Lösningsförslag till tentamen

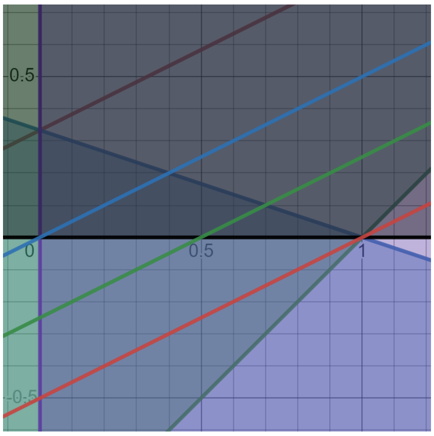
Optimering för civilingenjörer, MA507G

Examinator: Mårten Gulliksson

Tid: Torsdag 11 januari 2024 klockan 08:15-13:15

Problem 1 (12 poäng)

(a) I figuren ses det tillåtna området som det mörkaste markerade området. Där ses också ett antal nivålinjer där den längst upp skär hörnet där lösningen ligger



(b) Om vi startar med slackvariablerna x_3, x_4 blir ingående basvariabel x_1 och utgående x_3. Det ger alla reducerande kostnader positiva och lösningen $x^* = [0, 1/3, 4/3, 0]^T$.

(c) Med lösningen i (b) får vi den störda baslösningen

$$x_b(\delta) = B^{-1}(b + \delta b) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1+\delta \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1+\delta \\ 4+\delta \end{bmatrix}$$

som måste vara icke-negativ vilket ger att $\delta \geq -1$. Notera att från Simplex-tablån får man direkt under slackvariablerna att

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Reducerande kostnader måste vara icke-negativa. Det är bara första reducerade kostnaden som ändras vilket ger villkoret

$$c_1 - y^{*T} a_1 = 1 + \epsilon - [-2/3,\, 0][1,\, 1]^T = \epsilon + 5/3 \geq 0$$

dvs $\epsilon \geq -5/3$.

(e) Eftersom $x_1^* = 0$ inte är en basvariabel så ändras inte målfunktionen.

(f) Duala problemet är

$$\begin{array}{ll} \max & y_1 + y_2 \\ \text{u.b.} & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & 3y_1 - y_2 \leq -2 \\ & y_i \leq 0, i = 1, 2 \end{array}$$

vars lösning ges av

$$y^* = B^{-1^T} c_b = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ .1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Duala lösningen återfinns också i tablån. Eftersom primala och duala problemet har samma objektfunktionsvärde i lösningen gäller stark dualitet.

Problem 2 (8 poäng)

Låt x_i vara hur många enhetsportioner av rätt i han ska göra. Då blir problemet

$$\begin{array}{llcl} \max & z = x_1 + x_2 + x_3 & & \\ \text{u.b.} & 2x_1 + 4x_2 & \leq & 20 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 & \leq & 15 \\ & 5x_2 & \leq & 17 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, & \text{heltal.} & \end{array}$$

Kommentar: Det är onödigt att inför extra variabler med index för respektive krydda eftersom det är givet av respektive bivillkor. Att inte ta med heltalsbivillkoret medför poängavdrag.

Problem 3 (14 poäng)

(a) Gradienten till f är $\nabla f(x) = [\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} \quad 2x_2]$, och hessianen ges av

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}^3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Eftersom hessianen är positivt definit för alla $x \in I\!R^2$ så är f konvex.

(b) Vi startar i punkten $x^{(0)} = (2, 1)$. Då gäller

$$\nabla f(x^{(0)}) = [\frac{2}{\sqrt{5}} \quad 2], \quad \text{och} \quad \nabla^2 f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}^3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

och ekvationssystemet $\nabla^2 f(x^{(0)})d^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)})$ ger $d^{(0)} = [-10 \quad -1]^T$.
Vi har att $f(x^{(0)}) = \sqrt{5} + 1$.
Steglängdsval:
Full steglängd $f(x^{(0)} + d^{(0)}) = f(-8, 0) = \sqrt{1 + 64} > \sqrt{5} + 1$.
Halv steglängd $f(x^{(0)} + 1/2d^{(0)}) = f(-3, 1/2) = \sqrt{10} + 1/4 > \sqrt{5} + 1$.
Kvarts steglängd $f(x^{(0)} + 1/4d^{(0)}) = f(-0.5, 0.75) = \sqrt{(5/4)} + 9/16 < \sqrt{5} + 1$.

Nästa punkt blir $x^{(1)} = x^{(0)} + 1/4d^{(0)} = (-0.5, 0.75)$.

(c) Låt $g(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2$ då kan problemet skrivas som

$$\min f(x) \text{ då } g(x) \leq 0$$

I punkten $x^* = [0, 1]^T$ är bivillkoret aktivt och från KKT-villkoren fås

$$\nabla f(x^*) + v\nabla g(x^*) = [1/\sqrt{2}, 0] + v[-2, 0] = 0$$

med $v = 1/2^{3/2} > 0$ så problemet är inte konvext. Eftersom KKT-villkoren bara är nödvändiga kan vi inte säga att x^* är ett lokalt eller globalt minimum.

