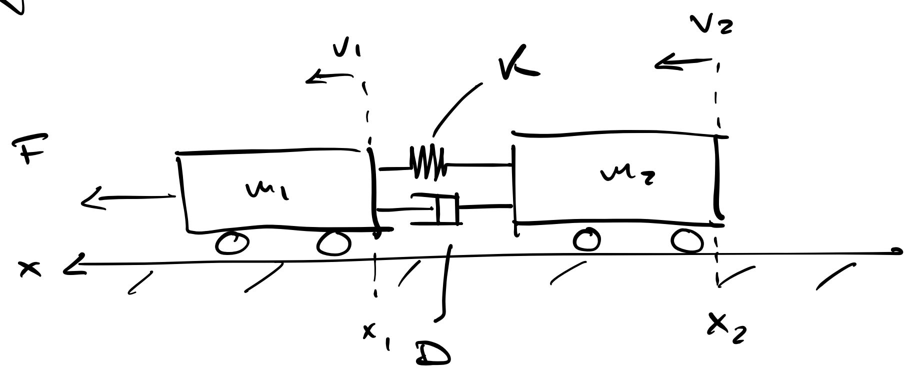
Lösnings-förslag

Tentamen

2022-07-06

DT504A

Uppgift 1



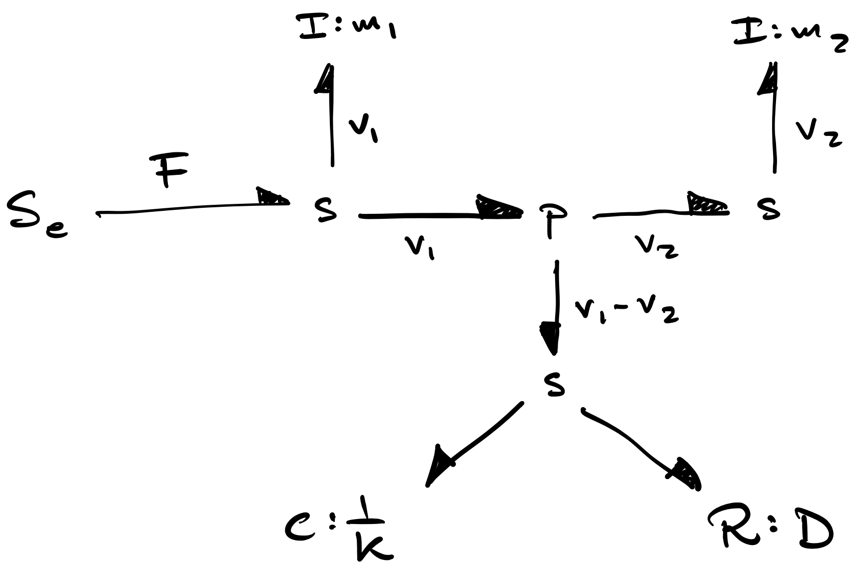
Extern kraft F

Dämpare $F_d = D(v_1 - v_2)$

Fjäder $F_k = K(x_1 - x_2)$

---

a) Rita bindnings-grafen för systemet.



Svar: Se ovan.

Uppgift 1b/ Best. alla dim. lösa param. för syst.

Parametrar: m_1, m_2, K, D

Dimensioner:

$$[m_i] = M$$
$$[K] = \left[\frac{F}{x}\right] = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2}$$
$$[D] = \left[\frac{F}{v}\right] = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$$

Dimensions matris enl. kap. 4.4

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & K & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} M \\ L \\ T \end{array}$$

Best. nollrummet till A:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \left(\frac{1}{2}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$e = [a\ b\ c\ d]^T$ löser $Ae = 0$ om

$$\left.\begin{array}{l} a + b + \frac{1}{2}d = 0 \\ 2c + d = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} c = -d\frac{1}{2} \\ a = -b - d\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad e = \begin{bmatrix} -b - d/2 \\ b \\ -d/2 \\ d \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{d}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Nollrummet spänns av

$$\text{Nul } A = \text{span}\left\{ [-1 \ 1 \ 0 \ 0]^T, [-1 \ 0 \ -1 \ 2] \right\}$$

$\Rightarrow$ Systemet har två dimensionslösa parametrar

$$\eta = \frac{m_2}{m_1} \quad \& \quad \zeta = \frac{D^2}{m_1 K}$$

(check $[\zeta] = \frac{M^2 T^{-2}}{M M T^{-2}} = 1$ ok!)

