ÖREBRO
UNIVERSITET

LÖSNINGSFÖRSLAG

Våg- och materiefysik för civilingenjörer

FY501G-0100

2018-01-09, kl. 08:15–13:15

1.

a) För $\lambda = 2L$ och $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = 5.186 \cdot 10^3$ m/s gäller (16-66)

$$f_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}}{2L} = \frac{\sqrt{\frac{90.1 \cdot 10^6}{3.35}}}{2 \cdot 310} = 8.36466\, Hz. \tag{1}$$

Svar a): Grundsvängningens frekvens är 8.36 Hz.

b) Högre ordningars resonanser får vi från (16-66), så att

$$f_{n+1} - f_n = ... = f_1 = 8.36466\, Hz. \tag{2}$$

Svar b): Högre resonanser skiljer sig åt med 8.36 Hz.

c) Då gäller $6 \cdot \frac{\lambda}{2} = L$ (skissa) så att $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{6\pi}{L} = \frac{6\pi}{310} = 0.06081$ m^{-1}. För $n = 6$ ger (16-66) $f_6 = 6f_1 = 50.187960$, så att $\omega = 2\pi f_6 = 3.15340 \cdot 10^2$. Slutligen är amplituden $2y_m = 1.0$ m så att $y_m = 0.5$ m. Kontroll (16-13) $v = \frac{\omega}{k} = \frac{3.15340 \cdot 10^2}{0.06081} = 5.186 \cdot 10^3$ m/s. **Svar c):** Vågen $y(x,t) = 1.0 \sin(0.0608x) \cos\left(3.15 \cdot 10^2 t\right)$.

d) Enligt (16-58)-(16-60) blir den vågen som rör sig åt vänster (+ tecken framför ω) (16-59) med k och ω från **c)**. **Svar d):** Vågen $y(x,t) = 0.50 \sin\left(0.0608x + 3.15 \cdot 10^2 t\right)$.

e) Nej, om amplituden överstiger 15 m för vågen i **c)** där $\lambda = 310/3$ innebär det att amplituden är ca 15% av våglängden. Vid härledningen av vågekvationer, ovanför (16-35), görs en approximation $\ell \approx dx$ som uppfylls bara för små amplituder.

2.

a) Grundtonens frekvens uppfyller $f = \frac{v}{4L} = \frac{343}{4 \cdot 0.035} = 2450$ Hz (17-41). **Svar a):** Grundtonens frekvens i hörselgången på en människa är ca $f = 2.5$ kHz.

b) Om t_1 är tiden det tar för stenen ner genom brunnen sträckan L (från att den släpps till den når vattenytan), och t_2 är tiden det tar för ljudet av nedslaget att nå upp genom brunnen sträckan L, så gäller $L = \frac{g}{2}t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$ ($g = 9.82 m/s^2$) och $t_2 = \frac{L}{v}$ ($v = 343 m/s$). Den uppmätta tiden är $t_{tot} = t_1 + t_2$ och ekvationen ur vilken vi kan lösa ut sträckan L är då

$$t_{tot} = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \frac{L}{v}. \tag{3}$$

c) Samma som för örats hörselgång i **a)**, där nu f är den uppmätta frekvensen och sträckan ned till vattenytan ges av $L = \frac{v}{4f}$.

d) Michelson's interferometer beskrivs på sidan 967 i läroboken. Det skall framgå att vattenytan svarar mot den rörliga spegeln, att olika djup leder till olika vägskillnad, vilket kan avläsas som positiv/negativ interferens av en fotodiod.

e) Vi börjar med att bestämma var vattennivån står under dygn 1, antingen mha av att lösa andragradsekvationen (3) i **b)**

$$\left(t_{tot} - \frac{L}{v}\right)^2 = \frac{2L}{g} \Rightarrow L^2 - 2v\left(\frac{v}{g} + t_{tot}\right)L + v^2 t_{tot}^2 = 0 \Rightarrow L_{1,2} = v\left(\frac{v}{g} + t_{tot}\right) \pm v\sqrt{\left(\frac{v}{g} + t_{tot}\right)^2 - t_{tot}^2}.$$

$$L_{1,2} = 343\left(\frac{343}{9.82} + 2.0\right) \pm 343\sqrt{\left(\frac{343}{9.82} + 2.0\right)^2 - 2.0^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} L_1 = 2.53 \cdot 10^2\, m > vt_{tot} = 686\, m, \\ L_2 = 18.6\, m \end{array} \right. . \tag{4}$$

Så L_1 är en falsk (orimlig) rot och $L = L_2 = 18.6$ m under dygn 1.

