ÖREBRO
UNIVERSITET

# Flervariabelanalys för civilingenjörer

**MA505G-0100**

*2019-10-30, kl. 08:15–13:15*

---

**Hjälpmedel:** Endast skrivmateriel. Formelblad delas ut tillsammans med skrivningen.

**Betygskriterier:** Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga uppgifter bedöms utifrån kriterier för *problemlösning* och *redovisning*. För betyg 3/4/5 räcker det med 4 poäng inom vart och ett av huvudområdena *differentialkalkyl*, *integralkalkyl* och *vektoranalys* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

**Anvisningar:** Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg, rita tydliga figurer och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

**Skrivningsresultat:** Meddelas inom 15 arbetsdagar.

**Examinator:** Andreas Bergwall.

**Lycka till!**

---

## Grundläggande uppgifter (6p/uppgift)

1. Låt $f(x,y) = \ln(1+xy^2)$.
   (a) Bestäm tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i den punkt där $(x,y) = (2,1)$.
   (b) I vilken riktning $\boldsymbol{v}$ är $f'_{\boldsymbol{v}}(2,1)$ störst? Vad är $f'_{\boldsymbol{v}}(2,1)$ i den riktningen?

2. Lös $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$ med hjälp av variabelbytet $u = xy$, $v = x/y$.

3. Beräkna volymen av området mellan ytorna $z = \sqrt{1+y^2}$ och $z = x$ då $x \le y \le 1$, $0 \le x \le 1$.

4. Beräkna flödet av vektorfältet $\boldsymbol{u} = (2xz, 3y, 4z)$ ut genom randytan till kroppen $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$.

5. Beräkna
$$\int_\gamma \left(\ln(y+2) + e^x\right)\,\mathrm{d}x + \frac{x}{y+2}\,\mathrm{d}y$$
där $\gamma$ är den elliptiska spiralen $(\frac{t}{\pi}\cos t, \frac{t}{2\pi}\sin t)$, $0 \le t \le 4\pi$.

**Kom ihåg att illustrera relevanta definitionsmängder, integrationsområden och orienteringar med tydliga figurer.**

## Fördjupade uppgifter (10p/uppgift)

6. Låt $f(x, y) = xy^2 - y^2 - 4x^2y + 4xy$. Lös en av deluppgifterna nedan. Välj själv vilken. Lämna inte in lösningar på båda deluppgifterna.

   (a) Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x, y)$.

   (b) Bestäm $f$:s största och minsta värde i området $[0, 1] \times [0, 1]$.

7. Bestäm tröghetsmomentet för ett homogent klot $K$ med radie $R$ med avseende på en linje som

   (a) går genom klotets centrum,

   (b) tangerar klotet.

   Här ska båda deluppgifterna lösas.

   *Anm:* Tröghetsmomentet med avseende på $z$-axeln ges av $\iiint_K (x^2+y^2)\rho \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Att klotet är homogent betyder att densiteten $\rho$ är konstant.

8. Låt $\gamma$ vara den positivt orienterade randen till området $|x| + |y| \leq 1$. Beräkna

$$\int_\gamma \sin(x + y) \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y.$$

**Kom ihåg att illustrera relevanta definitionsmängder, integrationsområden och orienteringar med tydliga figurer.**

## Kommentarer till Flervariabelanalys för civilingenjörer 20191030

1. (a) Vi har $f'_x = y^2/(1+xy^2)$ och $f'_y = 2xy/(1+xy^2)$ så $f(2,1) = \ln 3$, $f'_x(2,1) = 1/3$, $f'_y(2,1) = 4/3$. Tangentplanets ekvation är alltså

$$z = \ln 3 + \frac{1}{3}(x-2) + \frac{4}{3}(y-1).$$

   (b) Snabbast tillväxt i gradientens riktning, d.v.s. i riktningen $(1/3, 4/3)$, så riktningsderivatans största värde fås när $\boldsymbol{v} = (1/\sqrt{17}, 4/\sqrt{14})$ (observera normeringen) och är $\sqrt{17}/3$ (d.v.s. gradientens belopp).

