2018-01-15

(1.)

(a) $\vec{u} - 3\vec{v} = (-14, -3, 8)$

$\vec{w} \times \vec{u} = (6, 4, -3)$

(b) $\text{rank}(A) = 3$

(c) ja, t.ex. $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(d) 19

(2) (a) totalmatris: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

allmän lösning: $(x, y, z, v) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, 0, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t, t\right)$

$t \in \mathbb{R}$

(b) • D1: $\overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{u} = (0,0,0,0,0) \cdot (1,1,1,1,1) = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{0} \in U$

• D2: antag $\vec{v}, \vec{w} \in U$

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \overset{\text{räkneregel}}{=} \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} =$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \vec{v}, \vec{w} \in U}}{=} 0 + 0 = 0$ så $\vec{v} + \vec{w} \in U$

• D3: $\vec{v} \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$(\lambda \cdot \vec{v}) \cdot \vec{u} \overset{\text{räkneregel}}{=} \lambda (\vec{v} \cdot \vec{u}) =$

$= \lambda \cdot 0 = 0$

så $\lambda \vec{v} \in U$

Det följer att $U \subset \mathbb{R}^5$ är ett delrum

3.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3 \quad -1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} -\tfrac{1}{3} \quad -1 \quad 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{radkanonisk}$$

kolonn 1, 2, & 4 är pivotkolonner, alltså har

$K(A)$ en bas $\{A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, A_{\cdot 4}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \dim(K(A)) = 3$

från den radkanoniska matrisen ser vi att $A\vec{x}=\vec{0}$ har allmän lösning $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

Alltså har $N(A)$ basen $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim(N(A)) = 1$

---

41. (a) en bas för V består av en uppsättning vektorer $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ i V som spänner V $(V = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\})$ och som är linjärt oberoende.

(b) Vi vet att två vektorer i $\mathbb{R}^2$ bildar en bas för $\mathbb{R}^2$ omm de är linjärt oberoende.

Undersök: $x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = \vec{0}$

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-2=1 \Rightarrow$ matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ är inverterbar & ekvationen $(*)$ har entydig lösning:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dvs den triviala lösningen.

Alltså är B linjärt oberoende, och en bas.

(c) Bestäm x, y s.a. $x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = \vec{v}$

dvs $x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -1\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$(\vec{v})_B = (-1, 2)$$

---

5. Observera först

$$\text{span}\{A, B, C\} = \{xA + yB + zC \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}x+y & x+z\\x+z & x-y\end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$$

(a) lös $xA + yB + zC = O$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x+y & x+z \\ x+z & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y & = 0 \\ x \quad +z & = 0 \\ x-y & = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{2} \quad 1 \quad -1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \text{ dvs } \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}$$

~~så~~ de enda lösninge är de triviala, så A, B, C är linjärt oberoende.

(b) från lösninge av (a) ser vi att vi ska försöka lösa ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} x+y & x+z \\ x+z & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

första fallet: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ ~~så $D \in \operatorname{span}\{A, B, C\}$~~

så $D \in \text{span}\{A, B, C\}$

i andra fallet är ekvationssystemet inkonsistent då $x+z=2$ och $x+z=3$, så $E \notin \text{span}\{A, B, C\}$

---

6. (a) $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda-5)$

dvs A har egenvärden $\lambda=0$ och $\lambda=5$

Egenrum:

$\underline{\lambda=0}$ $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

allmän lösning ~~$t x_1$~~ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

så $N(-A)$ har bas $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\underline{\lambda=5}$ $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

$N(5I-A)$ har bas $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

(b) Eftersom A är symmetrisk finns sådana P, och det räcker att konstruera en ON-bas för $\mathbb{R}^2$ av egenvektorer till A.

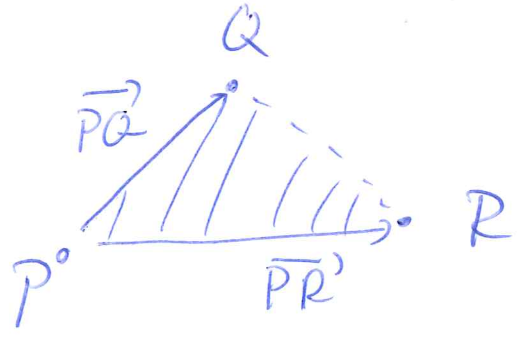
$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \quad \text{enhetsvektor}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \text{enhetsvektor}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \frac{1}{5}(-2\cdot 1 + 1\cdot 2) = 0 \quad \text{ortogonala}$$

dvs $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ är en sådan matris.

