ÖREBRO
UNIVERSITET

# Flervariabelanalys för civilingenjörer

**MA505G-0100**

*2022-10-27, kl. 15:15–20:15*

---

**Hjälpmedel:** Endast skrivmateriel. Formelblad delas ut tillsammans med skrivningen.

**Betygskriterier:** Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga uppgifter bedöms utifrån kriterier för *problemlösning* och *redovisning*. För betyg 3/4/5 räcker det med 4 poäng inom vart och ett av huvudområdena *differentialkalkyl*, *integralkalkyl* och *vektoranalys* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

**Anvisningar:** Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg, rita tydliga figurer och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

**Skrivningsresultat:** Meddelas inom 15 arbetsdagar.

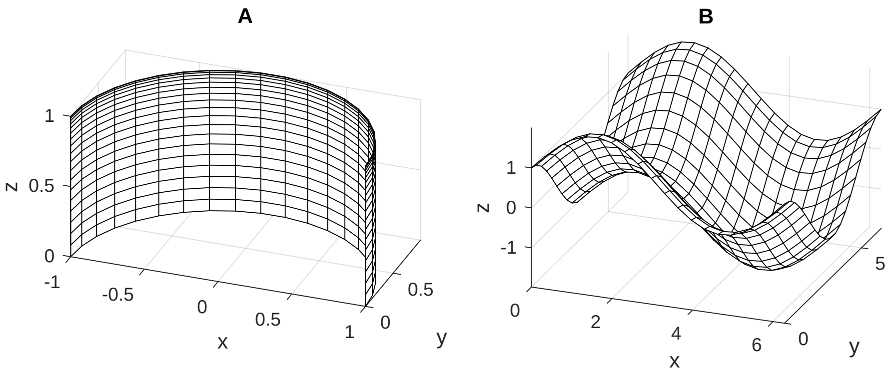
**Examinator:** Andreas Bergwall.

**Lycka till!**

---

## Grundläggande uppgifter (6p/uppgift)

1. Studera ytorna i figuren nedan. $x$-axeln pekar åt höger, $y$-axeln in i pappret och $z$-axeln uppåt.




Vilken/vilka av ekvationerna nedan kan användas för att beskriva respektive yta? Komplettera med definitionsmängder eller andra lämpliga restriktioner.

(a) $z = \sin x + \cos y$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(c) $x^2 + y^2 = 1$

(d) $(x, y, z) = (\sin(s), \cos(t), \sin(s) + \cos(t))$

(e) $(x, y, z) = (\cos(s), \sin(s), t)$

(f) $(x, y, z) = (s, t, \sin s + \cos t)$

2. Antag att $\operatorname{grad} f(x, y) = (-3x^2y + 2xy, -x^3 + x^2 - 2y)$.

   (a) Sett från punkten $(1, -1)$, i vilken av riktningarna $(1, 1)$ och $(2, 1)$ växer $f(x, y)$ snabbast?

   (b) Beräkna $\int_\gamma (\operatorname{grad} f) \cdot d\boldsymbol{r}$ för valfri sluten kurva $\gamma$.

3. Lös differentialekvationen
$$x\frac{\partial f}{\partial x} - 2x^2\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2, \qquad x > 0,$$
genom att införa variablerna $u = x^2 + y$, $v = x^2 - y$.

4. Beräkna flödet av vektorfältet $\boldsymbol{u} = (xy, 2y - z, -x + z^2)$ ut genom randytan till $K = [0, 1] \times [-1, 1] \times [0, 1]$.

