ÖREBRO
UNIVERSITET

Tentamen i
Flervariabelanalys för civilingenjörer

MA505G, 2020-06-05, 08:15–13:15

Tillåtna Hjälpmedel: Skrivmateriel, formelblad, kursbok och egna anteckningar. Inget samarbete och inga digitala hjälpmedel tillåtna.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Var tydlig med vad som antas och vad som visas. Det är huvudsakligen motiveringarna som ger poäng, inte svaret.

Examinator: Johan Andersson.

Lycka till!

Grundläggande nivå 6p/uppgift

1. a) Bestäm tangentplanet till ytan $x^2y + z = 3$ i punkten $(x, y, z) = (1, 2, 1)$.

   b) Bestäm gränsvärdet
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$
   eller visa att det inte existerar.

2. Lös den partiella differentialekvationen
$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} = x + y, \qquad x > 0,\ y > 0,$$
   med hjälp av variabelbytet $u = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$, $v = xy$.

3. Beräkna integralen $\iint_D \cos(\pi y^2)dxdy$ över triangeln D med hörn i punkterna $(0, 1)$, $(1, 1)$ och $(0, 0)$.

4. Bestäm flödet av fältet $\boldsymbol{F} = (xy, y, zx)$ ut genom kroppen K som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1$ och $z \geq 0$.

5. En yta parametriseras av $(x, y, z) = (s^2, -2t^2, 2st)$ för $0 \leq s \leq 1$ och $0 \leq t \leq 1$. Bestäm ytans area.

Fördjupad nivå 10p/uppgift

6. Låt

$$f(x, y) = 2\ln(x + y) - xy.$$

a) Finn alla stationära punkter till funktionen f och klassificera dem som terasspunkter, lokala minimipunkter eller lokala maximipunkter.

b) Avgör om funktionen $f(x, y)$ har något största/minsta värde under bivillkoret $xy = 1$.

7. Låt

$$\boldsymbol{F} = (ze^{xz} - 2xy, -x^2, xe^{xz})$$

a) Avgör om $\boldsymbol{F}$ är ett potentialfält.

b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där γ är kurvan som parametriseras av $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(\pi t), \cos(\pi t)t, \sin(\pi t)t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

8. Låt D vara en kvadrat i xy-planet med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 1)$,$(1, -1)$ och $(2, 0)$. Bestäm tröghetsmomentet för kroppen

$$K = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 6 - x^2 - y^2,\ (x, y) \in D\}$$

med avseende på z-axeln. Vi antar att densiteten är $\rho = 1$.

Anm: Tröghetsmomentet med avseende på z-axeln ges av $\iiint_K (x^2 + y^2)\rho dxdydz$.

Lösningsförslag för Tentamen i Flervariabelanalys för civilingenjörer

MA505G, 2020-06-05, 08:15–13:15

Johan Andersson

Grundläggande nivå 6p/uppgift

1. a) Bestäm tangentplanet till ytan $x^2y + z = 3$ i punkten $(x, y, z) = (1, 2, 1)$.

   Svar: Vi kan skriva ytan som nivåytan $f(x, y, z) = 3$ där $f(x, y, z) = x^2y+z$. Vi får gradienten $\nabla f(x, y, z) = (2xy, x^2, 1)$ och $\nabla f(1, 2, 1) = (4, 1, 1)$. Vi får tangentplanets ekvation

$$\begin{aligned} \nabla f(1,2,1)\cdot(x-1, y-2, z-1) &= 0 \qquad \iff \\ (4,1,1)\cdot(x-1,y-2,z-1) &= 0 \qquad \iff \\ 4x-4+y-2+z-1 &= 0 \qquad \iff \\ 4x+y+z &= 7. \end{aligned}$$

   b) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

   eller visa att det inte existerar.

   Svar: Längs x-axeln så får vi gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2-0^2}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 2 = 2.$$

   Längs y-axeln så får vi gränsvärdet

$$\lim_{y\to 0} \frac{2\cdot 0^2-y^2}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} -1 = -1.$$

   Eftersom vi får olika gränsvärden beroende på hur vi närmar oss punkten $(x, y) = (0, 0)$ så existerar inte gränsvärdet.

   Notering: Polära koordinater går också bra. Det viktiga här är hur slutsatsen motiveras.

   Notering: 5p per deluppgift.

2. Lös den partiella differentialekvationen

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} = x + y, \qquad x > 0,\, y > 0,$$

med hjälp av variabelbytet $u = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$, $v = xy$.

