ÖREBRO
UNIVERSITET

Omtentamen på kursen Integraler och differentialekvationer

MA504G

2022-06-08, kl. 08:15–13:15

Hjälpmedel: Skrivmateriel och bifogat formelblad.

Betygskriterier: För betyget 3/4/5 krävs minst 3 poäng på differentialekvationer på grundläggande delen samt totalt 30/40/50 poäng på tentamen.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Marcus Sundhäll.

Lycka till!

Grundläggande del

1. (a) Använd $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ för att visa sambandet [3p]

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

   (b) Bestäm $f(\theta)$ så att $f'(\theta) = \cos^2(\theta)$ och $f(\pi/4) = 7/4$. [3p]

2. Lös differentialekvationen [6p]

$$xy' = y^2 + 1\,,\ x > 0\,,$$

   under bivillkoret $y(1) = 1$.

3. Bestäm arean av området $D = \{(x,y) : 0 \le y \le \ln(x+1)\,, 0 \le x \le e-1\}$. [6p]

4. Använd lämpliga Maclaurinutvecklingar för att bestämma gränsvärdet [6p]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(2x) - \sin(2x)}{x^3}\,.$$

5. Avgör om den generaliserade integralen [6p]

$$\int_1^\infty \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x^4 + x^2}\, dx$$

   är konvergent eller divergent.

6. Bestäm den kontinuerliga funktion $y(x)$ som uppfyller integralekvationen [6p]

$$x^2 - 1 + y(x) = \int_x^2 ty(t)\,dt\,.$$

Fördjupad del

7. Bestäm m så att $y = m$ är horisontell tangent till kurvan $y = xe^{-x}$, $0 \leq x \leq 2$. Låt $D = \{(x,y) : xe^{-x} \leq y \leq m\,, 0 \leq x \leq 2\}$. Bestäm volymen av den kropp som uppkommer då D roterar ett varv kring x-axeln. [8p]

8. En kloss är fäst i en vägg via en fjäder. Antag att klossen påverkas av en yttre kraft och att förflyttningen $x(t)$ ges av differentialekvationen [8p]

$$x'' + \frac{k}{m}x = \frac{a}{m}\cos(\omega t)\,,$$

där k, m, a och ω är positiva konstanter. Lös differentialekvationen för fallet $\omega = \sqrt{k/m}$.

9. Bestäm alla primitiva funktioner till [8p]

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 3 + 2e^{-x}}$$

och visa att $f(x)$ är avtagande om $x \geq 1$. Gör därefter en lämplig uppskattning av serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k + 3 + 2e^{-k}}\,.$$
