Tentamen i Optimering

MA112G

2018-05-29, kl. 08.15–13.15

Hjälpmedel: Inga

Betygskriterier: Framgår av separat dokument publicerat på Blackboard. Totalt antal poäng är 60 och för godkänt krävs minst 30 poäng.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Var tydlig med vad som antas och vad som visas. Det är huvudsakligen motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Tentan innehåller lättare och svårare uppgifter blandat. Välj de uppgifter som passar dig. Samtliga uppgifter behöver inte lösas.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Mårten Gulliksson.

Lycka till!

---

1. Tages Touring ska köpa in flodbåtar som kan användas för turister på Stångån. Tage tänker sig att de ska köra från bryggan strax söder om Hjulsbro till småbåtshamnen strax innan Roxen, och tillbaka. Det finns två olika typer av båtar, nämligen typ 1 som görs vid Rhen, och typ 2 som görs i Lausanne. Tage har lagt undan 10 miljoner, och en båt av typ 1 kostar 2 miljoner i inköp, medan en av typ 2 kostar 3 miljoner. Han kan inte få tag på fler än 4 båtar av typ 1 och 3 av typ 2. En båt av typ 1 tar 25 passagerare och en båt av typ 2 tar 40 passagerare, och Tage vill maximera antal passagerare han kan ta med. Formulera problemet att bestämma hur många båtar av varje typ Tage ska köpa som ett linjärt heltalsproblem. [10p]

   Lösning: Problemet blir [10p]

$$
\begin{array}{ll}
\min 25x_1 + 40x_2 & \\
\text{u.b.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 10 \\
 & x_1 \leq 4 \\
 & x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0 \\
 & x_1, x_2 \text{ heltal}
\end{array}
$$

2. Betrakta det ickelinjära optimeringsproblemet [10p]

$$\min_{x_1, x_2} x_1 x_2^2 + e^{-x_1}.$$

(a) Bestäm alla punkter som uppfyller första ordningens optimalitetsvilkor. Avgör för dessa punkter typ av extrempunkt genom att använda andra ordningens optimalitetsvillkor. [4p]

(b) Till minimeringsproblemet ovan läggs bivillkoret $h(x) = x_2 - e^{x_1} - x_2^2 + 3/4$. Avgör om det finns någon punkt med $x_1 = 0$ som uppfyller KKT-villkoren. [6p]

Lösning:

(a) Sätt $f(x_1,x_2) = x_1x_2^2 + e^{-x_1}$ som ger gradienten $\nabla f = (x_2^2 - e^{-x_1},\ 2x_1x_2)$ som skall vara lika med noll. Om $x_1 = 0$ blir $x_2 = \pm 1$ och om $x_2 = 0$ blir $e^{-x_1} = 0$ som inte har någon lösning vilket ger punkterna $(0,1), (0,-1)$. Hessianen av f är

$$H(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} e^{-x_1} & 2x_2 \\ 2x_2 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

som ger

$$H(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, H(0,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

som båda är indefinita och därför är extrempunkterna sadelpunkter.

(b) Om $h = 0$ med $x_1 = 0$ måste $x_2 = 1/2$. Gradienten av Lagrangefunktionen är $\nabla f + \lambda \nabla h = (x_2^2 - e^{-x_1},\ 2x_1x_2) + \lambda(-e^{x_1}, 1 - 2x_2)$ som ska vara lika med noll i eventuella extrempunkter. Det ger $\lambda = -3/4$ och KKT-villkoren är uppfyllda.

3. Betrakta problemet [10p]

$$\min_{x_1,\dots,x_n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - \beta_i)^2,\ \alpha_i > 0$$

(a) Visa att problemet är konvext och avgör om problemet har unik lösning. [4p]

(b) Lägg nu till bivillkoren $Ax \geq b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Är detta bivillkorsproblem konvext? Är lösningen unik? [2p]

(c) Antag att något $\alpha_i < 0$. Finns det då någon lösning till problemet utan bivillkor? [2p]

(d) Antag att något $\alpha_i < 0$. Finns det då någon lösning till problemet med bivillkor? [2p]

Lösning:

(a) Hessianen är diagonalmatrisen $H = 2\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ som är positivt definit och problemet är konvext.

(b) Linjära bivillkor är konvexa och eftersom objektfunktionen är konvex är problemet konvext.

(c) Det finns ingen lösning eftersom vi kan välja x_i godtyckligt stor för att göra objektfunktionen godtyckligt liten.

(d) Det finns en lösning under förutsättning att bivillkoren begränsar x_i.

4. Definiera begreppen standardform, slackvariabel, baslösning, tillåten lösning, degenererad baslösning. Ge ett exempel för varje begrepp. [10p]

   Lösning: Se kapitel 4 och 5.

5. Beskriv hur en linjesökningsmetod för ett ickelinjärt optimeringsproblem utan bivillkor fungerar. Ni ska använda matematiska beteckningar. [10p]

   Lösning: Se kapitel 2.5.