ÖREBRO
UNIVERSITET

LÖSNINGSFÖRSLAG

Våg- och materiefysik för civilingenjörer

FY501G-0100

2019-03-20, kl. 08:15–13:15

Hjälpmedel: Skrivmateriel, lärobok[1] och miniräknare.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga deluppgifter kan ge 2 poäng och bedöms utifrån kriterier för *kunskap och förståelse*; *färdighet, förmåga och värderingsförmåga;* samt *skriftlig avrapportering*. För betyg 3/4/5 räcker det med 4 poäng inom vart och ett av områdena *vågrörelselära*, *elektromagnetism*, *kvantmekanik och materiens struktur* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl med sidhänvisningar och formelnummer från läroboken, redovisa alla väsentliga steg, rita tydliga figurer och svara med rätt enhet. Redovisa inte mer än en huvuduppgift per blad och lämna in i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Magnus Ögren.

Lycka till!

1.

a) Pris: $\frac{20[EUR]}{1[MWh]} = \frac{200 \cdot 100[öre]}{1 \cdot 10^3[kWh]} = 20\left[\frac{öre}{kWh}\right]$

Svar a): Elpriset för PWR BLOK 400-F är 20 öre per kWh.

b)

Using $v = \sqrt{\tau/\mu} = \sqrt{\tau L/m}$, we find the length of the string to be

$$L = \frac{mv^2}{\tau} = \frac{(2.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(120\ \text{m/s})^2}{7.00\ \text{N}} = 4.11\ \text{m}.$$

Svar b): Strängens längd är 4.11 m.

c)

The wavelength of the wave with the lowest resonant frequency f_1 is $\lambda_1 = 2L$,

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{120\ \text{m/s}}{2(4.11\ \text{m})} = 14.6\ \text{Hz}.$$

Svar c): Strängen har den lägsta resonansfrekven 14.6 Hz.

---

[1] *Principles of Physics* 10.th ed. Halliday, Resnick, Walker

d) Enligt (tex) Figure 16-19 reflekteras en våg mot en fastsatt ände omvänd. Vidare skall ordningen på de inkommande pulserna bibehållas. Då kvarstår bara alternativ B, som visar pulserna vid en tidpunkt då den första pulsen reflekterats men den andra fortfarande är på väg mot änden.

Svar d): B

e) En kan finna inspiration från (tex) Figure 35-8. Där framgår att då vågfronterna från två källor möts i samma punkt har vi en maxpunkt, så som vi ser i punkten C i uppgiftens figur. Om vågorna från båda källorna i en punkt är mittemellan sina vågfronter, så som vi ser i punkten A i uppgiftens figur, har vi istället en minpunkt. Detta svarsalternativ finns inte, så rätt svar blir ingendera. Vidare kan vi se att då (tex) fronten från ena källan når en punkt samtidigt som vågen från den andra källan har två fronter på var sin sida om punkten har vi en nodpunkt, så som vi ser i punkten B i uppgiftens figur. Fallet D representerar då icke max-/nod-punkter, dvs ingetdera.

Svar e): A=ingendera, B=nodpunkt, C=maxpunkt, D=ingendera.

2.

a) Grundtonens frekvens uppfyller $f = \frac{v}{4L} = \frac{343}{4 \cdot 0.035} = 2450$ Hz (17-41). **Svar a):** Grundtonens frekvens i hörselgången på en människa är ca $f = 2.5$ kHz.

b

(~~a~~) The intensity is given by $I = P/4\pi r^2$ when the source is "point-like." Therefore, at $r = 4.20$ m,

$$I = \frac{3.00 \times 10^{-6}\ \text{W}}{4\pi(4.20\ \text{m})^2} = 1.35 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2.$$

c

(~~b~~) The sound level there is

$$\beta = (10\ \text{dB})\log\left(\frac{1.35 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2}{1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2}\right) = 41.3\ \text{dB}.$$

