1.

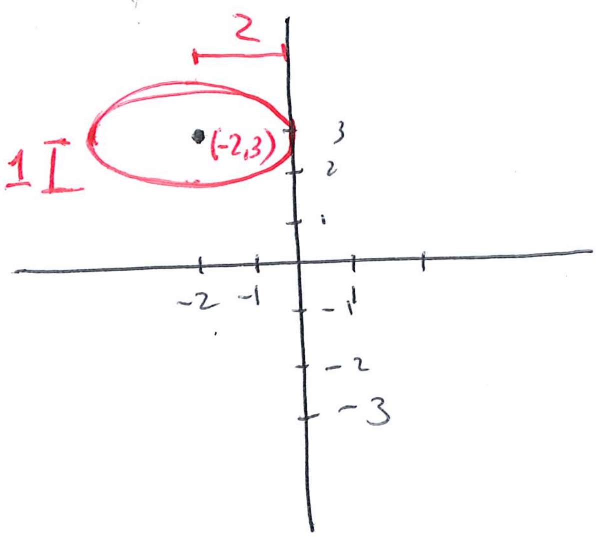
$$\underbrace{x^2 + 4x}_{\Updownarrow} + \underbrace{4y^2 - 24y}_{\Updownarrow} + 36 = 0$$

$$\underbrace{(x+2)^2 - 4} + \underbrace{4(y-3)^2 - 36} + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = 1$$

ekvationen för en ellips med halvaxlar 2 & 1 i x-led resp. y-led, och med centrum i (-2,3)



(2)

(a) $|x-1| \leq |3x+3|$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 \leq (3x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^2-2x+1 \leq 9x^2+18x+9$$

$$\vdots$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^2+\frac{5}{2}x+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x+2)(x+\tfrac{1}{2}) \geq 0$$

V.L. ≥ 0 omm $(x+2)$ & $(x+\frac{1}{2})$ har samma tecken (el. en är 0)

båda är negativa (≤ 0) ~~då~~ $\Leftrightarrow$ $x \leq -2$ dvs $x \in]-\infty, -2]$

båda är positiva (≥ 0) $\Leftrightarrow$ $x \geq -\frac{1}{2}$ dvs $x \in [-\frac{1}{2}, \infty[$

Lösningen är alltså området $]-\infty, -2] \cup [-\frac{1}{2}, \infty[$,

eller: x löser olikheten omm $x \leq -2$ eller $x \geq -\frac{1}{2}$

(2.)

(b) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ så $\tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ om

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ och $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ~~eller om~~ dvs $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi\cdot n$ $n \in \mathbb{Z}$

eller om $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ och $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dvs $\alpha = -\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot n$ $n \in \mathbb{Z}$

$\tan\alpha$ är injektiv i vänstra halvcirkeln, och i högra halvcirkeln, så dessa är de enda lösningarna!

$\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ väljer ut lösningen $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, dvs

$\underline{\sin\alpha = \frac{1}{2}}$

3.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(5x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{6}\cdot\frac{\arctan(5x)}{5x} = \left[\begin{array}{l} 5x = \tan y = \\ = \frac{\sin y}{\cos y} \end{array}\right]$ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$= \lim_{y\to 0} \frac{5}{6}\cdot\frac{y}{\tan y} = \lim_{y\to 0} \frac{5}{6}\,\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y =$

$= \lim_{y\to 0} \frac{5}{6}\,\frac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{1} = \frac{5}{6}$

$\to 1$ standardgränsvärde

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{(2-5x)^2}{\underbrace{\ln(x^3)}_{=3\ln(x)} + 2x^2} = \lim_{x\to\infty} \cancel{\frac{x^2}{x^2}}\,\frac{\left(\frac{2}{x}-5\right)^2}{3\frac{\ln(x)}{x^2} + 2} =$

$= \frac{(-5)^2}{2} = \frac{25}{2}$ där vi använt standardgr.v.