Svar: Vi använder oss av kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}x$$

Vi får att

$$\begin{aligned} x^2\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}y\right) + y^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}x\right) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial u} + x^2y\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u} + xy^2\frac{\partial f}{\partial v} = xy(x+y)\frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

Insättning av detta i våran ursprungliga partiella differentialekvation ger oss att

$$xy(x+y)\frac{\partial f}{\partial v} = x + y.$$

Division av båda leden med $x+y$ samt notering att $xy = v$ ger oss $v\frac{\partial f}{\partial v} = 1$, dvs

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{v}$$

Primitivtagning av båda led ger oss $f = \ln v + g(u)$ (notera att $v > 0$ därför behövs ej absolutbelopp i logaritmen) där g är en godtycklig C^1-funktion. Återsubstitution med ursprungsvariablerna ger oss

$$f(x,y) = \ln(xy) + g\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

där g är en godtycklig C^1-funktion och $x, y > 0$.

3. Beräkna integralen $\iint_D \cos(\pi y^2)dxdy$ över triangeln D med hörn i punkterna $(0,1)$, $(1,1)$ och $(0,0)$.

Svar: Området kan beskrivas av $D = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}$. Vi kan skriva integralen som en itererad enkelintegral

$$\begin{aligned} \iint_D \cos(\pi y^2)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^y \cos(\pi y^2)dx\right) dy \\ &= \int_0^1 y\cos(\pi y^2)dy \qquad \begin{bmatrix} u = \pi y^2 \\ ydy = \frac{du}{2\pi} \end{bmatrix} \\ &= \int_0^{2\pi} \cos u \, du = [\sin u]_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin\pi = 0 \end{aligned}$$

4. Bestäm flödet av fältet $\boldsymbol{F} = (xy, y, zx)$ ut genom kroppen K som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \le z^2 \le 1$ och $z \ge 0$.

Svar: Kroppen är en upp och nedvänd kon med toppen på origo, bottenytan på planet $z = 1$ samt z-axel som symmetriaxel. Vi har att

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}xy + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}zx = y + 1 + x$$

Vi använder oss av Gauss sats

$$\text{Flödet} = \iint_{\partial K} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{n} = \iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{F} dxdydz = \iiint_K (y + 1 + x) dxdydz$$

På grund av symmetri runt z-axeln så får vi att x-termen samt y-termen ger bidraget noll. Vi får alltså att

$$\text{Flödet} = \iiint_K dxdydz = \text{Volym}(K) = \frac{\pi}{3},$$

på grund av känd formel för volymen av en kon (höjden är 1 och radien för bottenytan är också 1).

Notering: Att skriva om integralen som itererad integral med z innerst och efter att beräknat den innersta integralen byta till polära koordinater i xy-planet och att därefter beräkna denna integral utan att hänvisa till symmetri går även det utmärkt.

5. En yta parametriseras av $(x, y, z) = (s^2, -2t^2, 2st)$ för $0 \leq s \leq 1$ och $0 \leq t \leq 1$. Bestäm ytans area.

Svar: Låt $\boldsymbol{r}(s,t) = (s^2, -2t^2, 2st)$. Vi vill beräkna arean $\int_D dS$ där $D = [0,1] \times [0,1]$ och

$$dS = |\boldsymbol{r}'_s \times \boldsymbol{r}'_t| dsdt$$

Vi har att $\boldsymbol{r}'_s = (2s, 0, 2t)$ samt $\boldsymbol{r}'_t = (0, -4t, 2s)$. Vi får

$$\boldsymbol{r}'_s \times \boldsymbol{r}'_t = (2s, 0, 2t) \times (0, -4t, 2s) = \left(\begin{vmatrix} 0 & 2t \\ -4t & 2s \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2s & 2t \\ 0 & 2s \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2s & 0 \\ 0 & -4t \end{vmatrix} \right) = (8t^2, 4s^2, -8st).$$

Vi har (mha kvadreringsregeln) att

$$|\boldsymbol{r}'_s \times \boldsymbol{r}'_t| = \sqrt{64t^2 + 16s^4 + 64s^2t^2} = \sqrt{(8t^2 + 4s^2)^2} = 8t^2 + 4s^2.$$

Vi får $dS = (8t^4 + 4s^2)dsdt$ och genom att skriva integralen som en itererad integral

$$\begin{aligned} \text{Arean} &= \iint_D (8t^2 + 4s^2) dsdt = \int_0^1 \left(\int_0^1 (8t^2 + 4s^2) ds \right) dt \\ &= \int_0^1 \left[8t^2 s + \frac{4s^3}{3} \right]_{s=0}^{s=1} dt = \int_0^1 \left(8t^2 + \frac{4}{3} \right) dt \\ &= \left[\frac{8t^3}{3} + \frac{4t}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4. \end{aligned}$$

Fördjupad nivå 10p/uppgift

6. Låt

$$f(x,y) = 2\ln(x+y) - xy.$$

a) Finn alla stationära punkter till funktionen f och klassificera dem som terasspunkter, lokala minimipunkter eller lokala maximipunkter.

