ÖREBRO
UNIVERSITET

Flervariabelanalys för civilingenjörer

MA505G-0100

2020-10-29, kl. 15:15–20:15

Hjälpmedel: Endast skrivmateriel. Formelblad delas ut tillsammans med skrivningen.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga uppgifter bedöms utifrån kriterier för *problemlösning* och *redovisning*. För betyg 3/4/5 räcker det med 4 poäng inom vart och ett av huvudområdena *differentialkalkyl*, *integralkalkyl* och *vektoranalys* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg, rita tydliga figurer och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Andreas Bergwall.

Lycka till!

Grundläggande uppgifter (6p/uppgift)

1. Låt $f(x, y) = y + \sin(4 - xy^2)$.
   (a) Bestäm en normal till kurvan $f(x, y) = 2$ i punkten $(1, 2)$.
   (b) Bestäm tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i den punkt där $(x, y) = (1, 2)$.
   (c) I vilken riktning växer $f(x, y)$ snabbast om vi befinner oss i punkten $(1, 2)$?

2. $f(x, y) = 8x^3 + y^3 - 3xy$ har två stationära punkter varav en är en lokal extrempunkt. Bestäm den!

3. Beräkna $\iint_D x\cos(y^3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ där $D = \{(x, y) : 0 \le x \le y \le 1\}$.

4. Beräkna volymen av området $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

5. Välj en funktion $Q(x, y)$ så att $\int_\gamma (y + 2xe^y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ blir oberoende av vägen i $\mathbb{R}^2$. Vilket värde får integralen om γ går från $(0, 0)$ till $(2, 1)$?

Kom ihåg att illustrera relevanta definitionsmängder, integrationsområden och orienteringar med tydliga figurer.

Fördjupade uppgifter (10p/uppgift)

6. Låt D vara den triangulära skivan med hörn i punkterna $(0,0)$, $(-2,2)$ och $(2,2)$. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = y + xy^2 - x$ då $(x,y) \in D$.

7. Bestäm tröghetsmomentet med avseende på diametern för följande objekt:

   (a) En cirkelformad tråd.

   (b) En cirkulär skiva.

   (c) En sfär.

   (d) Ett klot.

   Tänk på att i samtliga fall ska objekten ses som mängder i $\mathbb{R}^3$.

   Tips: Välj koordinatsystem så att diametern hamnar på z-axeln. Då fås tröghetsmomentet genom integration av $\rho \cdot (x^2 + y^2)$ över den mängd det gäller. Välj själv lämpliga integraltyper (kurv-, yt- eller volymintegral) för de olika uppgifterna. ρ betecknar längd-, yt- eller volymdensitet beroende på vad som passar för respektive objekt och antas vara konstant.

   För full poäng räcker det att behandla tre av fyra deluppgifter.

8. Bestäm flödet av $\boldsymbol{u} = (1 - x^2, xy, x + z)$ genom ytan $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$. Välj själv orientering men var tydlig med vilken orientering du väljer.

Kom ihåg att illustrera relevanta definitionsmängder, integrationsområden och orienteringar med tydliga figurer.

20201029

den 22 oktober 2020 18:55

1. $f(x,y) = y + \sin(4 - xy^2)$

a) $f(1,2) = 2 + \sin(4 - 1\cdot 2^2) = 2 + \sin 0 = 2$ ∴ $(1,2)$ ligger på $f(x,y) = 2$.

$\nabla f(x,y) = (\cos(4-xy^2)\cdot(-y^2),\ 1 + \cos(4-xy^2)\cdot(-2xy))$

$\nabla f(1,2) = (\cos 0\cdot(-4),\ 1 + \cos 0\cdot(-4)) = (-4,-3)$ = normal i $(1,2)$

b) Tangentplanet är $z = 2 - 4(x-1) - 3(y-2) = -4x - 3y + 12$

c) I riktningen $(-4,-3)$. Lutningen i denna riktning är $\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$.

Anm: Om man ska bestämma riktningsderivatan m.a.p. riktningen $(-4,-3)$ så måste vektorn normeras innan man använder formeln $f'_{\bar v} = \operatorname{grad} f \cdot \bar v$.

2. $f(x,y) = 8x^3 + y^3 - 3xy$

$f'_x = 24x^2 - 3y$ Ins. av $x = y^2$ i $f'_x = 0$: $24y^4 - 3y = 0 \iff 8y^4 - y = 0$

$f'_y = 3y^2 - 3x = 0 \iff x = y^2$ $\iff y = 0$ eller $8y^3 = 1$

$\iff y = 0$ eller $y = \frac{1}{2}$.

