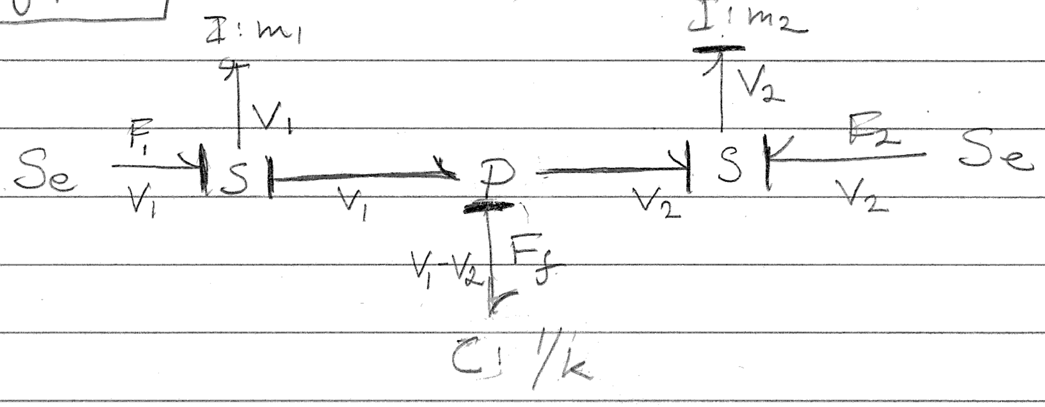
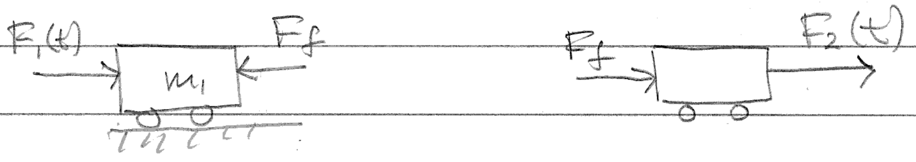
Uppgift 1

a)



Vi har en konfliktfri kausalitetsmarkering och det ska gå att hitta en tillståndsbeskrivning av systemet.

b) Om vi ritar ut de krafter som verkar på respektive massa får vi en bild av hur Newtons andra lag ser ut för respektive massa.



För massa 1 får vi $m_1 \frac{dv_1}{dt} = F_1(t) - F_f$

För massa 2 får vi $m_2 \frac{dv_2}{dt} = F_2(t) + F_f$

Bindningsgrafen indikerar att även fjäderkraften $F_f = k(x_1 - x_2)$ bör vara en tillståndsvariabel (i analogi med kondensatorspänningar)

Vi får $\frac{dF_f}{dt} = k\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right) = k(v_1 - v_2)$

Vi ser nu att hastigheterna v_1 och v_2 tillsammans med F_f räcker för att få en tillståndsbeskrivning i strikt mening,

med $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ F_f \end{bmatrix}$ och $u(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$

kan vi skriva ekvationerna på formen

$\frac{d\bar{x}}{dt} = \vec{f}(\bar{x}, \bar{u})$, vi behöver alltså egentligen inte hålla reda på x_1 och x_2 var för sig för att kunna veta hur systemets tillstånd utvecklas framåt. Det kan dock vara bra att veta var vagnarna befinner sig i fråga om absolut position

Vi kan t.ex. införa masscentrums position som en tillståndsvariabel

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \frac{dX}{dt} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Vi använder alltså tillståndsvektorn

$\vec{x} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ F_f \\ X \end{bmatrix}$ och får tillståndsekvationerna;

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = \dfrac{1}{m_1}\left(-F_f(t) + F_1(t)\right) \\[2ex] \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{1}{m_2}\left(F_f(t) + F_2(t)\right) \\[2ex] \dfrac{dF_f}{dt} = k\left(v_1(t) - v_2(t)\right) \\[2ex] \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{m_1 v_1(t) + m_2 v_2(t)}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Kommentar: En poäng med att välja masscentrum-koordinaten som tillståndsvariabel är att dess andraderivata

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left\{ m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} \right\} = \frac{F_1(t) + F_2(t)}{m_1 + m_2}$$

och alltså bara påverkas av de yttre krafterna (insignalerna).