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

(4.) $f(x) = \arccos(1-2x)$

arccos har definitionsmängd $D_{\arccos} = [-1,1]$

så för D_f krävs $-1 \leq 1-2x \leq 1 \iff -2 \leq -2x \leq 0$

$\iff 0 \leq x \leq 1$ dvs $D_f = [0,1]$

$V_f = V_{\arccos} = [0, \pi]$

$f^{-1}(x) = ?$

$$y = \arccos(1-2x)$$
$$\iff$$
$$\cos y = 1-2x$$
$$\iff$$
$$x = \frac{1}{2}(1-\cos y) = f^{-1}(y)$$

dvs f:s invers är

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1-\cos x)$$

och $D_{f^{-1}} = V_f = [0, \pi]$

(5.) $f(x) = (x-1)e^{-x}$, $D_f = [1,3]$ kompakt

f:s har största & minsta värde, och de antas i $x=1$, $x=3$, eller stationära pkter i $]1,3[$
(f har inga singulära pkter)

Stat. pkter: $f'(x) = e^{-x} - (x-1)e^{-x} = (2-x)e^{-x}$

$f'(x) = 0 \iff 2-x=0 \iff x=2 \in]1,3[$

dvs f har en (inre) stationär punkt, $x=2$

$f(1) = (1-1)e^{-1} = 0$

$f(2) = (2-1)e^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

$f(3) = (3-1)e^{-3} = 2e^{-3} = \frac{2}{e^3} = \frac{2}{e}\cdot\frac{1}{e^2}$

$\frac{2}{e} < 1$ så $f(3) < f(2)$

dvs f:s största värde är $\frac{1}{e^2}$, antages i $x=2$,
och f:s minsta värde är 0, antages i $x=1$

(6.) $f(x) = x \ln(1+x^2)$

(a) tangentens ekvation är $y = f'(1)\cdot(x-1) + f(1)$

$$f(1) = 1 \cdot \ln(1+1^2) = \ln(2)$$

$$f'(x) = \ln(1+x^2) + x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x =$$

$$= \ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \ln(2) + \frac{2\cdot 1^2}{1+1^2} = \ln(2)+1$$

$$y = (\ln(2)+1)(x-1) + \ln(2)$$

$$= (\ln(2)+1)\cdot x - 1$$

(b) $D f^{-1}(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$ så $g'(f(1)) = \dfrac{1}{f'(1)} =$

(inversregeln)

$$= \frac{1}{\ln(2)+1}$$

(7.) Placera origo i ellipsens centrum, då beskrivs denna av ekvationen $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + y^2 = 1$ (*)

(x & y anger här avst. i enheten dm)

horisontell hastighet $v_x = \frac{dx}{dt}$

vertikal — " — $v_y = \frac{dy}{dt}$

derivera (*) implicit m a p t:

$$2 \cdot \frac{x}{4^2} v_x + 2y\, v_y = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y\, v_y = -\frac{1}{16} x\, v_x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$v_y = -\frac{x\, v_x}{16\, y} \quad (y \neq 0 \text{ då } x = 3)$$

vad är y då x = 3 ? $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

$$y \overset{+}{=} \sqrt{\frac{}{}}\!\!\!\!\ (-)\ \frac{\sqrt{7}}{4}$$

alltså gäller då x = 3 och $v_x = 0{,}2$ (dm/s)

$$v_y = -\frac{3 \cdot 0{,}2}{16 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}} \overset{(\text{dm/s})}{=} -\frac{0{,}6}{4\sqrt{7}} \text{ dm/s} = -\frac{0{,}15}{\sqrt{7}} \text{ dm/s}$$

=

(8)

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-2}$$

täljaren nollskild i $x=2$, så $x=2$ är lodrät asymptot

$$f'(x) = \dots = \frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{18}{(x-2)^3}$$

teckentabell:

x		-1		2		5	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$*$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ $\frown$	lok. max	$\searrow$ $\frown$		$\searrow$ $\smile$	lok. min	$\nearrow$ $\smile$