At the beginning of the exercises and problems section in the textbook, we are told to assume $v_{\text{sound}} = 343$ m/s unless told otherwise. The second harmonic of pipe A is found from Eq. 17-39 with $n = 2$ and $L = L_A$, and the 5th harmonic of pipe B is found from Eq. 17-41 with $n = 5$ and $L = L_B$. Since these frequencies are equal, we have

$$\frac{2v_{\text{sound}}}{2L_A} = \frac{5v_{\text{sound}}}{4L_B} \Rightarrow L_B = \frac{5}{4}L_A.$$

d

(~~a~~) Since the fundamental frequency for pipe A is 425 Hz, we immediately know that the second harmonic has $f = 2(425\ \text{Hz}) = 850$ Hz. Using this, Eq. 17-39 gives

$$L_A = (2)(343\ \text{m/s})/2(850\ \text{s}^{-1}) = 0.4035\ \text{m} \approx 40.4\ \text{cm}.$$

e

(~~b~~) The length of pipe B is $L_B = \frac{5}{4}L_A = \frac{5}{4}(0.4035\ \text{m}) = 0.504\ \text{m} = 50.4\ \text{cm}$.

3.

a) Enligt definitionen

$$E = \left|\vec{E}\right| = \frac{\left|\vec{F}\right|}{q} \Rightarrow F = qE = 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 1.0 \cdot 10^{5} = 1.602 \cdot 10^{-14}\, N. \tag{1}$$

Elektronen attraheras av den positiva plattan och repelleras av den negativa plattan, varför riktningen blir åt vänster.

Svar a): Kraften är $1.6 \cdot 10^{-14}$ N med riktning åt vänster i bild.

b) Låt den positiva plattan svara mot $x = 0$. Krafterna på respektive partikel är

$$\left|\vec{F_p}\right| = q_p \left|\vec{E}\right|, \quad \left|\vec{F_e}\right| = q_e \left|\vec{E}\right|$$

och ger upphov till en likformigt accellererad rörelse med koordinater, för protonen

$$x_p = \frac{a_p}{2} t^2$$

och för elektronen

$$x_e = L + \frac{a_e}{2} t^2,\ a_e < 0,\ L = 8.0 \cdot 10^{-2}\, m.$$

De passerar varandra då $x_p = x_e$ dvs då

$$\frac{a_p}{2} t^2 = L + \frac{a_e}{2} t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2L}{a_p - a_e}.$$

Dvs de möts vid

$$x_p = \frac{a_p}{2} t^2 = \frac{a_p}{2} \left(\frac{2L}{a_p - a_e} \right) = L \frac{a_p}{a_p - a_e}.$$

Med Newtons andra lag $F = ma$, kan vi nu skriva

$$x_p = L \frac{q_p \left|\vec{E}\right| / m_p}{q_p \left|\vec{E}\right| / m_p - q_e \left|\vec{E}\right| / m_e} = L \frac{1/m_p}{1/m_p + 1/m_e} = \frac{L}{1 + m_p/m_e} = \frac{8.0 \cdot 10^{-2}}{1 + \frac{1.67 \cdot 10^{-27}}{9.11 \cdot 10^{-31}}} = 4.362 \cdot 10^{-5} m.$$

Med två värdesiffror, liksom L, kan vi då svara:

Svar b): Vid avståndet 44μm från den vänstra plattan.

c) När en elektrisk dipol växelverkar med ett externt elektrisktfält ges energin av $U(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ (22-38). Skillnaden i energi då en ändrar riktningen 180 grader blir $\Delta U = U(180^\circ) - U(0) = 2\left|\vec{p}\right| \cdot \left|\vec{E}\right| = 2pE = 2 \cdot 6.0 \cdot 10^{-30} \cdot 1.0 \cdot 10^{5} = 1.2 \cdot 10^{-24}$ J.