(d) KKT-villkoret som i (c) ger igen $v = 1/2^{3/2} > 0$. I detta fall har vi vänt på bivillkoret vilket kräver en negativ Lagrangeparameter för att KKT-villkoret skall vara sant. Det innebär att KKT-villkoren inte är satisfierade och punkten är varken lokalt eller globalt minimum.

Kommentar: Det hjälper att rita figurer i detta problem och inse var minimum och maximum ligger om man förstått att objektfunktionen är konvex.

Problem 4 (6 poäng)

Elberta wants to see as many movies as possible but can only attend one at a time. There are six movies to choose from. The times they are shown are as follows:

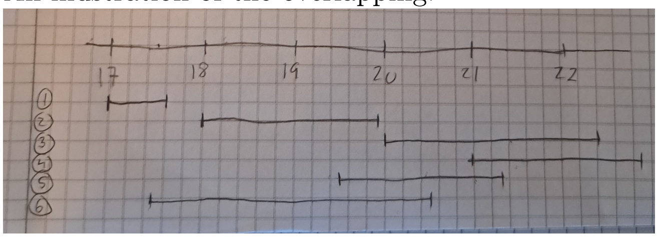
- Movie 1: 17:00 - 17:36
- Movie 2: 18:00 - 19:54
- Movie 3: 20:00 - 22:15
- Movie 4: 21:00 - 22:56
- Movie 5: 19:30 - 21:13
- Movie 6: 17:30 - 20:30

Define binary variables $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ where each variable represents whether the corresponding movie is seen (1) or not (0).

Subject to these constraints we want to find the maximal number of movies seen as

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6.$$

An illustration of the overlapping.



From the figure the solution can be seen by simply looking at the overlaps (start with first movie, exclude movie 6, look at second movie, exclude movie 5, and finally include movie three or four).

Lets look at one possible formulation

$$\begin{aligned} x_1 + x_6 &\le 1, \\ x_2 + x_6 &\le 1, \\ x_2 + x_5 + x_6 &\le 1, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\le 1, \\ x_3 + x_4 + x_5 &\le 1, \end{aligned}$$

that can be simplified as follows.

- Inequality 3 ($x_2 + x_5 + x_6 \le 1$) implies Inequality 2 ($x_2 + x_6 \le 1$), making the latter redundant.

- Inequality 4 ($x_3+x_4+x_5+x_6 \leq 1$) implies Inequality 5 ($x_3+x_4+x_5 \leq 1$), rendering it redundant.

Thus, the simplified inequalities are

$$\begin{aligned} x_1 + x_6 &\leq 1, \\ x_2 + x_5 + x_6 &\leq 1, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\leq 1. \end{aligned}$$

The optimal solutions that satisfy these constraints and maximize the sum are

- $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 0$ with a sum of 3.
- $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$ with a sum of 3

so 3 movies can be seen but there are two different alternatives.

Here is an alternative formulation of the constraints:

$$\begin{aligned} x_1 + x_6 \leq 1 &\quad \text{(Movies 1 and 6 overlap)} \\ x_2 + x_5 \leq 1 &\quad \text{(Movies 2 and 5 overlap)} \\ x_2 + x_6 \leq 1 &\quad \text{(Movies 2 and 6 overlap)} \\ x_3 + x_4 \leq 1 &\quad \text{(Movies 3 and 4 overlap)} \\ x_3 + x_5 \leq 1 &\quad \text{(Movies 3 and 5 overlap)} \\ x_3 + x_6 \leq 1 &\quad \text{(Movies 3 and 6 overlap)} \\ x_4 + x_5 \leq 1 &\quad \text{(Movies 4 and 5 overlap)} \\ x_5 + x_6 \leq 1 &\quad \text{(Movies 5 and 6 overlap)} \end{aligned}$$

Its tempting to formulate constraints that are too restrictive. Here is an example:

$$\begin{aligned} x_1 + x_6 &\leq 1, \\ x_2 + x_5 + x_6 &\leq 1, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\leq 1, \\ x_3 + x_4 + x_5 &\leq 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\leq 1, \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 &\leq 1. \end{aligned}$$

Lets reduce these.

- Inequality 5, $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1$, is the most restrictive. Any solution satisfying this will also satisfy inequalities 2, 3, 4, and 6.
- Inequality 1, $x_1 + x_6 \leq 1$, is independent and cannot be derived from the others.

Thus, the simplified inequalities are

$$\begin{aligned} x_1 + x_6 &\leq 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\leq 1. \end{aligned}$$

The optimal solutions that satisfy these constraints and maximize the sum are easily seen to be

1. $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$
2. $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 0$
3. $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$
4. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$

and only two movies can be seen.

Problem 5 (10 poäng)

(a) Använda Disjkstras metod som ger billigaste väg 1-2-5-4 med kostnad lika med 16. Bara lösning utan motivering ger poängavdrag.

(b) Eftersom $y_6 = 14$ om $c_{64} \leq 2$ går en billigaste väg via nod 6. Detta kan även inses genom ett resonemang.

(c) Det är ett handelseresandeproblem.

Kommentar: Det står i problemformuleringen att vid varje båge är det markerat kostnad och kapacitet. Många har tolkat detta endast som kostnad vilket ger andra svar men inga poängavdrag.

Problem 6 (10 poäng)

Se respektive avsnitt i kursboken.