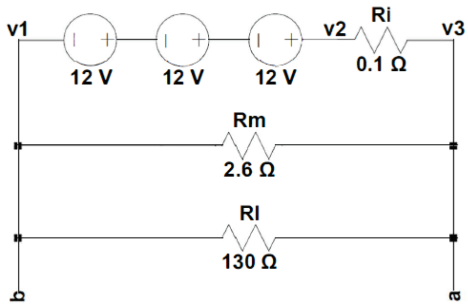
Lösningsförslag

Övningstenta Ellära 2017, FY502G

1.



a) $P_m = V_3 I_m \;\Rightarrow\; I_m = \dfrac{P_m}{V_3} = \dfrac{500}{36} = 13.9\,[\mathrm{A}]$

halva effekten ger: $I_{m1} = \dfrac{P}{V_3} = \dfrac{250}{36} = 6.9\,[\mathrm{A}]$

b) $W_{batt} = It \;\Rightarrow\; t = \dfrac{W_{batt}}{I} = \dfrac{12}{6.9} = 1.73\,[\mathrm{h}]$ alltså 1 timme och 44 min, (idealt batteri)

c) Ström in till noden genom R_i: $i_1 = -\dfrac{V_2 - V_3}{R_i}$, ström ut ur noden: $i_2 = \dfrac{V_3}{R_m}$ och $i_3 = \dfrac{V_3}{R_l}$, KCL ger:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{V_2 - V_3}{R_i} + \frac{V_3}{R_m} + \frac{V_3}{R_l} = 0$$

Lös ut V_3: $-\dfrac{V_2 - V_3}{R_i} + \dfrac{V_3}{R_m} + \dfrac{V_3}{R_l} = 0 \;\Rightarrow\; V_3\left(\dfrac{1}{R_i} + \dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_l}\right) = \dfrac{V_2}{R_i} \;\Rightarrow\; V_3 = V_2 \dfrac{1}{1 + \dfrac{R_i}{R_m} + \dfrac{R_i}{R_l}}$

sätt in siffror: $V_3 = 36 \dfrac{1}{1 + \dfrac{0.1}{2.6} + \dfrac{0.1}{130}} = 34.6\,[\mathrm{V}]$

d) hur lågt kan V_2 sjunka innan motorn stannar, dvs V_3 = 34 V?

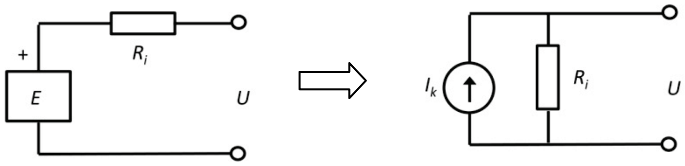
lampan påslagen: $V_2 = \left(1 + \dfrac{R_i}{R_m} + \dfrac{R_i}{R_l}\right) V_3 = \left(1 + \dfrac{0.1}{2.6} + \dfrac{0.1}{130}\right) 34 = 35.33\,[\mathrm{V}]$ (varje batteri ca 11.8 V)

lampan avslagen gör att lite mindre ström förbrukas och spänningen stiger lite, man kan se det som att resistansen R_l går mot oändligheten och termen *$1/R_l$* blir 0:

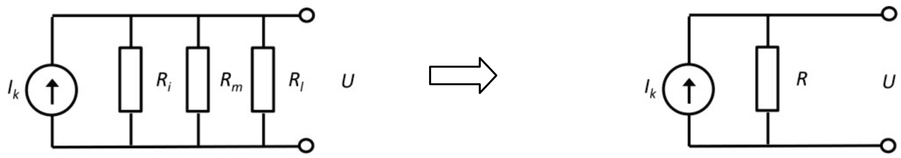
$V_3 = 35.33 \dfrac{1}{1 + \dfrac{0.1}{2.6}} = 34.02\,[\mathrm{V}]$ vi vinner alltså ca 20 mV och motorn startar igen (troligen ingen långvarig glädje dock, är det mörkt är det nog säkrare att låta lampan vara på och trampa själv).

e) Betrakta batterierna $E = V_2$ och R_i som en Thévenins tvåpol, den kan då göras om till en Norton:

$$I_k = \frac{V_2}{R_i}$$

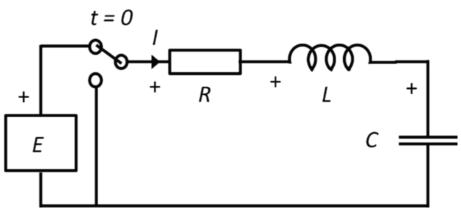


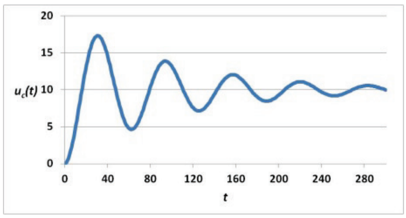
nu tillkommer en parallellkoppling med R_m och R_l:



där $I_k = \frac{V_2}{R_i} = \frac{36}{0.1} = 360\,[\mathrm{A}]$ $\quad R = \frac{1}{\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_m}+\frac{1}{R_l}} = \frac{1}{\frac{1}{0.1}+\frac{1}{2.6}+\frac{1}{130}} = 0.096\,[\Omega]$

2.





