ÖREBRO UNIVERSITET
AKADEMIN FÖR
NATURVETENSKAP OCH TEKNIK

Lösningar till tentamen i

Numeriska metoder för civilingenjörer

DT508G

2019-01-10

Anmärkning: Vid rättning betyder ✓ "rätt", f "fel", (✓)"rätt efter fel". Observera att lösningsförslag inte är en fullständig lösning.

1. Lös följande delproblem. [10p]

   (a) Gör en flyttalsberäkning i dubbel precision av $(8.3-7.3)-1$ dvs representera först 8.3,7.3 som flyttal och gör sedan subtraktionerna med avrundning till närmaste där subtraktionen inom parantes görs först. [4p]

   (b) Avgör för vilka (eller vilket) x som uttrycket [4p]

   $$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$$

   lider av kancellation och finn en alternativ formel som är bättre.

   (c) Definiera maskinnogrannhet och relativt avrundningsfel. [2p]

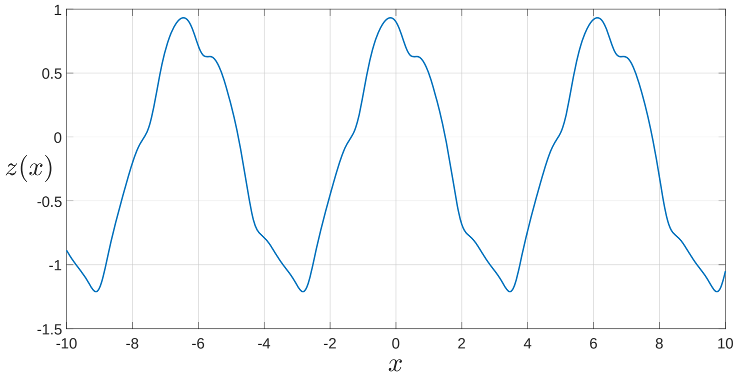
   Lösning:

   (a) Vi har $(8.3)_{10} = 1.0000\overline{1001}\times 2^3$ som avrundas till $fl(8.3) = 1.0000...10011010\times 2^3$. Vidare är Vi har $(7.3)_{10} = 1.110\overline{1001}\times 2^2$ som avrundas till $fl(7.3) = 1.1101...00110011 \times 2^2$. Subraktionen av dessa två ger efter normalisering $1.00\ldots 00100 \times 2^0 = 1 + 2^{-50}$ vilket ger slutresultatet 2^{-50}.

   (b) Kancellation uppstår när två nästan lika tal subtraheras dvs då första termen är nästan lika med andra termen så vi söker x sådan att $1-x = 1+x$ som ger $x = 0$. Genom att förenkla uttrycket fås den alternativa bättre formeln $2x/(x^2-1)$.

   (c) Se boken kapitel 0.3.1, 0.3.2.

2. Två myror vandrar glatt på ett bord enligt två trajektorier beskrivna som $y_1(x) = \cos(x)$ och $y_2(x) = 0.1e^{4\sin(x)}$. Dom kommer att mötas litet nu och då och ni ska bestämma var genom att finna nollställena till $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$, se figur nedan. [10p]



(a) Beskriv ett sätt att grovt approximera nollställena som ett sätt att få startvärden till en mer exakt metod. [2p]

(b) Beskriv en metod som med stor noggrannhet kan bestämma nollställena. Ange dess konvergenshastighet och ange två relevanta konvergeringsvillkor för er metod. [8p]

Lösning:

(a) T.ex. zooma i plot, använda ginput i Matlab eller intervallhalvering med några få delningar och väl valda första intervall.

(b) Se boken antingen för Newton-Raphsons metod eller Sekantmetoden. Konvergeringsvillkoren bör innefatta både hur nära roten man är och hur nära $z(x)$ är noll, t.ex. $|x_{k+1} - x_k|/|x_k|$ och $|z(x_k)|$. För en rot nära $x = 0$ måste division med noll undvikas men det är inte relevant för detta problem.

3. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska och ge en kort motivering till ert svar. [10p]

(a) Det relativa felet i lösningen som fås vid Gausselimination är alltid litet. [2p]

(b) Intervallhalvering är generellt sett alltid snabbare än Newton-Raphsons metod. [2p]

(c) Implicit Euler löser system av ordinära differentialekvationer och är alltid stabil. [2p]

(d) Rektangelmetoden för att lösa integraler är mer exakt än en adaptiv metod. [2p]

(e) Interpolation med Lagrangepolynom kräver lösandet av ett tridiagonalt linjärt ekvationssystem. [2p]

Lösning: Avgör om följande påståenden är sanna eller falska och ge en kort motivering till ert svar. [10p]

(a) Nej, det beror på om man pivoterar och på konditionstalet. [2p]

(b) Nej, nära lösningen är Newton-Raphsons metod snabbare. [2p]

(c) Ja, implicit Euler är ovillkorligen stabil men kan ha dålig noggrannhet. [2p]

(d) Nej, rektangelmetoden kan i sig vara adpativ. Det är helt olika begrepp. [2p]

(e) Nej, matrisen är enhetsmatrisen och lösningen ges av högerledet dvs interpolationspunkterna. [2p]

4. Betrakta den ordinär differentialekvationen [10p]

$$y'' + 2yy' - y^2 = t,\ t > 0,\ y(0) = y'(0) = 1.$$

(a) Skriv om problemet på vektorform $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{y})$ dvs definiera $\mathbf{f}$ och $\mathbf{y}$ samt begynnelsevillkoren på vektorform. [2p]

(b) Beskriv i detalj implicit Euler för detta problem i de givna vektorbeteckningar från (a). [8p]

Lösning:

(a) Med $y_1 = y, y' = y_2$ fås $f_1 = y_2$, $f_2 = t - y_2' - 2y_1y_2 - y_1^2$ med begynnelsevillkor $y_1(0) = y_2(0) = 1$.

(b) Se boken kapitel 6.6.

5. Givet matrisen [10p]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ och högerledet } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

betrakta det linjära minstakvadratproblemet

$$\min_x \|b - Ax\|_2.$$

Lös följande deluppgifter.

(a) Sätt upp normalekvationerna antingen direkt eller genom att härleda dessa. Ni behöver inte lösa ekvationerna. [2p]

(b) Beskriv hur man kan lösa normalekvationerna med en Choleskyfaktorisering $A^TA = R^TR$. Ni behöver inte göra några detaljberäkningar utan endast ange delstegen utifrån faktoriseringen. [3p]

(c) Ange antalet beräkningar för metoden i (b) uttryckt i antal rader m och kolumner n i A. [2p]

(d) Vad är konditionstalet för normalekvationerna? Ange en annan metod som ger ett mer noggrannt resultat för illa konditionerade problem. [3p]

Lösning:

(a) Normalekvationerna blir $A^T Ax = A^T b$ där A är transponatet av A och $A^T A$ är en symmetrisk positivt definit matris. I fallet ovan fås [2p]

$$A^T A = \begin{bmatrix} 22 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \text{ och högerledet } A^T b = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(b) Bilda vektorn $c = A^T b$. Lös det undertriangulära systemet $R^T y = c$ och sedan det övertriangulära systemet $Rx = y$. [3p]

(c) Att bilda $A^T A$ kräver mn^2 samt Cholsekyfaktoriseringen $n^3/3$ additioner och multiplikationer. [1p]

(d) Konditionstalet för normalekvationerna är kvadraten av konditionstalet för A. En mer noggrann metod är QR-faktorisering som ger en lösning vars relativa fel är proportionellt mot konditionstalet för minstakvadrat-problemet. [3p]

6. Betrakta problemet att med ett polynom $p(x)$ interpolera ett antal givna punkter $(x_i,y_i), i = 1, \ldots, n, y_i = f(x_i)$ till en given funktion $f(x)$. [10p]

[10p]

(a) Vilken grad ska polynomet ha för att ge en entydig lösning. [1p]

(b) Antag att $p(x)$ representeras i basen $1, x, x^2, \ldots, x^k$. Hur många basfunktioner behövs (dvs ange k) för en entydig lösning? [1p]

(c) Sätt upp interpolationsproblemet som ett system av linjära ekvationer dvs sätt upp matrisen och högerledet och ange deras dimensioner. [6p]

(d) Ange en metod för att numeriskt lösa det linjära ekvationssystemet och dess eventuella begränsningar i form av stabilitet och beräkningskomplexitet. [2p]

Lösning:

(a) Polynomet har grad $n - 1$ vilket ger n obekanta och n ekvationer. [1p]

(b) Antal basfunktioner är n dvs $k = n - 1$. [1p]

(c) Man får ekvationerna $\sum_{j=1}^{n} x_i^{j-1} c_j = y_i, i = 1, \ldots, n$ dvs $Ac = y$ där $a_{ij} = x_i^{j-1}$ och A är då en $n \times n$-matris samt y en n-vektor. [6p]

(d) Gausselimination är möjlig och stabil men kräver $O(n^3)$ flops. Bättre är att använda speciella metoder för denna typ av s.k. Vandermonde matriser som kräver endast $O(n^2)$ flops. Om högerleden är många bör man göra en LU-faktorisering först. [2p]