ÖREBRO
UNIVERSITET

# Tentamen i
# Matematisk statistik och sannolikhetslära
## MA506G

*2022-08-15, kl. 14.15–19.15*

---

**Hjälpmedel:** Formelsamling och miniräknare med tomt minne

**Betygskriterier:** Maxpoäng på tentan är 60 poäng, och den nedre gränsen för betyg $k$ ($k \in \{3, 4, 5\}$) är $10k$ poäng.

**Anvisningar:** Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Besvara högst en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning om ni vill att rättaren ska hitta dem och ge poäng för lösningen.

**Skrivningsresultat:** Meddelas inom 15 arbetsdagar.

**Examinator:** Henrik Olsson.

**Lycka till!**

---

1. Du har gått vilse i Ljugarbyns nationalpark. Av besökarna i nationalparken är 2/3 turister och 1/3 invånare från Ljugarbyn. Om man frågar en turist om vägen så får man rätt svar med sannolikheten $p = 3/4$. En turists svar är oberoende av tidigare svar så upprepar man en fråga till samma turist kan man få ett annat svar. Frågar man en invånare från Ljugarbyn om vägen så får man alltid felaktigt svar.

   (a) Du frågar en slumpmässig besökare i parken om du skall gå österut eller västerut för att komma till parkeringen och får svaret österut. Vad är sannolikhteten att detta svar är korrekt? (Parkeringen ligger antingen österut eller västerut.) [3p]

   (b) Du frågar samma besökare en gång till och får samma svar. Vad är sannolikheten då att det är korrekt? [3p]

   (c) Du frågar samma besökare en tredje gång och får då svaret västerut. Vad är sannolikheten att detta är korrekt? [2p]

2. Låt $X$ vara en diskret slumpvariabel som har fyra möjliga utfall $X \in \{1, 2, 3, 4\}$. Sannolikheterna för två av utfallen ges av $p(3) = \frac{3}{10}$ och $p(4) = \frac{2}{10}$.

   (a) Vad är $p(1)$ och $p(2)$ om $E(X) = \frac{23}{10}$? [4p]

   (b) Bestäm $E(\frac{1}{1+X})$. [4p]

3. Låt den kontinuerliga slumpvariabeln $X$ ha fördelningsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

och låt $Y = X^2$.

(a) Bestäm $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{2}{3})$. [4p]

(b) Bestäm $P(X \leq 2Y)$. [4p]

4. En grupp med 100 personer diskuterar sina födelsedagar eftersom flera personer är födda samma dag nämligen 1 januari.

(a) Låt $X$ vara slumpvariabeln som anger antalet personer i en grupp om 100 som är födda 1 januari. (Vi kan anta att sannolikheten att fylla år en viss dag är 1/365, och att personernas födelsedagar är oberoende av varandra.) Vilken fördelning tillhör $X$? [2p]

(b) Bestäm med hjälp av lämplig approximation sannolikheten att exakt tre personer i en grupp med 100 personer fyller år 1 januari. [4p]

5. Ett läkemedelsbolag har ett mycket stort antal paracetamoltabletter. Vikten i gram (g) av en slumpmässigt vald tablett är en normalfördelad slumpvariabel med väntevärdet $\mu$ och standardavvikelsen 0.02. För kontroll av vikten tar man ut ett antal tabletter och väger dem. Antag att $\mu = 0.65$.

(a) Beräkna sannolikheten att vikten av en slumpmässigt vald tablett ligger utanför intervallet (0.60 , 0.70). [3p]

(b) Beräkna sannolikheten att medelvärdet av vikterna av 30 slumpmässigt valda tabletter ligger utanför (0.64 , 0.66). [3p]

(c) Hur många tabletter ska man väga om man vill att sannolikheten skall vara högst 0.01 att man får ett medelvärde som ligger utanför intervallet (0.64 , 0.66)? [4p]

6. Sockerhalten i sockerbetor $X$ antas vara en slumpvariabel från fördelningen $N(\mu, \sigma)$ där $\mu$ och $\sigma$ är okända i det aktuella fallet. I en analys har 60 sockerbetor undersökts. Pröva hypotesen $H_0 : \mu = 17.0$ mot $H_1 : \mu \neq 17$. Till din hjälp har du följande beräkningar från observationerna av de 60 sockerbetornas sockerhalt $X_i$: [10p]

$$\sum x_i = 990.7, \sum x_i^2 = 16447.8$$

7. Överhöjningen är en ibland kritisk kvalitetsegenskap hos monteringsfärdiga betongelement. Man ville undersöka om det var någon skillnad för denna egenskap från två olika fabriker A och B. Man tog därför slumpmässigt ut 9 respektive 16 betongelement ur produktionen från fabrik A respektive B. Observationerna kan anses vara stickprov från oberoende slumpvariabler X och Y som är $N(\mu_A,\sigma)$ respektive $N(\mu_B,\sigma)$. Följande värden erhölls [10p]

| | | | |
|---|---|---|---|
| A: | $\bar{x} = 18.1$ | $s_x = 5.0$ | $n_x = 9$ |
| B: | $\bar{y} = 14.6$ | $s_y = 7.1$ | $n_y = 16$ |

Beräkna ett 95 % konfidensintervall för $\mu_A - \mu_B$.