5. Bestäm tröghetmomentet för ett halvklot $K$ med radie $R$ m.a.p. dess symmetriaxel. Densiteten antas vara $\rho = 1$.

   *Anm:* Tröghetsmomentet m.a.p. $z$-axeln ges av $J = \iiint_K (x^2 + y^2)\rho \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

## Fördjupade uppgifter (10p/uppgift)

6. Låt $f(x, y) = e^{x^2-2x+y^2-4y+5}$.

   Bestäm största och minsta värdet (eller visa att de inte finns) då

   (a) $x^2 + y^2 = 25$,

   (b) $x^2 + y^2 \leq 25$,

   (c) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

7. Låt $D$ vara den kvadratiska skivan i $xy$-planet som har sina hörn i punkterna $(\pm 1, 0)$ och $(0, \pm 1)$. Låt
$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad (x, y) \in D\}.$$
Bestäm $K$:s massa om $K$:s densitet är $\rho(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, d.v.s. beräkna
$$m = \iiint_K \rho(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

8. Låt $\gamma$ vara skärningen mellan planet $x+y+z = 1$ och paraboloiden $z = x^2+y^2$. Beräkna $\int_\gamma (y + 2z)\,\mathrm{d}x + (3x^2 - z)\,\mathrm{d}y + (x - 2y)\,\mathrm{d}z$ om $\gamma$ genomlöps ett varv moturs sett från origo.

**Kom ihåg att illustrera relevanta definitionsmängder, integrationsområden och orienteringar med tydliga figurer.**

**Lösningsförslag till Flervariabelanalys för civilingenjörer 20221027**

1. Ytan i bild A är en "halv cylinder" och ges av

$$\begin{array}{ll} \text{(c)} & x^2+y^2=1, \quad y \geq 0, \quad 0 \leq z \leq 1, \\ \text{(e)} & (x,y,z)=(\cos(s),\sin(s),t), \quad 0 \leq s \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{array}$$

   Ytan i bild B ges av

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & z=\sin x+\cos y, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi, \\ \text{(f)} & (x,y,z)=(s,t,\sin s+\cos t), \quad 0 \leq s \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{array}$$

   (b) beskriver enhetssfären och (d) en del av planet $z=x+y$.

2. (a) Beräkna $f'_{\boldsymbol{v}}(1,-1)=\operatorname{grad} f(1,-1)\cdot\boldsymbol{v}=(1,2)\cdot\boldsymbol{v}$ för $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1=(1,1)/\sqrt{2}$ och $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2=(2,1)/\sqrt{5}$. Observera att riktningsvektorena måste normeras. Vi får

$$f'_{\boldsymbol{v}_1}=\frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{och } f'_{\boldsymbol{v}_2}=\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

   Eftersom $(3/\sqrt{2})^2=9/2=4,5$ är större än $(4/\sqrt{5})^2=16/5=3,2$ så är $f'_{\boldsymbol{v}_1}>f'_{\boldsymbol{v}_2}$. $f$ växer alltså snabbare i riktningen $(1,1)$ än i riktningen $(2,1)$.

   Uppgiften kan också lösas grafiskt. Om $\alpha$ är vinkeln mellan $\boldsymbol{v}$ och $\operatorname{grad} f$ så är $\alpha\in[0,\pi]$ och

$$f'_{\boldsymbol{v}}=\operatorname{grad} f\cdot\boldsymbol{v}=|\operatorname{grad} f|\cdot 1\cdot\cos\alpha.$$

   Eftersom $\cos\alpha$ är strängt avtagande i $[0,\pi]$ så är riktningsderivatan större ju mindre $\alpha$ är. Man får alltså alltid ett större värde på riktningsderivatan ju mindre $\boldsymbol{v}$:s riktning avviker från $\operatorname{grad} f$:s riktning. I just det här exemplet räcker det därför att ritar vektorerna $(1,2)$, $(1,1)$ och $(2,1)$ med start i samma punkt. Då ser man direkt att vinkeln mellan $(1,2)$ och $(1,1)$ är mindre än vinkeln mellan $(1,2)$ och $(2,1)$. $f$ växer alltså snabbare i riktningen $(1,1)$ än i riktningen $(2,1)$.

   (b) Eftersom $\operatorname{grad} f$ är ett potentialfält ($f$ är ju dess potential) så blir integralen längs vilken sluten kurva som helst 0.

