ÖREBRO
UNIVERSITET

Flervariabelanalys för civilingenjörer

MA505G-0100

2021-01-04, kl. 14:15–19:15

Hjälpmedel: Endast skrivmateriel. Formelblad delas ut tillsammans med skrivningen.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga uppgifter bedöms utifrån kriterier för *problemlösning* och *redovisning*. För betyg 3/4/5 räcker det med 4 poäng inom vart och ett av huvudområdena *differentialkalkyl*, *integralkalkyl* och *vektoranalys* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg, rita tydliga figurer och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Andreas Bergwall.

Lycka till!

Grundläggande uppgifter (6p/uppgift)

1. Visa att gränsvärdena *inte* existerar.

   (a) $\displaystyle \lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x+y}{1+(x-y)^2}$

   (b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\cdot\sin(x)}{y^2+\sin^2(x)}$.

2. Bestäm en lokal extrempunkt till $f(x,y) = e^{2(x^3+y^3)-9(x^2+y^2)+12x}$.

3. Beräkna volymen av området som ges av olikheterna

$$0 \le z \le \frac{x^2}{1+y^4}, \quad x \le y \le 1, \quad 0 \le x \le 1.$$

4. Beräkna $\int_\gamma e^z\,\mathrm{d}x - 2yz\,\mathrm{d}y + (xe^z - y^2)\,\mathrm{d}z$ där γ är linjestycket från punkten $(0,0,0)$ till punkten $(1,1,1)$.

5. Bestäm flödet av vektorfältet $\boldsymbol{u} = (x, y^2, z^3)$ ut genom ytan $x^2+y^2+z^2=1$.

Kom ihåg att illustrera relevanta definitionsmängder, integrationsområden och orienteringar med tydliga figurer.

Fördjupade uppgifter (10p/uppgift)

6. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = (x - y)^2 + 4y$ då $x^2 + y^2 = 4$. Gör det på två olika sätt.

7. Skissa det område i $\mathbb{R}^3$ som ges av olikheterna $z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 - z^2$, $z \geq 0$. Beräkna områdets volym V och tyngdpunkt (x_t, y_t, z_t). Det gäller att

$$x_t = \frac{1}{V} \iiint_K x \, \mathrm{d}V$$

och motsvarande för y_t och z_t.

8. Låt $\boldsymbol{F} = (y^3, z, x^2)$. Beräkna $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ längs skärningskurvan γ mellan planet $2x + 3y + 2z = 5$ och ytan $x^2 + 4y^2 = 4$. γ ska orienteras moturs sett från origo.

Kom ihåg att illustrera relevanta definitionsmängder, integrationsområden och orienteringar med tydliga figurer.

MA505G Flervariabelanalys för civilingenjörer, 7.5 hp

Formelblad ht 2020

Logaritmer

$$^a\log(x\cdot y) = {}^a\log(x) + {}^a\log(y) \qquad {}^a\log\left(\frac{x}{y}\right) = {}^a\log(x) - {}^a\log(y) \qquad {}^a\log(x^y) = y\cdot {}^a\log(x)$$

Trigonometri

$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \qquad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \qquad \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

Standardgränsvärden

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad (\text{om } \alpha > 0) \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\text{om } \alpha > 0)$$

Deriveringsregler

$$D\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

$$D\left(f\big(g(x)\big)\right) = f'\big(g(x)\big)g'(x) \qquad D\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

Integreringsregler och elementära primitiva funktioner

Partiell integration $(F' = f)$:

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

Variabelbyte $(t = g(x))$:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad \int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \arctan x\,dx = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \ln\sqrt{1+x^2} + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C$$

Partialbråksuppdelning

$$\frac{\cdots}{(x+a)(x+b)^2(x^2+c^2)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B_1}{x+b} + \frac{B_2}{(x+b)^2} + \frac{C_1x + C_2}{x^2+c^2}$$

Maclaurinserier

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Vektorer och matriser

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \qquad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \qquad \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \tfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}) \end{array}$$

Linjer och plan

Linje genom (x_0,y_0,z_0) med riktning (a,b,c): $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c), \quad t\in\mathbb{R}$.