∴ Två s.p.: $(0,0)$ & $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

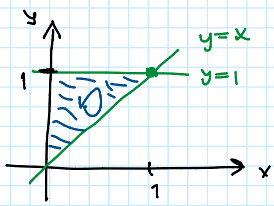
S.P.	$A = f''_{xx} = 48x$	$B = f''_{xy} = -3$	$C = f''_{yy} = 6y$	$AC - B^2$	$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$
$(0,0)$	0	-3	0	-9	Indef.
$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	12	-3	3	27	Pos.def.

∴ $(0,0)$ sadelpunkt, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ lok. minpunkt (enda lokala extrempunkt)

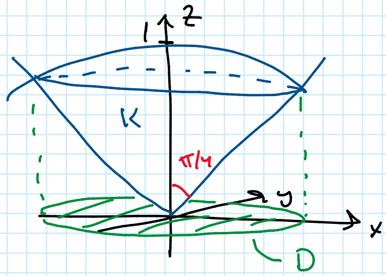
3. $\iint_D x\cdot\cos(y^3)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^y x\cos(y^3)\,dx \right) dy$

$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\cos(y^3) \right]_{x=0}^{y} dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\cos(y^3)\,dy$

$= \left[\frac{1}{6}\sin(y^3) \right]_0^1 = \frac{1}{6}\cdot\sin 1.$



4.



$V = \iiint_K dV = /\!/ \text{r.p.k.} /\!/ = \iiint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,2\pi]} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

$= \int_0^1 r^2\,dr \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\theta\,d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)\cdot 2\pi$

$= \frac{\sqrt{2}\pi}{3}\cdot(\sqrt{2} - 1)$ v.e.

Anm: Eftersom K ges av $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$, $\underline{x^2+y^2 \le \frac{1}{2}}$, så är

definierar D

$$V = \iint_D \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy = \| p.p.k. \| = \iint_{[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]\times[0,2\pi]} \left(\sqrt{1-r^2} - r\right) \cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$= \ldots = 2\pi \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3}\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 1 \right) = \frac{2\pi}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

5. $\int_\gamma (\underbrace{y+2xe^y}_{=P})dx + Q(x,y)dy$

$Q'_x = P'_y \iff Q_x = 1 + 2xe^y \iff Q = x + x^2e^y + c(y)$

Välj* t.ex. $Q = x + x^2e^y$. Då finns potential U s.a.

$\begin{cases} U'_x = y + 2xe^y & (1) \\ U'_y = x + x^2e^y & (2) \end{cases}$ $\quad (1) \iff U = xy + x^2e^y + g(y)$

Ins. i (2): $x + x^2e^y + g'(y) = x + x^2e^y$
$\iff g'(y) = 0 \iff g(y) = \text{konst}.$

$\therefore U = xy + x^2e^y$ är en potential.

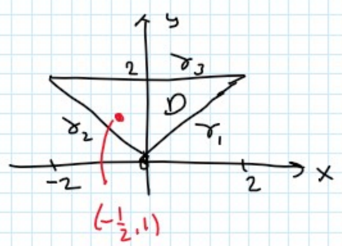
$= U(2,1) - U(0,0)$
$= 2 + 4e - 0 = 2 + 4e.$

* Om man väljer någon annan funktion $c(y)$ så får man potentialen $U = xy + x^2e^y + C(y)$ där $C'(y) = c(y)$.

Anm: Man kan gå direkt på att bestämma en potential U:

$\begin{cases} U'_x = y + 2xe^y & (1) \\ U'_y = Q & (2) \end{cases}$ | (1) $\iff U = xy + x^2e^y + g(y)$. Ins. i (2) ger $x + x^2e^y + g'(y) = Q$ | Välj $g(y) = 0$ så fås samma Q och U som ovan.

6.



$f(x,y) = y + xy^2 - x$

SP: $f'_x = y^2 - 1 = 0 \iff y = \pm 1$
$f'_y = 1 + 2xy \iff x = -\frac{1}{2y} = \mp\frac{1}{2}$

$\therefore (-\frac{1}{2}, 1)$ och $(\frac{1}{2}, -1)$ är s.p. men endast $(-\frac{1}{2}, 1) \in D$.

