ÖREBRO UNIVERSITET

Lösning till tentamen i

Introduktionskurs i matematik för civilingenjörer

MA001G

2019-09-02

---

1. Lös ekvationen [6p]

$$\frac{3}{2x} + \frac{1}{6} = \frac{7}{3x}.$$

Lösning: Vi förlänger med $x \neq 0$ och får

$$\frac{3}{2} + \frac{x}{6} = \frac{7}{3}.$$

vilket kan skrivas

$$\frac{x}{6} = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{14-9}{6} = \frac{5}{6}.$$

Vi får alltså $x = 5$.

2. Ge ett exempel på en andragradsekvation som har lösningarna $x = 1$ och $x = -2$. Verifiera att vald ekvation faktiskt har önskade lösningar. [6p]

Lösning: Eftersom $x = 1$ gör att $x - 1 = 0$ och $x = -2$ gör att $x + 2 = 0$, så fås ett sådant polynom av $0 = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$. Insättning av $x = 1$ ger $1^1 + 1 - 2 = 0$ och insättning av $x = -2$ ger $4 - 2 - 2 = 0$, vilket verifierar att ekvationen har dessa lösningar.

3. Lös ekvationen [6p]

$$3 \lg 2 - \lg(x-1) = \lg(x+1) - \lg(x-2).$$

Lösning: Ekvationen kan förenklas till

$$\lg\left(\frac{8}{x-1}\right) = \lg\left(\frac{x+1}{x-2}\right).$$

Genom att skriva båda sidor som exponent till 10 får vi

$$\frac{8}{x-1} = \frac{x+1}{x-2},$$

vilket vi förenklar till

$$8x - 16 = x^2 - 1.$$

Vi får då

$$0 = x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5),$$

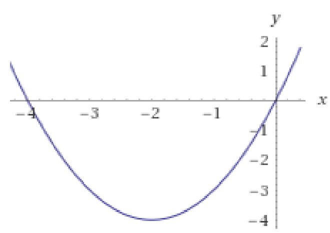
så ekvationen löses av $x = 3$ och $x = 5$.

4. Låt $f(x) = x^2$. Rita grafen till kurvan $y = f(x+2) - 4$. [6p]

Lösning: Notera att $f(x+2) = (x+2)^2$ så att kurvan som ska ritas ges av

$$y = (x+2)^2 - 4\,.$$

Vi kan direkt se att detta är kurvan $y = x^2$ förskjuten 2 steg till vänster och 4 steg nedåt i ett xy-koordinatsystem. Det går därför att rita en kopia av kurvan $y = x^2$ men där minpunkten ges i $(-2, -4)$, se graf nedan:



5. Lös ekvationen [6p]

$$9^x - 3^x - 6 = 0.$$

Lösning: Genom att sätta $t = 3^x$ får vi $t^2 - t - 6 = 0$, vilket har lösningarna $t = -2$ och $t = 3$. Eftersom $t > 0$ är bara $t = 3$ en giltig lösning. Vi får då $3 = t = 3^x$, det vill säga $x = 1$.

6. En väggklocka med kvadratisk urtavla har markeringarna för 12, 3, 6 och 9 i mitten på respektive sida. och markeringarna för övriga klockaslag finns också de ute på kvadratens kant i den riktning som ges av visaren. Urtavlans sidlängd är 36 cm. Hur långt är det mellan markeringen för kl 2 och markeringen för kl 3? [6p]

Lösning: Vi skapar en rätvinklig triangel med ett hörn i urtavlans mitt och de övriga vid markeringarna för kl 2 och kl 3. Vinkeln vid urtavlans mitt är då $\pi/6$ och den längre kateten är 18 cm. Därmed är avståndet mellan kl 2 och kl 3

$$\tan(\pi/6) \cdot 18 \text{ cm} = \frac{18}{\sqrt{3}} \text{ cm} = 6\sqrt{3} \text{ cm}.$$

7. Förenkla [6p]

$$\frac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}.$$

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2} &= \frac{\frac{b^2-a^2}{ab}}{\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}}\\ &= \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2+2ab}\\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{(a+b)^2}\\ &= \frac{b-a}{a+b} = \frac{b-a}{b+a}.\end{aligned}$$

8. Ge exempel på en rät linje genom origo som skär cirkeln [6p]

$$x^2+y^2+2y=4\,.$$

Ange även skärningspunkterna mellan cirkeln och vald linje.

Lösning: Genom att kvadratkomplettera och skriva om ekvationen på formen

$$x^2+(y+1)^2=(\sqrt{5})^2\,.$$

ser vi att cirkelns mittpunkt är $(0,-1)$ och radien är $\sqrt{5}>1$. Därmed vet vi att cirkeln omsluter origo, vilket gör att vi kan välja vilken linje som helst genom origo, det vill säga $kx+sy=0$ där k och s är godtyckliga reella tal. Några naturliga val ges av $y=0$, $x=0$ och $y=x$. Med $y=0$ fås att ekvationen kan skrivas om och lösas enligt

$$x^2=4 \quad\Longleftrightarrow\quad x=\pm 2\,.$$

Med andra ord är skärningspunkterna mellan cirkeln och linjen $y=0$ (2,0) och (−2,0). Om vi väljer $x=0$ fås att ekvationen kan skrivas om och lösas enligt

$$\begin{aligned}&y^2+2y=4\\ \Longleftrightarrow\quad &(y+1)^2=5\\ \Longleftrightarrow\quad &y+1=\pm\sqrt{5}\\ \Longleftrightarrow\quad &y=-1\pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

så att skärningspunkterna mellan cirkeln och linjen $x = 0$ ges av $(0{,}1+\sqrt{5})$ och $(0{,}1-\sqrt{5})$. Slutligen, om vi väljer $y = x$ fås att ekvationen kan skrivas om och lösas enligt

$$\begin{aligned}
& 2x^2 + 2x = 4 \\
\iff\ & x^2 + x - 2 = 0 \\
\iff\ & x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} \\
\iff\ & x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\
\iff\ & x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\
\iff\ & x = 1 \quad \text{eller} \quad x = -2
\end{aligned}$$

så att skärningspunkterna mellan cirkeln och linjen $y = x$ ges av $(1{,}1)$ och $(-2,-2)$.

9. Lös olikheten [6p]

$$x^3 + 3x < 4x^2.$$

Lösning: Vi kan skriva olikheten som $0 > x^3 - 4x^2 + 3x = x(x-1)(x-3)$ genom att flytta över alla termer till samma sida, bryta ut x och sedan använda pq-formeln.

Vi sätter nu upp en teckentabell.

		0		1		3	
x	-	0	+		+		+
$x-1$	-		-	0	+		+
$x-3$	-		-		-	0	+
$x(x-1)(x-3)$	-	0	+	0	-	0	+

Olikheten gäller därmed för $x < 0$ och $1 < x < 3$.

10. Om $\cos(\theta) = 4/5$, vilka värden kan $\sin(\theta)$ och $\tan(\theta)$ ha? Är det möjligt att $\pi \leq \theta \leq 3\pi/2$? [6p]

Lösning: Vi ritar in vinkeln i en enhetscirkel. Eftersom vi har ett positivt x-värde kan θ inte ligga i intervallet, som är tredje kvadranten och har negativa värden på x och y.

Värdet i y-led, $\sin(\theta)$ kan vara både positivt och negativt och ges till exempel av ekvationen $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, som ger $\sin(\theta) = \pm\sqrt{1 - 16/25} = \pm 3/5$. Vi får också $\tan(\theta) = \sin(\theta)/\cos(\theta) = \pm 3/4$.