ÖREBRO UNIVERSITET

Flervariabelanalys för civilingenjörer

MA505G-0100

2018-05-28, kl. 08:15–13:15

Hjälpmedel: Endast skrivmateriel. Formelblad delas ut tillsammans med skrivningen.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga uppgifter bedöms utifrån kriterier för *problemlösning* och *redovisning*. För betyg 3/4/5 räcker det med 6 poäng inom vart och ett av huvudområdena *differentialkalkyl*, *integralkalkyl* och *vektoranalys* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg, rita tydliga figurer och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Andreas Bergwall.

Lycka till!

---

1. Låt $f(x,y) = \dfrac{4}{1+x^2+y^2}$. [8p]

   (a) Rita en nivåkurva till f för en valfri nivå C. Markera mängden $f(x,y) \geq C$ i din figur. Är denna mängd kompakt?

   (b) Välj en punkt (a,b) på nivåkurvan och rita in $\operatorname{grad} f(a,b)$ där.

2. Låt $\boldsymbol{F} = (xy^2 - kxy, x^2y - 2x^2 + y)$. [6p]

   (a) Välj k så att $\boldsymbol{F}$ är ett potentialfält i $\mathbb{R}^2$ och bestäm en potential.

   (b) Låt γ vara linjestycket från origo till punkten $(1,2)$. Beräkna $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ för valfritt värde på k.

3. Låt $f(x,y) = x^3 - xy^2 + x$. [12p]

   (a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)$ och avgör deras karaktär.

   (b) Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y)$ då $g(x,y) = x^2 + y^2 = 25$. Använd ett lämpligt samband mellan $\operatorname{grad} f(x,y)$ och $\operatorname{grad} g(x,y)$ för att hitta extrempunkterna.

   (c) Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y)$ då $x^2 + y^2 \leq 25$.

4. Bestäm volymen av området mellan xy-planet och grafen till [8p]

$$f(x,y) = x^2 + \frac{e^y}{y}, \qquad |x| \leq y \leq 1.$$

5. Beräkna $\displaystyle\iiint_K \frac{e^{-x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ om K ges av $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $x \geq 0$. [8p]

Vänd

6. Bestäm tröghetmomentet för den koniska ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$, m.a.p. z-axeln om ytans areadensitet är $\rho = 1$. [8p]

   Ledning: Tröghetsmomentet ges av ytintegralen $\iint_\Gamma \rho(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$.

7. Beräkna flödet av vektorfältet $\boldsymbol{u} = (x^3 + yz, y^2 + xz, z + xy)$ ut genom den yta som ges av $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$. [10p]

Kommentarer till Flervariabelanalys för civilingenjörer 20180528

1. (a) Om C är en konstant så kallas mängden av alla punkter (x, y) sådana att $f(x, y) = C$ för en nivåkurva till f. Nivåkurvan är alltså en del av definitionsmängden och finns i xy-planet. Nivån C måste ingå i f:s värdemängd för annars har inte ekvationen $f(x, y) = C$ några lösningar.

I den här uppgiften är

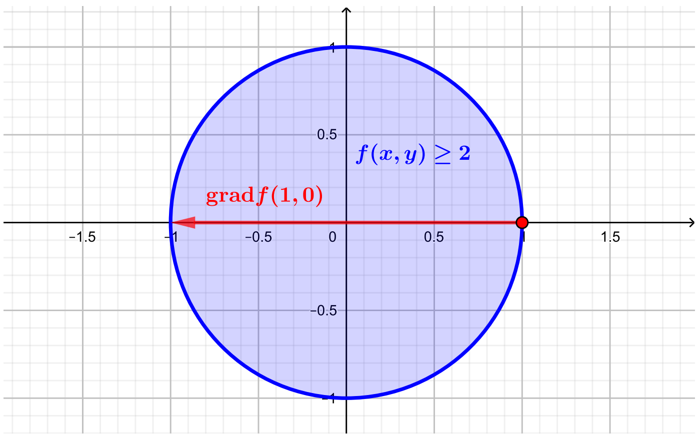
$$f(x, y) = C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{4}{C} - 1$$

d.v.s. nivåkurvan som hör till nivån C är en cirkel med centrum i origo och radie $\sqrt{(4/C) - 1}$. De enda värden som $f(x, y)$ kan anta är de som uppfyller att $(4/C) - 1 \geq 0$, d.v.s. f:s värdemängd är intervallet $]0, 4]$. Om $C = 4$ så blir nivåkurvans radie 0, d.v.s. den består endast av punkten $(0, 0)$. Om $C = 2$ så är nivåkurvan enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

Eftersom

$$f(x, y) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq \frac{4}{C} - 1$$

så består mängden där $f(x, y) \geq C$ av alla punkter på och innanför cirkeln. Oavsett vilket C-värde i $]0, 4]$ man tar så är detta en sluten och begränsad mängd, d.v.s. en kompakt mängd.