$f(-\frac{1}{2}, 1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Randundersökning:

γ_1: $f(x,x) = x^3$ (Str. väx.) tar värden mellan 0 och 8 då $0 \le x \le 2$.

γ_2: $f(x,-x) = \underbrace{-2x + x^3}_{= x(x^2-2)} = g(x)$, $-2 \le x \le 0$ $\quad g(-2) = -4 \quad g(0) = 0$

$g'(x) = -2 + 3x^2 = 0 \iff x^2 = \frac{2}{3} \iff x = (-)\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\quad g(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

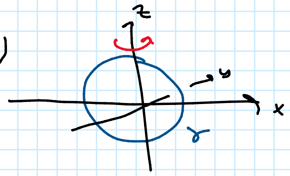
γ_3: $f(x,2) = 2 + 4x - x = 2 + 3x$ (str. väx.) tar värden mellan -4 och 8 då $-2 \le x \le 2$.

Jämförelse av markerade värden ger att största värdet är $f(2,2) = 8$ och minsta $f(-2,2) = -4$.

7. I alla deluppgifter för R beteckna objektets radie. Tänk på att föreslagen formel bara funkar om en diameter ligger på z-axeln.

föreslagen formel bara funkar om en diameter ligger på z-axeln.

I samtliga fall kan beräkningarna förenklas om man utnyttjar symmetrier.

a) 

Låt tråden representeras av en cirkel i xz-planet:

$\gamma: \quad x^2+z^2=R^2, \quad y=0$

Tröghetsmomentet ges då av kurvintegralen $\int_\gamma \rho(x^2+y^2)\,ds$.

Beräkning m.h.a. parametrisering:

$\bar{r}(t)=(R\cos t,\ 0,\ R\sin t), \quad 0\le t\le 2\pi$

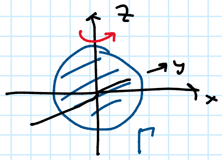
$|\bar{r}'(t)|=|(-R\sin t,\ 0,\ R\cos t)|=\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}=R \qquad \therefore ds=R\,dt$

$$\int_\gamma \rho\cdot(x^2+y^2)\,ds=\rho\cdot\int_0^{2\pi}\left((R\cos t)^2+0^2\right)\cdot R\,dt=\rho\cdot R^3\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt}_{=\pi}=\pi\cdot\rho\cdot R^3$$

Beräkning utan parametrisering:

$$\int_\gamma \rho(x^2+\underbrace{y^2}_{=0})\,ds=\rho\int_\gamma x^2\,dS=\frac{\rho}{2}\int_\gamma(\underbrace{x^2+z^2}_{=R^2})\,dS=\frac{\rho R^2}{2}\cdot\underbrace{\int_\gamma dS}_{=\gamma\text{:s längd}=2\pi R}=\pi\rho R^3.$$

Rotationssymmetri i xz-planet

b) 

Låt skivan representeras av ytan

$\Gamma: \quad x^2+z^2\le R^2, \quad y=0$

Tröghetsmomentet ges då av ytintegralen $\iint_\Gamma \rho(x^2+y^2)\,dS$

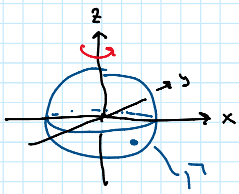
Γ är beskriven med x och z som parametrar. Vi har $dS=dxdy$ så

$$\iint_\Gamma \rho(x^2+y^2)\,dS=\rho\cdot\iint_{x^2+z^2\le R^2}x^2\,dxdy=/\!/p.p.k./\!/=\rho\cdot\iint_{[0,R]\times[0,2\pi]}(r\cos\varphi)^2\cdot r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\rho\cdot\underbrace{\int_0^R r^3\,dr}_{=R^4/4}\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi}_{=\pi}=\frac{\pi}{4}\rho R^4.$$

Beräkningen blir lite enklare om man utnyttjar rotationssymmetrin:

$$\iint_\Gamma \rho(x^2+y^2)\,dS=\iint_\Gamma \rho x^2\,dS=\frac{\rho}{2}\iint_\Gamma(x^2+z^2)\,dxdz=/\!/p.p.k./\!/=\frac{\rho}{2}\iint_{[0,R]\times[0,2\pi]}r^2\cdot r\,dr\,d\varphi=\frac{\rho}{2}\cdot\frac{R^4}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{4}\rho R^4$$

c) 

