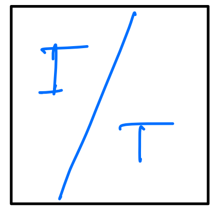
1. Låt händelsen att en turist till-
frågas vara T och en invånare I

Det gäller då att

$$P(T) = 2/3$$
$$P(I) = 1/3$$



a) Låt S vara händelsen att
vi får korrekt svar och F
att vi får falskt.

Vi har

$$P(S \mid T) = 3/4$$
$$P(F \mid T) = 1/4$$
$$P(S \mid I) = 0$$
$$P(F \mid I) = 1$$

Vi får

$$P(S) = P(S \mid T) \cdot P(T) + P(S \mid I) \cdot P(I)$$
$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

b) Våra svar från turisterna är oberoende av varandra så låt händelsen att vi får två sanna svar vara S^2.

Vi får

$$P(S^2 \mid T) = P(S \mid T) \cdot P(S \mid T) = \frac{9}{16}$$

$$P(S^2 \mid I) = 0$$

Låt B vara händelsen att vi fått två lika svar

$$P(S \mid B) =$$

$$\frac{P(S^2 \mid T)\,P(T)}{P(S^2 \mid T) \cdot P(T) + P(F^2 \mid T) \cdot P(T) + 1 \cdot P(I)} =$$

$$= \frac{9/16 \cdot \frac{2}{3}}{9/16 \cdot \frac{2}{3} + 1/16 \cdot 2/3 + 1/3} =$$

$$= \frac{9 \cdot \frac{2}{3}}{9 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{16}{3}} = \frac{6}{6 + 6} = \frac{1}{2}$$

Låt A vara händelsen att vi får två lika svar och sedan ett annat.

$$P(A) = \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}_{\text{turist SSF}} + \underbrace{1/4\cdot 1/4\cdot 3/4\cdot 2/3}_{\text{turist FFS}} + \underbrace{0\cdot\frac{1}{3}}_{\text{Inv.}} =$$

$$= \frac{18+6}{4\cdot 4\cdot 4\cdot 3} = \frac{1}{8}$$

$$P(S \mid A) =$$

$$= \frac{\overbrace{1/4\cdot 1/4\cdot 3/4\cdot 2/3}^{\text{turist korrekt svar}}}{1/8} = \frac{\frac{6}{64\cdot 3}}{1/8} = \frac{48}{64\cdot 3} = \frac{3}{4\cdot 3} =$$

$$\underline{\underline{1/4}}$$

2/ $X = \{1, 2, 3, 4\}$

$P_x(3) = \frac{3}{10}$ $P_x(4) = \frac{2}{10}$

$p_x(1)$, $P_x(2)$ är obekanta

$E(x) = \frac{23}{10}$ och $P_x(1) + P_x(2) + \underbrace{P_x(3) + P_x(4)}_{5/10 = \frac{1}{2}} = 1$

$P_x(2) = \frac{1}{2} - P_x(1)$

$$E(x) = \sum_{k=1}^{4} k \cdot P_x(k) =$$

$$P_x(1) \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} - P_x(1)\right) \cdot 2 + \frac{3}{10} \cdot 3 + \frac{2}{10} \cdot 4 = \frac{23}{10}$$

$$P_x(1) - 2P_x(1) + 1 + \frac{9}{10} + \frac{8}{10} = \frac{23}{10}$$

$$-P_x(1) = \frac{23}{10} - \frac{17}{10} - 1 = -\frac{4}{10}$$

$\underline{\underline{P_x(1) = \frac{4}{10}}}$ $\underline{\underline{P_x(2) = \frac{1}{2} - \frac{4}{10}}} = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$

b) $E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{1+k} p_X(k) =$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{4}{20} + \frac{1}{30} + \frac{3}{40} + \frac{2}{50} = \frac{120+20+45+24}{600} =$$

$$= \frac{209}{600}$$

3 a) $\underline{\underline{P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{2}{3})}} = F(\frac{2}{3}) - F(\frac{1}{2}) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$

b) $\underline{\underline{P(X \leq 2Y)}} = P(X \leq 2X^2) =$

$P(1 \leq 2X) = P(X \geq \frac{1}{2}) =$

$= 1 - P(X \leq \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

4. $n = 100$

Låt X vara antalet personer som fyller år 1 januari

$p = 1/365$ (att fylla år 1 jan.)

a) $X \in Bin(100, 1/365)$

b) En binomialfördelning kan approximeras med

Poissonfördelning om $p < 0.1$ OK!

Normalfördelning om $\underbrace{n \cdot p(1-p)}_{100 \cdot \frac{1}{365} \cdot \frac{364}{365}} > 5$ EJ OK!

