ÖREBRO
UNIVERSITET

LÖSNINGSFÖRSLAG

Våg- och materiefysik för civilingenjörer

FY501G-0100

2022-01-10, kl. 14:15-19:15

Hjälpmedel: Skrivmateriel, lärobok[1] och miniräknare.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60, uppdelat på 10 poäng per huvuduppgift, och bedöms utifrån kriterier för *kunskap och förståelse*; *färdighet, förmåga och värderingsförmåga;* samt *skriftlig avrapportering*. För betyg 3/4/5 räcker det med 4 poäng inom vart och ett av områdena *vågrörelselära*, *elektromagnetism*, *kvantmekanik och materiens struktur* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl med sidhänvisningar och formelnummer från läroboken, redovisa alla väsentliga steg, rita tydliga figurer och svara med rätt enhet. Redovisa inte mer än en huvuduppgift per sida.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

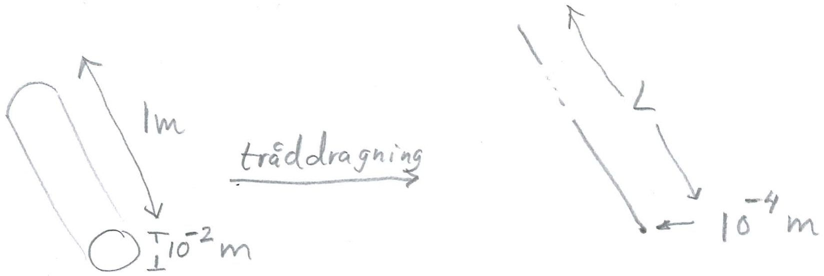
Examinator: Magnus Ögren.

Lycka till!

---

[1] *Principles of Physics* Halliday, Resnick, Walker

1 a)



Om vi antar att inga materialförluster sker skall volymen för de två cylindrarna vara lika:

$$\frac{\cancel{\pi}\cdot(10^{-2})^2}{\cancel{4}}\cdot 1.0 = \frac{\cancel{\pi}(10^{-4})^2\cdot L}{\cancel{4}}$$

$$L = \frac{10^{-4}}{10^{-8}} = 10^4 \text{ m} = 10 \text{ km}.$$

Svar: Den färdiga tråden blir $1.0\cdot 10^1$ km.

b) Vi uppskattar antalet varv för fjädern till $N = 15$. $I = 1.0$ A, $l = 0.10$ m

Fjädern betraktas som en långsträckt spole:

(29–23) $$B = \mu_0 i n = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l}$$

$$= 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1.0\cdot\frac{15}{0.10} = 1.885\cdot 10^{-4}\,T$$

Svar: Det magnetiska fältets styrka är 0.19 mT.

2. a) Genom att använda (17-41) med $n = 3$, för den näst lägsta egenfrekvensen, och $v = 343$ m/s för ljudhastigheten i röret, får vi

$$f = \frac{3v}{4L} = \frac{3 \cdot 343}{4 \cdot 0.90} = 286\, Hz. \tag{1}$$

Svar a): Frekvensen i wiren är 286 Hz.

b) För wiren använder vi (16-66) och (16-26) och får

$$f_w = \frac{nv}{2L_w} = \frac{1}{2L_w}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}, \tag{2}$$

där $\mu = m_w/L_w$. Då de två frekvenserna är lika, $f = f_w$, löser vi (2) ovan för kraften τ

$$\tau = (2L_w f)^2 \frac{m_w}{L_w} = 4f^2 m_w L_w = 4 \cdot 285.83^2 \cdot 9.60 \cdot 10^{-3} \cdot 0.330 = 1.04 \cdot 10^3\, N. \tag{3}$$

Svar b): Spännkraften blir $1.04 \cdot 10^3$ N.

3. a) Tolkningen av ytintegralen i Gauss lag är som det totala vektorflödet (magnetiska fältet) in/ut genom en sluten yta. Om detta alltid är noll, för alla val av slutna ytor, så kan ytan aldrig innesluta en monopol, utan endast par av poler (dipoler) som således tillsammans ger flödet noll.