2. Om $z = f(x,y) = F(u,v)$ så är $f'_x = z'_x = z'_u \cdot y + z'_v \cdot (1/y)$ och $f'_y = z'_y = z'_u \cdot x + z'_v \cdot (-x/y^2)$. Insättning i PDE:n ger (om $u = xy \neq 0$)

$$2xyz'_u = 1 \Leftrightarrow z'_u = \frac{1}{2u} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}\ln|u| + g(v) \quad (= F(u,v))$$

så lösningarna är $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln|xy| + g(x/y)$ där $g(v)$ är en godtycklig $C^1$-funktion (av en variabel). Observera att alla $x$ och $y$ i ekvationen måste ersättas med $u$ och $v$ innan man kan integrera båda leden med avseende på $u$.

3. Olikheterna beskriver en triangulär skiva $D$ som också kan beskrivas med olikheterna $0 \leq x \leq y$, $0 \leq y \leq 1$. I denna skiva är $\sqrt{1+y^2} \geq 1 \geq x$ så den sökta volymen är

$$\iint_D (\sqrt{1+y^2} - x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left( \int_0^y \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y - \iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 y\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{6} = \frac{2^{3/2}}{3} - \frac{1}{2}.$$

4. $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 2z + 7$ så Gauss sats ger att flödet är

$$\iiint_K (2z+7)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^1 2z\,\mathrm{d}z + 7\pi = 8\pi.$$

Observera att det är angivet att ytan ska vara $\partial K$, vilket är precis vad som krävs för att Gauss sats ska kunna användas. Det ska alltså inte läggas till eller dras bort några ytstycken eller flöden.

5. Man kontrollerar lätt att villkoret $Q'_x = P'_y$ är uppfyllt om $y \geq -2$, så fältet är ett potentialfält där. Eftersom hela spiralen ligger i detta område, så kan den bytas mot någon annan kurva från $(0,0)$ till $(4,0)$ som ligger där, t.ex. linjestycket $y = 0$, $0 \leq x \leq 4$. På detta är $\mathrm{d}y = 0$ så kurvintegralens värde är alltså

$$\int_0^4 (\ln 2 + e^x)\,\mathrm{d}x = 4\ln 2 + e^4 - 1.$$

Ett alternativ är att bestämma en potential, t.ex. $U = x\ln(y+2) + e^x$. Integralens värde ges då av $U(4,0) - U(0,0)$.

Observera att detta är ett plant problem. Spiralen ligger i $xy$-planet. Eftersom spiralen inte är sluten så kan man inte använda Greens formel utan att först sluta den. Om man sluter spiralen med linjestycket från $(4,0)$ till $(0,0)$ så får man en kurva som inte är enkel (alltså som skär sig själv). Får man göra så?

6. I båda deluppgifterna behöver stationära punkter bestämmas:

$$\begin{cases} f'_x = y^2 - 8xy + 4y = 0 \\ f'_y = 2xy - 2y - 4x^2 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 8x + 4)y = 0 \\ 2(x-1)(y-2x) = 0 \end{cases}$$

Enklast är att utgå från andra ekvationen som säger att $x = 1$ eller $y = 2x$. Insättning av $x = 1$ i den första ekvationen ger $y = 4$ eller $y = 0$. Insättning av $y = 2x$ ger $x = 2/3$ eller $x = 0$. Det finns alltså fyra stationära punkter: $(1,4)$, $(1,0)$, $(2/3, 4/3)$ och $(0,0)$.

Om man inte kommer på faktoriseringen av ekvation 2 så börjar man med ekvation 1 istället, som då säger att $y = 0$ eller $y = 8x - 4$. Observera att om man sätter in $y = 8x - 4$ i den andra ekvationen så kommer man till slut att få $x = 1$ eller $x = 2/3$. För att få motsvarande $y$-värden ska dessa värden sättas in i $y = 8x - 4$, inte någon annanstans.

Om man ska lösa (b)-uppgiften behöver man egentligen inte bry sig om fallen $y = 0$ och $x = 1$ eftersom de på sin höjd kan ge randpunkter. Då räcker det alltså att gå vidare med att sätta in $y = 2x$ i $y - 8x + 4 = 0$.

