



Tentamen i Matematisk statistik och sannolikhetslära MA506G

2021-01-02, kl. 8.15–13.30

Hjälpmedel: Formelsamling, miniräknare med tomt minne och kursbok.

Betygskriterier: Maxpoäng på tentan är 60 poäng, och den nedre gränsen för betyg k ($k \in \{3, 4, 5\}$) är $10k$ poäng.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Skriv för hand och besvara högst en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning och skicka dem som **en pdf-fil** via Wiseflow senast 13.30.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Niklas Eriksen.

Lycka till!

1. Inför en muntlig tentamen har studenterna fått ut nio uppgifter som de ska förbereda svar på. Av dessa kommer läraren för varje student att välja ut en uppgift. För att få variation väljer läraren inte samma uppgift till två på varandra följande studenter, men i övrigt sker valet helt slumpmässigt och likafördelat.

De tre första studenterna heter, i ordning, Anna, Basam och Cecilia. Trots idoga studier vet Anna och Basam inte hur de ska lösa uppgifterna 8 och 9, och Cecilia klarar inte 6, 7 eller 8, men övriga uppgifter är de säkra på.

- (a) Beräkna sannolikheten att både Anna och Basam klarar muntan. [2p]
 - (b) Beräkna sannolikheten att Cecilia klarar muntan om Anna och Basam har klarat den. [4p]
 - (c) Efter muntan samlas studenterna på tentapub och Cecilia berättar för Diana att hon klarat muntan. De vet dock inte hur det gått för Anna och Basam. Givet denna information, beräkna sannolikheten att Anna och Basam har klarat muntan. [4p]
2. Slumpvariablerna X och Y har båda täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} cxe^x & 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- (a) Beräkna konstanten c . [2p]

- (b) Beräkna $\mathbf{E}(X)$ och $\mathbf{V}(X)$. [4p]
 (c) Beräkna $\mathbf{E}(2X - Y)$ och $\mathbf{V}(2X - Y)$. [4p]
3. I en datorkrets sitter 3 transistorer som har livslängderna $X_k \sim \text{Exp}(10^{-4})$ för $k \in \{1, 2, 3\}$, mätt i timmar. För att kretsen ska fungera behöver minst två av transistorerna vara hela. Vi vill att kretsen ska fungera minst 4000 timmar.
- (a) Beräkna väntevärde och median för livslängden av den första transistorn. [2p]
 (b) Beräkna sannolikheten att transistor 1 går sönder inom 4000 timmar. [2p]
 (c) Beräkna sannolikheten att kretsen fungerar minst 4000 timmar. [3p]
 (d) Efter 2000 timmar undersöks transistorerna och två av dem fungerar fortfarande. Beräkna sannolikheten att kretsen fungerar efter ytterligare 2000 timmar, det vill säga efter totalt 4000 timmar. [3p]
4. Vid Örebro universitet arbetar 1000 lärare. IT-avdelningen behöver avgöra hur väl lärarnas datorer fungerar, och kontaktar därför 20 slumpmässigt utvalda lärare för att fråga om de har möjlighet att lämna ifrån sig sin dator under mellandagarna för en bedömning av datorernas skick. Hundra av lärarna ägnar mellandagarna åt att konstruera tentor och har inte möjlighet att lämna ifrån sig sin dator, medan övriga lärare inte har något emot att lämna ifrån sig datorn.
- (a) Beräkna, med lämplig approximation, sannolikheten att exakt 17 lärare lämnar ifrån sig sin dator. [5p]
 (b) Redan efter en dag inser IT-avdelningen att de behöver göra en bredare undersökning. De kontaktar därför ytterligare 180 lärare med samma fråga. Beräkna, med lämplig approximation, sannolikheten att de från dessa totalt 200 lärare får in minst 175 datorer. [5p]
5. Betrakta täthetsfunktionen $f_X(x) = \theta(1+x)^{-(\theta+1)}$, där $x \geq 0$. Vi vill skatta parametern θ . Till vår hjälp av vi observationerna $x_1 = 0.4$ och $x_2 = 0.8$.
- (a) Man kan visa att $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\theta-1}$. Använd momentmetoden för att skatta θ utgående från dessa observationer. [5p]
 (b) Vi får nu information om att $\theta \in \{2, 3, 4\}$. Beräkna likelihoodfunktionen för dessa tre värden och bestäm därefter ML-skattningen av θ . [5p]
6. Vid provvägning av granolaförpackningar med angiven vikt 400 gram fås följande resultat: [10p]

408 387 367 421 396 403 366 384 405 363

Innehåller dessa paket tillräckligt med granola? Vid en närmare kontroll har tillverkaren angivit att paketens vikt ska ha fördelningen $N(400, 400)$. Under antagandet att standardavvikelsen alltså är 20 gram, pröva hypotesen $H_0 : \mu = 400$ mot lämplig mothypotes på nivån 5%.