Förslag till lösningar på tentamen

Optimering för civilingenjörer, MA507G

Tid: Torsdag 14 mars 2024 klockan 08:15-13:15

Problem 1 (14 poäng)

(a) Välj slackvariablerna s_1, s_2, s_3 som startlösning så blir utgående basvariabel s_2 och optimala lösningen är $x = [0, 0, 3/2]^T$. Ur tablån fås skuggpriserna (duala varaiblerna) $y = [0, 1, 0]^T$ vilket ger att första och tredje bivillkoret är inaktiva och respektive maskin har extra kapacitet. Lösningen är optimal eftersom det inte är några element i slutliga baslösningen lika med noll. Ett annat sätt att se att lösningen är unik är att det aktiva andra bivillkoret inte har en linje i planet givet av objektfunktionen.

(b) Skuggpriserna är dualvariablerna som fås ovan i tablån. Skuggpriser anger pris för kapacitet för respektive maskin. Bara andra bivillkoret är aktivt och ger ändring via skuggpriset och det är då $1 \cdot 2$ kkr.

(c) Dualen är

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\text{min} & w = & 4y_1 & + & 6y_2 & + & 4y_3 & \\
\text{då} & & y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & geq\, 2 \\
& & & & 3y_2 & & & \geq\ 2 \\
& & 2y_1 & + & 4y_2 & + & y_3 & \geq\ 4 \\
& & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq\ 0
\end{array}
$$

Komplementaritetsvillkoren är

$$
\begin{array}{ll}
x_1(y_1 + 3y_2 + y_3 - 2) = 0 & y_1(x_1 - 2x_3 - 4) = 0 \\
x_2(3y_2 - 2) = 0 & y_2(3x_1 + 3y_2 - 4x_3 - 6) = 0 \\
x_3(2y_1 + 4y_2 + y_3 - 4) = 0 & y_3(x_1 - 3x_3 - 4) = 0
\end{array}
$$

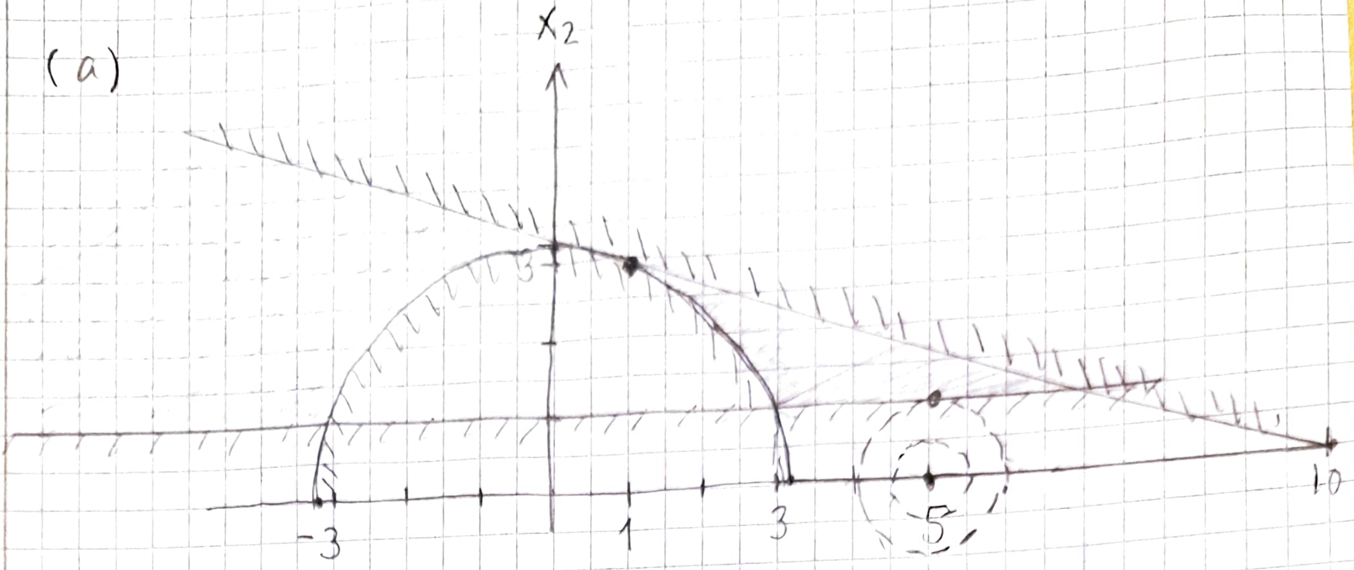
som genom insättning blir uppfyllda.