Svar a): Det finns inga magnetiska monopoler, enligt Gauss för magnetiska fält.

b) Staven har volymen $V = \pi r^2 \ell = \pi \left(3.00 \cdot 10^{-3}\right)^2 6.00 \cdot 10^{-2} = 1.696 \cdot 10^{-6}$ m^3. Om vi nu använder (32-38) får vi stavens dipolmoment

$$\mu = MV = 2.70 \cdot 10^3\ [A/m] \cdot 1.696 \cdot 10^{-6}\ \left[m^3\right] = 4.579 \cdot 10^{-3}\ \left[Am^2\right]. \tag{4}$$

För att räkna ut det mekaniska momentet i ett externt magnetfält, med styrkan $B = 50.0$ mT, använder vi (28-13)

$$\tau = \mu B \sin\theta = 4.579{\cdot}10^{-3}\left[Am^2\right] 0.050 \left[T = Vs/m^2\right] \sin 68^\circ = 0.212{\cdot}10^{-3}\left[AVs = Nm\right]. \tag{5}$$

För att räkna ut ändringen i energi använder vi (28-38), (28-39)

$$W = U_f - U_i = U\left(34^\circ\right) - U\left(68^\circ\right) = \mu B\cos\theta_f - \mu B \cos\theta_i =$$

$$0.22895 \cdot 10^{-3}\left(\cos 34^\circ - \cos 68^\circ\right) = 0.10404 \cdot 10^{-3}\ [J]. \tag{6}$$

Svar b): Det mekaniska momentet har styrkan $2.12{\cdot}10^{-4}$ Nm och ändringen i energi blir $1.04 \cdot 10^{-4}$ J.

4. a) Vi utgår från (33-5) för att få amplituden för det magnetiska fältet

$$\frac{E}{B} = c \Rightarrow B = \frac{E}{c} = \frac{8.00\ [V/m]}{2.998 \cdot 10^8\ [m/s]} = 2.6684 \cdot 10^{-8} \left[Vs/m^2\right] \approx 2.67 \cdot 10^{-8}\,[T]\,. \quad (7)$$

Vidare får vi EM-vågens intensitet från tex (33-25) och (33-26)

$$I = \frac{1}{c\mu_0} E_{rms}^2 = \frac{1}{2c\mu_0} E^2 = \frac{8.00^2\ \left[V^2/m^2\right]}{2 \cdot 2.998 \cdot 10^8 \cdot 1.257 \cdot 10^{-6}\ [m/s \cdot Tm/A]} \approx 8.49 \cdot 10^{-2} \left[W/m^2\right]. \quad (8)$$

Svar a): Maximala styrkan av det magnetiska fältet är $2.67 \cdot 10^{-8}$ T och EM-vågens intensitet är $8.49 \cdot 10^{-2}$ W/m^2.

b) Då det gäller att $E_{horisontal} = 2E_{vertikal}$ får vi styrkan av det totala elektriska fältet på stranden

$$E_{strand} = \sqrt{E_{horisontal}^2 + E_{vertikal}^2} = E_{vertikal}\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}E_{vertikal}. \quad (9)$$

För en badare som står upp tar solglasögonen helt bort den horisontella komponenten, så det elektriska fältet som når ögonen är $E_{stående} = E_{vertikal}$. Ljusintensiteten är proportionell mot det elektriska fältets styrka i kvadrat, se tex (33-26), så att andelen blir

$$\frac{I_{stående}}{I_{strand}} = \left(\frac{E_{stående}}{E_{strand}}\right)^2 = \frac{E_{vertikal}^2}{5E_{vertikal}^2} = 0.2. \quad (10)$$

För en badare som ligger ned på sidan tar solglasögonen helt bort den vertikala komponenten, så det elektriska fältet som når ögonen är $E_{liggande} = E_{horisontal} = 2E_{vertikal}$. Andelen blir nu

$$\frac{I_{liggande}}{I_{strand}} = \left(\frac{E_{liggande}}{E_{strand}}\right)^2 = \frac{4E_{vertikal}^2}{5E_{vertikal}^2} = 0.8. \quad (11)$$

Svar b): När personen står upp tar solglasögonen bort 80% av ljusintensiteten, när personen ligger ned på sidan tar solglasögonen bort 20%.