Plan genom (x_0,y_0,z_0) med normal (a,b,c): $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

Avstånd från (x_1,y_1,z_1) till planet $ax+by+cz+d=0$: $\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Taylors formel i två variabler

$$f(a+h,b+k) = f(a,b)+f_x'(a,b)h+f_y'(a,b)k+\frac{1}{2}\big(f_{xx}''(a,b)h^2+2f_{xy}''(a,b)hk+f_{yy}''(a,b)k^2\big)+|(h,k)|^3B(h,k).$$

Variabelbyte i dubbelintegraler

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_E f(g(u,v),h(u,v))\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad \text{där } \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} g_u' & g_v' \\ h_u' & h_v' \end{vmatrix}.$$

Polära koordinater

Planpolära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = r$$

Rymdpolära koordinater

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$$

Kurvor och ytor

Parameterkurva $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),y(t),z(t))$: enhetstangent $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r}'(t)/|\boldsymbol{r}'(t)|$, bågelement $\mathrm{d}s = |\boldsymbol{r}'(t)|dt$, orienterat bågelement $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{T}\mathrm{d}s = \boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t$.

Parameteryta $\boldsymbol{r}(s,t) = (x(s,t),y(s,t),z(s,t))$: enhetsnormal $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_s'\times\boldsymbol{r}_t'/|\boldsymbol{r}_s'\times\boldsymbol{r}_t'|$, areaelement $\mathrm{d}S = |\boldsymbol{r}_s'\times\boldsymbol{r}_t'|\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$, orienterat areaelement $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = (\boldsymbol{r}_s'\times\boldsymbol{r}_t')\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$.

Funktionsyta $z = f(x,y)$:

$\quad\boldsymbol{r}(x,y) = (x,y,f(x,y))$, $\mathrm{d}S = \sqrt{(f_x')^2+(f_y')^2+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = (-f_x',-f_y',1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Sfär med radie R:

$\quad\boldsymbol{r}(\theta,\varphi) = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$, $\mathrm{d}S = R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$, $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{r}(\theta,\varphi)R\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

Cylinderyta med radie R:

$\quad\boldsymbol{r}(\varphi,z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$, $\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$, $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = (\cos\varphi,\sin\varphi,0)R\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$.

Gradient, divergens, rotation

Om $f(x,y,z)$ och $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)$ är givna i kartesiska koordinater:

$$\operatorname{grad} f = (f_x',f_y',f_z') = (\partial_x,\partial_y,\partial_z)f = \nabla f$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = P_x'+Q_y'+R_z' = (\partial_x,\partial_y,\partial_z)\cdot(P,Q,R) = \nabla\cdot\boldsymbol{F}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = (R_y'-Q_z',P_z'-R_x',Q_x'-P_y') = (\partial_x,\partial_y,\partial_z)\times(P,Q,R) = \nabla\times\boldsymbol{F}$$

Integralsatser

Om randkurvorna/-ytorna är slutna och positivt orienterade:

Greens formel: $\displaystyle\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y = \iint_D (Q_x'-P_y')\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Stokes sats: $\displaystyle\int_{\partial\Gamma} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_\Gamma (\operatorname{rot}\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$

Gauss sats: $\displaystyle\iint_{\partial K} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_K \operatorname{div}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Grundläggande uppgifter

den 14 december 2020 14:18

1. a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{1+(x-y)^2}$

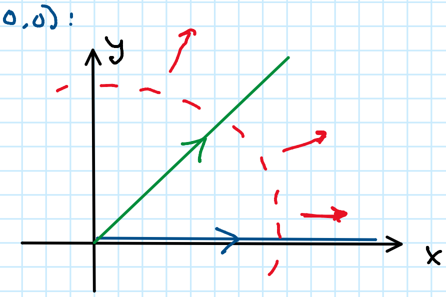
Att $x^2+y^2 \to \infty$ betyder att avståndet från (x,y) till $(0,0)$ ska gå mot ∞.

