Lösningsförslag tentamen 230104 MA506G
Matematisk statistik och sannolikhetslära
för civilingenjörer

---

1. 11 frukter varav 3 giftiga.
   Jayne äter 4 av 11
   Jussi äter 6 av 11
   Hunden äter 1 av 11

a) Hunden får en slumpmässigt utvald frukt, 8 av 11 är ofarliga

Låt A vara händelsen att hunden klarar sig. Vi får då:

$$P(A) = \frac{8}{11}$$

b) Låt B vara händelsen att både Jayne och Jussi blir förgiftade.

Om hunden klarat sig så finns

det 10 frukter kvar till Jayne och Jussi varav 3 är giftiga.

Båda blir förgiftade om Jayne äter 1 eller 2 förgiftade frukter.

$$P(B|A) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{2}}{\binom{10}{4}} =$$

Jayne äter 1 giftig och 3 som ej är giftiga

Jayne äter 2 giftiga och 2 som ej är giftiga

$$= \frac{\cancel{3} \cdot \frac{7 \cdot \cancel{6}^{3} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} + \frac{3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot \cancel{6}^{3}}{\cancel{2} \cdot 1}}{\frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{\cancel{2}} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}} =$$

$$= \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{3} \cdot 5 + \cancel{3} \cdot \cancel{7} \cdot 3}{10 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{7}} = \frac{8}{10}$$

$$P(B|A) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

c) Vi vet att

$$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A) =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{11} = \frac{32}{55}$$

Svar: Sannolikheten är $\frac{32}{55}$

---

2. Vi ser att

$$p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$$

så X kan ha utfallen 0, 1 och 2.

Detsamma gäller för Y.

a) $Z = X + Y$

X				
2	2	3	4	
1	1	2	3	
0	0	1	2	
	0	1	2	Y

Svar: Z kan anta värdena 0, 1, 2, 3 och 4

b) $p_Z(0) = p_X(0) \cdot p_Y(0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$p_Z(1) = p_X(0)p_Y(1) + p_X(1)p_Y(0) =$

$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$

$p_Z(2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{1+4+9}{36} = \frac{7}{18}$

$p_Z(3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$

$p_Z(4) = p_X(2) \cdot p_Y(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

Kontroll: $\frac{1}{12} + \frac{2}{9} + \frac{7}{18} + \frac{2}{9} + \frac{1}{12} =$

$= \frac{2}{12} + \frac{4}{9} + \frac{7}{18} = \frac{1}{6} + \frac{4}{9} + \frac{7}{18} = \frac{3+8+7}{18} = 1$

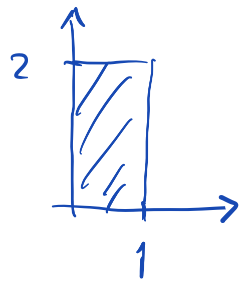
stämmer!

<u>Svar</u>: $p_Z(k)$ ges av $p_Z(0) = \frac{1}{12}$, $p_Z(1) = \frac{2}{9}$,

$p_Z(2) = \frac{7}{18}$, $p_Z(3) = \frac{2}{9}$ och $p_Z(4) = \frac{1}{12}$

3.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x/2 + y/4 & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



a) $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx =$$

$$\int_0^1 \frac{x}{2} + \frac{y}{4}\,dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{y}{4} =$$

$$= \frac{y+1}{4}$$

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{x/2 + y/4}{\frac{y+1}{4}} = \frac{2x+y}{y+1}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

b) $E(X|Y=y) = \int_0^1 x \cdot f_{X|Y}(x|y)\,dx =$

$$= \int_0^1 x \cdot \frac{2x+y}{y+1}\,dx = \frac{1}{y+1}\int_0^1 2x^2 + xy\,dx =$$

$$= \frac{1}{y+1} \cdot \left[2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 \cdot y}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{y+1} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{y}{2}\right) =$$

$$= \frac{4+3y}{6y+6} \qquad 0 \leq y \leq 2$$

c) Studera derivatan av $E(X|Y=y)$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{4+3y}{6y+6}\right) = \frac{3(6y+6) - 6(4+3y)}{(6y+6)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{18y} + 18 - 24 - \cancel{18y}}{(6y+6)^2} = \frac{-6}{(6y+6)^2} \leq 0$$

alla y

Vi har alltså max av $E(X|Y=y)$ då

$y=0$ och min då $y=2$

Max: $E(X|Y=0) = \frac{4}{6}$, $y=0$

Min: $E(X|Y=2) = \frac{4+6}{12+6} = \frac{10}{18}$, $y=2$

---

4. 96 tärningar

$p(1) = \frac{1}{6}$

Antal ettor är fördelat enligt

$$Bin(96, \tfrac{1}{6})$$

Låt X vara slumpvariabeln som representerar antalet ettor vi får.

