Örebro Universitet
Institutionen för Naturvetenskap och teknik
Anders Södergren

Linjär algebra för civilingenjörer, MA503G
2017-03-17, kl. 14.15–19.15

Tentamen

Tillåtna hjälpmedel: Endast skrivmateriel.

Betygskriterier: Denna tentamen innehåller uppgifter om totalt 60 poäng och dessa är fördelade på två nivåer. En *grundläggande nivå* om totalt 36 poäng bestående av uppgifterna 1-6 (var och en värd 6 poäng) och en *fördjupad nivå* om totalt 24 poäng bestående av uppgifterna 7-9 (var och en värd 8 poäng). Enligt kursens betygskriterier (tillgängliga på kursens Blackboardsida) kommer lösningarna bedömas efter de två kriterierna *metod och problemlösning* och *teori, resonemang och motivering.*

För betyget 3 krävs minst 30 poäng totalt. För betyget 4 krävs minst 40 poäng totalt samt att minst en uppgift på tentamen ska ha belönats med full poäng. För betyget 5 krävs minst 50 poäng totalt samt att minst tre uppgifter på tentamen ska ha belönats med full poäng.

Anvisningar: Om inte annat anges skall samtliga lösningar vara försedda med utförliga förklaringar. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Grundläggande nivå

1. På denna uppgift ska enbart svar anges (lämna alltså inte in några uträkningar). Skriv svaren på alla deluppgifter på samma blad. En poäng per korrekt angivet svar på deluppgifterna a) och b). Två poäng per korrekt angivet svar på deluppgifterna c) och d).

   a) Låt A vara en kvadratisk matris och antag att A har en egenvektor $\boldsymbol{v}$ med egenvärde -1. Bestäm $A^7\boldsymbol{v}$.

   b) För vilka värden på parametern a är vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,1)$ och $\boldsymbol{v}_4 = (0,a,0)$ linjärt beroende?

   c) Låt $\boldsymbol{u} = (1,1,1)$, $\boldsymbol{v} = (1,0,3)$ och $\boldsymbol{w} = (0,2,1)$. Beräkna $(3\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$.

   d) Bestäm skärningspunkten mellan linjerna $(x,y) = (1,2) + t(3,-1)$ och $(x,y) = (2,3) + s(1,-1)$.

2. a) Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 - 7x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}.$$

   b) Bestäm den ekvation som de reella talen b_1, b_2 och b_3 måste uppfylla för att systemet

$$\begin{cases} x + 6y + 4z = b_1 \\ 2x + 4y - z = b_2 \\ -x + 2y + 5z = b_3 \end{cases}$$

   ska vara lösbart.

3. a) Beräkna, för *alla* värden på den reella konstanten a, determinanten av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & 2 \\ a & 1 & 2 & a \\ a & 2 & 1 & a \\ 2 & a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

b) För vilka värden på a är ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbart för varje högerled (dvs. för varje 4×1-matris) $\boldsymbol{b}$?

4. Låt ℓ vara linjen i $\mathbb{R}^2$ som ges av ekvationen $(x,y) = t(1,-2)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara matrisavbildningen som beskriver ortogonal projektion på linjen ℓ.

a) Bestäm avbildningen T:s (standard-) matris A.

b) Bestäm baser i matrisen A:s radrum, kolumnrum och nollrum (det vill säga, bestäm en bas i matrisen A:s radrum, bestäm en bas i matrisen A:s kolumnrum och bestäm en bas i matrisen A:s nollrum).

5. Låt $\mathcal{P}$ vara ett parallellogram i $\mathbb{R}^3$ för vilket följande gäller: En av diagonalerna i $\mathcal{P}$ har ändpunkterna $Q = (3,1,2)$ och $R = (2,1,4)$. Det ena av de två kvarvarande hörnen är placerat i punkten $S = (1,0,1)$.

a) I vilken punkt återfinns det återstående hörnet? Rita gärna en figur som en del av din lösning.

b) Bestäm arean av parallellogrammet $\mathcal{P}$.

c) Bestäm på formen Ax+By+Cz+D=0 ekvationen för det plan som innehåller $\mathcal{P}$.

6. Studenten Sven har knappat in följande i Matlabs *Command Window*:

```
>> v1 = 1/sqrt(3)*[1; 1; 1];
>> dot(v1,v1)
ans =

    1.0000
>> u2 = [2; 0; 0];
>> v2 = u2 - dot(u2,v1)/dot(v1,v1)*v1;
>> v2 = v2/norm(v2);
>> v3 = cross(v1,v2);
```

a) Kan du avgöra huruvida (de slutgiltiga värdena på) de tre vektorerna `v1, v2, v3` utgör en ON-bas? Om du inte kan avgöra detta, vilket eller vilka ytterligare Matlab-kommandon skulle du vilja lägga till för att besvara frågan? Motivera svaret noggrant.

b) Antag att Sven istället använt vektorn `v1 = [-1; 0; 0]` på första raden ovan och att han lämnat resten av koden oförändrad. Förklara varför Svens testkörning av programmet i detta fall resulterar i ett felmeddelande.

Fördjupad nivå

7. a) Låt V vara ett vektorrum. Ge en definition för att vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ utgör en bas i V.

b) Låt $\mathcal{M}_{22}$ beteckna vektorrummet av alla 2×2-matriser (med reella element) och låt $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Visa att $V = \{A \in \mathcal{M}_{22} \mid BA = 0\}$ är ett linjärt delrum av $\mathcal{M}_{22}$ och bestäm en bas i V. Ange dessutom dimensionerna av V och $\mathcal{M}_{22}$.

8. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm A:s egenvärden och motsvarande egenrum.

b) Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^T$.

c) Diagonalisera den kvadratiska formen $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$, dvs skriv den på en form utan blandtermer.

9. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$.

a) Visa att det överbestämda linjära ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ saknar lösning.

b) Förklara vad en minsta-kvadratlösning till $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ är för något.

c) Bestäm minsta-kvadratlösningen till systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Lycka till!