ÖREBRO
UNIVERSITET

LÖSNINGSFÖRSLAG

Våg- och materiefysik för civilingenjörer

FY501G-0100

2018-03-14, kl. 14:15–19:15

---

1. Since the rope is fixed at both ends, then the phrase "second-harmonic standing wave pattern" describes the oscillation shown in Figure 16-20(b), where (see Eq. 16-65)

$$\lambda = L, \quad f = \frac{v}{L}.$$

(a) Comparing the given function with Eq. 16-60, we obtain $k = \pi/2$ and $\omega = 12\pi$ rad/s. Since $k = 2\pi/\lambda$, then

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \lambda = 4.0\,\text{m} \;\Rightarrow\; L = 4.0\,\text{m}.$$

(b) Since $\omega = 2\pi f$, then $2\pi f = 12\pi$ rad/s, which yields

$$f = 6.0\,\text{Hz} \;\Rightarrow\; v = f\lambda = 24\,\text{m/s}.$$

(c) Using Eq. 16-26, we have $v = \sqrt{\tau/\mu} = 24\,\text{m/s}$, which leads to

$$\tau = \mu v^2 = \left(\frac{1.39\text{ kg}}{4.0\text{ m}}\right)(24\,\text{m/s})^2 = 200\text{ N}$$

(e) With

$$f = \frac{3v}{2L} = \frac{3(24\text{ m/s})}{2(4.0\text{ m})} = 9.0\,\text{Hz}$$

the period is $T = 1/f = 0.11$ s.

(d) Vågekvationen (16-45): $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \ldots = -0.10\cdot\dfrac{\pi^2}{4}\cdot\sin(\pi x/2)\cdot\sin(12\pi t)$,

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \ldots = -0.10\cdot 144\pi^2\sin(\pi x/2)\cdot\sin(12\pi t)$.

Så vi ser att $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = K\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, med $K^{-1} = 4\cdot 144$.

Om $K = \dfrac{1}{v^2}$ får vi $v = \dfrac{1}{\sqrt{K}} = 2\cdot 12 = 24$ m/s, vilket stämmer med b).

2.

a) Grundtonens frekvens uppfyller $f = \frac{v}{4L} = \frac{343}{4 \cdot 0.035} = 2450$ Hz (17-41). Svar a): Grundtonens frekvens i hörselgången på en människa är ca $f = 2.5$ kHz.

b

(~~a~~) The intensity is given by $I = P/4\pi r^2$ when the source is "point-like." Therefore, at $r = 4.20$ m,

$$I = \frac{3.00 \times 10^{-6}\ \text{W}}{4\pi(4.20\ \text{m})^2} = 1.35 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2.$$

c

(~~b~~) The sound level there is

$$\beta = (10\ \text{dB}) \log\left(\frac{1.35 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2}{1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2}\right) = 41.3\ \text{dB}.$$

At the beginning of the exercises and problems section in the textbook, we are told to assume $v_{\text{sound}} = 343$ m/s unless told otherwise. The second harmonic of pipe A is found from Eq. 17-39 with $n = 2$ and $L = L_A$, and the 5th harmonic of pipe B is found from Eq. 17-41 with $n = 5$ and $L = L_B$. Since these frequencies are equal, we have

$$\frac{2v_{\text{sound}}}{2L_A} = \frac{5v_{\text{sound}}}{4L_B} \Rightarrow L_B = \frac{5}{4}L_A.$$

d

(~~a~~) Since the fundamental frequency for pipe A is 425 Hz, we immediately know that the second harmonic has $f = 2(425\ \text{Hz}) = 850$ Hz. Using this, Eq. 17-39 gives

$$L_A = (2)(343\ \text{m/s})/2(850\ \text{s}^{-1}) = 0.4035\ \text{m} \approx 40.4\ \text{cm}.$$

e

(~~b~~) The length of pipe B is $L_B = \frac{5}{4}L_A = \frac{5}{4}(0.4035\ \text{m}) = 0.504\,\text{m} = 50.4\,\text{cm}$.