Svar c): Det åtgår ca $1.2 \cdot 10^{-24}$ J för att vrida dipolen.

d) Initialt ger det elektriska fältet en acceleration frammåt, men då partikeln erhåller en fart blir det också en magnetiskkraft vinkelrät mot hastighetsvektorn. Enligt högerhandsregeln (tex sidan 721 i kursboken) blir riktningen (initialt) uppåt för både protonen och elektronen.

Svar d): Både protonen och elektronen kommer att röra sig (snett) uppåt.

e) Vi kan först notera att formeln gäller för exemplet i denna uppgift, dvs $E = U/d = 8.0 \cdot 10^3/0.08 = 1.0 \cdot 10^5$ V/m. För att bevisa formeln allmännt räknar vi ut det mekaniska arbete (energi) som åtgår för att flytta (tex) protonen från den vänstra plattan till den högra. Då kraften är konstant blir arbetet $A = FL = qEd$. Detta skall jämföras med den elektriska energin (24-3) $E = Uq$. En jämförelse ger nu det sökta resultatet

$$A = E \;\Rightarrow\; qEd = Uq \;\Rightarrow\; E = \frac{U}{d}.$$

Alternativt kan en prova att 'integrera' fram det elektriska fältet över plattorna.

Svar e): Se härledningen ovan.

4.

a) Enligt (32-10) är förskjutningsströmmen

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \left[\frac{F}{m}\right] 3.00 \cdot 10^{-3} \left[\frac{Vm}{s}\right] = 2.6562 \cdot 10^{-14}\,[A]\,.$$

Enligt (32-16) ger denna ström, innanför kabeln, upphov till ett magnetfält med styrka

$$B = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi R^2} r = \frac{1.257 \cdot 10^{-6} \cdot 2.6562 \cdot 10^{-14}}{2\pi \cdot 0.04^2} 0.02 = 6.6424 \cdot 10^{-20}\,[T]\,.$$

Svar a): Magnetfältets styrka är $6.64 \cdot 10^{-20}$ T.

b) Enligt (32-17) ger denna ström, utanför kabeln, upphov till ett magnetfält med styrka

$$B = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi r} = \frac{1.257 \cdot 10^{-6} \cdot 2.6562 \cdot 10^{-14}}{2\pi \cdot 0.05} = 10.62784 \cdot 10^{-20}\,[T]\,.$$

Svar b): Magnetfältets styrka är $1.06 \cdot 10^{-19}$ T.

c) Då $r = R$ sammanfaller de två formlerna, (32-16) är växande som funktion av r, (32-17) är avtagande, så att maximal styrka uppnås. Vi kan förklara detta kvalitativt som att så mycket som möjligt av strömmen i kabeln (hela) omsluts men att avståndet från kabel är minimal (noll).

Svar c): Vid avståndet $r = R = 4.00$ cm är styrkan maximal.

d) Med en homogen förskjutningsströmtäthet blir förskjutningsströmmen

$$i_d = \int \vec{J}_d \bullet d\vec{A} = J_d \pi R^2 = 6.00 \cdot \pi \cdot 0.04^2 = 0.030159\,[A]\,.$$

Enligt (32-16) ger denna ström, innanför kabeln, upphov till ett magnetfält med styrka

$$B = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi R^2} r = \frac{1.257 \cdot 10^{-6} \cdot 0.030159}{2\pi \cdot 0.04^2} 0.02 = 7.542 \cdot 10^{-8}\,[T]\,.$$

Svar d): Magnetfältets styrka är 75.4 nT.

e) Med en inhomogen förskjutningsströmtäthet $J_d = 4.00\,(1 - r/R)$ A/m^2 blir förskjutningsströmmen innanför en radie R_0

$$i_d = \int \vec{J}_d \bullet d\vec{A} = 4.00 \int_0^{R_0} \left(1 - \frac{r}{R}\right) 2\pi r dr = 8.00 \cdot \pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right]_0^{R_0} = 4.00 \cdot \pi R_0^2 \left(1 - \frac{2R_0}{3R}\right) [A]\,.$$

Vi använder nu Amperes lag (29-14), så att denna ström, innanför kabeln, ger upphov till ett magnetfält med styrka

$$B = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi R_0} = 2R_0 \mu_0 \left(1 - \frac{2R_0}{3R}\right) = 2 \cdot 0.02 \cdot 1.257 \cdot 10^{-6} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 0.02}{3 \cdot 0.04}\right) = 3.352 \cdot 10^{-8}\,[T]\,.$$

Svar e): Magnetfältets styrka är 33.5 nT.

