Tentamen

Optimering för civilingenjörer, MA507G

Examinator: Mårten Gulliksson

Tid: Onsdag 12 Januari klockan 08:15-13:15

Hjälpmedel

Formelsamling, miniräknare och skrivverktyg.

Betygskriterier

Framgår av separat dokument publicerat på Blackboard. Totalt antal poäng är 60 och för godkänt krävs minst 30 poäng.

Anvisningar

Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Var tydlig med vad som antas och vad som visas. Det är huvudsakligen motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Tentan innehåller lättare och svårare uppgifter blandat. Välj de uppgifter som passar dig. Samtliga uppgifter behöver inte lösas.

Lycka till!

Problem 1 (10 poäng)

En lärare har satt samman en tentamen som består av tre uppgifter vilka ska poängsättas. Uppgifterna ska sammanlagt ge 100 poäng. Med hänsyn tagen till att uppgifterna är olika omfattande ska uppgifterna 1 och 2 ha minst 20 poäng vardera, medan uppgift 3 ska ha minst 30 poäng. Uppgift 1 består till 25% av frågor som kräver mer än grundläggande kunskaper. Motsvarande andelar för uppgifterna 2 och 3 är 50% vardera. Läraren vill att minst 40 av poängen på tentamen ska kräva mer än grundläggande kunskaper. Läraren förväntar sig att de tenterande kommer att få i genomsnitt 50% av den totala poängen på uppgift 1, 40% av totala poängen på uppgift 2 och 30% av totala poängen på uppgift 3. Slutligen vill läraren fördela de 100 poängen på de tre uppgifterna så att den förväntade genomsnittliga totala poängen blir så hög som möjligt.

(a) Formulera en linjär optimeringsmodell för lärarens problem.

(b) Man kan visa att den optimala poängsättningen på de tre uppgifterna är 40, 30 respektive 30 poäng. Hur kommer den förväntade gensomsnittlige poängen på tentamen att ändras om antalet poäng som kräver mer än grundläägande kunskaper sänks från 40 till 39 poäng?

Problem 2 (10 poäng)

Givet följande linjära optimeringsproblem

$$\begin{array}{rlcl} z^* = & \min z = 5x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 3x_4 & & \\ \text{u.b.} & x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 5 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 4 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 4 & & \end{array}$$

och betrakta punkterna

$$A = (1, 1, 1, 0),\ B = (9/2, 0, 0, 1/2),\ C = (0, 0, 9/4, -7/4).$$

(a) Vilken eller vilka punkter ovan är tillåtna baslösningar?

(b) Sätt upp det duala problemet matematiskt.

(c) Utnyttja dualitet för att avgöra om någon eller några av punkterna ovan är optimal.

Problem 3 (10 poäng)

Lös följande delproblem.

(a) Låt

$$f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 - 4x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + \nu(x_1^2 + x_2^2)$$

där ν är en reell parameter. För vilka värden på ν är $f(x)$ konvex på $\mathbb{R}^2$.

(b) Visa eller motbevisa att mängden

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0, \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq 1\right\}$$

är konvex.

(c) Antag att mängderna $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ är konvexa. Visa att då är mängden $X_1 \cap X_2$ konvex.

Problem 4 (10 poäng)

Betrakta optimeringsproblemet

$$\begin{array}{lrcl} \min & x_2 & & \\ \text{u.b.} & x_2 & \geq & 1 - \frac{1}{e}(1 + \ln x_1) \\ & x_2 & \geq & 1 + \frac{1}{2}(ex_1^2 - \frac{1}{e}) \end{array}$$

och anta att $x_1 > 0$. Avgör om punkten $x^* = (1/e, 1)^T$ uppfyller KKT-villkoren.

Problem 5 (10 poäng)

(a) Ett radiokommunikationssystem ska utformas genom att n stycken kommunikationskanaler fördelas på högst m stycken tillgängliga frekvensband. Frekvensband i har bredden $b_i > 0$ Hz och kanal j fodrar en bandbredd på $a_j > 0$ Hz. Målsättningen är att tillordna kanalerna till frekvensbanden på ett sådant sätt att den sammanlagda bandbredden (summan av bredderna b_i) av de frekvensband som utnyttjas, det vill säga som utnyttjas av *minst* en kanal, blir så låg som möjligt. Formulera denna frågeställning som ett linjärt heltalsoptimeringsproblem.

(b) Beskriv kortfattat principerna för minst två olika typer av metoder för att lösa heltalsproblem.

Problem 6 (10 poäng)

(a) Givet det obegränsade optimeringsproblemet

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2)^2 x_2^2 + (x_2 + 1)^2.$$

Bestäm sökriktningarna i gradientmetoden (steepest descent) och Newtons metod i punkten $x^* = (1,1)^T$.

(b) Är sökriktningarna i a) descentriktningar?

(c) Sätt upp minimeringsproblemet som uppkommer vid exakt linjesökning för en sökriktning ovan som är descentriktning. Ni behöver inte lösa detta minimeringsproblem.

(d) Ange minst ett möjligt problem som kan uppkomma vid exakt linjesökning.