Svar: Systemet har två dimensionslösa parametrar $\eta = \frac{m_2}{m_1}$ & $\zeta = \frac{D^2}{m_1 K}$

Uppgift 1c / System ekv. på tillstånds form

$$\left.\begin{aligned} F_d &= D\cdot(v_1 - v_2) \\ F_k &= K(x_1 - x_2) \\ m_1\dot{v}_1 &= F - F_k - F_d \\ m_2\dot{v}_2 &= F_k + F_d \end{aligned}\right\} \text{Syst. ekv.}$$

Skriv på tillstånds-form genom att introducera

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= v_1 \\ x_4 &= v_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \dot{v}_1 \\ \dot{x}_4 &= \dot{v}_2 \end{aligned}\right. \;\&\; \left\{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \quad m_1\dot{v}_1 = m_1\dot{x}_3 = F - F_k - F_d = F - K(x_1 - x_2) - D(v_1 - v_2)$$

$$= F - K(x_1 - x_2) - D(x_3 - x_4)$$

$$m_2\dot{v}_2 = m_2\dot{x}_4 = F_k + F_d = K(x_1 - x_2) + D(x_3 - x_4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{K}{m_1}(x_1 - x_2) - \frac{D}{m_1}(x_3 - x_4) + F \\ \dot{x}_4 = \frac{K}{m_2}(x_1 - x_2) + \frac{D}{m_1}(x_3 - x_4) \end{cases} \qquad (*)$$

Svar: Systemekvationerna på tillståndsform ges av $(*)$.

Uppgift 2 / Betr. ODE:n $\ddot{x} + \sin x = u(t)$

a) Skriv på tillstånds-form

Låt $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ => $\dot{x}_2 = \ddot{x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 + u(t) \end{cases} \qquad (*)$$

Svar: Systemekv. på tillståndsform ges av (*).

b) Best. alla stationärtillstånd för $u(t) = 0$

Stationär tillstånd => $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 0 = x_2 \\ 0 = -\sin x_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2 = 0 \\ \sin x_1 = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \pi n , \quad n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$ (alla pos. & neg. heltal)

$$\Rightarrow x = \pi n , \quad \dot{x} = 0 , \quad \ddot{x} = 0$$

Svar: För $u(t) = 0$ har systemet stationärtillstånden $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Uppgift 2c / Linjär tillståndsform genom linjärisering.

Väljer stat. tillst. $x_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

för $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Allmänt för linjärisering runt $\mathbf{x}_0$ & u_0 från tillstånds form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$

$$\dot{\mathbf{x}} \approx \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right|_{u=u_0} \cdot (u - u_0)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u = [u(t)], \quad u_0 = [0]$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 + u \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

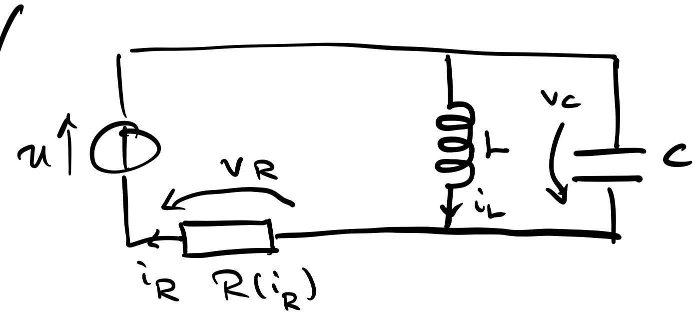
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right|_{u=u_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left([u] - [0] \right)$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + u \end{bmatrix} \quad (*)$$

Svar: Systemets linjära tillståndsform vid linjärisering runt stat. tillst $x = 0$ för $u(t) = 0$ ges av $(*)$ dvs. $\ddot{x} = -x + u$.