3.

a) Utgå från (28-2). Storleken av kraften ges då av $F = |q|\, vB \sin\phi$. Speciellt gäller då $\vec{v}$ och $\vec{B}$ är vinkelräta att $\phi = 90°$, $\sin\phi = 1$ så att vi får den sökta formeln.

b) Utgå nu istället från (28-26).

c) Ampere-Maxwells lag (32-11) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_{enc}$, övergår då inga tidsberoende elektriska fält finns i närheten, till Amperes lag (29-14)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \int ds = B\pi 2R = \mu_0 i_{enc} = \mu_0 I \ \Rightarrow\ B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R},$$

där vi valt en cirkel med radien R runt ledaren med strömmen i som integrationsväg. Magnetfältet är parallellt med cirkeln varför $\vec{B} \cdot d\vec{s} = Bds$ (se figur 29-4).

d)

$$|\varepsilon| = \frac{d\Phi}{dt} \simeq \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B\Delta A}{\Delta t} = \frac{B\ell\Delta s}{\Delta t} = \frac{B\ell v\Delta t}{\Delta t} = B\ell v.$$

e) Vi väljer Maxwells tredje ekvation $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ (Faraday's law) då denna innehåller en tidsderivata av ett magnetiskt flöde i höger led, samt en spänning ($[Eds] = [E]\,[ds] = \frac{V}{m}m = V$) i vänster led. För det (homogena) elektriska fältet i den elektriska ledaren (figuren till vänster i uppgiften) av längden ℓ gäller (vi inför en x-axel på vanligt sätt)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^{\ell} E_x dx = E_x \ell = \frac{\varepsilon}{\ell}\ell = \varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \Rightarrow \quad |\varepsilon| = \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

4.

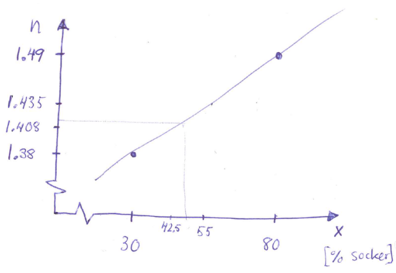
a) En foton motsvarar energin $E = hf = hc/\lambda = 6.626{\cdot}10^{-34}{\cdot}2.998{\cdot}10^{8}/\left(650 \cdot 10^{-9}\right) = 3.056 \cdot 10^{-19}$ J. Om effekten för lasern är $P = 1.0\ [mW] = 1.0 \cdot 10^{-3}\ [J/s]$, betyder det att antalet fotoner är $N = \frac{P}{E} = \frac{1.0 \cdot 10^{-3}\ [J/s]}{3.056 \cdot 10^{-19}\ [J]} = 3.3 \cdot 10^{15}$ per sekund.

b) Inuti en laser finns en stående ljusvåg, som sakta 'läcker' ut genom ena sidan, se tex figur 40-20. Om inte våglängden är den rätta, kan inte en stående våg passa in. Å andra sidan sätter (tex) Heisenbergs osäkerhetsrelationer begränsningar i hur exakt våglängden kan vara, dvs vilken spridning av närliggande våglängder som finns i laserljuset.

c) Om vi betraktar laserljuset som en EM-våg blir enligt (33-32) kraften $F = \frac{IA}{c}$, där effekten är $P = IA = 1.0 \cdot 10^{-3}$ W, så vi får trycket $p = \frac{F}{A} = \frac{P}{Ac}$. Om nu arean för ljusstrålen ökat med en faktor $\frac{10.0\ mm^2}{1.0\ mm^2} = 10$, så minskar ljustrycket med en faktor 10.

d) Det mänskliga ögat är känsligast för grönt ljus, se tex figur 33-2.

e) Enligt Brännströms mätningar är $\theta_c = 45°$ kritisk vinkel för totalreflektion, vilket enligt (33-45) ger $n = 1/\sin(45°) = \sqrt{2} \approx 1.41$. Informationen om x %-iga sockerlösningar med brytningsindex $n(x)$ ges av följande skiss och grafiska lösning



Svar e): Sockerhalten var ca 47 %.

