ÖREBRO
UNIVERSITET

Flervariabelanalys för civilingenjörer

MA505G-0100

2021-10-29, kl. 14:15–19:15

Hjälpmedel: Endast skrivmateriel. Formelblad delas ut tillsammans med skrivningen.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga uppgifter bedöms utifrån kriterier för *problemlösning* och *redovisning*. För betyg 3/4/5 räcker det med 4 poäng inom vart och ett av huvudområdena *differentialkalkyl*, *integralkalkyl* och *vektoranalys* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg, rita tydliga figurer och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Andreas Bergwall.

Lycka till!

Grundläggande uppgifter (6p/uppgift)

1. Låt $f(x, y) = 4 - (y - x^2)$. Rita nivåkurvorna $f(x, y) = k$, $k = 1, 2, 3$. Rita i samma figur kurvan $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$.

   Baserat på din figur, ungefär i vilken punkt antar f sitt minsta värde under bivillkoret $(x-3)^2+(y-2)^2 = 5$? Svara genom att markera punkten i din figur. Du behöver inte ange värden på punktens koordinater. Motivera ditt svar *utan* att beräkna några derivator eller gradienter.

2. Civilingenjörerna Civan och Civert står på varsin sida av en dalgång där markytans höjd över havsnivån kan beskrivas av funktionen

   $$z = f(x, y) = (x - 2y)^2 + \sqrt{2x + y}.$$

   Civan står i punkten $(1, 2, 11)$ och Civert i punkten $(4, 1, 7)$. De börjar gå rakt mot varandra. Vem får brantast nedförsbacke i början av vandringen?

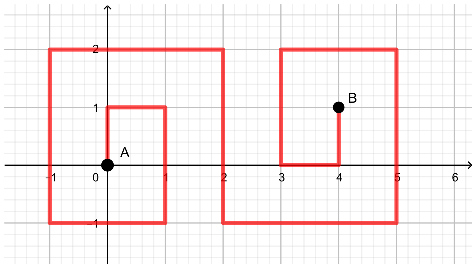
3. Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^1 y^2 e^{xy}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$.

4. Beräkna arean av området i första kvadranten som ligger mellan kurvorna $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$, $x + y = 2$ och $x + y = 3$.

Kom ihåg att illustrera relevanta definitionsmängder, integrationsområden och orienteringar med tydliga figurer.

5. Låt γ vara kurvan från A till B i figuren nedan. Beräkna

$$\int_\gamma \ln(y+2)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{y+2}+1\right)\mathrm{d}y.$$



Fördjupade uppgifter (10p/uppgift)

6. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = x^3 - xy + y$ då (x,y) tillhör den kompakta triangelskivan D med hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,0)$ och $(2,4)$.

7. Bestäm tröghetsmomentet kring symmetriaxeln för

   (a) ett homogent halvklot K, och

   (b) halvklotets randyta ∂K.

   Ledning: Du får anta att radien är 1 och att både volym- och ytdensitet är 1. Om z-axeln är symmetriaxel så ges tröghetsmomentet i (a) av

   $$J = \iiint_K (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

   I (b) ska trippelintegralen bytas mot motsvarande ytintegral över ∂K.

8. Beräkna flödet av $\boldsymbol{u} = (xz, y^2+yz, (x^2+y^2)z)$ ut genom den del av den cylindriska ytan $x^2+y^2=1$ som uppfyller att $0 \le z \le x+2$.

Kom ihåg att illustrera relevanta definitionsmängder, integrationsområden och orienteringar med tydliga figurer.

Kommentarer till Flervariabelanalys för civilingenjörer 20211029

1. Nivåkurvorna är parablerna $y = x^2 + 3$, $y = x^2 + 2$ och $y = x^2 + 1$. Den andra kurvan är en cirkel med centrum i $(3, 2)$ och radie $\sqrt{5}$.

   Minimum inträffar i en punkt på cirkeln där cirkelns gradient är parallell med f:s gradient, d.v.s. i en punkt där cirkeln tangerar en nivåkurva. Ritar man någorlunda noggrannt så ser man att det inträffar i närheten av punkten $(1, 3)$.