$f(-1) = 0$ $\qquad$ $f(5) = 12$

teckentabellen ger $\lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

sned asymptot $y = x+4$ då $x \to \pm\infty$

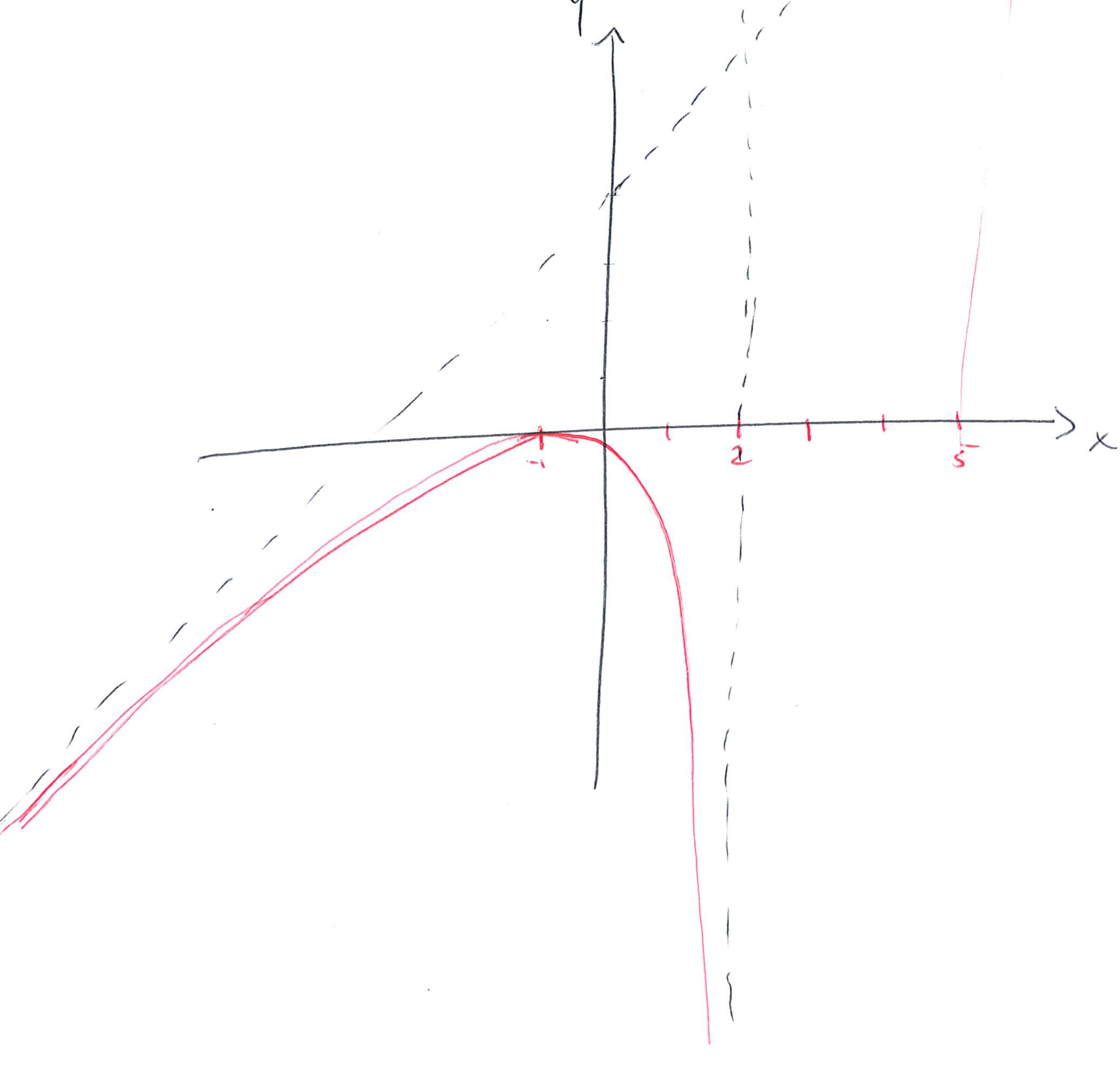
$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1+2/x+1/x^2}{1-2/x} = 1 \text{ etc.}$$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x-2} - x \right)$$

12

x+4

$$= \dots = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x+1}{x-2} = \underline{\underline{4}}$$



(9) $V(r,h) = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$, $A(r,h) = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$

$V = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow r^2 = \dfrac{1}{\pi h}$

väli att minimera $f(h) = A^2(r(h),h) = \pi^2\left(\dfrac{1}{\pi h}\right)\left(\dfrac{1}{\pi h}+h^2\right)$

$$= \frac{1}{h^2} + \pi \cdot h$$

$f'(h) = \pi - \dfrac{2}{h^3}$, $f'(h) = 0 \Leftrightarrow h^3 = \dfrac{2}{\pi} \Leftrightarrow h = \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{1/3}$

$$r = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} = \frac{1}{\left(\pi \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/3}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\pi^{1/3} \cdot 2^{1/6}}$$

$$\frac{h}{r} = \frac{2^{1/3} \cdot 2^{1/6}}{\pi^{1/3}} \cdot \pi^{1/3} = \sqrt{2}$$

den stationära punkt $h = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/3}$ är ett minimum

ty $\lim_{h\to\infty} f(h) = +\infty$ och $\lim_{h\to 0} f(h) = +\infty$