3. Låt $z=f(x,y)$ där $f$ är den funktion som ska bestämmas. När vi inför nya variabler $u=x^2+y$ och $v=x^2-y$ så är tanken att det i någon mening ska vara lättare att ta reda på hur $z$ beror av dessa nya variabler. Vi försöker alltså istället att hitta ett samband $z=F(u,v)$ som är sådant att $F(x^2+y,x^2-y)=f(x,y)$.

   För enkelhets skull kan vi använda $z$ som beteckning för funktionsvärden till både $f$ och $F$. Det innebär t.ex. att $z'_u=F'_u(u,v)$ medan $z'_y=f'_y(x,y)$.

Hursomhelst, kedjeregeln ger att

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = 2xz'_u + 2xz'_v \qquad \text{och} \qquad z'_y = z'_u - z'_v.$$

Insättning i diffekvationen ger (efter förenkling)

$$(2x^2 z'_u + 2x^2 z'_v) - (2x^2 z'_u - 2x^2 z'_v) = 4x^2 \Leftrightarrow z'_v = 1 \Leftrightarrow z = v + g(u),$$

d.v.s. lösningarna är $z = f(x, y) = x^2 - y + g(x^2 + y)$ där $g$ är en godtycklig $C^1$-funktion av en variabel.

4. Enligt Gauss sats så ges flödet ut genom $\partial K$ av integralen av div $\boldsymbol{u} = y+2+2z$ över $K$. Eftersom $y$-termen är en udda funktion av $y$ och $K$ är spegelsymmetrisk i planet $y = 0$ så kan vi bortse från $y$-termen. Flödet är alltså

$$2 \cdot (K\text{:s volym}) + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-1}^1 \mathrm{d}y \int_0^1 2z \, \mathrm{d}z = 6.$$

5. Om vi beskriver halvklotet som $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$, så är $z$-axeln symmetriaxel och anvisad formel kan användas. Av symmetriskäl kan vi dock lika gärna integrera $2(x^2 + y^2 + z^2)/3$, vilket ger en enklare integrand. Med rymdpolära koordinater får vi då att tröghetsmomentet är

$$J = \frac{2}{3} \iiint\limits_{[0,R]\times[0,\pi/2]\times[0,2\pi]} r^2 \cdot r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

6. I både (a) och (b) så kan man vara säker på att största och minsta värde finns eftersom $f$ är kontinuerlig och såväl cirkeln $x^2 + y^2 = 25$ som cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 25$ är kompakta mängder.

   Observera också att för att lösa (b) så måste man både studera inre stationära punkter och göra en randundersökning. Randundersökningen är dock exakt samma problem som (a)-uppgiften, så resultatet därifrån kan återanvändas. Det blir motsägelsfullt om man får andra resultat från randundersökningen i (b) än man fick i (a).

   Eftersom exponentialfunktionen är strängt monoton så antar $f(x, y)$ eventuella max- och min i samma punkter som $F(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$. Vi kan alltså lika gärna söka max- och minpunkter till denna funktion.

   (a) Låt $g(x, y) = x^2 + y^2$. I optimum är $\nabla F$ och $\nabla g$ parallella. Det leder till att $y = 2x$ vilket insatt i bivillkoret ger $x = \pm\sqrt{5}$. (För detta steg kan man antingen använda Lagranges multiplikatormetod eller sätta upp en lämplig determinantekvation.) Jämförelse av målfunktionsvärden ger att minsta värdet är $F(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) = 30 - 10\sqrt{5}$ och största $F(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) = 30 + 10\sqrt{5}$. $f$:s minsta och största värde är alltså $e^{30-10\sqrt{5}}$ resp. $e^{30+10\sqrt{5}}$.

Alternativt kan cirkeln parametriseras, t.ex. som $y = \pm\sqrt{25-x^2}$ eller $(x, y) = (5\cos t, 5\sin t)$. I det första fallet fås en funktion av enbart $x$ som ska optimeras över $[-5, 5]$, i det andra en funktion av $t$ som ska optimeras över $[0, 2\pi]$.

