ÖREBRO
UNIVERSITET

Lösning till tentamen i

Introduktionskurs i matematik för civilingenjörer

MA001G

2019-01-12

---

1. Lös ekvationen [6p]

$$(x^2 - 4) + 3(x - 2) = 0$$

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 - 4) + 3(x - 2) \\ &= (x-2)(x+2) + 3(x-2) \\ &= (x-2)(x+2+3) \\ &= (x-2)(x+5). \end{aligned}$$

Eftersom en produkt bara är noll om någon av faktorerna är noll är lösningarna $x = 2$ och $x = -5$.

2. Förenkla [6p]

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{3}.$$

Lösning: Genom att förlänga bråket med nämnarens konjugat får vi

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{3} &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - \sqrt{3} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} - \sqrt{3} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \\ &= 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2. \end{aligned}$$

3. Förenkla [6p]

$$\frac{a^2b + ab^2}{a + b}.$$

Lösning: Vi har

$$\frac{a^2b + ab^2}{a + b} = \frac{ab(a + b)}{a + b} = ab.$$

4. Beräkna [6p]

$$\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right).$$

Lösning: Vi vet att $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, så vi får till en början

$$\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right) = \cos\left(2 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Vidare ger $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ och $\cos(-x) = \cos(x)$ att

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$

vilket blir vårt svar.

5. Lös olikheten [6p]

$$\frac{x + 4}{x + 2} \geq x + 2.$$

Lösning: Vi ska bestämma de x som uppfyller

$$x + 2 - \frac{x + 4}{x + 2} \leq 0.$$

Vi börjar med att förenkla vänsterledet genom att förlänga till gemensamt bråkstreck och sedan faktorisera:

$$\begin{aligned} x + 2 - \frac{x + 4}{x + 2} &= \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} - \frac{x + 4}{x + 2} \\ &= \frac{x^2 + 3x}{x + 2} \\ &= \frac{(x + 3)x}{x + 2} \end{aligned}$$

Denna kvot är odefinierad vid $x = -2$, och 0 vid $x = 0$ och $x = -3$. Teckenstudium visar nu att olikheten

$$\frac{(x + 3)x}{x + 2} \leq 0$$

är uppfylld för $x \leq -3$ och $-2 < x \leq 0$.

6. Beräkna [6p]

$$e^{\ln 3} + \log_7(49) + \log_2\left(\frac{1}{32}\right).$$

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned} e^{\ln 3} + \log_7(49) + \log_2\left(\frac{1}{32}\right) &= e^{\ln 3} + \log_7(7^2) + \log_2\left(2^{-5}\right) \\ &= 3 + 2 - 5 = 0. \end{aligned}$$

7. Lös ekvationen [6p]

$$4^{x+2} \cdot \frac{1}{32} = \sqrt[3]{64}.$$

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned} 4^{x+2} \cdot \frac{1}{32} &= \sqrt[3]{64} \\ 2^{2x+4} \cdot 2^{-5} &= 2^{6/3} \\ 2^{2x-1} &= 2^2 \\ 2x - 1 &= 2 \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

8. Bestäm eventuella skärningspunkter mellan cirkeln med centrum i punkten $(0, 13)$ och radie 5, och parabeln $y = x^2$. [6p]

Lösning: Rita gärna figur!

Cirkelns ekvation är $x^2 + (y - 13)^2 = 25$. Sätter vi in $y = x^2$ får vi

$$\begin{aligned} 25 &= x^2 + (y - 13)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 26y + 169 \\ &= x^2 + x^4 - 26x^2 + 169 \\ &= x^4 - 25x^2 + 169, \end{aligned}$$

vilket ger $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$. Sätter vi $t = x^2$ får vi $t^2 - 25t + 144 = 0$, med lösningarna

$$t = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4} - 144} = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{625 - 576}{4}} = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{25 \pm 7}{2},$$

det vill säga $t = 9$ och $t = 16$. Vi får därmed $x = \pm 3$ och $x = \pm 4$ och lösningspunkterna är därmed $(-4, 16)$, $(-3, 9)$, $(3, 9)$ och $(4, 16)$.

9. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen [6p]

$$\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Lösning: Eftersom

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

har vi

$$3x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

och

$$3x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2n\pi = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$$

för samtliga heltal n. Genom att lösa ut x får vi

$$x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$$

och

$$x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$$

10. Kvadratkompletteringen av $2x^2 + 4x + 6$ nedan är felaktig. Identifiera minst en felaktighet i lösningen och presentera en egen korrekt lösning. [6p]

$$2x^2 + 4x + 6 = (x+1)^2 - 1^2 = (x+1)^2 - 1 + 6 = (x+1)^2 + 5\,.$$

Lösning: Notera att faktorn 2 försvinner i första steget och att likhetstecknet inte används korrekt i flera av stegen. En korrekt kvadratkomplettering ges av

$$2x^2 + 4x + 6 = 2(x^2 + 2x) + 6 = 2((x+1)^2 - 1) + 6 = 2(x+1)^2 + 4\,.$$