7.



$$\text{area} = \frac{1}{2}\|\vec{PQ}\times\vec{PR}\|$$

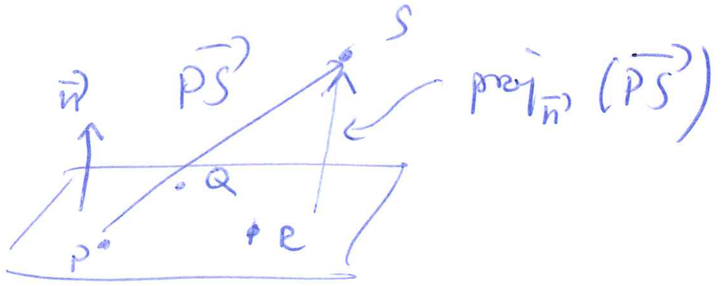
$$\vec{PQ} = (1,1,1), \quad \vec{PR} = (1,2,1)$$

$$\vec{PQ}\times\vec{PR} = (-1,0,1)$$

$$\underline{\text{arean}} = \frac{1}{2}\|(-1,0,1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{a.e.}}$$

triangelns plan har normalvektor $\vec{n} = -\vec{PQ} \times \vec{PR} = (1,0,-1)$

$\vec{PS} = (1,-1,-2)$



$$\mathrm{proj}_{\vec{n}}(\vec{PS}) = \frac{\vec{PS} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{(1,-1,-2)\bullet(1,0,-1)}{2}(1,0,-1) =$$

$$= \frac{3}{2}(1,0,-1)$$

sökt avstånd $= \|\mathrm{proj}_{\vec{n}}(\vec{PS})\| = \frac{3}{2}\sqrt{2} = \underline{\frac{3}{\sqrt{2}}}$

punktnormalformen ger ekvationen:

$$\vec{n} \bullet (x-1, y-2, z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x-1 - (z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{x - z = -4}$$

(8.) (a) D är en 3×2-matris

A är 3×3, C är 2×2

Om AXC ska vara 3×2 krävs

att X är 3×2-matris

samma resultat får man för BXC

(b) $AXC+BXC=D$

$\Leftrightarrow$

$(AX+BX)C=D$

$\Leftrightarrow$

$(A+B)XC=D$

om C är inverterbar: $\Leftrightarrow$

$$(A+B)X=DC^{-1}$$

om A+B inverterbar: $\Leftrightarrow$

$$X=(A+B)^{-1}DC^{-1}$$

$|C|=-1$ så C inverterbar med

$$C^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow |A+B|=-1$ så A+B inverterbar

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

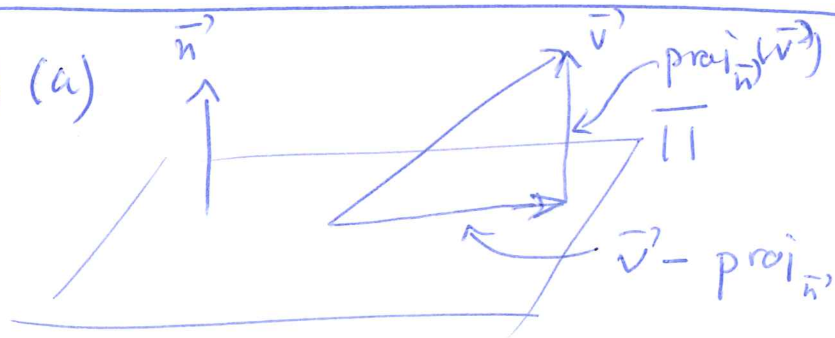
så $(A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A+B$

$$\underline{X} = (A+B)C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}$$

---

9 (a)



$\vec{n} = (1,-1,2)$ normal mot Π

$$\text{proj}_{\vec{n}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{\vec{v} \cdot (1,-1,2)}{6}(1,-1,2)$$

om $\vec{v} = (x,y,z)$ har vi

$$\text{proj}_{\vec{n}}(\vec{v}) = \frac{x-y+2z}{6}(1,-1,2)$$

$$P(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{x-y+2z}{6}(1,-1,2) =$$

$$= \left(\frac{5}{6}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z,\ \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{3}z,\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right)$$

vi läser av standardmatrisen

$$[P] = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 5/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(b) $\ell : (x,y,z) = t \cdot (1,2,3)$, $t \in \mathbb{R}$

$$[P]\, t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = t\ [P]\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 5/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$= t\begin{pmatrix}1/6\\17/6\\4/3\end{pmatrix} = t \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\17\\8\end{pmatrix}$$

dvs $P(\ell)$ är linjen genom origo med riktningsv. $(1,17,8)$, alltså $P(\ell) : (x,y,z) = t(1,17,8)$, $t \in \mathbb{R}$