Uppgift 2

a) $F = 6\pi\eta R v \Leftrightarrow \eta = \frac{F}{6\pi R v}$

Enheten för den dynamiska viskositeten

$$[\eta] = \frac{[F]}{[R][v]} = \frac{N}{m \cdot \frac{m}{s}} = \frac{Ns}{m^2} = \left\{ N = \frac{kg\,m}{s^2} \right\}$$

$$= \frac{kg\,m\,s}{s^2 m^2} = \frac{kg}{s \cdot m}$$

Svar: SI-enheten för η är $\frac{kg}{s \cdot m}$

b) Vi har 6 olika storheter som kan uttryckas med dimensionerna för fyra olika storheter, massa M, längd L, tid T, och ström I.

$[i] = I$ och

$[t] = T$, är självklara.

Bestäm sedan dimensionen för spänningen

Joules lag $\Rightarrow P = U \cdot I \Leftrightarrow U = \frac{P}{I} \Rightarrow$

$$[U] = I^{-1} \cdot \underbrace{\underbrace{MLT^{-2}}_{\text{kraft}} \underbrace{L}_{\text{väg}} \underbrace{T^{-1}}_{\text{per tidsenhet}}}_{\text{effekt}} = ML^2T^{-3}I^{-1}$$

Sedan ger $R = \frac{U}{I}$ att

$$[R] = ML^2T^{-3}I^{-2}$$

$Q = CU$ och $[Q] = IT \Rightarrow$

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = IT\,M^{-1}L^{-2}T^{3}I = M^{-1}L^{-2}T^{4}I^{2}$$

Slutligen ger $L\frac{dI}{dt} = U$ att

$$[L] = \frac{[U][t]}{[I]} = [R]\cdot[t] = ML^2T^{-2}I^{-2}$$

För att bestämma dimensionslösa variabler behöver vi nu bestämma nollrummet till matrisen A som ges av

	i	t	U_0	R	C	L
M:	0	0	1	1	-1	1
L	0	0	2	2	-2	2
T:	0	1	-3	-3	4	-2
I	1	0	-1	-2	2	-2

Rad 1 gånger 2 subtraheras från rad 2 $\Rightarrow$

	i	t	U_0	R	C	L
M:	0	0	1	1	-1	1
L:	0	0	0	0	0	0
T:	0	1	-3	-3	4	-2
I:	1	0	-1	-2	2	-2

Med en rad lika med noll kan matrisen som högst ha rang = 3
Om nu kolumn 1 + 3 gånger kolumn 2 adderas till kolumn 3 ser vi att den kolumnen blir $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, vi har

alltså tre kolumner som är linjärt oberoende så A har rang = 3 vilket betyder att nollrummet har dimension $6 - \text{rang}(A) = 3 \Rightarrow$ Det finns tre dimensionslösa variabler.

c) Vi söker vektorer e_1 e_2 och e_3 som är linjärt oberoende och uppfyller $Ae = 0$

$$e_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Ae_1 = 0 \Rightarrow \Pi_1 = \frac{U_0}{iR}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Ae_2 = 0 \Rightarrow \Pi_2 = \frac{Rt}{L}$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow Ae_3 = 0 \Rightarrow \Pi_3 = \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

Uppgift 3

a) För att få en beskrivning på tillståndsform ska vi bara ha förstaderivator. Det är därför lämpligt att införa en ytterligare variabel

$$V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt}$$

Den givna differential ekvationen kan då skrivas

$$\frac{dV}{dt} + bV + \sin x = u(t) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = -bV - \sin x + u(t) \qquad (1)}$$