5.

a) Förutsättningarna är uppfyllda för att använda den sk gitterformeln (36-25) [alt. (35-14)] med $d = 0.10 \cdot 10^{-3}$ m, $\tan\theta = 3.0 \cdot 10^{-2}/5.00$ och $m = 1$ (första ordningen), så att

$$d \sin\theta = m\lambda \;\Rightarrow \lambda = d\sin\theta = d \sin\left(\arctan\left(\frac{3.0 \cdot 10^{-2}}{5.00}\right)\right)$$

$$\approx d \tan\theta = \frac{0.10 \cdot 10^{-3} \cdot 3.0 \cdot 10^{-2}}{5.00} = 6.00 \cdot 10^{-7}\;[m]\,,$$

där vi utnyttjat att det för små vinklar θ gäller att $\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta$.

Svar a): Ljusets våglängd är ca 600 nm.

b) Vi använder Wiens förskjutningslag (38-15)

$$\lambda_{max} T = 2898\ [\mu m K] \ \Rightarrow\ T = \frac{2898\ [\mu m K]}{\lambda_{max}} = \frac{2898 \cdot 10^{-6}\ [mK]}{290 \cdot 10^{-9}\ [m]} = 9993.1 \approx 10^4\ K.$$

Svar b): Temperaturen på ytan av Sirius är ca tiotusen grader K (lite varmare än vår sol).

c) Problemet handlar om fotoelektrisk effekt. Vi använder (38-5) för att se om elektronerna kan ha någon positiv kinetisk energi, dvs om de lossnar.

$$hf = K_{max} + \Phi \Rightarrow K_{max} = h\frac{c}{\lambda} - \Phi = 6.63 \cdot 10^{-34} \frac{3.00 \cdot 10^8}{0.55 \cdot 10^{-6}} - 0.35 \cdot 10^{-18} = 1.16 \cdot 10^{-20} J.$$

Svar c): Ja det lossnar elektroner, som får den kinetiska energin $1.2 \cdot 10^{-20}$ J.

d) Strålarnas fart i plast ges av $c_j = c/n_j,\ j = 1, 2$. Strålarnas våglängd i plasten ges av $\lambda_j = c_j/f = \lambda/n_j,\ j = 1, 2$, där vi utnyttjat att frekvensen $f = c/\lambda$ är samma i de båda medierna $j = 1, 2$.

Vi får då antalet våglängder som respektive stråle har i plastmaterialen enligt $N_j = L_j/\lambda_j = L_j n_j/\lambda$, dvs

$$N_1 = \frac{L_1 n_1}{\lambda} = \frac{4.00 \cdot 10^{-6} \cdot 1.42}{600 \cdot 10^{-9}} = 9.4667,\ N_2 = \frac{L_2 n_1}{\lambda} = \frac{3.50 \cdot 10^{-6} \cdot 1.60}{600 \cdot 10^{-9}} = 9.3333. \tag{2}$$

Nu gäller att $L_2 < L_1$, så stråle $j = 2$ behöver gå ytterliggare sträckan $L_1 - L_2$ med våglängden λ i luft för att jämföras med stråle $j = 1$, detta bidrar med följande antal våglängder

$$N = \frac{(L_1 - L_2)\, n}{\lambda} = \frac{(4.00 - 3.50) \cdot 10^{-6} \cdot 1}{600 \cdot 10^{-9}} = 0.8333. \tag{3}$$

Totalt är skillnaden i antalet våglängder $\Delta N = N_2 + N - N_1 = 9.3333 + 0.8333 - 9.4667 = 0.6999 \simeq 0.7$

Svar d): När båda strålarna passerat plastmaterialen skiljer deras fas med en multipel 0.7 av den ursprungliga våglängden.

e) Om fasskillnaden är ett heltal är strålarna i fas och det blir det konstruktiv interferens.