Eller mha **c)** $L = \frac{v}{4f} = \frac{343}{4 \cdot 4.6} = 18.64$ m under dygn 1.

Varje gång fotodioden registrerar ett skift från mörkt till ljust svarar det mot en förflyttning $\frac{\lambda}{2}$ av M_2 (vattenytan). Så vattenytan har sjunkit med $2.0011 \cdot 10^5 \cdot \frac{632.8 \cdot 10^{-9}}{2} = 0.06331480$ m mellan dygn 1 och dygn 2. Nivån under dygn två blir $L = 18.6$ m. Vi skulle behöva genomföra en mera noggrann (flera värdesiffror) kalibrering av nivån under dygn 1. **Svar e):** Nivån under dygn två är $L = 18.6$ m.

3.

a) Då avståndet $a = 1.0$ m är mycket större än utsträckningen L av laddningen, kan den betraktas som en punktladdning. Ett approximativt värde ges då av (22-3)

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{a^2} = \frac{1}{4\pi\cdot 8.854\cdot 10^{-12}}\frac{1.0\cdot 10^{-9}}{1.0^2} = 8.99\,\frac{N}{C}.$$

Svar a): Det elektriska fältets styrka i P är 9.0 N/C.

b) Den negativa laddninger utsattes för en elektrisk kraft till höger i figuren, då skulle kraften på en positiv laddning vara åt vänster (attraherad av de negativa laddningarna). Det elektriska fältet har samma riktning som kraften på en positiv laddning. **Svar b):** Det elektriska fältets riktning i P var åt vänster.

c) Om (29-4) $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$ har enheten T, så måste $BR = \frac{\mu_0 i}{2\pi}$ multiplicerat med något som har enheten $\frac{1}{m}$ ha enheten T. Vi ser vi att

$$\frac{\frac{L}{2}}{R\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{L}{2}}{R\frac{L}{2}\sqrt{\left(\frac{2R}{L}\right)^2+1}} = \frac{1}{R\sqrt{\left(\frac{2R}{L}\right)^2+1}}, \tag{5}$$

har enheten $\frac{1}{m}$.

d) Analytiskt: För uttrycket (3) ovan gäller då $R \ll L$ att $1/R\sqrt{\left(\frac{2R}{L}\right)^2+1} \approx \frac{1}{R}$.

Numeriskt: $\frac{\frac{L}{2}}{R\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{1.0}{2}}{1.0\cdot 10^{-3}\sqrt{(1.0\cdot 10^{-3})^2+\left(\frac{1.0}{2}\right)^2}} = 9.99998\cdot 10^2 \approx \frac{1}{R} = 1.0\cdot 10^3$, då $R = 1.0\cdot 10^{-3}$ m och $L = 1.0$ m.

e) Enligt Biot-Savarts lag bestäms styrkan av en integral över bidrag av formen (29-1). För punkten P_2 gäller att nämnaren (r^2) är betydligt större än för punkten P_1 för de punkter som ligger på ett större horisontellt avstånd än $L/2$. Därför blir styrkan av magnetfältet svagare i P_2.

4.

a) Gauss lag för magnetism (32-1) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$ implicerar att ingen magnetisk monopol kan omslutas av en yta i tre dimensioner.

b) Ampere-Maxwells lag (32-11) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_{enc}$, övergår då inga tidsberoende elektriska fält finns i närheten, till Amperes lag (29-14)

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = B\int ds = B\pi 2R = \mu_0 i_{enc} = \mu_0 i \;\Rightarrow\; B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R},$$

där vi valt en cirkel med radien R runt ledaren med strömmen i som integrationsväg. Magnetfältet är parallellt med cirkeln varför $\vec{B}\cdot d\vec{s} = Bds$ (se figur 29-4).

c) Om vi betraktar solljuset som en EM-våg blir enligt (33-33) kraften $F = \frac{2IA}{c}$, där intensiteten är $1.0\cdot 10^3$ W/m^2, så vi får $F = \frac{2\cdot 1.0\cdot 10^3\cdot 1.0\cdot 10^2}{2.998\cdot 10^8} = 6.67\cdot 10^{-4}$ N.