Vi kan alltså approximera

$$X \sim Po\left(100 \cdot \frac{1}{365}\right)$$

$$P(X=3) = \frac{\left(\frac{100}{365}\right)^3}{3!} \cdot e^{-\left(100/365\right)} = 0{,}00261$$

5. $X_i \in N(\mu, 0{,}02)$ $\mu = 0{,}65$

a) $P(X_i \leq 0{,}60)$ och
$P(X_i \geq 0{,}70) = 1 - P(X_i \leq 0{,}70)$

$$P(X_i \leq 0{,}60) + P(X_i \geq 0{,}70) =$$

$$= \Phi\left(\frac{0{,}60 - 0{,}65}{0{,}02}\right) + \left(1 - \Phi\left(\frac{0{,}70 - 0{,}65}{0{,}02}\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\Phi(-2{,}5)}_{1 - \Phi(2{,}5)} + 1 - \Phi(2{,}5) = 2 - 2 \cdot \Phi(2{,}5) =$$

$$= 2 - 2 \cdot 0{,}9938 = 0{,}0124$$

b)

$$\bar{X} \in N\left(\mu, \frac{0.02}{\sqrt{n}}\right) = N\left(0{,}65, \frac{0{,}02}{\sqrt{3}}\right)$$

På samma sätt som i a)

$$P(\bar{x} \leq 0{,}64) + P(\bar{x} \geq 0{,}66) =$$

$$= 2 - 2\,\Phi\Bigg(\underbrace{\frac{0{,}66 - 0{,}65}{0{,}02 / \sqrt{30}}}_{2{,}739}\Bigg) = 2 - 2 \cdot 0{,}9969 = \underline{\underline{0{,}0062}}$$

c)

På samma sätt som i b)

$$2 - 2\,\Phi(\cdot) = 0{,}01$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\Phi(\cdot) = 0{,}995$$

$$\Phi\left(\frac{0{,}66 - 0{,}65}{0{,}02 / \sqrt{n}}\right) = 0{,}995$$

$$\frac{0.66 - 0{,}65}{0.02 / \sqrt{n}} = 2.5758$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$n = 26{,}54$$

Det behövs 27 tabletter

6. $H_0: \mu = 17{,}0 \quad H_1: \mu \neq 17$

95% signifikans (välj detta om inget annat givet)

$X_i \in N(\mu, \sigma)$ σ okänd så vi behöver s = stickprovsvarians.

$S_x = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2$

$\sum x_i = 990.6 \qquad \bar{x} = \frac{990.6}{60} = 16.51$

$\sum x_i^2 = 16447.8$

$S_x^2 = 16447.8 - 60 \cdot 16.51^2 = 89{,}69$

$s = \sqrt{\frac{89.69}{59}} = 1.23$ (stickprovsvariansen)

Medelfelet blir

$d = 1.23 / \sqrt{60} = 0{,}159$

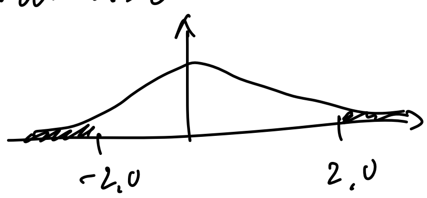
Under H_0 kan vi använda en testvariabel

$T = \frac{16.51 - 17{,}0}{0{,}159} = -3{,}08$

Eftersom $H_1: \mu \neq 17.0$ så är hypotesprövningen tvåsidig.

Med 95% signifikans jämför vi T med $t_{0,025}(59) \approx 2,0$ (resp $-2,0$)

Testvariabeln hamnar alltså utanför



och vi förkastar H_0 till förmån för $H_1: \mu \neq 17.0$

7. σ är okänd men samma för de tre fabrikerna. Vi vill hitta ett konfidensintervall $I_{\mu_A - \mu_B}$.

$$I_{\mu_A-\mu_B} = \left(\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2) \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

$$I_{\mu_1-\mu_2} = \left(\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2) \cdot s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

med

$$s_p^2 = \frac{S_{xx}+S_{yy}}{n_1+n_2-2} = \frac{(n_1-1)\cdot s_x^2 + (n_2-1)s_y^2}{n_1+n_2-2} =$$

$$= \frac{8 \cdot 5{,}0^2 + 15 \cdot 7{,}1^2}{9+16-2} = 41.57$$

$$s_p = 6.45$$

$$t_{0{,}025}(23) = 2{,}0687$$

$$I_{\mu_A-\mu_B} = \left(\underbrace{(18.1-14.6)}_{3.5} \pm \underbrace{2.0687 \cdot 6.45 \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}_{5.56}\right) =$$

$$= [-2.1 \,,\, 9.1]$$