(d) Hela ton innebär att $x_i \in \{0, 1, 2 \ldots\}$ dvs icke-negativa heltal.

Problem 2 (12 poäng)

Problem 2

(a)



$f(x_1, x_2) = (x_1-5)^2 + x_2^2 - 25 = \text{konstant}$

är cirklar med centrum i $(5,0)$.

Vi vill minimera f så $x^* = (5,1)$

är lokalt och globalt minimum.

(b) Linjen $x_2 = 2$, $x_1 \leq 4$ har punkter utanför den tillåtna mängden så problemet är <u>inte</u> konvext.

(c) KKT 1: $\begin{bmatrix} 2x_1 - 10 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

KKT 2: De tre b.v. $g_i(x_1, x_2) \leq 0$, $i = 1,2,3$

KKT 3: $y_i \geq 0$, $i = 1,2,3$

KKT 4: $y_i\, g_i(x) = 0$, $i = 1,2,3$

Problem 2

(d) Från (c) med $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

dvs $-4 - 6y_1 + y_3 = 0$

$-y_2 + 3y_3 = 0$.

I $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$: är bivillkor $-10 + x_1 + 3x_2 < 0$

så $y_3 = 0 \Rightarrow y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} < 0$

vilket motsäger KKT3. Punkten

är ej en stationär punkt.

Problem 3 (8 poäng)

No.	Value	Budget	Staff	Not with	Require also
1	60	35	5	7	
2	40	34	3		
3	8	10	2	4	
4	12	18	2	3	
5	20	32	4		
6	22	11	1		5
7	38	22	5	1	
8	13	18	2		
9	8	16	2		2
10	27	29	4		2 and 3

Maximize $Z = 60x_1 + 40x_2 + 8x_3 + 12x_4 + 20x_5 + 22x_6 + 38x_7 + 13x_8 + 8x_9 + 27x_{10}$

subject to

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 + x_6 + 5x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 4x_{10} \leq 17 \quad \text{(Staff Constraint)}$$
$$35x_1 + 34x_2 + 10x_3 + 18x_4 + 32x_5 + 11x_6 + 22x_7 + 18x_8 + 16x_9 + 29x_{10} \leq 100 \quad \text{(Budge}$$
$$x_1 + x_7 \leq 1 \quad \text{(Project 1 and 7 Conflict)}$$
$$x_3 + x_4 \leq 1 \quad \text{(Project 3 and 7 Conflict)}$$
$$x_{10} \leq x_2 \quad \text{(Project 10 Requires Project 2)}$$
$$x_{10} \leq x_3 \quad \text{(Project 10 Requires Project 3)}$$
$$x_9 \leq x_2 \quad \text{(Project 9 Requires Project 2)}$$
$$x_6 \leq x_5 \quad \text{(Project 6 Requires Project 5)}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \leq 6 \quad \text{(Project Selection Limit)}$$
$$x_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, 10\} \quad \text{(Binary Decision Variables)}$$

Problem 4 (10 poäng)

(a) Eftersom $f(x) \geq 0$ och den enda punkten där $f(x) = 0$ är $(2, 0)$ är det unikt globalt minimum.

(b) Gradienten i den givna punkten $x^{(0)} = [1, 1]^T$ är $g = [-2, 2]^T$ och därför blir $\phi(t) = f(x^{(0)} - tg) = f(1 - 2t, 1 + 2t)$. Lösningen till $\phi'(t) = 0$ blir $\mathrm{t}_0 = 1/2$ och $x^{(1)} = [2, 0]^T$.

(c) Hessianen i lösningen $[2, 0]^T$ är

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

som inte har full rang dvs inte är inverterbar. Nära lösningen blir då det ekvationssystem som man löser i Newtons metod väldigt illa konditionerad och konvergensen blir inte kvadratisk utan linjär.

Problem 5 (6 poäng)

Här kommer en förenklad lösning. För full poäng krävs att alla steg redovisas. Dijkstras algoritm eller helt enkelt uppräkning av alla vägar ger billigaste vägen $1 \to 3 \to 5 \to 7$ till kostnad 13 tidsenheter. Snabbaste vägen via nod 6 är 15 enheter dvs 2 tidsenheter mer.

Problem 6 (10 poäng)

Se boken och föreläsningsanteckningar (slides).