Svar: Stationära punkter fås från att lösa ekvationssytemet

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x+y} - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x+y} - x = 0 \end{cases}$$

Subtraktion av den andra ekvationen från den första ger $x - y = 0$, dvs $y = x$. Insättning av detta i den andra ekvationen ger $\frac{2}{x+x} - x = 0$, dvs $\frac{1}{x} - x = 0$ eller $x^2 = 1$ som har lösningen $x = \pm 1$. Från $y = x$ får vi två lösningar $(x, y) = (1, 1)$ och $(x, y) = (-1, -1)$. Notera dock att den andra inte är en stationär punkt då den inte tillhör definitionsmängden av funktionen (logaritmen av negativt tal dyker upp). Vi har alltså en stationär punkt $(x, y) = (1, 1)$. För att bestämma dess karaktär behöver vi beräkna andra ordningens partialderivator. Vi har

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2}{(x+y)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2}{(x+y)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{(x+y)^2} - 1$$

I punkten (1,1) ger detta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{3}{2}.$$

Vi får den kvadratiska formen $Q(h, k) = -\frac{1}{2}h^2 - 3hk - \frac{1}{2}k^2$. Denna form är indefinit, tex ses detta genom $Q(1, 1) = -4 < 0$ samt $Q(-1, 1) = 2 > 0$, dvs den kvadratiska formen antar såväl positiva som negativa värden. Den stationära punkten är alltså en terasspunkt.

b) Avgör om funktionen $f(x, y)$ har något största/minsta värde under bivillkoret $xy = 1$.

Svar: Om området vore kompakt så hade vi kunnat använda känd sats för att dra slutsatsen att f antar såväl sitt största som minsta värde. Nu är inte området kompakt (det är ej begränsat) så vi måste undersöka gränsvärdet när vi går längs kurvan mot oändligheten i de två möjliga riktningarna. Bivillkoret $xy = 1$ ger $y = 1/x$. Alltså kan funktionen under detta bivillkor skrivas

$$f(x, y) = f\left(x, \frac{1}{x}\right) = 2 \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1.$$

Vi ser att $x > 0$ annars är funktionen ej väldefinierad. Vi ser att om $x \to 0^+$ eller $x \to \infty$ så gäller att $f(x, 1/x) \to \infty$. Detta beror på att $1/x \to \infty$ eller $x \to \infty$ och att alltså argumentet för logaritmen går mot oändligheten. Vi kan alltså dra slutsatsen att funktionen inte har ett största värde. Har den då ett minsta värde? Eftersom $f(x, 1/x) \to \infty$ när $x \to 0^+$ och $x \to \infty$ så vet vi att om x är tillräckligt stort eller tillräckligt nära noll så är $f(x, 1/x) > 100$, dvs om x inte tillhör ett intervall $[\delta, R]$ för något litet $\delta > 0$ och stort R. Eftersom $[\delta, R]$ är ett kompakt intervall och f är kontinuerlig på detta intervall så vet vi att f antar ett minsta värde på detta intervall. Eftersom (till exempel) $f(1,1) = 2\ln 2 - 1 < 100$ kan vi därför dra slutsatsen att det minsta värdet också är ett minsta värde för funktionen $f(x,y)$ under det givna bivillkoret. Alltså har funktionen ett minsta värde men inte ett största värde under bivillkoret $xy = 1$

Notering. Att börja beräkna största eller minsta värde ger inga poäng alls då det inte är detta som uppgiften handlar om. Om minsta värdet beräknas med korrekt motivering varför det är det minsta värdet så ger det dock poäng. Att konkret efter substitutionen $y = 1/x$ göra om det till en envariabelproblem och motivera med teckentabell och gränsvärde ger full poäng.

Notering. Stationära punkter 4p/Klassificiering 3p/ b)-uppgift 3p

7. Låt

$$\boldsymbol{F} = (ze^{xz} - 2xy, -x^2, xe^{xz})$$

a) Avgör om $\boldsymbol{F}$ är ett potentialfält.

Svar: Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är ett potentialfält om det finns en potentialfunktion U så att

$$\frac{\partial U}{\partial x} = ze^{xz} - 2xy \tag{1}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x^2 \tag{2}$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = xe^{xz} \tag{3}$$

Primitivtagning av (1) med avseende på x ger

$$U(x,y,z) = e^{xz} - x^2y + g(y,z)$$

där g är en C^1-funktion map y och z. Vi ser att

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^{xz} - x^2y) = -x^2 - \frac{\partial g}{\partial y}$$