5.

a) Storleken av kraften är $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi{\cdot}8.854{\cdot}10^{-12}}\frac{\left(1.602{\cdot}10^{-19}\right)^2}{(0.05292{\cdot}10^{-9})^2} = 8.236 \cdot 10^{-8}$ N, (22-1) kombinerat med (22-3). **Svar a):** Kraften mellan protonen och elektronen har storleken $8.236 \cdot 10^{-8}$ N.

b) Enligt Newtons andra lag gäller $F = ma_c = mv^2/r_1$. Storleken av rörelsemängden är då $p = mv = \sqrt{r_1 F m} = e\sqrt{\frac{m}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1}} = 1.993 \cdot 10^{-24}$ kgm/s, **Svar b):** Rörelsemängden för elektronen är $1.993 \cdot 10^{-24}$ kgm/s.

c) Storleken av rörelsemängdsmomentet är $pr_1 = e\sqrt{\frac{mr_1}{4\pi\varepsilon_0}} = 1.993 \cdot 10^{-24} \cdot 0.05292 \cdot 10^{-9} = 1.054 \cdot 10^{-34}\ Js = 1 \cdot \hbar$, **Svar c):** Heltalet är 1.

d) Enligt de Broglie gäller (38-17) $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi r_1} = \frac{\hbar}{r_1}$, vilket stämmer med **b)** och **c)** ovan. **Svar d):** Rörelsemängden för elektronen är $1.993 \cdot 10^{-24}$ kgm/s.

e) Om farten är $v = p/m$ så passerar elektronen ett varv på tiden $t = s/v = 2\pi r_1 m/p$. Strömmen är antalet laddningar som passerar ett tvärsnitt av slingan per sekund dvs $i = \frac{e}{t} = \frac{ep}{2\pi r_1 m} = \frac{e^2}{\sqrt{16\pi^3\varepsilon_0 r_1^3 m}} = 1.054 \cdot 10^{-3}$ A. Nu ger (28-35) $\mu = NiA = 1 \cdot i \cdot \pi r_1^2 = \frac{e^2\sqrt{r_1}}{\sqrt{16\pi\varepsilon_0 m}} = 9.272 \cdot 10^{-24}$ Am^2. Jämför med $\mu_{orb} = \frac{e}{2m}\hbar = 9.273 \cdot 10^{-24}$ Am^2 (den sk Bohr magnetonen). **Alternativt** skriver vi om strömmen på formen $i = \frac{e}{t} = \frac{ep}{2\pi r_1 m} = \frac{emvr_1}{2\pi r_1^2 m} = \frac{e}{2m}\frac{L}{A}$, så att vi direkt ser att $\mu = iA = \frac{e}{2m}L$. **Svar e):** Värdet på det magnetiska dipolmomentet för elektronen blir samma om vi beräknar det klassiskt.

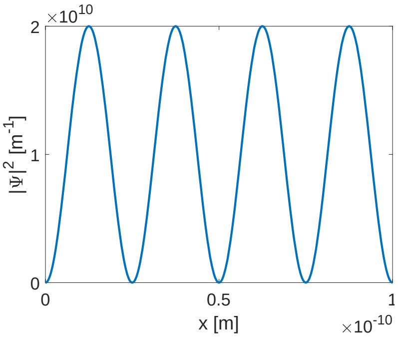
6.

a) Om brunnen är väldigt djup kan vi approximera potentialen som en oändligt djup brunn, se tex figurerna 39-1 och 39-2. I brunnen, dvs för $0 < x < L$, gäller då den stationära Schrödingerekvationen (38-19) med $U = 0$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2}E\Psi = 0.$$

