ÖREBRO UNIVERSITET

Tentamen i Funktioner och derivator

MA502G

2018-10-30, kl. 14:15–19:15

Hjälpmedel: Skrivdon (penna, sudd, linjal, gradskiva)

Betygskriterier: Framgår av separat dokument publicerat på Blackboard. Totalt kan man få 60 poäng. Uppgifterna på Del 1 är uppdelade i de tre huvudområdena Algebra, Funktioner, och Derivator, och kan tillsammans ge 12 poäng per huvudområde. Uppgifterna på Del 2 kan tillsammans ge 24 poäng. För betyg 3/4/5 krävs 3/4/5 poäng per huvudområde på Del 1 och 30/40/50 poäng totalt.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Svara på högst en uppgift per blad.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Jens Fjelstad

Lycka till!

Del 1

Algebra

1. Vilken kurva beskrivs av ekvationen $x^2 + 4x + 4y^2 - 24y + 36 = 0$? Rita figur för att illustrera svaret. (6p)

2. Gör *en* av följande uppgifter. (6p)

(a) Lös olikheten $|x-1| \leq |3x+3|$.

(b) Bestäm värdet på $\sin\alpha$ om $\tan\alpha = -1/\sqrt{3}$ och $\alpha \in [\pi/2, \pi]$.

Funktioner

3. Beräkna gränsvärdena

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\arctan 5x}{6x} \qquad\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to +\infty} \frac{(2-5x)^2}{\ln(x^3) + 2x^2}$$

4. Låt $f(x) = \arccos(1-2x)$. Ange f:s definitionsmängd (den maximala), värdemängd, och invers.

Derivator

5. Bestäm största och minsta värdet av $f(x) = (x-1)e^{-x}$ på intervallet $[1,3]$.

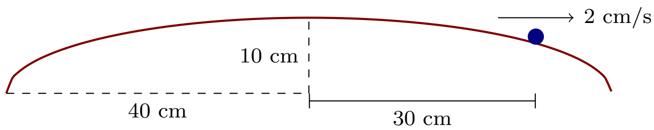
6. Låt $f(x) = x\ln(1+x^2)$.

(a) Bestäm tangenten till kurvan $y = f(x)$ i den punkt där $x = 1$.

(b) Begränsa f:s definitionsmängd till $x \geq 0$ och låt $g(x) = f^{-1}(x)$. Beräkna $g'(f(1))$?

Del 2

7. En liten kula rullar på en upp och nervänd balja. Baljan har, sett från sidan, formen av en ellips med horisontell halvaxel 40 cm och vertikal halvaxel 10 cm. Då kulan rullat 30 cm horisontellt från toppen har den en horisontell hastighet på 2 cm/s. Vilken är kulans vertikala hastighet i samma punkt?

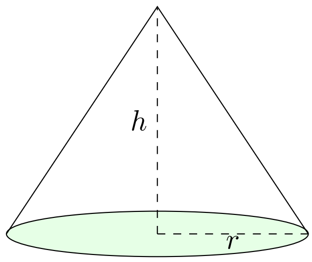


8. Bestäm alla asymptoter och lokala extrempunkter till

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-2}$$

och rita grafen.

9. En rak cirkulär kon med radie r och höjd h har volym $V = \pi r^2 h/3$ och mantelarea $A = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$.



Hur ska r och h väljas för att mantelarean ska bli så liten som möjligt om volymen ska vara 1/3 liter? Vad blir h/r då, och vad säger det om konens form?