   Korrekt ritade kurvor ger 2 p. För full poäng ska punkten ligga på cirkeln, på ett ställe där den är parallell med en nivåkurva, och en motivering av ovanstående slag ska finnas med.

2. Eftersom Civan står där $(x, y) = (1, 2)$ och ska gå mot Civert, som står där $(x, y) = (4, 1)$, så ska Civan ska gå i riktningen $(4, 1) - (1, 2) = (3, -1)$. Civert ska gå i motsatt riktning. För att besvara frågan ska alltså riktningsderivatorna $f'_{\boldsymbol{v}}(1, 2)$ och $f'_{-\boldsymbol{v}}(4, 1)$ jämföras, där $\boldsymbol{v} = (3, -1)/\sqrt{10}$.

   Vi har
   $$\nabla f = \left(2(x - 2y) + \frac{1}{\sqrt{2x + y}}, -4(x - 2y) + \frac{1}{2\sqrt{2x + y}}\right)$$
   vilket ger
   $$\nabla f(1, 2) = \left(-\frac{11}{2}, \frac{49}{4}\right) \qquad \nabla f(4, 1) = \left(\frac{13}{3}, -\frac{47}{6}\right).$$
   Alltså är
   $$f'_v(1, 2) = \left(-\frac{11}{2}, \frac{49}{4}\right) \cdot (3, -1)\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{115}{4\sqrt{10}}$$
   och
   $$f'_{-\boldsymbol{v}}(4, 1) = \left(\frac{13}{3}, -\frac{47}{6}\right) \cdot (-3, 1)\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{125}{6\sqrt{10}}.$$
   Eftersom $115/4 > 125/6$ så har den första av dessa riktningsderivator det mest negativa värdet. Civan har alltså brantast nedförsbacke!

   Observera att det inte räcker att jämföra gradienternas belopp eftersom varken Civan eller Civert rör sig i den riktning som det är allra brantast. För att få fyra poäng eller mer måste man ha insett detta. Enbart jämförelse av gradientvektorer ger 2 p.

   Observera också att detta är ett tvåvariabelproblem. En yta (som den som Civan och Civert går på) är en tvådimensionell struktur eftersom den kan parametriseras med två parametrar, lämpligen x och y. Det räcker att veta x- och y-koordinaterna för var Civan och Civert befinner sig för att räkna ut hur det lutar i olika riktningar. Man kan se själva dalgången de går i som en nivåyta till $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Men eftersom $g(x, y, z) = 0$ längs hela vandringen så kan fråga sig vad det i så fall är för lutning som ∇g representerar. Det behöver man reda ut om man vill använda ∇g för att lösa uppgiften!

3. Att integrera som det står kräver till att börja med dubbla partiella integrationer men leder tyvärr till ohanterliga integraler. Den givna upprepade integralen motsvarar dock en dubbelintegral över $D = \{(x, y) : x \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1\}$. Rita! Detta område kan också beskrivas som $D = \{(x, y) : 0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 1\}$. Byte av integrationsordning ger därför att

$$\int_0^1 \left(\int_0^y y^2 e^{xy}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[y e^{xy} \right]_{x=0}^{y} \mathrm{d}y = \int_0^1 (y e^{y^2} - y)\,\mathrm{d}y = \ldots = \frac{e-2}{2}.$$

4. Området begränsas av två hyperbler som skär x-axeln i $x = 1$ och $x = 2$ och två räta linjer. Det kan delas in i tre delar där varje del ges av en olikheter på formen $g(x) \le y \le h(x)$, $a \le x \le b$, men det leder till krångliga integraler.

   Byt istället variabler till $u = x^2 - y^2$, $v = x + y$ så svarar det givna området D mot rektangeln $E = [1, 4] \times [2, 3]$ i uv-planet. Vi har $d(u, v)/d(x, y) = 2x + 2y = 2v$ så $d(x, y)/d(u, v) = 1/(2v)$, vilket är positivt i hela E. Arean av D är alltså

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{[1,4]\times[2,3]} \frac{1}{2v}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot [\ln v]_2^3 = \frac{3}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

5. Vektorfältet

$$(P, Q) = \left(\ln(y + 2), \frac{x}{y + 2} + 1 \right)$$

   är ett potentialfält i området $y > -2$ eftersom $P'_y = Q'_x = 1/(y + 2)$ där. På vanligt sätt kan en potential bestämmas, t.ex. $U = x \ln(y + 2) + y$. Eftersom hela kurvan ligger i området $y > -2$ så är integralens värde $U(4, 1) - U(0, 0) = 4 \ln 3 + 1$.