En alternativ lösning kan utgå från (33-38) med $\theta_1 = \arctan(1/2)$ och $\theta_2 = \pi/2 - \theta_1$ (rita figur).

5. a) Vi får effekten genom att multiplicera flödet av fotoner per sekund, R, med energin för varje foton (38-2)

$$P = \frac{Rhc}{\lambda} = \frac{(110\,/\,\mathrm{s})(6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})(2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})}{550 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 4.0 \times 10^{-17}\ \mathrm{W}.$$

Svar a): Effekten på näthinnan är $4.0 \cdot 10^{-17}$ W.

b) Situation påminner om laborationen med fotoelektrisk effekt. Vi utgår från formeln för fotoelektrisk effekt (38-5)

$$hf = K_{max} + \Phi, \tag{12}$$

där $\Phi = 1.95$ eV. Enligt (tex) Figure 33-1 har blått ljus en våglängd på ca 460 nm. Detta leder till följande energi för de inkommande fotonerna

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 2.998 \cdot 10^{8}}{460 \cdot 10^{-9}} = 4.318 \cdot 10^{-19}\ [J] = 2.696\ [eV]\,. \tag{13}$$

Vi använder nu formel (8) ovan för att få en uppskattning av den kinetiska energin i eV

$$K_{max} = hf - \Phi = 2.696 - 1.95 = 0.746\ [eV]\,. \tag{14}$$

Svar b): Elektroner som slås ut har rörelseenergin 0.75 eV.

6. a) Enligt (39-4) ges energinivåerna för den endimensionella oändligt djupa lådpotentialen

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2. \tag{15}$$

I formeln ovan är $n = 1$ för grundtillståndet och $n = 2$ för det första exciterade tillståndet. Med massan för en elektron, $m = m_e$, kan vi visa att energiskillnaden är

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{h^2}{8m_e L^2}\left(2^2 + 1^2\right) = \frac{3h^2}{8m_e L^2}. \tag{16}$$

b) För en oändlig brunn gäller att vågfunktionen är strikt noll i ändarna på brunnen. Detta innebär en något kortare (materie-) våglängd för partikeln i brunnen än vad som blir fallet för en ändlig brunn, där vågfunktionen 'tunnlar' in en bit i potentialen på bägge sidor av brunnen. En kortare våglängd innebär en större energi, så lägst energi uppmäts i den ändliga brunnen.

Svar b): Lägst energi uppmäts i den ändliga brunnen.

c) Påståendet är att vågfunktionen $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a}$ insatt i den radiella Schrödingerekvationen i sfäriska koordinater nedan, skall ge oss grundtillstånd $E_1 = (-)\,13.66$ eV.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi(r)}{\partial r}\right) + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2}\psi(r) + U(r)\psi(r) = E_1\psi(r). \tag{17}$$

Vi sätter in uttrycket $U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (39-32) för väteatomens potential i Schrödingerekvationen ovan. Vidare är $n = 1$ för grundtillståndet och då följer att $\ell = 0$ från Table 39-2, så att

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a} - \frac{2}{ar}\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a}\right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a} = E_1\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a}. \tag{18}$$

Vi kan nu förkorta med $\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a}$ på båda sidor och sätter in uttrycket $a = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2}$ (39-28) för Bohrradien. Förenkling ger nu

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 ma}\left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r}\right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = E_1. \tag{19}$$

$$-\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = E_1. \tag{20}$$

Så att

$$E_1 = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -13.66\,eV, \tag{21}$$

i överensstämmelse med (39-33), (39-34) för $n = 1$, vilket skulle visas.

Svar c): Det stämmer!