Uppgift 3

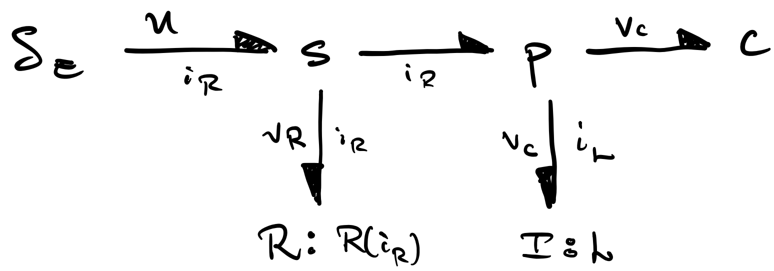


Olinjär resistor:

$$v_R = R \cdot i_R^2$$

---

a) Rita bindningsgrafen för syst.



Svar: Se ovan.

---

b) Härled DAE för systemet. mha $z = [i_L, v_C, i_R]^T$

Komponent ekv.

$$\begin{cases} v_R = R \cdot i_R^2 \\ v_L = L \frac{d}{dt} i_L \\ i_C = C \dot{v}_C \end{cases}$$

Kirchoffs lagar.

$$\begin{cases} u = v_C + v_R \\ i_R = i_L + i_C \\ v_L = v_C \end{cases}$$

Eliminera v_L, i_C & v_R

$$i_R^2 = \frac{1}{R} v_R = \frac{1}{R}(u - v_C)$$

$$\frac{d}{dt} i_L = \frac{1}{L} v_L = \frac{1}{L} v_C$$

$$\frac{d}{dt} v_C = \frac{1}{C} i_C = \frac{1}{C}(i_R - i_L)$$

Dvs. DAE:n för systemet ges av:

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt} i_L - \frac{1}{L} v_c = 0 \\
\frac{d}{dt} v_L - \frac{1}{c}(i_R - i_L) = 0 \\
i_R^2 - \frac{1}{R}(u - v_c) = 0
\end{cases}
\quad (**)
\quad
\left(
\begin{array}{l}
\text{detta def. } F(\dot{z}, z) = 0 \\
\text{med } z = [i_L, v_c, i_R]^T
\end{array}
\right)
$$

<u>Svar</u>: DAE:n för systemet ges av (**).

---

c) Best. index för DAE beskr.

Observerar att DAE:n är linjär förutom sista ekv.

$i_R^2 - \frac{1}{R}(u - v_c) = 0$ derivera map tid.

$$\Rightarrow \quad 2 i_R \frac{d}{dt} i_R - \frac{1}{R}(\dot{u} - \dot{v}_L) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} i_R = \frac{1}{2R} \frac{1}{i_R}\left(\dot{u} - \frac{1}{c}(i_R - i_L)\right)$$

Dvs. DAE:n kan skrivas som

$$
\left.
\begin{cases}
\frac{d}{dt} i_L = \frac{1}{L} v_c \\
\frac{d}{dt} v_L = \frac{1}{c}(i_R - i_R \\
\frac{d}{dt} i_R = \frac{1}{2R} \frac{1}{i_R}\left(\dot{u} - \frac{1}{c}(i_R - i_L)\right)
\end{cases}
\right\}
$$

Detta system har formen $\dot{z} = \phi(z, u, \dot{u})$ (se kap. 7.4 i kursboken)

<u>Svar</u>: Då DAE:n kan skrivas på formen $\dot{z} = \phi(z, u, \dot{u})$ så är dess index 1.

Uppgift 4 Se relevanta kapitel i kursboken.