Låt t.ex. (x,y) följa x-axeln bort från $(0,0)$:

$f(x,0) = \dfrac{x}{1+x^2} \to 0$ då $x \to \infty$

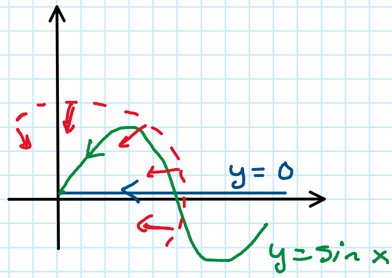
Låt istället (x,y) följa linjen $y=x$:

$f(x,x) = \dfrac{2x}{1} \to \infty$ då $x \to \infty$



Eftersom gränsvärdena är olika så saknar $f(x,y)$ gränsvärde när $x^2+y^2 \to \infty$.

b) $f(x,y) = \dfrac{y \cdot \sin x}{y^2 + \sin^2 x}$



$f(x,0) = \dfrac{0}{\sin^2 x} \to 0$ då $x \to 0$

$f(x, \sin x) = \dfrac{\sin^2 x}{2\sin^2 x} \to \dfrac{1}{2}$ då $x \to 0$

Gränsvärde saknas även här eftersom olika sätt att låta $(x,y) \to (0,0)$ ger olika resultat.

(Man kan också jämföra olika linjer genom origo:

$f(x,kx) = \dfrac{k\,x \sin x}{k^2x^2 + \sin^2 x} = \dfrac{k \cdot \frac{\sin x}{x}}{k^2 + \frac{\sin^2 x}{x^2}} \to \dfrac{k}{k^2+1}$ då $x \to 0$.)

2. $$f(x,y) = e^{\overbrace{2(x^3+y^3)-9(x^2+y^2)+12x}^{g(x,y)}}$$

Eftersom $h(t)=e^t$ är strängt växande så har $f(x,y) = h(g(x,y))$ lokala extrempunkter precis där $g(x,y)$ har det. Sådana punkter måste vara stationära eftersom g är partiellt deriverbar överallt i $\mathbb{R}^2$.

Vi bestämmer först g:s stationära punkter:

$$\begin{cases} g'_x = 0 \\ g'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 18x + 12 = 0 \\ 6y^2 - 18y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ y^2 - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ el. } x = 2 \\ y = 0 \text{ el. } y = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ $(1,0), (1,3), (2,0), (2,3)$ är S.P. till g.

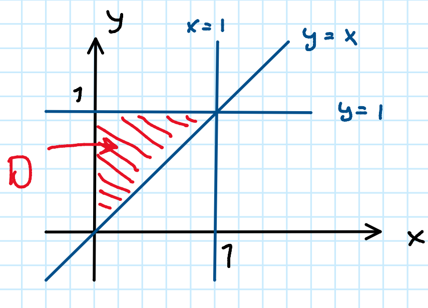
Nu undersöker vi karaktären hos punkterna:

S.P.	$A = g''_{xx} = 12x-18$	$B = g''_{xy} = 0$	$C = g''_{yy} = 12y-18$	$AC-B^2$	Karaktär
$(1,0)$	-6	0	-18	>0	Lok. max.
$(1,3)$	-6	0	18	<0	Sadel
$(2,0)$	6	0	-18	<0	Sadel
$(2,3)$	6	0	18	>0	Lok. min

Det finns alltså två lokala extrempunkter.
$(1,0)$ är lokal maxpunkt, $(2,3)$ är lokal minpunkt.

3. Volymen ges av $V = \iint_D \frac{x^2}{1+y^4}\,dx\,dy$ där

$D = \{(x,y) : 0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 1\}$



Alltså:

$$V = \iint_D \frac{x^2}{1+y^4}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{1+y^4} \right]_0^y dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{y^3}{1+y^4}\, dy = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left[\ln(1+y^4) \right]_0^1 = \frac{1}{12}\cdot \ln 2 .$$

4. $\bar{F} = (P, Q, R) = (e^z, -2yz, xe^z - y^2)$

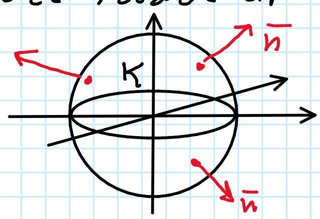
Vi försöker hitta en potential $U(x,y,z)$, d.v.s. en funktion s.a. $\operatorname{grad} U = \bar{F}$.

- $U'_x = e^z \iff U = xe^z + g(y,z)$
- Då gäller att
  $U'_y = -2yz \iff g'_y(y,z) = -2yz \iff g(y,z) = -y^2 z + h(z)$
- Då följer att
  $U'_z = xe^z - y^2 \iff xe^z - y^2 + h'(z) = xe^z - y^2 \iff h'(z) = 0$

$\bar{F}$ är alltså ett potentialfält och $U = xe^z - y^2$ är en potential.