Insättning av detta i (2) ger

$$-x^2 = -x^2 - \frac{\partial g}{\partial y}$$

dvs $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$. Vi får genom primitivtagning map y att $g(y,z) = h(z)$ där h är en C^1-funktion. Insättning av detta i (3) ger att

$$xe^{xz} + h'(z) = xe^{xz},$$

dvs $h(z) = C$. Val av $C = 0$ ger tex potentialfunktionen

$$U(x,y,z) = e^{xz} - x^2y.$$

Alltså är $\boldsymbol{F}$ ett potentialfält.

b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r},$$

där γ är kurvan som parametriseras av $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(\pi t), \cos(\pi t)t, \sin(\pi t)t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

Svar: Vi ska använda oss av oberoende av väg. Eftersom $\boldsymbol{F}$ är ett potentialfält så beräknas kurvintegralen genom

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot dr = U(\boldsymbol{r}(1)) - U(\boldsymbol{r}(0))$$

där U är potentialfunktionen från a)-uppgiften, $\boldsymbol{r}(1) = (\cos\pi, \cos\pi, \sin(\pi)) = (-1, -1, 0)$ är slutpunkten för kurvan samt $\boldsymbol{r}(0) = (1, 0, 0)$ är startpunkten från kurvan. Vi får

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot dr = U(-1,-1,0) - U(1,0,0) = (e^0 - (-1)^2 \cdot (-1)) - (e^0 - 0) = 1.$$

8. Låt D vara en kvadrat i xy-planet med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,1)$,$(1,-1)$ och $(2,0)$. Bestäm tröghetsmomentet för kroppen

$$K = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 6 - x^2 - y^2,\ (x,y) \in D\}$$

med avseende på z-axeln. Vi antar att densiteten är $\rho = 1$.

Anm: Tröghetsmomentet med avseende på z-axeln ges av $\iiint_K (x^2+y^2)\rho dxdydz$.

Svar: Vi noterar att på den givna kvadraten gäller $0 \leq x \leq 2$ samt $-1 \leq y \leq 1$. Speciellt gäller alltså att $x^2 + y^2 \leq 2^2 + 1^2 = 5$. Från detta följer det att $z = 6 - x^2 - y^2$ ligger ovanför xy-planet på det givna området D. Enligt anmärkningen får vi då

$$\begin{aligned}
\text{Tröghetsmomentet} &= \iiint_K (x^2+y^2)dxdydz \\
&= \iint_D \left(\int_0^{6-x^2-y^2} (x^2+y^2)dz \right) dxdy, \\
&= \iint_D (6-x^2-y^2)(x^2+y^2)dxdy
\end{aligned}$$

Vi har att området D bestäms av olikheterna

$$-x \leq y \leq x,\ -2 + x \leq y \leq 2 - x$$

Subtraktion av y ger $-x - y \leq 0 \leq x - y$ samt $-2 + x - y \leq 0 \leq 2 - x - y$, vilket kan skrivas om som $0 \leq x + y \leq 2$ samt $0 \leq x - y \leq 2$. Variabelbytet

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

ger då det nya området $E = [0,2] \times [0,2]$ i uv-planet. Vi har att

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \implies \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = -\frac{1}{2}$$

Vilket ger

$$dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \frac{dudv}{2}.$$

Vi noterar att

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 + (x-y)^2\right) = \frac{u^2+v^2}{2}$$

Vi får att

$$\begin{aligned}
\text{Tröghetsmomentet} &= \iint_E (x^2+y^2)dxdydz \\
&= \iint_E \left(6 - \frac{1}{2}(u^2+v^2)\right) \frac{u^2+v^2}{2}\frac{dudv}{2}, \\
&= \frac{1}{8}\iint_E (12-u^2-v^2)(u^2+v^2)dudv \\
&= \frac{1}{8}\iint_E \left(-u^4 - v^4 - 2u^2v^2 + 12u^2 + 12v^2\right) dudv.
\end{aligned}$$

Här ser vi att vi kan skriva integralen som summor av 5 integraler alla av typen

$$\frac{1}{8}\iint_E u^a v^b dudv = \frac{1}{8}\int_0^2 u^a du \int_0^2 v^b dv = \frac{1}{8}\frac{2^{a+1}}{a+1}\frac{2^{b+1}}{b+1} = \frac{2^{a+b-1}}{(a+1)(b+1)}$$

Vi får att

$$\frac{1}{8}\iint_E u^2v^2dudv = -\frac{8}{9}, \qquad \frac{1}{8}\iint_E v^4dudv = \frac{1}{8}\iint_E u^4dudv = \frac{8}{5}$$
$$\frac{1}{8}\iint_E 12u^2dudv = \frac{1}{8}\iint_E 12v^2dudv = 8$$

Vi får

$$\text{Tröghetsmomentet} = -\frac{8}{5} - \frac{8}{5} - 2\cdot\frac{8}{9} + 8 + 8 = 16 - \frac{16}{5} - \frac{16}{9} = 16 - \frac{224}{45} = \frac{496}{45}.$$