(b) Optimum finns antingen på randen eller i en inre stationär punkt. (a) ger största och minsta värde på områdets rand. Det finns bara en stationär punkt: $(x, y) = (1, 2)$. Den ligger i områdets inre och har funktionsvärdet $f(1, 2) = e^0 = 1$. Detta är mindre än det minsta randvärdet ovan. Alltså är minsta värdet $f(1, 2) = 1$ och största värdet $f(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) = e^{30+10\sqrt{5}}$.

(c) $\mathbb{R}^2$ är obegränsat så existensen av max och min måste utredas. Eftersom $F(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 \geq 0$ för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ och $F(1, 2) = 0$ så följer att $f(1, 2) = 1$ är minsta värdet även i $\mathbb{R}^2$. Däremot är $F(x, y)$ uppåt obegränsad. Det gäller ju t.ex. att $F(x, 2) = (x-1)^2 \to \infty$ då $x \to \infty$. Det ger att även $f(x, y)$ är uppåt obegränsad, d.v.s. det finns inget största värde.

7. Kroppen $K$ ges av olikheterna

$$-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad (x, y) \in D.$$

Observera att $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ i hela $D$. Däremot är $D$ inte hela enhetscirkelskivan, så $K$ är alltså inte ett klot. Rymdpolära koordinater passar därför inte bra.

För att bestämma $K$:s massa kan vi börja med en integrering i $z$-led enligt följande:

$$m = \iint_D \left( \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D 2(1-x^2-y^2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Observera att $D$:s hörn ligger på koordinataxlarna. Eftersom $D$ är kvadratisk så passar det inte bra att införa planpolära koordinater. Av symmetriskäl (integranden är en jämn funktion av såväl $x$ som $y$ och $D$ är spegelsymmetriskt i såväl $x = 0$ som $y = 0$) så kan vi dock integrera över den triangulära del $T$ av $D$ som ligger i 1:a kvadranten och multiplicera resultatet med 4. $T$ ges av olikheterna $0 \leq y \leq 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$. Massan är alltså

$$m = 4\iint_T 2(1-x^2-y^2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 8\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (1-x^2-y^2)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \ldots = \frac{8}{3}.$$

Av symmetriskäl går det lika bra att integrera $1 - 2x^2$ istället för $1 - x^2 - y^2$. Rotationssymmetrin hos ytan gör att man också kan byta kvadraten $D$ mot vilken annan kvadrat som helst med centrum i origo och sidlängd $\sqrt{2}$.

Ett annat sätt att beräkna dubbelintegralen på är att göra ett variabelbyte som överför kvadraten i en axelparallell kvadrat, t.ex. variabelbytet $u = x + y$, $v = x - y$. Men det är enklast att vänta med detta variabelbyte till efter att man har integrerat i $z$-led.

8. Använd Stokes sats. $\gamma$ är den positivt orienterade randkurvan till funktionsytan

$$\Gamma : \quad z = 1 - x - y, \quad (x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 \leq \frac{3}{2}$$

om den orienteras så att $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = (z'_x, z'_y, -1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (-1, -1, -1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Låt $D$ vara cirkelskivan ovan (d.v.s. den parametriserade ytans definitionsmängd). Rotationen av vektorfältet $(y + 2z, 3x^2 - z, x - 2y)$ är $(-1, 1, 6x - 1)$ vilket ger att kurvintegralens värde är

$$\iint_\Gamma (-1, 1, 6x - 1) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iint_D (-1, 1, 6x - 1) \cdot (-1, -1, -1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_D (-6x + 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (-6(x + \frac{1}{2}) + 4)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4 \cdot (D\text{:s area}) = 6\pi.$$

Här har vi i näst sista steget också utnyttjat $D$:s spegelsymmetri i linjen $x = -1/2$.