   Kurvintegralen är oberoende av vägen i området $y > -2$ så det går också bra att byta kurvan mot en annan kurva i det området och integrera längs den istället.

6. f är C^1 och D är kompakt så största och minsta värde finns och antas antingen i en inre stationär punkt eller på randen.

   Vi har

$$f'_x = 3x^2 - y \quad \text{och} \quad f'_y = -x + 1$$

   så $f'_x = f'_y = 0$ omm $x = 1$ och $y = 3$. $f(x, y)$ har alltså bara en stationär punkt, $(1, 3)$, men den ligger utanför D.

   Studerar man f:s restriktion till var och en av de tre linjestyckena som utgör ∂D så får man i samtliga fall en monoton funktion:

   - På $y = 0$, $0 \le x \le 2$, har vi $g_1(x) = f(x, 0) = x^3$, vilket är en strängt växande funktion. Då kan endast ändpunkterna vara extrempunkter.
   - På $x = 2$, $0 \le y \le 4$, har vi $g_2(y) = 8 - y$, vilket är en strängt avtagande funktion. Även där kan alltså endast ändpunkterna vara extrempunkter.

- På $y = 2x$, $0 \leq x \leq 2$, har vi $g_3(x) = f(x, 2x) = x^3 - 2x^2 + 2x$. Här gäller att $g_3'(x) = 3x^2 - 4x + 2 = 3(x - (2/3))^2 + (2/3)$, så g_3 har inga stationära punkter, d.v.s. även g_3 är monoton. Återigen kan då endast ändpunkterna vara extrempunkter.

Eftersom ändpunkterna på respektive del av ∂D är D:s hörn så är det alltså i dessa vi ska leta efter extrempunkterna:

$$f(0,0) = 0, \qquad f(2,0) = 8, \qquad f(2,4) = 4.$$

Uppenbarligen är det första av dessa minvärdet och det andra maxvärdet.

För att uppgiften ska bedömmas som godkänd och ge 6p (eller mer) måste det finnas med både bestämning av stationära punkter och en randundersökning som inte bara studerar hörnen.

7. Välj (t.ex.) koordinatsystem så att K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$. Då är z-axeln symmetriaxel och den givna formeln kan användas.

   (a) Använd rymdpolära koordinater så svarar K mot $E = [0,1] \times [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ i $r\theta\varphi$-rummet. Enklast blir det dock om man dessförinnan använder att när man integrerar över den del av ett klot som finns i en viss oktant så är alltid

   $$\iiint x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

   Det ger att

   $$\iiint_K (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{2}{3} \iiint_K (x^2 + y^2 + z^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
   $$= \frac{2}{3} \iiint_E r^2 \cdot r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \ldots = \frac{4\pi}{15}.$$

   Om man inte använder denna symmetriegenskap så får man istället den lite svårare integralen

   $$\iiint_E r^2 \sin^2\theta \cdot r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

   (b) Observera att ∂K består av två delar: en halvsfär Y_1 och en cirkelskiva Y_2. Vi kan använda samma symmetriegenskap som ovan när vi integrerar över Y_1:

   $$\iint_{Y_1} (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}S = \frac{2}{3} \iint_{Y_1} (x^2 + y^2 + z^2) \,\mathrm{d}S$$
   $$= \frac{2}{3} \iint_{Y_1} \mathrm{d}S = \frac{2}{3} \cdot (Y_1\text{:s area}) = \frac{2}{3} \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Man kan också gå på direkt med sfäriska koordinater och får då interalen

$$\iint_{[0,\pi/2]\times[0,2\pi]} \sin^2\theta \cdot \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi.$$

På Y_2 passar planpolära koordinater:

$$\iint_{Y_2} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} r^2 \cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \ldots = \frac{\pi}{2}.$$

Tillsammans blir det $\dfrac{11\pi}{6}$.