(a) För att avgöra karaktären studeras den kvadratiska formen $Q(h,k) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2$ för varje stationär punkt $(a,b)$. Observera 2:an framför $f''_{xy}$. Vi har $f''_{xx} = -8y$, $f''_{xy} = 2y - 8x + 4$, $f''_{yy} = 2x - 2$ vilket ger:

| $S.P.$ | $Q(h,k)$ | $Q$ : s kar. |
|---|---|---|
| $(0,0)$ | $8hk - 2k^2 = -2(k-2h)^2 + 8h^2$ | Indef. |
| $(1,0)$ | $-8hk$ | Indef. |
| $(1,4)$ | $-32h^2 + 8hk = -32(h - \frac{k}{8})^2 + \frac{k^2}{2}$ | Indef. |
| $(2/3, 4/3)$ | $-\frac{32h^2}{3} + \frac{8hk}{3} - \frac{2k^2}{3} = -\frac{2(k-2h)^2}{3} - \frac{24h^2}{3}$ | Neg. def. |

Alltså är de tre första punkterna sadelpunkter och endast $(2/3, 4/3)$ är en lokal extrempunkt, nämligen en lokal maxpunkt.

Observera att orden indefinit och negativ definit beskriver den kvadratiska formen $Q(h,k)$. Orden sadelpunkt och lokal maxpunkt beskriver den stationära punkten.

Kvadratkompletteringarna är viktiga för att avgöra $Q$:s karaktär. Det räcker inte att i utredningen av $(2/3, 4/3)$ säga att kvadraterna har negativa koefficienter. Det har de i $-h^2 + 4hk - k^2$ också men det är faktiskt en indefinit kvadratisk form.

Som alternativ till kvadratkompletteringar kan man använda att om $AC - B^2 > 0$ så har man en lokal extrempunkt.

(b) Optimum antas i inre stationära punkter eller randpunkter. Eftersom ingen av de stationära punkterna är inre punkter så finns optimum på randen.

Randen utgörs av fyra linjestycken. På två av dem, linjen $y = 0$ och linjen $x = 1$, så är $f(x, y) = 0$.

Då linjen $x = 0$ så har vi $f(0, y) = -y^2$ som är strängt avtagande. På den delen av randen är alltså endast hörn-/ändpunkterna intressanta.

Då linjen $y = 1$ har vi $f(x, 1) = x - 1 - 4x^2 + 4x = g(x)$. Då är $g'(x) = 5 - 8x = 0$ omm $x = 5/8$. Förutom hörn-/ändpunkterna kan alltså $(5/8, 1)$ vara max- eller minpunkt.

Slutligen jämför vi alltså $f(0, 0) = f(1, 0) = f(1, 1) = 0$, $f(0, 1) = -1$ och $f(5/8, 1) = 9/16$ och ser att största värdet är $9/16$ och minsta $-1$.

7. För att kunna använda angiven formel måste klotet placeras i ett koordinatsystem på ett sådant sätt att den linje som tröghetsmomentet ska bestämmas med avseende på sammanfaller med $z$-axeln.

(a) Lämpligen placerar man klotets centrum i origo. Rotationssymmetrin kring origo ger att tripelintegralen av $x^2$, $y^2$ och $z^2$ har samma värde. Om vi använder det och rymdpolärakoordinater så får vi att

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\rho \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\rho \iiint_K (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \frac{2}{3}\rho \iiint\limits_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} r^4 \sin\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\rho \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{8\pi R^5 \rho}{15}.$$

Om man inte kommer på den första omskrivningen så kommer man istället att få

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\rho \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \ldots = \rho \iiint\limits_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} r^4 \sin^3\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

Integreringen m.a.p. $\theta$ kan man hantera med omskrivningen $\sin^3\theta = \sin\theta(1 - \cos^2\theta)$, eventuellt kombinerad med variabelbytet $t = \cos\theta$.

(b) Nu behöver $z$-axeln tangera klotet. Då passar det att placera klotets centrum i punkten $(R, 0, 0)$. Om man vill använda rymdpolära koordinater så behöver de i så fall modifieras så att $x = R + r\sin\theta\cos\varphi$.

Om man utnyttjar symmetrin i $x$-led kring $x = R$ så kan man helt slippa att gå över till rymdpolära koordinater.. Eftersom integralen av $x - R$ är 0 och integralen av $(x - R)^2 + y^2$ har samma värde som när vi i (a) integrerade $x^2 + y^2$ (allting är ju bara förskjutet i $x$-led) så är

$$
\begin{aligned}
&\iiint_K (x^2 + y^2)\rho \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint_K ((x-R)^2 + y^2 + 2R(x-R) + R^2)\rho \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{8\pi R^5 \rho}{15} + 0 + R^2 \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \rho = \frac{28\pi R^5 \rho}{15}.
\end{aligned}
$$

Ett alternativ till att flytta klotet är att byta integranden mot $(x+R)^2+y^2$ och använda symmetrin kring origo:

$$
\begin{aligned}
&\iiint_K ((x+R)^2 + y^2)\rho \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint_K (x^2 + y^2 + 2xR + R^2)\rho \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{8\pi R^5 \rho}{15} + 0 + R^2 \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \rho = \frac{28\pi R^5 \rho}{15}.
\end{aligned}
$$

Detta är samma sak som att beräkna tröghetsmomentet med avseende på linjen $x = -R$, $y = 0$.

