ÖREBRO
UNIVERSITET

Övningstentamen 1 på kursen Integraler och differentialekvationer
MA504G

Hjälpmedel: Skrivmateriel och eget medtaget handskrivet formelblad i A4-format där det endast är tillåtet med formler och definitioner och endast på ena sidan av bladet.

Betygskriterier: För betyget 3/4/5 krävs minst 3 poäng på differentialekvationer på grundläggande delen samt totalt 30/40/50 poäng på tentamen.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Marcus Sundhäll.

Lycka till!

Grundläggande del

1. Finn alla primitiva funktioner till [6p]

$$f(x) = \frac{3}{4 + 5\cos(x)}\,.$$

2. Bestäm $y(x)$ så att [6p]

$$y''(x) - y'(x) = e^{-x}\,,\ y(0) = -1\ ,\ y'(0) = 1\,.$$

3. Beräkna [6p]

$$\int_2^4 |2x - 6|\,dx\,.$$

4. Bestäm den kontinuerliga funktionen $y(x)$ så att [6p]

$$y(x) = 1 + \int_0^x (4t - ty(t))\,dt\,.$$

5. Avgör om den generaliserade integralen [6p]

$$\int_1^\infty \frac{3x + 4}{x^3 + 3x^2 + 2x}\,dx$$

är konvergent eller divergent. Vid konvergens, beräkna integralens värde.

6. Beräkna [6p]

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos(x) + 1)\sin(x)}{\cos^2(x) + 2\cos(x) + 3}\,dx\,.$$

Fördjupad del

7. Rita mängden [8p]

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq \arctan(x)\,, 0 \leq x \leq 1\}$$

i ett koordinatsystem. Bestäm volymen av den kropp som fås då området D roterar ett varv kring y-axeln.

8. I en behållare med 50 liter vatten finns 4 kg salt upplöst i vattnet. Behållaren är konstruerad så att det går att både fylla på och att pumpa ut vatten. För att minska salthalten vill vi fylla på med vatten av lägre salthalt och samtidigt tömma ut befintligt vatten i samma takt. Vi lyckas få tag i vatten med en salthalt på 0,02 kg/liter och fyller på behållaren, och tömmer samtidigt befintligt vatten, i en takt på 2 liter/minut. Bestäm mängden salt i behållaren som en funktion av tiden och bestäm gränsvärdet av mängden salt om vi antar att vattnet är välblandat under hela processen. [8p]

9. Bestäm a så att [8p]

$$\frac{2\sin(x) - \ln(1+2x)}{(e^x - 1)\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}} \approx \frac{ax}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}}$$

om x är nära $x = 0$. Avgör därefter om den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{2\sin(x) - \ln(1+2x)}{(e^x - 1)\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}}\, dx$$

är konvergent eller divergent.