Om fasskillnaden är ett halvtal är strålarna helt i ofas och det blir det destruktiv interferens.

I detta fall är svaret i **d)** (0.7) närmare ett halvtal än ett heltal, så interferensen ligger närmare destruktiv än konstruktiv.

Svar e): Om strålarna interfererar efter passagen av plastmaterialen är resultatet mera destruktivt än konstruktivt.

6.

a) Enligt (39-4) ges grundtillståndet för elektronen av följande formel för $n = 1$

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2 \Rightarrow L = \frac{hn}{\sqrt{8mE_n}} = \frac{6.6261 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{8 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 1.0 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}}} = 6.133 \cdot 10^{-10} m \simeq 0.61 nm. \tag{4}$$

Svar a): Stämmer!

b) Enligt diskussionen innan (39-4) ger $E_n = p^2/(2m)$ så att $\Delta p \simeq p = \sqrt{2mE_n}$. Enligt (38-28) ska gälla att $\Delta x \Delta p \geq \hbar$.

Vi kan uppskatta storleken på Δx och Δp (för $n = 1$) i SI-enheter enligt

$$\Delta x \simeq L \simeq 0.6 \cdot 10^{-9} m, \Delta p \simeq p = \sqrt{2mE_n} = \sqrt{2 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 1.0 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}} \simeq 5 \cdot 10^{-25} kgm/s. \tag{5}$$

Vi ser då att produkten $\Delta x \Delta p$ blir av samma storleksordning som $\hbar$.

Svar b): Stämmer!

c) Ett (av många möjliga) illustrerande exempel är de två olika vågfunktionerna (39-19) $n_x = 1$, $n_y = 4$ samt $n_x = 2$, $n_y = 2$, som enligt (39-20) båda har samma energi för $L_y = 2L_x$, dvs

$$E\left(n_x = 1,\ n_y = 4\right) = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right) = \frac{h^2}{8mL_x^2}\left(n_x^2 + \frac{n_y^2}{4}\right) = \frac{h^2}{8mL_x^2}(1+4) \tag{6}$$

$$= \frac{h^2}{8mL_x^2}(4+1) = E\left(n_x = 2,\ n_y = 2\right). \tag{7}$$

Svar c): Enligt exemplet ovan.

d) Sannolikhetstätheten blir absolutkvadraten på vågfunktionen, dvs funktionen vi ser i figuren är

$$\left|\Psi_{n_x,n_y}(x,y)\right|^2 = \frac{4}{L_x L_y}\sin^2\left(\frac{n_x\pi}{L_x}x\right)\sin^2\left(\frac{n_y\pi}{L_y}y\right). \tag{8}$$

Denna funktion (figuren) har 1 nollställe inuti intervallet $0 < x < L_x$ samt 2 nollställen inuti intervallet $0 < y < L_y$. Detta uppfylls endast om $n_x = 2$ och $n_y = 3$.

Svar d): Kvanttalen är $n_x = 2$ och $n_y = 3$.

e) Enligt (38-38) beskrivs transmissionen av $T \approx \exp(-2bL) = \exp\left(-2 \cdot 3.622 \cdot 10^9 \cdot 1.0 \cdot 10^{-10}\right) = 0.4846$, där (38-39) $b = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(1.5-1.0)\cdot 1.602\cdot 10^{-19}}{h^2}} = 3.622 \cdot 10^9\ \mathrm{m}^{-1}$.

Svar e): Transmissionskoefficienten är $T \approx 0.48$ (dvs ungefär varannan elektron tunnlar igenom barriären).