Det finns också en sats inom mekaniken som kallas Steiners sats som man kan använda.

8. Låt $D$ vara skivan som $\gamma$ är rand till. Observera att $D$ är en kvadrat med hörn i $(\pm 1, 0)$ och $0, \pm 1)$

   För det givna vektorfältet $(P, Q) = (\sin(x+y), x)$ gäller att $Q'_x - P'_y = 1 - \cos(x+y)$ så fältet är inte ett potentialfält. Däremot ger Greens formel att

   $$\int_\gamma \sin(x+y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \iint_D (1 - \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2 - \iint_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

   Här kan dubbelintegralen beräknas med upprepad integration om man först delar upp $D$ i lämpliga delar. Förslagsvis tar man höger och vänster halva var för sig. Man kan dock inte nöja sig med att integrera över enbart en kvadrant och sedan multiplicera med 4. Integranden beter sig nämligen annorlunda i kvadrant 1 och 3 än i kvadrant 2 och 4.

   Man kan också göra ett variabelbyte som vrider $D$ till en axelparallell kvadrat. $u = x + y$, $v = x - y$ är ett sådant variabelbyte. Då får man istället integrera över $[-1, 1] \times [-1, 1]$ i $uv$-planet. Eftersom $d(u, v)/d(x, y) = -2$ så är $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (1/2)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

   Ett tredje alternativ är att utnyttja att integranden är en funktion av $u = x+y$. Linjen $x + y = u$ skär $D$ omm $-1 \le u \le 1$, och skärningen med $D$ har alltid längden $\sqrt{2}$. Om $u$-värdet ändras med $\mathrm{d}u$ så flyttar sig linjen en sträcka $\mathrm{d}u/\sqrt{2}$. Man kan då tänka att areaelementet är $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2} \cdot \mathrm{d}u/\sqrt{2} = \mathrm{d}u$. Alltså är

$$\iint_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \cos u \,\mathrm{d}u = 2\sin 1.$$

Den givna kurvintegralen är alltså $2 - 2\sin 1$.

### Rättningsmall

I regel sätter jag bara jämna poäng—udda poäng sparas för speciella gränsfall.

Notera att betygskriterierna i korthet säger att för att få 6p på en uppgift så ska man visa att man kan en fungerande metod för att lösa hela problemet, kunna genomföra de beräkningar som krävs på ett i huvudsak korrekt sätt och få ett resultat som inte är uppenbart orimligt. Lösningen ska vara lätt att följa, använda kursens begrepp, samband och representationsformer och innehålla argument för viktiga steg.

Detta innebär att om man bara staplar uträkningar på varandra utan att förklara vad man gör, eller inte ritar tydlig figur över integrationsområden trots att det står att man måste det, så kan man egentilgen inte räkna med att få mer än 4p på uppgiften.

När man gör beräkningar i flera steg så MÅSTE man sätta ut likhetstecken. Annars vet inte läsaren vad som är lika med vad. Mellanräkningar måste tydligt hållas åt sidan. Har man inte lärt sig när det ska vara $=$ respektive $\Leftrightarrow$ så är det dags att göra det nu.

På uppgift 1 så får man 4p om en av deluppgifterna är helt korrekt löst.

På uppgift 6 ska bara en deluppgift lösas. Lösningen har bedömts utifrån vilken uppgift man påstår att man löser. Har man lämnat in lösningar på båda deluppgifterna så har jag bara rättat den första. Oavsett deluppgift behöver man först bestämma stationära punkter. Om den delen är helt korrekt så ger den 4p.

På uppgift 7 så får man 6p om en av deluppgifterna är helt korrekt löst. I det ingår att beräkningen ska göras för godtycklig radie $R$.

Jag ger inte tröstpoäng för att man klarat att göra sånt som står på formelbladet, som t.ex. att beräkna gradient eller divergens.