(b) grad $f(a, b)$ är alltid en normal till nivåkurvan $f(x, y) = C$ där $C = f(a, b)$. Vilken punkt (a, b) man än väljer så ska alltså gradientvektorn vara vinkelrät mot den nivåkurva man ritat. Gradienten pekar också alltid åt det håll som funktionen växer snabbast.

Vi har

$$\text{grad}\, f(x, y) = \left(\frac{-8x}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \frac{-8y}{(1 + x^2 + y^2)^2}\right) = \underbrace{-\frac{8}{(1 + x^2 + y^2)^2}}_{<0}(x, y).$$

Här syns det att i punkten (x, y) har gradienten motsatt riktning mot ortsvektorn (x, y), d.v.s den pekar alltid rakt mot origo.

Om vi i (a) ritat nivåkurvan $f(x, y) = 2$, då ska vi nu ta en punkt på enhetscirkeln. Ta t.ex. $(a, b) = (1, 0)$. I den punkten har vi grad $f(1, 0) = (-2, 0)$. Om vi markerar den i punkten $(1, 0)$ så blir det en pil med längd 2, från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$.

2. (a) $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ är ett potentialfält i $\mathbb{R}^2$ om och endast om $Q'_x = P'_y$. Detta villkor ger $k = 4$. En potential $U(x, y)$ ska uppfylla att $U'_x = P$ och $U'_y = Q$. Det ger att $U(x, y) = \frac{x^2y^2}{2} - 2x^2y + \frac{y^2}{2} + C$.

   (b) Enklast är att välja $k = 4$. Då vet vi från (a) att $\boldsymbol{F}$ är ett potentialfält och då ges integralens värde av potentialskillnaden mellan γ:s slut- och startpunkt. Integralens värde är alltså $U(1, 2) - U(0, 0) = 0$.

   Om $k \neq 4$ så finns ingen potential. Då kan man istället beräkna integralen genom att parametrisera γ. Sätt t.ex. $y = 2x$ (då är $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$) och integrera m.a.p. x från 0 till 1.

3. (a) $f(x, y)$ har två stationära punkter, $(0, \pm 1)$. För att avgöra deras karaktär studerar vi den kvadratiska formen $Q(h, k) = f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2$ i dessa punkter.

   Om $(a, b) = (0, 1)$ får vi $Q(h, k) = -4hk$. Om $(a, b) = (0, -1)$ får vi $Q(h, k) = 4hk$. I båda fallen antar $Q(h, k)$ både positiva och negativa värden i alla omgivningar av $(h, k) = (0, 0)$. $Q(h, k)$ är alltså indefinit och punkterna $(0, \pm 1)$ är sadelpunkter.

   (b) Bivillkoret beskriver en cirkel men det behöver man inte veta för att lösa upppgiften. I optimum är grad f och grad g parallella, d.v.s.

$$\begin{vmatrix} 3x^2 - y^2 + 1 & -2xy \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = \ldots = 2y(5x^2 - y^2 + 1) = 0,$$

   vilket ger att $y = 0$ eller att $y^2 = 1 + 5x^2$. Insatt i bivillkoret leder det till $x^2 = 25$ respektive $x^2 = 4$. Vi får sex intressanta punkter med funktionsvärden $f(\pm 5, 0) = \pm 130$ respektive $f(\pm 2, \pm\sqrt{21}) = \pm 32$. Alltså är ± 130 största/minsta värde.

   Istället för att använda en determinant kan man ställa upp ekvationssystemet grad $f = \lambda$grad g. Det leder till samma ekvationer. Observera att ekvationen $f'_y = \lambda g'_y$ är ekvivalent med $-2xy = 2\lambda y$. Detta ger att $\lambda = -x$ eller att $y = 0$.

   (c) Optimum finns i inre stationära punkter eller på randen. De inre stationära punkterna bestämdes i (a) och i dessa är $f = 0$. (Eftersom vi också fann att de var sadelpunkter så kan de dock inte vara extrempunkter.) Största och minsta värde på randen bestämde vi i (b) till ± 130. Detta är alltså f:s extremvärden då $x^2 + y^2 \leq 25$.

   Om man inte redan löst (b) så är enklaste sättet att göra randundersökningen på att sätta in $y^2 = 25 - x^2$ i målfunktionen, vilket ger $x^3 - x(25 - x^2) + x = 3x^3 - 24x$, och sedan optimera denna envariabelfunktion över $[-5, 5]$. Man skulle också kunna parametrisera randkurvan genom att sätta in $(x, y) = (5\cos t, 5\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Man ska alltid kolla ändpunkterna på parameterintervallet. Det är dock fel att kalla dem hörn—en cirkel har inga hörn!