Alltså är $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(1,1,1) - U(0,0,0) = e - 1.$

5. Den givna ytan är randyta med utåtnormal till enhetsklotet K. Gauss sats och övergång till rymdpolära koordinater ger att flödet är



$$\iint_{\partial K} \bar{u}\cdot\hat{n}\, dS \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_K \operatorname{div} \bar{u}\, dV$$

$$= \iiint_K (1 + 2y + 3z^2)\, dV = \underbrace{\iiint_K dV}_{=\,K\text{:s volym}} + 2\underbrace{\iiint_K y\, dV}_{=\,0 \text{ p.g.a. symmetri i } y\text{-led}} + 3\cdot\iiint_K z^2\, dV$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 3 \cdot \iiint_K z^2 \, dx\,dy\,dz \overset{\text{r.p.k.}}{=} \frac{4\pi}{3} + 3 \iiint_{[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} r^2 \cos^2\theta \cdot r^2 \sin\theta \, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 3 \cdot \underbrace{\int_0^1 r^4 \, dr}_{=1/5} \cdot \int_0^\pi \cos^2\theta \cdot \sin\theta \, d\theta \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\left[-\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^\pi}_{=2/3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{5} = \frac{32\pi}{15} .$$

Fördjupade uppgifter

den 14 december 2020 14:00

6. $f(x,y)=(x-y)^2+4y$ ska optimeras under bivillkoret $g(x,y)=x^2+y^2=4$. Bivillkoret definierar en kompakt mängd K och f är kontinuerlig så både max och min finns.

Alt 1: K är en sluten reguljär kurva och f är en C^1-fkn så optimum finns där ∇f och ∇g är parallella

Vi har

$$\nabla f = (2(x-y), -2(x-y)+4)$$

$$\nabla g = (2x, 2y)$$

Så $\nabla f \parallel \nabla g$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-y & -(x-y)+2 \\ x & y \end{vmatrix} = (x-y)\cdot y + x(x-y) - 2x$$

$$= (x+y)(x-y) - 2x = x^2 - y^2 - 2x = x^2 + x^2 - 4 - 2x$$

$y^2 = 4 - x^2$

$$= 2(x^2 - x - 2) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $x = -1$ el. $x = 2$ $(*)$

$x=-1$ ger $y = \pm\sqrt{3}$ och $f = (-1\mp\sqrt{3})^2 \pm 4\sqrt{3} = 1+3 \pm 2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3} = 4 \pm 6\sqrt{3}$

$x=2$ ger $y=0$ och $f=4$

Alltså är största värdet $f(-1,\sqrt{3}) = 4+6\sqrt{3}$ och minsta värdet $f(-1,-\sqrt{3}) = 4-6\sqrt{3}$.

Alt 2: K kan parametriseras enligt $(x,y) = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Eftersom $f(x,y) = x^2+y^2-2xy+4y$ så ska vi alltså optimera

$$g(\varphi) = f(2\cos\varphi, 2\sin\varphi)$$

$$= 4 - 2\cdot 2\cos\varphi \cdot 2\sin\varphi + 4\cdot 2\sin\varphi$$

$$= 4 - 4\sin 2\varphi + 8\sin\varphi$$

då $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Vi har $g(0) = g(2\pi) = 4$ och

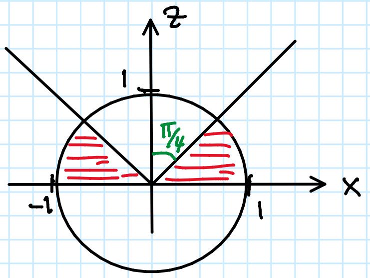
$$g'(\varphi) = -8\cos 2\varphi + 8\cos\varphi = -8(2\cos^2\varphi - 1 - \cos\varphi)$$

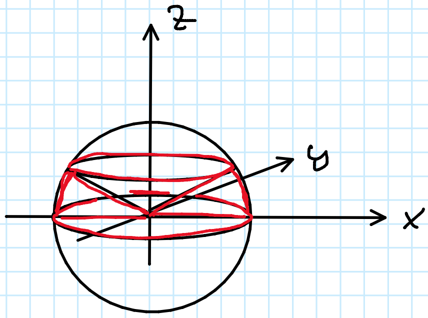
$$= -16\left(\cos^2\varphi - \tfrac{1}{2}\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\right) = 0 \iff \cos\varphi = 1 \text{ el. } \cos\varphi = -\tfrac{1}{2}$$

$\cos\varphi = 1$ ger $x = 2$ och $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ ger $x = -1$.