Vi söker

$$P(X \leq 12) \quad \text{då} \quad X \in Bin(\overset{n}{96}, \overset{p}{1/6})$$

Detta är krävande att räkna ut exakt och tabellerna går bara till $n=20$.

Vi kan approximera $Bin(n,p)$ med $N(E(x), V(x))$ om $V(x) > 5$

vid halvkorrektion

I vårt fall är $V(X) = 96 \cdot \frac{1}{6} \cdot (1 - \frac{1}{6}) = \frac{96 \cdot 5}{36} =$

$= \frac{16 \cdot 5}{6} = \frac{80}{6} > 5$

så OK

$E(X) = n \cdot p = 96 \cdot \frac{1}{6} = 16$

Vi kan alltså approximera med

$$N\left(16, \frac{80}{6}\right)$$

obs varians

om vi gör halv korrektion!

Vi skall alltså titta på

σ

$$P(\bar{X} < 12.5) \quad \text{då} \quad \bar{X} \in N\left(16, \sqrt{\frac{80}{6}}\right)$$

$$P(\bar{X} < 12,5) = \Phi\left(\frac{12,5 - 16}{\sqrt{\frac{80}{6}}}\right) = \Phi(-0,9585) =$$

$$= 1 - \Phi(0,9585) \approx 1 - \Phi(0,96) = 1 - 0,8315 =$$

$$= 0,1685$$

<u>Svar</u>: $P(X \leq 12) \approx 0,1685$

Exakt svar är 0,1693

utan halvkorrektion får man

$$\phi\left(\frac{12-16}{\sqrt{\frac{80}{6}}}\right) = 1 - \Phi(1,0954) = 1 - 0,8438 = 0,1562$$

$$\phi\left(\frac{13-16}{\sqrt{80/6}}\right) = 1 - \Phi(0,8216) = 1 - 0,7939 = 0,2061$$

---

5. $e \in N(0, 2.3)$

$T_s = \mu + e$

exakta smältpunkten

$\overline{T_s} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} T_{s_i} = 1050,92$

$\overline{T_s} \in N\left(\mu, \frac{2,3}{\sqrt{10}}\right)$

$H_0 : \mu = 1050$

$H_1 : \mu \neq 1050$

Under H_0 så skall 95% av medelvärdet av 10 mätningar ligga inom $\pm 1{,}96\sigma$ (enligt tabell är $\lambda_{\alpha/2} = \lambda_{0{,}025} = 1.96$

$$\frac{X - 1050}{2{,}3/\sqrt{10}} = 1.96 \iff X = 1051{,}43$$

$$\frac{X - 1050}{2{,}3/\sqrt{10}} = -1{,}96 \qquad X = 1048{,}57$$

Vårt medelvärde 1050,92 ligger i intervallet $[1048.57, 1051{,}43]$ och vi accepterar H_0.

(<u>Alternativt:</u>

$$\frac{\overline{T}_s - 1050}{2{,}3/\sqrt{10}} = 1{,}2649 < 1{,}96$$)

6. $n = 16$

Längden är $N(\mu, \sigma)$

Medellängden är $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

σ är okänd.

a) 95% konfidensintervall för μ

$$I_\mu = \left(\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{74.9}{16} = 4.6812$$

$$n = 16 \qquad t_{0,025}(15) = 2.1314$$

$$s = \sqrt{\frac{S_{xx}}{n-1}} = \sqrt{\frac{7,0444}{15}} = 0,6853$$

$$S_{xx} = \sum x^2 - n\bar{x}^2 = 357.67 - 16 \cdot \left(\frac{74.9}{16}\right)^2$$

$$= 7,0444$$

$$I_\mu = \left(4,68 \pm 2,1314 \cdot \frac{0,6853}{\sqrt{16}}\right) =$$

$$= (4,6812 \pm 0,3652) \approx 4.68 \pm 0.37$$

b)

$$I_{\sigma^2} = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0,025}(n-1)} , \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-0,025)}(n-1)} \right)$$

$$s^2 = 0,4696$$

$$\chi^2_{0,025}(15) = 27,488$$

$$\chi^2_{0,975}(15) = 6,2621$$

$$I_{\sigma^2} = \left(\frac{15 \cdot 0,4696}{27,488} , \frac{15 \cdot 0,4696}{6,2621} \right) =$$

$$= (0,2563 , 1,1249)$$

$$I_{\sigma} = (0,5063 , 1,0606)$$