(b) Eftersom vi inte har de enskilda apelsinernas vikter så kan vi inte göra en sammanvägd (pooled) skattning av σ^2. Gå istället tillväga som följer:

Låt Y_i = vikten hos påse i.

$$Y_i = X_1^{(i)} + X_2^{(i)} + \dots + X_{n_i}^{(i)} \quad \text{där}$$

$$X_j^{(i)} = \text{vikten hos apelsin } j \text{ i påse } i.$$

Det gäller $E(X_j^{(i)}) = \mu$, $V(X_j^{(i)}) = \sigma^2$, och variablerna $X_j^{(i)}$ är oberoende.

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_5 = 4+5+3+6+5 = 23$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i,j} x_j^{(i)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{5} Y_j = \frac{1}{23}(760+1030+610+1150+970)$$

$$= \frac{4520}{23} = 196.5217$$

En rimlig skattning för σ^2 är, utgående från vad är känt i uppgiften:

$$s^*(Y)^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{5}(Y_i - n_i \cdot \bar{x})^2, \quad \text{där } N$$

bestäms genom väntevärdesriktighet.

notera $(Y_i - n_i \bar{x})^2 = (x_1^{(i)} + \dots + x_{n_i}^{(i)} - n_i \mu - n_i(\bar{x} - \mu))^2 =$

$$= \left((x_1^{(i)} - \mu) + (x_2^{(i)} - \mu) + \dots + (x_{n_i}^{(i)} - \mu) - n_i (\bar{x} - \mu) \right)^2$$

$$= (x_1^{(i)} - \mu)^2 + \dots + (x_{n_i}^{(i)} - \mu)^2 + \sum_{j \neq k} (x_j^{(i)} - \mu)(x_k^{(i)} - \mu) -$$

$$- 2 n_i (\bar{x} - \mu) \sum_{j=1}^{n_i} (x_j^{(i)} - \mu) + n_i^2 (\bar{x} - \mu)^2$$

Väntevärdet av korstermerna:

$$E\left((X_j^{(i)} - \mu)(X_k^{(i)} - \mu) \right) = C(X_j, X_k) = 0$$ eftersa X_j, X_k är oberoende

Dessutom gäller

$$E\left((X_j^{(i)} - \mu)(\bar{X} - \mu) \right) = \frac{1}{n} \sum_k E\left((X_j^{(i)} - \mu)(X_k - \mu) \right) = \frac{1}{n} E\left((X_j^{(i)} - \mu)^2 \right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Väntevärdet av variabeln $\sum_{i=1}^{5} (Y_i - n_i \bar{X})^2 =$

$$= \sum_{i=1}^{5} \left(\sum_{j=1}^{n_i} (X_j^{(i)} - \mu)^2 + n_i^2 (\bar{X} - \mu)^2 - 2 n_i (\bar{X} - \mu) \sum_{j=1}^{n_i} (X_j^{(i)} - \mu) \right.$$

$$\left. + \sum_{j \neq k} (X_j^{(i)} - \mu)(X_k^{(i)} - \mu) \right)$$

är därmed

$$E\left(\sum_{i=1}^{5} (Y_i - n_i \bar{X})^2 \right) = n \cdot \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{5} n_i^2 -$$

$$-\sum_{i=1}^{5} 2 n_i^2 \frac{\sigma^2}{n} = \left(n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_i^2\right)\sigma^2$$

En väntevärdesriktig skattning av σ^2 är således

$$S^{2*} = \frac{1}{n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_i^2} \sum_{i=1}^{5} \left(Y_i - n_i \overline{X}\right)^2$$

Här gäller $\sum_{i=1}^{5} n_i^2 = 4^2 + 5^2 + 3^2 + 6^2 + 5^2 = 111$

så $s^{2*} = \frac{1}{23 - \frac{111}{23}} \left[(760 - 4 \cdot 196.5217)^2 + \dots + (970 - 5 \cdot 196.5217)^2 \right]$

$= 239.4425 \approx 239$