En helt korrekt löst deluppgift garanterar 6p. Glöm inte att rita!

8. *Lösing med Gauss sats*

Låt Γ vara den givna ytan med utåtnormal. Slut den med bottenskivan B som ges av $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$, och har normal $\boldsymbol{n} = (0, 0, -1)$, och med det "sneda" locket L som ges av $z = x + 2$, $x^2 + y^2 \leq 1$, och har normal $\boldsymbol{n} = (-1, 0, 1)/\sqrt{2}$. Då är $\Gamma + B + L$ randyta med utåtnormal till det den kropp K som ges av $0 \leq z \leq x + 2$, $x^2 + y^2 \leq 1$. Rita!

Observera att vi har spegelsymmetri kring $y = 0$ vilket gör att integraler av udda funktioner av y blir 0. På bottenplattan har vi även spegelsymmetri kring $x = 0$ så är kan vi även bortse från udda funktioner av x. Uppgiften kan lösas även om man inte inser detta men det blir mycket mer att hålla reda på och risken för räknefel ökar.

Vi har $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 2y + 2z + x^2 + y^2$. Termen $2y$ är en udda funktion av y. Gauss sats, spegelsymmetrin kring $y = 0$ och därefter upprepad integration ger

$$\begin{aligned}
\iint_{\Gamma+B+L} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S &= \iiint_K (2z + x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left[z^2 + (x^2+y^2)z\right]_{z=0}^{x+2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left((x+2)^2 + (x^2+y^2)(x+2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^2 + 2x + 4 + x^3 + 2x^2 + y^2x + 2y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (4 + 3x^2 + 2y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

I sista steget använde vi symmetrin kring $x = 0$. Nu går det bra att slutföra beräkningen med hjälp av byte till planpolära koordinater. Men återigen blir det allra enklast om man använder att vid integration över en cirkelskiva (eller den del av en cirkelsiva som ligger i en viss kvadrant) så har integralen av x^2 samma värde som integralen av y^2. Det gör nämligen att

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} (4+3x^2+2y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (4+\frac{5}{2}(x^2+y^2))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 4\pi + \frac{5}{2}\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 4\pi+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{21\pi}{4}.$$

Nu återstår att subtrahera flödena genom B och L. På B är $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = (0,y^2,0)\cdot(0,0,-1) = 0$, så flödet genom B är 0. På L är $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = (-z'_x, -z'y, 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (-1,0,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ så

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = (x(x+2), y^2+y(x+2), (x^2+y^2)(x+2))\cdot(-1,0,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= x^2+2y^2+ \text{ udda funktion av } x.$$

Nu fås flödet genom L till

$$\iint_L \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+2y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \frac{3}{2}\iint_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \frac{3}{2}\iint_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{4}.$$

Det sökta flödet är alltså $\dfrac{21\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{9\pi}{2}$.

För att en lösning med Gauss sats ska betraktas som godkänd måste den innehålla en korrekt användning av Gauss sats och väsentligen korrekta beräkningar av flödet genom ∂K. För fler poäng ska även flöden genom botten/lock subtraheras.

Lösning utan Gauss sats

Det går också att beräkna flödesintegralen helt utan användning av Gauss sats. Faktum är att det blir mycket enklare. Eftersom $\boldsymbol{n} = (x,y,0)$ är en utåtriktad enhetsnormal till Γ så gäller på Γ att

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = (xz, y^2+yz, (x^2+y^2)z)\cdot(x,y,0) = x^2z+y^3+y^2z = (x^2+y^2)z+y^3 = z+y^3.$$

Av symmetriskäl kan vi bortse från y^3-termen. Om vi använder cylindriska koordinater så ges Γ av $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$, $z=z$, där $0\leq\varphi\leq 2\pi$ och

$0 \leq z \leq \cos\varphi + 2$. Ytelementet är $\mathrm{d}S = \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$. Flödet ut genom Γ är alltså

$$\begin{aligned}\iint_\Gamma \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\cos\varphi+2} z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\cos\varphi+2}\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2\varphi + 4\cos\varphi + 4)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}(\pi + 0 + 8\pi) = \frac{9\pi}{2}\end{aligned}$$