Om vi betraktar solljuset som fotoner blir antalet per sekund ($t = 1.0$ s) mot 1.0 m^2

$$N = \frac{Pt}{hf} = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{1.0 \cdot 10^3 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 2.998 \cdot 10^8} = 2.517 \cdot 10^{21}.$$

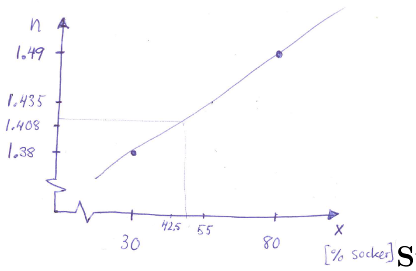
Varje foton bär rörelsemängden $p = \frac{h}{\lambda}$ (38-7) och ändringen i rörelsemängd för varje foton vid reflektion i spegeln är $\Delta p = 2p$. Per sekund och kvadratmeter blir det alltså en ändring i rörelsemängden på $2pN = 2\frac{P}{c}$. Enligt (33-30) är kraft multiplicerat med tid ändring i rörelsemängd (impulslagen), så eftersom vi räknat på 1.0 s är kraften för hela spegeln $Ft = 2\frac{P}{c}A = 2\frac{1.0 \cdot 10^3}{2.998 \cdot 10^8} 1.0 \cdot 10^2 = 6.67 \cdot 10^{-4}$ N.

d) Värmestrålningens effekt ges av (38-16) $P = \sigma\varepsilon AT^4$ (vi antar $\varepsilon = 1.0$ i brist på information om detta). Vi får då följande uppskattning av dessa förlusterna

$$P_{förlust} = \sigma AT^4 = 5.6704 \cdot 10^{-8} \cdot 1.0 \cdot 364^4 = 9.954 \cdot 10^2\, W \approx 1.0\, kW.$$

Enligt texten är den instrålade effekten från solen på en spegel $P_{instrålad} = 1.0 \cdot 10^2 \left[m^2\right] \cdot 1.0 \cdot 10^3 \left[\frac{W}{m^2}\right] = 1.0 \cdot 10^2\, kW$, så att $P_{förlust}$ är 1% av $P_{instrålad}$.
Svar d): Ca 1 % av den inkommade effekten försvinner som värmestrålning.

e) Enligt Brännströms mätningar är $\theta_c = 45°$ kritisk vinkel för totalreflektion, vilket enligt (33-45) ger $n = 1/\sin(45°) = \sqrt{2} \approx 1.41$. Informationen om x %-iga sockerlösningar med brytningsindex $n(x)$ ges av följande skiss och grafiska lösning



Svar e): Sockerhalten var ca 47 %.

5.

a) Storleken av kraften är $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} \frac{\left(1.602 \cdot 10^{-19}\right)^2}{\left(0.05292 \cdot 10^{-9}\right)^2} = 8.236 \cdot 10^{-8}$ N, (22-1) kombinerat med (22-3). **Svar a):** Kraften mellan protonen och elektronen har storleken $8.236 \cdot 10^{-8}$ N.

b) Enligt Newtons andra lag gäller $F = ma_c = mv^2/r_1$. Storleken av rörelsemängden är då $p = mv = \sqrt{r_1 F m} = e\sqrt{\frac{m}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1}} = 1.993 \cdot 10^{-24}$ kgm/s, **Svar b):** Rörelsemängden för elektronen är $1.993 \cdot 10^{-24}$ kgm/s.

c) Storleken av rörelsemängdsmomentet är $pr_1 = e\sqrt{\frac{mr_1}{4\pi\varepsilon_0}} = 1.993 \cdot 10^{-24} \cdot 0.05292 \cdot 10^{-9} = 1.054 \cdot 10^{-34}\ Js = 1 \cdot \hbar$, **Svar c):** Heltalet är 1.

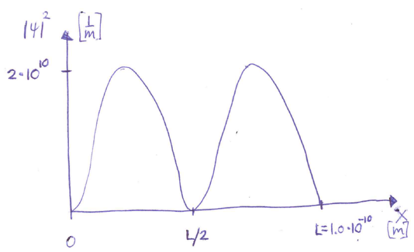
d) Enligt de Broglie gäller (38-17) $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi r_1} = \frac{\hbar}{r_1}$, vilket stämmer med **b)** och **c)** ovan. **Svar d):** Rörelsemängden för elektronen är $1.993 \cdot 10^{-24}$ kgm/s.

e) Om farten är $v = p/m$ så passerar elektronen ett varv på tiden $t = s/v = 2\pi r_1 m/p$. Strömmen är antalet laddningar som passerar ett tvärsnitt av slingan per sekund dvs $i = \frac{e}{t} = \frac{ep}{2\pi r_1 m} = \frac{e^2}{\sqrt{16\pi^3\varepsilon_0 r_1^3 m}} = 1.054 \cdot 10^{-3}$ A. Nu ger (28-35) $\mu = NiA = 1 \cdot i \cdot \pi r_1^2 = \frac{e^2\sqrt{r_1}}{\sqrt{16\pi\varepsilon_0 m}} = 9.272 \cdot 10^{-24}$ Am^2. Jämför med $\mu_{orb} = \frac{e}{2m}\hbar = 9.273 \cdot 10^{-24}$ Am^2 (den sk Bohr magnetonen). **Alternativt** skriver vi om strömmen på formen $i = \frac{e}{t} = \frac{ep}{2\pi r_1 m} = \frac{emvr_1}{2\pi r_1^2 m} = \frac{e}{2m}\frac{L}{A}$, så att vi direkt ser att $\mu = iA = \frac{e}{2m}L$. **Svar e):** Värdet på det magnetiska dipolmomentet för elektronen blir samma om vi beräknar det klassiskt.

