]_1^R \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e+1}{e-1} \right)\,. \end{aligned}$$

7. I den här uppgiften är det själva modelleringssteget som särskild omsorg krävs. För att få till en modell som kan användas för att lösa uppgiften behöver vi föreställa oss en halvcirkel, med centrum i origo, som ska roteras kring en axel för att bilda ett klot. På avståndet a respektive $a+h$ från origo dras linjer som är vinkelräta mot rotationsaxeln. Med andra ord, önskat band fås då kurvan $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, där R är radien på sfären, får rotera kring x-axeln över intervallet $[a,a+h]$. Sökt area ges därför av

$$\begin{aligned}\int_a^{a+h} 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx &= \int_a^{a+h} 2\pi\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2}\,dx \\ &= \int_a^{a+h} 2\pi R\,dx = 2\pi Rh\,.\end{aligned}$$

8. Notera först att $y(\pi) = -1$. Derivering av båda led ger att

$$y'(x) = -\sin(x) - \int_0^x y(s)\,ds$$

så att vi även får $y'(0) = 0$. Derivering igen ger att

$$y''(x) = -\cos(x) - y(x)\,.$$

Med andra ord återstår att lösa differentialekvationen $y'' + y = -\cos(x)$ där $y(\pi) = -1$ och $y(0) = 0$ (gör detta), vilken är uppfylld om

$$y(x) = \cos(x) - \frac{x}{2} \cdot \sin(x)\,.$$

9. Notera att integralen är generaliserad i både 0 och $\pm\infty$. Eftersom integranden är jämn i origo över ett jämnt intervall (från $-\infty$ till $+\infty$) räcker det att betrakta positiva x och multiplicera värdet som fås med 2. Med andra ord är sökt värde

$$I = 2\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

förutsatt att den generaliserade integralen är konvergent. Ytterligare är det lämpligt att dela in i delintervall, (0,1) och $(1,\infty)$. I båda fallen är variabelbytet $t = \sqrt{x}$ att föredra vilket ger följande beräkning av pimitiva:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx &= \int \frac{2}{1+t^2}\,dt \\ &= 2\arctan(t) + C \\ &= 2\arctan(\sqrt{x}) + C\,.\end{aligned}$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} I &= 2\left(\lim_{r\to 0^+}[2\arctan(\sqrt{x})]_r^1 + \lim_{R\to+\infty}[2\arctan(\sqrt{x})]_1^R\right) \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \pi - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi\,.\end{aligned}$$

Svar: 2π.