4. Definitionsmängden är en triangulär skiva med hörn i origo och $(\pm 1, 1)$. Rita! Det är svårt att integrera m.a.p. y först men det går bra att integrera m.a.p x. Eftersom den givna definitionsmängden kan beskrivas som D: $-y \leq x \leq y$, $0 \leq y \leq 1$, så är den sökta volymen

$$\begin{aligned}
&\iint_D \left(x^2 + \frac{e^y}{y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} \left(x^2 + \frac{e^y}{y}\right) \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{xe^y}{y}\right]_{x=-y}^{y} \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{2y^3}{3} + 2e^y\right) \mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{y^4}{6} + 2e^y\right]_0^1 = \frac{1}{6} + 2e - 2 = 2e - \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

Eftersom integranden är en jämn funktion av x och integrationsområdet är spegelsymmetriskt i linjen $x = 0$ så kan man även integrera från 0 till y i x-led och multiplicera resultatet med 2.

Anm: Integralen är egentligen generaliserad i origo och bör hanteras m.h.a. en gränsvärdesberäkning. T.ex. kan integreringen i y-led göras över intervallet $[a, 1]$ där sedan a får gå mot 0. Men i andra integralen på andra raden så har generaliseringen så att säga ”försvunnit” och integreringen kan utföras utan gränsvärdesbildning.

5. Integrationsområdet är ett halvklot med centrum i origo och radie 2. Rita! Övergång till rymdpolära koordinater ger

$$\begin{aligned}
&\iiint_{[0,2]\times[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \frac{e^{-r^2}}{r} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^2 re^{-r^2} \,\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi = \pi(1 - e^{-4}).
\end{aligned}$$

Eftersom integranden bara beror av avståndet till origo så spelar det faktiskt ingen roll om man vrider på halvklotet (så länge centrum är i origo och radien är 2).

Ett annat sätt att lösa uppgiften på är att tänka sig integrationsområdet som uppbyggt av tunna halvsfäriska skal med radie r och tjocklek $\mathrm{d}r$. Mantelarean på ett sådant är $2\pi r^2$ så volymselementet blir $\mathrm{d}V = 2\pi r^2 \mathrm{d}r$. Detta ger

$$\iiint_K \frac{e^{-x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \frac{e^{-r^2}}{r} 2\pi r^2 \mathrm{d}r = \dots$$

Anm: Även i denna uppgift är integralen generaliserad i origo. Integreringen i r-led ska alltså egentligen tolkas som ett gränsvärde, alltså $\lim_{a\to 0}\int_a^2 \ldots \, \mathrm{d}r$.

6. Ytan är en kon. Rita! Den är given som en del av en funktionsyta $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ vilket ger areaelementet

$$\mathrm{d}S = \sqrt{(f_x')^2 + (f_y')^2 + 1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ldots = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Med övergång till planpolära koordinater får vi

$$\iint_\Gamma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S = \iiint_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi]} r^2\sqrt{2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Man skulle också direkt kunna parametrisera ytan enligt

$$\boldsymbol{r}(z,\varphi) = (z\cos\varphi, z\sin\varphi, z), \quad 0\le z\le 1, \quad 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Då är

$$\mathrm{d}S = |\boldsymbol{r}_z' \times \boldsymbol{r}_\varphi'|\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi = \ldots = \sqrt{2}z\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi$$

vilket ger att

$$\iint_\Gamma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S = \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi]} z^2\cdot\sqrt{2}z\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi = \ldots$$

7. Ekvationerna beskriver mantelytan Γ på en cylinderkropp K: $(x-1)^2+y^2\le 1$, $0\le z\le 1$. För utåtriktat flöde ska Γ orienteras med normal bort från symmetriaxeln. Rita!

Lägg till sidoytorna S_0 och S_1 där $z=0$ respektive $z=1$, både med restriktionen $(x-1)^2+y^2\le 1$, och förse dem med enhetsnormalerna $(0,0,-1)$ respektive $(0,0,1)$. Rita detta också! Då är $\Gamma+S_0+S_1$ randyta med utåtnormal till K. Gauss sats ger (tillsammans med polära koordinater och nyttjande av symmetrier)

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Gamma+S_0+S_1} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_K (3x^2+2y+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint_K (3x^2+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_K (3(x-1)^2+6(x-1)+4)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{3}{2}\iiint_K (x-1)^2+y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 4\cdot(K\text{:s volym}) \\
&= \frac{3}{2}\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 \mathrm{d}z + 4\pi = \frac{19\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Flödet ut genom S_0 är

$$\iint_{S_0} (x^3, y^2, xy) \cdot (0,0,-1)\,\mathrm{d}S = \iint_{S_0} (-xy)\,\mathrm{d}S = 0$$

och genom S_1

$$\iint_{S_1} (x^3 + y, y^2 + x, 1 + xy) \cdot (0,0,1)\,\mathrm{d}S = \iint_{S_1} (1 + xy)\,\mathrm{d}S = S_1\text{:s area} = \pi.$$

Sammanfattningsvis är alltså flödet ut genom den givna ytan Γ $15\pi/4$.