6.

a) Enligt Heisenberg's olikhet (38-28) gäller $\Delta x \Delta p \geq \hbar$. I brunnen har elektronen endast kinetisk energi $E_k = \frac{p^2}{2m}$, så att med $p \simeq \Delta p$, får vi följande uppskattning för energin $E_k \simeq \frac{(\Delta p)^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{h^2}{8mL^2} = 6.025 \cdot 10^{-18}$ J, vilket stämmer bra med den kända energin (39-4). **Svar a):** Vi får uppskattningen $E_k \simeq \frac{h^2}{8mL^2} \approx 6.0 \cdot 10^{-18}$ J för elektronen.

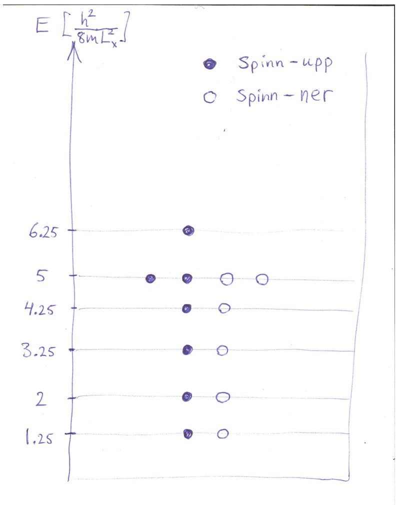
b) Enligt (39-12) gäller för $n = 2$ att $|\Psi(x)|^2 = A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$, som är noll för $x = 0, \frac{L}{2}, L$ och för övrigt positivt i brunnen. Värdet på konstanten $A^2 = \frac{2}{L}$ (39-17) kan erhållas genom integration. Så vi har att skissa funktionen $|\Psi(x)|^2 = 2 \cdot 10^{10} \sin^2\left(2\pi \cdot 10^{10} \cdot x\right)$ med de tre nollställena $x = 0,\ 0.50 \cdot 10^{-10},\ 1.0 \cdot 10^{-10}$



c) Enligt (39-20) har vi för $L_y = 2L_x$ energinivåerna

$$E_{n_x,n_y} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right) = \frac{h^2}{8mL_x^2}\left(n_x^2 + \frac{n_y^2}{4}\right),\ n_x,\ n_y = 1, 2, 3, \ldots .$$

Vi kan nu bilda en tabell (jämför övningsuppgift **39.55**) över vilka n_x och n_y som ger de 7 lägsta energitillstånden, sedan skissa elektronerna



och summera deras energier

$$E_{tot} = (2 \cdot 1.25 + 2 \cdot 2.0 + 2 \cdot 3.25 + 2 \cdot 4.25 + 4 \cdot 5.0 + 6.25)\,\frac{h^2}{8mL_x^2} =$$

$$47.75\frac{h^2}{8mL_x^2} = 47.75\frac{\left(6.626 \cdot 10^{-34}\right)^2}{8 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot (1.0 \cdot 10^{-10})^2} = 2.877 \cdot 10^{-16}\ J.$$

Svar c): Grundtillståndet har energin $2.9 \cdot 10^{-16}$ J och konfigurationen i figuren.

d) Enligt (38-38) beskrivs transmissionen av $T \approx \exp\left(-2bL\right) = \exp\left(-2 \cdot 5.1228 \cdot 10^9 \cdot 1.0 \cdot 10^{-10}\right) = 0.358952$, där (38-39) $b = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(2.0-1.0)\cdot 1.602\cdot 10^{-19}}{h^2}} = 5.1228 \cdot 10^9\ \mathrm{m}^{-1}$. **Svar d):** Transmissionskoefficienten är $T \approx 0.36$ (dvs ungefär var 3.e elektron tunnlar igenom barriären).

e) Enligt (41-11) svarar energiskillnaden (det sk bandgapet) E_g mot våglängden

$$\lambda = \frac{hc}{E_g} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 2.998 \cdot 10^8}{1.92 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}} = 6.458 \cdot 10^{-7}\,m.$$

Svar e): Våglängden från lysdioden är 646 nm.