Sen fortsätter man som från (*) i Alt. 1.

7. Observera att $x^2+y^2 \le 1 - z^2 \iff x^2+y^2+z^2 \le 1$.
Det aktuella området K ligger alltså ovanför xy-planet, innanför enhetssfären och under konen $x^2+y^2=z^2$.





Med rymdpolära koordinater kan K beskrivas

$0 \le r \le 1$, $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

vilket är ett rätblock E i $r\theta\varphi$-rummet.

Nu får vi att volymen är

$$V = \iiint_K dV = \iiint_E r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^1 r^2\, dr}_{=1/3} \cdot \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta}_{=1/\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} = \frac{2\pi}{3\sqrt{2}}$$

Av symmetriskäl är $x_t = y_t = 0$. Till sist är

$$V \cdot z_t = \iiint_K z\, dV = \iiint_E r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^1 r^3\, dr \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

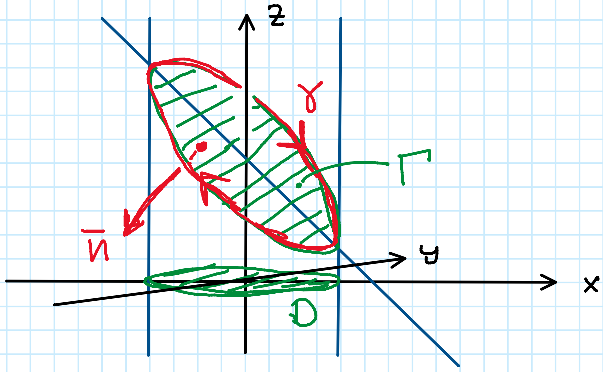
$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)$$

så

$$z_+ = \frac{\cancel{\pi}(\sqrt{2}-1)}{4\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{3\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\pi}} = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{8}.$$

8. Vi använder Stokes sats.
γ är randkurva till den del Γ av planet $z = \frac{1}{2}(5-2x-3y)$ som svarar mot att (x,y) ligger i ellipsskivan $D = \{(x,y) : x^2+4y^2 \le 4\}$.
Observera att Γ skär z-axeln då $z = \frac{5}{2}$, så Γ ligger "ovanför" origo. Om Γ ges den "undre" normalriktningen så blir alltså γ den positivt orienterade randen till Γ.
Alltså ska

$$\bar{n}\,dS = (z'_x, z'_y, -1)\,dx\,dy = (-1, -\tfrac{3}{2}, -1)\,dx\,dy.$$



Vi har

$$\text{rot}\,\bar{F} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times (y^3, z, x^2) = (-1, -2x, -3y^2)$$

Alltså är

$$(\text{rot}\,\bar{F}) \cdot \bar{n}\,dS = (1 + 3x + 3y^2)\,dx\,dy$$

Nu får vi att

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r} \underset{\text{Stokes}}{=} \iint_\Gamma (\text{rot}\,\bar{F}) \cdot \bar{n}\,dS = \iint_D (1 + 3x + 3y^2)\,dx\,dy$$

$$= \underbrace{D\text{:s area}}_{=2\pi} + 3\cdot\underbrace{\iint_D x\,dx\,dy}_{\substack{=0 \text{ p.g.a.} \\ \text{symmetri i } x\text{-led}}} + 3\cdot\iint_D y^2\,dx\,dy$$

$$= \left\| \begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ 2y = r\sin\varphi \end{matrix} \quad \frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \frac{1}{2} r\,dr\,d\varphi \right\| = 2\pi + 3\cdot\iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} \left(\frac{1}{2} r\sin\varphi\right)^2 \cdot \frac{1}{2} r\,dr\,d\varphi$$

$$= 2\pi + \frac{3}{8}\cdot\underbrace{\int_0^2 r^3\,dr}_{=4}\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi}_{=\pi} = 2\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$