180316

1.

(a) $\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) = (1,1,1)$

$\vec{w}\cdot\vec{u} = 10$

(b) $\text{rang}(A) = 3$

(c) $(3,5,1)\times(2,1,-2) = (-11,8,-7)$

(d) $\det = 4$

---

2. totalmatris

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 2 & 3 & 4 & 5 & c \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1)\quad(-2) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & a-b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & 3 & c-2b \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & 3 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 2b-a \\ 0 & 1 & 2 & 3 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right)$$

trappstegsmatris, så lösning finns omm $\underline{c-a-b=0}$

detta besvarar (b).

för (a), ersätt $a=1, b=2, c=3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

allmän lösning: $(x,y,z,v) = (3+s+2t, -1-2s-3t, s, t)$

$s,t \in \mathbb{R}$

detta besvarar (a)

---

3. ~~K(A)~~ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \overset{2.}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

pivotkolonner

$K(A)$ har bas $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(K(A)) = 2$

$N(A)$:

Lös homogena ekv.syst. (läs av från 2. med $a=b=c=0$)

$$(x,y,z,v) = (s+2t, -2s-3t, s, t) \quad s,t \in \mathbb{R}$$

$$= s(1,-2,1,0) + t(2,-3,0,1)$$

$s,t \in \mathbb{R}$

dvs $N(A)$ har bas $\{(1,-2,1,0), (2,-3,0,1)\} \Rightarrow \dim(N(A)) = 2$

(4.) (a) ekvationen $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\dots+\lambda_n\vec{v}_n=\vec{0}$ (*) har endast den triviala lösningen $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$

(b) $$\lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2+\lambda_3 M_3=\begin{pmatrix}\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_1+4\lambda_2+\lambda_3\\ 3\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & 2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\end{pmatrix}$$

(*) har totalmatris

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\1&3&1&0\\1&4&1&0\\3&1&1&0\\2&1&1&0\\1&1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

dvs M_1, M_2, M_3 är linjärt oberoende eftersom ekv (*) endast har den triviala lösn. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

5. Skriv som kolonnvektorer:

$$S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} = [S]\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{[S] = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}}$$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\y\end{pmatrix} = [T]\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{[T] = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}}$$

svar på (a)

(b) $$[S\circ T] = [S][T] = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

$$[T\circ S] = [T][S] = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

---

6. $$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\-3 & \lambda+4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda+1 & 2\\\lambda+1 & \lambda+4\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & \lambda+4\end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

dvs A har egenvärden $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -2$

$\underline{E_{-1}} = N(-I-A)$: $\begin{pmatrix}-2 & 2\\-3 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}$ $(x,y) = s(1,1),\ s\in\mathbb{R}$ (allm. lösn.)

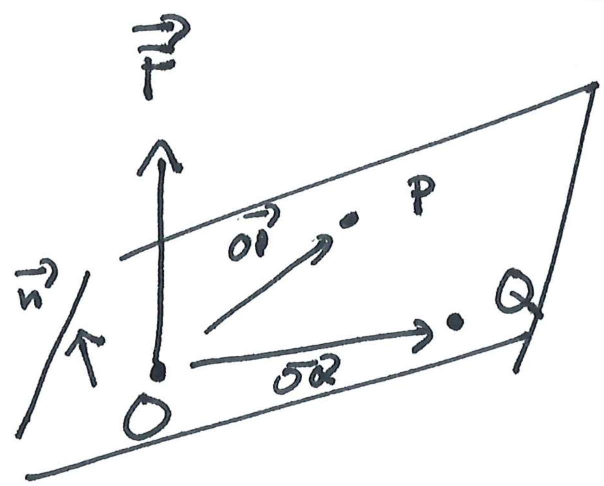
E_{-1} har bas $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\underline{E_{-2} = N(-2I - A)}$: $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

lösn: $(x, y) = s(2, 3)$, $s \in \mathbb{R}$

E_{-2} har bas $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

7.



$$\vec{F} = 28 \cdot (0, 0, 1) \quad \text{(lodrätt)}$$

$$\vec{OP} \times \vec{OQ} = (1, 0, 3) \times (1, 1, 1) = (-3, 2, 1)$$

$\vec{n} = (-3, 2, 1)$ är normal mot skivan.

$\vec{F}$:s komposant normalt mot skivan:

$$\vec{F}_{\perp} = \text{proj}_{\vec{n}}(\vec{F}) = \frac{(0,0,28) \bullet (-3,2,1)}{9+4+1} (-3, 2, 1)$$

$$= \frac{28}{14}(-3, 2, 1) = (-6, 4, 2)$$

$\vec{F}$:s komposant parallell med skivan:

$$\vec{F}_{\parallel} = \vec{F} - \vec{F}_{\perp} = (0,0,28) - (-6,4,2) =$$

$$= (6,-4,26)$$

(8.)

$$MN + MXN = I$$
$$\Leftrightarrow$$
$$M(I+X)N = I$$

om M & N inverterbara:

$$\Leftrightarrow$$
$$I + X = M^{-1}N^{-1}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$X = M^{-1}N^{-1} - I = (NM)^{-1} - I$$

$\det(M) = 2-1 = 1 \neq 0 \Rightarrow M$ inverterbar

$\det(N) = -1 \neq 0 \Rightarrow N$ inverterbar

$$NM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(NM)^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (NM)^{-1} - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

9.) $B\vec{v}_1 = \ldots = -2\vec{v}_1$

$B\vec{v}_2 = 0 \cdot \vec{v}_2$

$B\vec{v}_3 = 2 \cdot \vec{v}_3$

$B\vec{v}_4 = 2\,\vec{v}_4$

så $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_4$ är egenvektorer till B med egenvärden $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$

B symmetrisk $\Rightarrow$ kan diagonaliseras ortogonalt

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_4$ ortogonal mängd $\Rightarrow$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 & \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 & \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3 & \frac{1}{\|\vec{v}_4\|}\vec{v}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^5 = (PDP^T)^5 = P D^5 P^T = P \begin{pmatrix} -2^5 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 2^5 & \\ 0 & & & 2^5 \end{pmatrix} P^T$$

$$= \dots = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 64 & 0 \\ 0 & 64 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}$$