Tentamen

Optimering för civilingenjörer, MA507G

Examinator: Mårten Gulliksson

Tid: Onsdag 13 Januari klockan 08:15-13:15

Hjälpmedel

Kursbok, miniräknare och skrivverktyg.

Betygskriterier

Framgår av separat dokument publicerat på Blackboard. Totalt antal poäng är 60 och för godkänt krävs minst 30 poäng.

Anvisningar

Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Var tydlig med vad som antas och vad som visas. Det är huvudsakligen motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Tentan innehåller lättare och svårare uppgifter blandat. Välj de uppgifter som passar dig. Samtliga uppgifter behöver inte lösas.

Lycka till!

Problem 1 (10 poäng)

Företaget Grönt AB marknadsför ett gödsel som består av fyra olika sorters ingredienser som köps in från fyra olika tillverkare. Tillverkare i, (där $i = 1, 2, 3, 4$) kan tillhandahålla som mest u_i ton av sin ingrediens per vecka till en kostnad av c_i kronor per ton.
Varje ingrediens består i sin tur av tre beståndsdelar $k = 1, 2, 3$. Varje ingrediens olika beståndsdelar varierar mellan tillverkarna och ges av värdena a_{ik} enligt tabellen nedan.

Tillverkare	Beståndsdelar		
	1	2	3
1	0.50	0.30	0.20
2	0.65	0.20	0.15
3	0.40	0.50	0.10
4	0.35	0.40	0.25

Gödselns sammansättning måste uppfylla vissa krav på beståndsdelarna i varje ingrediens. Företaget har därför specificerat en undre och övre gräns för viktandelen (ett tal mellan noll och ett) för de tre beståndsdelarna i varje ingrediens. Dessa betecknas som $l_k, u_k, k = 1, 2, 3$, respektive.

Företaget har en stabil efterfrågan på D ton jordblandning per vecka och önskar sig en linjär optimeringsmodell som minimierar den totala konstnaden för att producera den efterfrågade volymen. Problemet för er är att formulera denna modell.

Problem 2 (10 poäng)

Betrakta det linjära optimeringsproblemet

$$\begin{array}{lll} \min & z = 30x_1 + 25x_2 + 29x_3 + 8x_4 + 16x_5 & \\ \text{u.b.} & 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = \;13 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 & = \;5 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5 & \end{array}$$

(a) Visa att x_2 och x_4 är optimala basvariabler. Simplexmetoden får inte användas.

(b) Antag att båda högerleden i bivillkoren minskas med $\delta > 0$. För vilka värden på δ är x_2, x_4 optimala basvariabler?

Problem 3 (10 poäng)

Givet ett riktat nätverk med fem noder och bågar enligt tabellen nedan Betrakta problemet att finna en billigaste väg från nod 1 till 5.

från nod	1	1	2	2	3	3	4	4
till nod	2	3	3	5	4	5	2	5
kostnad	4	3	-2	-1	2	5	-3	1

(a) Formulera matematiskt detta som ett linjärt optimeringsproblem.

(b) Formulera matematiskt dualen till problemet i (a).

(c) Visa att det duala problemet saknar tillåten lösning. Vad innebär detta för det givna billigaste-väg-problemet?

Problem 4 (10 poäng)

Betrakta optimeringsproblemet

$$\begin{array}{lll} \max & x_1 x_2 & \\ \text{u.b.} & x_1 + x_2^2 & \leq \ 2 \\ & x_1, x_2 & \geq \ 0 \end{array}$$

(a) Är problemet konvext? Motivera ditt svar.

(b) Visa att $x^* = \left[\frac{4}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]^T$ är en Karush-Kuhn-Tucker-punkt för problemet.

(c) Avgör om x^* i (b) är ett globalt maximum eller ej genom att grafiskt studera det tillåtna området och målfunktionens nivåkurvor.

Problem 5 (10 poäng)

Lös följande delproblem.

(a) Betrakta det obegränsade optimeringsproblemet

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = x_1^4 + x_1 x_2 + (1 + x_2)^2.$$

Avgör för vilka värden på x_1, x_2 som funktionen $f(x)$ är konvex.

(b) I punkten $x_k = [0, 0]^T$ utgör Newtonriktningen $d_N = -\nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$ inte en avtaganderiktning. Avgör om Newton-Marquardt-riktningen $d_{NM} = -(\nabla^2 f(x_k) + \nu I)^{-1} \nabla f(x_k)$ är en avtaganderiktning för $f(x)$ i (a) och valet $\nu = 1$.

(c) Betrakta det generella optimeringsproblemet (dvs $f(x)$ behöver inte vara den som är given ovan)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

där f är två gånger kontinuerligt deriverbar samt $x_k \in \mathbb{R}^n$ är en given punkt. Hur stor måste ν vara för att $d_{NM} = -(\nabla^2 f(x_k) + \nu I)^{-1} \nabla f(x_k)$ ska vara en avtaganderiktning?

Problem 6 (10 poäng)

Betrakta det linjära optimeringsproblemet

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = 4x_1 + 3x_2 & \\
\text{u.b.} & 5x_1 + 3x_2 \quad \leq & 15 \\
 & x_1 + 2x_2 \quad \leq & 6 \\
 & -4x_1 + 3x_2 \quad \leq & 1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0, & \text{heltal}
\end{array}
$$

Låt s_1, s_2, s_3 vara slackvariabler. En optimal simplextablå för problemets LP-relaxation är given nedan.

basvariabel	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$	
z	1	0	0	5/7	3/7	0	93/7	(rad 0)
x_1	0	1	0	2/7	−3/7	0	12/7	(rad 1)
x_2	0	0	1	−1/7	5/7	0	15/7	(rad 2)
s_3	0	0	0	11/7	−27/7	1	10/7	(rad 3)

Optimal simplextablå för problemets LP-relaxation

(a) Rita en figur som illustrerar det tillåtna området till problemets LP-relaxation och markera tydligt vilka heltalslösningar som är tillåtna. Markera även var LP-optimum är samt ange denna lösning.

(b) Gör en ny figur där du ritar det tillåtna området och markerar det konvexa höljet. Utifrån din figur, markera de villkor som definierar det konvexa höljet.

(c) Ange den optimala heltalslösningen.