Sfären kan representeras av ytan

$\Gamma: \quad x^2+y^2+z^2=R^2$

Tröghetsmomentet ges då av ytintegralen $\iint_\Gamma \rho(x^2+y^2)\,dS$

Beräkning m.h.a. sfäriska koordinater:

$\bar{r}(\varphi,\theta)=(R\sin\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta), \quad 0\le\theta\le\pi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi.$

$$dS = |\bar{r}'_\varphi \times \bar{r}'_\theta| \, d\varphi \, d\theta = \dots = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\iint_\Gamma \rho \cdot (x^2+y^2) \, dS = \rho \cdot \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \big(\underbrace{(R\sin\theta\cos\varphi)^2 + (R\sin\theta\sin\varphi)^2}_{= R^2\sin^2\theta} \big) \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \rho \cdot R^4 \cdot 2\pi \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = 2\pi\rho R^4 \cdot \int_0^\pi \sin\theta(1-\cos^2\theta) \, d\theta =$$

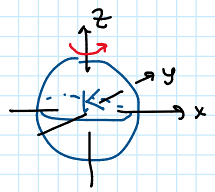
$$= 2\pi\rho R^4 \cdot \underbrace{\left[-\cos\theta + \tfrac{1}{3}\cos^3\theta \right]_0^\pi}_{= \frac{4}{3}} = \frac{8\pi}{3} \cdot \rho R^4$$

Beräkning utan parametrisering:

$$\iint_\Gamma \rho (x^2+y^2) \, dS = \frac{2\rho}{3} \iint_\Gamma (\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{= R^2}) \, dS = \frac{2\rho R^2}{3} \cdot \iint_\Gamma dS$$

$$= \frac{2\rho R^2}{3} \cdot 4\pi R^2 = \frac{8\pi}{3} \rho R^4$$

d)



$K: \; x^2+y^2+z^2 \le R^2$

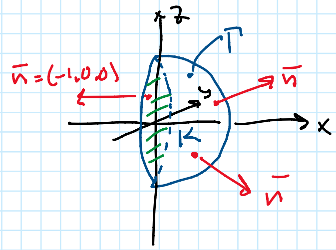
$$\iiint_K \rho (x^2+y^2) \, dx\,dy\,dz = \frac{2\rho}{3} \iiint_K (x^2+y^2+z^2) \, dx\,dy\,dz$$

$$= /\!/ \text{r.p.k.} /\!/ = \frac{2\rho}{3} \iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} r^2 \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{2\rho}{3} \cdot \int_0^R r^4 \, dr \cdot \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\rho}{3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{8\pi}{15} \rho R^5$$

8. $\bar{u} = (1-x^2, \, xy, \, x+z)$

$\Gamma: \; x^2 + 4y^2 + z^2 = 1, \; x \ge 0$, "högernormal"



Låt L vara $x=0$, $4y^2+z^2 \le 1$, $n = (-1,0,0)$.

$\Gamma + L$ är randyta till "halvellipsoid" K med utåtnormaler.

Gauss sats ger

$$\iint_{\Gamma+L} \bar{u} \cdot \bar{n} \, dS = \iiint_K \operatorname{div} \bar{u} \, dx\,dy\,dz = \iiint_K (-2x + x + 1) \, dx\,dy\,dz$$

$$= -\iiint_K x \, dx\,dy\,dz + K\text{:s volym} = /\!/ \text{"r.p.k." men med } 2y = r\sin\theta\sin\varphi, \; dx\,dy\,dz = \tfrac{1}{2} r^2 \sin\theta \, dr\,d\theta\,d\varphi /\!/$$

$$= -\iiint_{[0,1]\times[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} r\sin\theta\cos\varphi \cdot \tfrac{1}{2} r^2 \sin\theta \, dr\,d\theta\,d\varphi + \frac{4\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 r^3 \, dr \cdot \int_0^\pi \sin^2\theta \, d\theta \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi + \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 + \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{24}$$

På L är

$\bar{u} \cdot \bar{n} = (1,0,z) \cdot (-1,0,0) = -1$

så $\iint_L \bar{u} \cdot \bar{n} \, dS = -(L\text{:s area})$

$= -\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{\pi}{2}$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{24}$$

$\therefore$ Det sökta flödet är $\frac{5\pi}{24} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{17\pi}{24}$.