ÖREBRO
UNIVERSITET

Tentamen i Linjär algebra för civilingenjörer

MA503G, 2018-01-15, kl. 08:15–13:15

Hjälpmedel: Skrivdon

Betygskriterier: Framgår av separat dokument publicerat på Blackboard. Uppgifterna är fördelade på två nivåer. En *grundläggande nivå* om totalt 36 poäng bestående av uppgifterna 1-6 (var och en värd 6 poäng), och en *fördjupad nivå* om totalt 24 poäng bestående av uppgifterna 7-9 (var och en värd 8 poäng). Totalt kan man få 60 poäng. Betyg 3 respektive 4 ges till den som erhåller minst 30 respektive 40 poäng på tentan. För betyg 5 krävs minst 50 poäng på tentan samt att minst två av uppgifterna är belönade med full poäng.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Svara på högst en uppgift per blad.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Jens Fjelstad

Lycka till!

Grundläggande nivå

1. På denna uppgift ska endast svar anges, lämna alltså inte in några beräkningar. Skriv svaren på alla deluppgifter på samma blad.

(a) Låt $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (5, 1, -2)$, $\mathbf{w} = (-2, 3, 0)$. Beräkna $\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$ och $\mathbf{w} \times \mathbf{u}$. (2p)

(b) A är en 4×6-matris sådan att den allmäna lösningen till det homogena linjära ekvationssystemet med koefficientmatris A (dvs ekvationssystemet med matrisform $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) har 3 fria parametrar. Ange A:s rang. (1p)

(c) Den kvadratiska matrisen B har karakteristiskt polynom (1p)

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 3)(\lambda - 4)(\lambda + 2).$$

Finns det en matris P sådan att $D = P^{-1}BP$ är diagonal? Ange i så fall (en möjlig sådan diagonalmatris) D.

(d) Beräkna determinanten (2p)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

2. (a) Lös ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x+2y+z+v &= 1 \\ 2x+y+2z+2v &= 2 \\ x+2y+3z+4v &= 2 \\ x+3y+5z+7v &= 3 \end{cases}.$$

(b) Låt $\mathbf{u} = (1,1,1,1,1)$ och (3p)

$$U = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5 | \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0\},$$

dvs U består av alla vektorer i $\mathbb{R}^5$ som är ortogonala mot vektorn $\mathbf{u}$. Visa att U är ett delrum till $\mathbb{R}^5$.

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm baser för kolonnrummet $K(A)$ och nollrummet $N(A)$, och ange dessutom dimensionerna hos båda dessa rum.

4. Låt

$$\mathbf{u}_1 = (1,2), \ \mathbf{u}_2 = (1,3).$$

(a) Ange definitionen av en bas för ett vektorrum V. (2p)

(b) Visa att $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ är en bas för $\mathbb{R}^2$. (2p)

(c) Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = (1,4)$ i basen B. (2p)

5. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Avgör om A, B och C är linjärt oberoende i $\mathcal{M}_{22}$ (vektorrummet av alla reella 2×2-matriser). (4p)

(b) Tillhör matriserna (2p)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

det linjära höljet span$\{A, B, C\}$?

6. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm A:s egenvärden samt egenrum. (4p)

(b) Bestäm en ortogonal matris P sådan att $P^T AP$ är diagonal. (2p)

Fördjupad nivå

7. Betrakta följande fyra punkter $P : (1, 2, 3)$, $Q : (2, 3, 4)$, $R : (2, 4, 4)$, $S : (2, 1, 1)$. Punkterna P, Q, och R är hörnen i en triangel. Bestäm triangelns area, avståndet mellan triangelns plan och punkten S, samt en ekvation för triangelns plan.

8. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},$$
och betrakta matrisekvationen
$$AXC + BXC = D.$$

(a) Vilken storlek måste X ha för att vänsterledet i ekvationen ska vara väldefinierat? (2p)

(b) Lös ekvationen. (6p)

9. Låt $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara matrisavbildningen som projicerar vektorer ortogonalt på planet $\Pi : x - y + 2z = 0$ (se figur).

(a) Bestäm standardmatrisen för P. (6p)

Ledning: Det går att beskriva hur P verkar på en godtycklig vektor genom att dela upp vektorn i lämpliga komposanter, jämför med figuren nedan. Lämpligtvis bestämmer en först en normalvektor till planet.

(b) Låt ℓ vara linjen genom origo med riktningsvektor $(1, 2, 3)$. Bestäm vad P avbildar ℓ på (dvs bestäm $P(x, y, z)$ för alla $(x, y, z) \in \ell$). (2p)