Vi har alltså dessutom

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = V \qquad (2)}$$

Ekvationerna (1) och (2) ger tillsammans en tillståndsbeskrivning för tillståndsvektorn

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

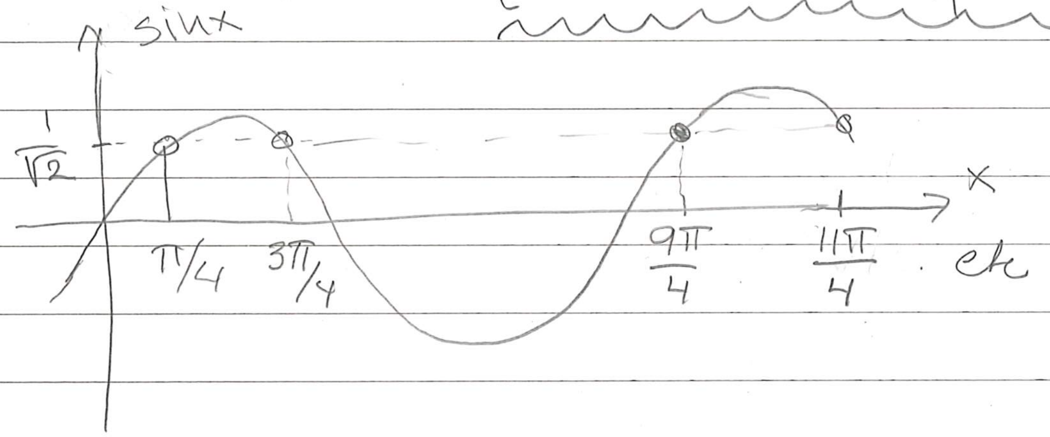
b) $u(t) = u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, bestäm stationär-tillstånd

Vi söker alltså tillstånd som ger

$$\begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -bv - \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \\ v = 0 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi \\ v = 0 \end{cases}$$

$n \in \mathbb{Z}$



Svar: Stationärtillstånden ges antingen av

$$\begin{cases} v = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} v = 0 \\ x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

där n är ett heltal (som kan vara negativt).

3c)

Vi väljer att linjärisera kring stationära punkten

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ x_0 = \frac{\pi}{4} \\ u = u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Nya variabler blir då $\begin{cases} \Delta v = v \\ \Delta x = x - x_0 = x - \frac{\pi}{4} \\ \Delta u = u(t) - u_0 = u_1(t) \end{cases}$

Vi har då genom linjärisering (sid 54 i boken)

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta v}{dt} \\ \frac{d\Delta x}{dt} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta x \end{bmatrix} + B\,\Delta u(t) \qquad (3)$$

Här är A en 2×2-matris och B en 2×1-matris.

$$A = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{bmatrix}\right|_{\substack{v=v_0 \\ x=x_0 \\ u=u_0}}, \quad \text{där } \begin{cases} f_1 = -bv - \sin x + u \\ f_2 = v \end{cases}$$

och $B = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{\substack{v=v_0 \\ x=x_0 \\ u=u_0}}$

(3-4)

genom att beräkna partialderivatorna får vi

$$A = \begin{bmatrix} -b & -\cos x_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

När detta sätts in i ekv. (3) får vi

$$\begin{cases} \dfrac{d\Delta v}{dt} = -b\Delta v - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Delta x + \Delta u \\ \\ \dfrac{d\Delta x}{dt} = \Delta v \end{cases}$$