Denna ekvation satisfieras av $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ om $E = \frac{h^2}{8m_e L^2}n^2$, n heltal, (39-4). Speciellt gäller att $\Psi(x \leq 0) = \Psi(x \geq L) = 0$.

b) Enligt (39-12) gäller för $n = 4$ att $|\Psi(x)|^2 = A^2\sin^2\left(\frac{4\pi}{L}x\right)$, som är noll för $x = 0, \frac{L}{4}, \frac{L}{2}, \frac{3L}{4}, L$ och för övrigt positivt i brunnen. Värdet på konstanten $A^2 = \frac{2}{L}$ (39-17) kan erhållas genom integration. Så vi har att skissa funktionen $|\Psi(x)|^2 = 2 \cdot 10^{10}\sin^2\left(4\pi \cdot 10^{10} \cdot x\right)$ med de fem nollställena $x = 0,\ 0.25 \cdot 10^{-10},\ 0.50 \cdot 10^{-10},\ 0.75 \cdot 10^{-10},\ 1.0 \cdot 10^{-10}$ m



c) Vi provar att sätta in Ψ i Schrödingerekvationen med den givna potentialen [ja, den här formen är ekvivalent med (38-19)]

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{1}{2}m_e\omega^2x^2\Psi=E\Psi,$$

dvs första termen blir

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{m_e\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{d}{dx}\left(-\frac{m_e\omega}{2\hbar}2xe^{-\frac{m_e\omega x^2}{2\hbar}}\right)$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{m_e\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{m_e\omega}{\hbar}\left(-e^{-\frac{m_e\omega x^2}{2\hbar}}+\frac{m_e\omega}{\hbar}x^2e^{-\frac{m_e\omega x^2}{2\hbar}}\right)=\left(\frac{\hbar\omega}{2}-\frac{1}{2}m_e\omega^2x^2\right)\Psi,$$

så att

$$\left(\frac{\hbar\omega}{2}-\frac{1}{2}m_e\omega^2x^2\right)\Psi+\frac{1}{2}m_e\omega^2x^2\Psi=\frac{\hbar\omega}{2}\Psi=E\Psi.$$

Energin är alltså $E=\frac{\hbar\omega}{2}=\frac{1.055\cdot10^{-34}\cdot1.2\cdot10^{16}}{2}=6.33\cdot10^{-19}$ J, vilket motsvarar några eV.

d) Sannolikhetstätheten för grundtillståndet ovan ges av $|\Psi(x)|^2=\left(\frac{m_e\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}e^{-\frac{m_e\omega x^2}{\hbar}}$. Vi kan approximera sannolikheten för att finna elektronen i det lilla intervallet (en plot bekräftar att $|\Psi(x)|^2$ nästan är konstant i området) enligt

$$P=\int_{0.49\cdot10^{-10}}^{0.51\cdot10^{-10}}|\Psi(x)|^2\,dx\approx\left|\Psi\left(0.50\cdot10^{-10}\right)\right|^2\cdot0.02\cdot10^{-10}$$

$$=\left(\frac{m_e\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}e^{-\frac{m_e\omega\left(0.50\cdot10^{-10}\right)^2}{\hbar}}\cdot0.02\cdot10^{-10}=...=0.00886\simeq1\%.$$

Det är ca 1% sannolikhet att detektera elektronen i området vid en mätning.

e) Om en löser den stationära Schrödingerekvationen (SE) för en endimensionell ändlig brunn får en ensamma (odegenererade) energinivåer. Två närliggande brunnar leder till närliggande energinivåer som uppträder i par. N st närliggande brunnar leder till N-faldigt närliggande energinivåer. När N blir stort, som i en kristallstruktur, får vi då band av energinivåer. Detta har vi visat bilder på under kursen.