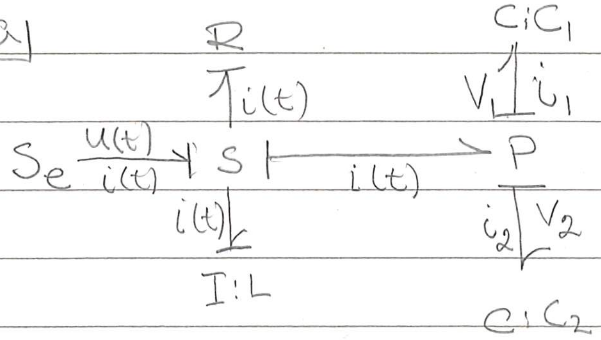
Svar: De båda ovanstående ekvationerna ger en linjäriserad tillståndsform kring stationärpunkten

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ x_0 = \pi/4 \\ u_0 = 1/\sqrt{2} \end{cases}.$$

2023-03-01

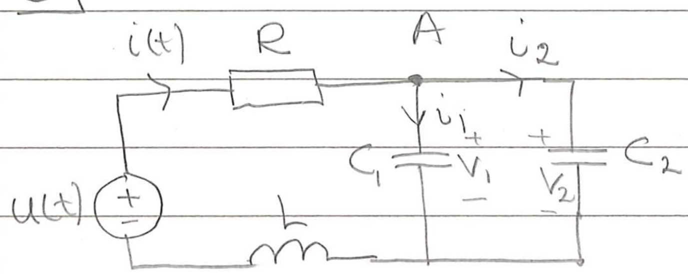
Uppgift 4

a)



Kausalitetsmarkeringen är inte konfliktfri

b)



KVL i vänster maska ⇒

$$u(t) = Ri(t) + v_1(t) + L\frac{di}{dt} \qquad (1)$$

KVL i höger maska ger

$$v_1(t) = v_2(t) \qquad (2)$$

KCL i noden A ger

$$i(t) = i_1 + i_2 = C_1\frac{dv_1}{dt} + C_2\frac{dv_2}{dt} \qquad (3)$$

Ekvationerna kan skrivas om som

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} V_1(t) = \frac{1}{L} u(t) \\ C_1 \frac{dV_1}{dt} + C_2 \frac{dV_2}{dt} - i(t) = 0 \\ V_1(t) - V_2(t) = 0 \end{cases}$$

Detta är ett system av ekvationer på DAE-form.

c) Vi använder ett variabelbyte för att bestämma index. Jag betecknar de nya variablerna med z_1, z_2 och z_3.

- Strömmen $i(t)$ behöver vi veta och behåller den som variabel $\Rightarrow z_1(t) = i(t)$

- En annan variabel som borde vara intressant är spänningen över ersättningskapacitansen C_p för de båda parallellkopplade kondensatorerna C_1 och C_2, $C_p = C_1 + C_2$

Vi sätter därför $z_2 = \frac{\text{total laddning}}{C_p}$

$$\Rightarrow z_2 = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_p}$$

Den tredje variabeln låter vi vara

$z_3 = V_1 - V_2$, z_3 kommer att bestämmas av ett tvångsvillkor.

Vi ser nu att

$$V_1 = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_1}{C_p} = \{V_1 = V_2\} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_p} = Z_2 = V_2$$

Vidare är $\frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{C_p}\left(C_1 \frac{dV_1}{dt} + C_2 \frac{dV_2}{dt}\right)$

Med dessa samband kan DAEn skrivas om som

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} + \frac{R}{L} z_1 + \frac{1}{L} z_2 = \frac{1}{L} u(t) & (4) \\ C_p \frac{dz_2}{dt} - i(t) = 0 & (5) \\ z_3 = 0 & (6) \end{cases}$$

Om ekv. (5) divideras med C_p kan detta på matrisform ges standard form I

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\vec{z}}{dt} + \begin{bmatrix} R/L & 1/L & 0 \\ -1/C_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{z} = \begin{bmatrix} u(t)/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

där $\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$. Matrisen framför $\frac{d\vec{z}}{dt}$ består av en enhetsmatris av dimension 2x2 samt $N = [0]$. I och med att $N = 0$ har systemet index 1.

Svar: Systemets index är 1.