$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E$$

a) Man ser i figuren att kondensatorspänningen verkar svänga in mot stationära värdet 10 V. När stationärtillståndet är uppnått, och spänningen konstant, är alla derivator noll:

$u_C(t) = E$ alltså spänningen E = 10 V.

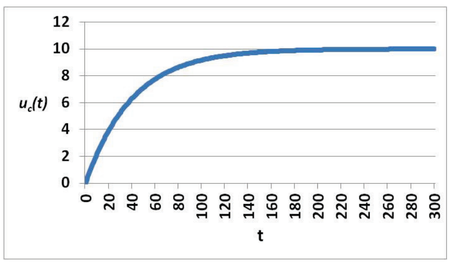
b) Då induktansen är borta blir differentialekvationen:

$$RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E \;\Rightarrow\; \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_C(t) = \frac{E}{RC}$$ en första ordningens ODE

c) Lösningen ges på samma sätt som i föreläsningsanteckningarna del 5, bild 5-8.

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

(tidsskalan behöver inte sättas ut med värden)



d) $$\frac{u_C(t)}{E} = 1 - e^{-\frac{1}{RC}t} = 0.8$$ *RC= 40*, lös ut *t*:

$$1 - \frac{u_C(t)}{E} = e^{-\frac{1}{RC}t} \Rightarrow t = -RC\ln\left(1 - \frac{u_C(t)}{E}\right) = -40\ln(1-0.8) = 64.4\ [\mathrm{s}]$$

e) Om det blir avbrott i *R*, finns ingen sluten krets och KVL gäller inte. Hela differentialekvationen faller, så man måste se på kretsen. Om det är avbrott i *R* kommer aldrig någon ström fram som kan ladda upp kondensatorn, alltså $u_C(t) = 0$ för alla *t*.

3.

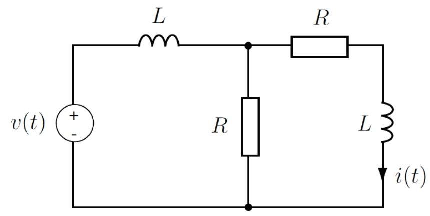
a) Effektivvärdet för spänningen i våra uttag i Sverige är 230 V. Det gör att toppspänningen blir:

$$\hat{u} = \sqrt{2}u_{eff} = \sqrt{2}\cdot 230 = 325\ [\mathrm{V}]$$

frekvensen är 50 Hz, gör att vinkelfrekvensen blir: $\omega = 2\pi f = 100\pi \approx 314\ [\mathrm{rad/s}]$

b) Joules lag (vi räknar med effektivvärden): $P = u_{eff}i_{eff} \Rightarrow i_{eff} = \frac{P}{u_{eff}} = \frac{3000}{230} = 13\ [\mathrm{A}]$
säkringen på 10 A kommer att lösa ut.

c) Spänningen över vertikala resistorn är given:



$$V_R = \frac{R(R+j\omega L)}{j\omega L(2R+j\omega L)+R(R+j\omega L)}V$$

Bakgrund: Detta uttryck kommer man fram till genom att:

Seriekoppling i grenen längst till höger: $R + j\omega L$

Parallellkoppling med vertikala resistorn: $$\frac{R(R+j\omega L)}{R+j\omega L+R} = \frac{R(R+j\omega L)}{2R+j\omega L}$$

Spänningsdelning: $$V_R = \frac{\frac{R(R+j\omega L)}{(2R+j\omega L)}}{j\omega L + \frac{R(R+j\omega L)}{(2R+j\omega L)}}V = \frac{R(R+j\omega L)}{j\omega L(2R+j\omega L)+R(R+j\omega L)}V$$

Strömmen blir då:

$$\tilde{i} = \frac{V_R}{(R+j\omega L)} = \frac{1}{(R+j\omega L)}\frac{VR(R+j\omega L)}{j\omega L(2R+j\omega L)+R(R+j\omega L)} = \frac{VR}{j\omega L(2R+j\omega L)+R(R+j\omega L)}$$

Vi vill ha -90° fasvridning (strömmen efter spänningen). Täljaren i uttrycket är ett reellt tal, *R*, och kan inte ge oss någon fasvridning, vi får förlita oss på nämnaren.

Nämnaren kan skrivas om:

$$j\omega L(2R+j\omega L)+R(R+j\omega L) = j\omega L2R - \omega^2L^2 + R^2 + j\omega LR = R^2 - \omega^2L^2 + j\omega L3R$$

Den komplexa strömmen har allmänt ett uttryck av formen: $ue^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{u}{e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{u}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{u}{j}$

(där vi använt Eulers formel).

Det betyder att nämnarens realdel ska vara noll:

$R^2 - \omega^2 L^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{R}{L}$ (det finns en negativ lösning också, men den behöver vi inte)

d) sätt in den aktuella frekvensen och beräkna strömmen vid $v(t) = V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

$$i(t) = v(t)\frac{R}{R^2 - \omega^2 L^2 + j\omega L3R} = v(t)\frac{R}{j3R^2} = v(t)\frac{1}{j3R} = v(t)\frac{1}{3R}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

gå över till komplexa strömmar och spänningar:

$$\tilde{v}(t) = V_0 e^{j\left(\omega t + \pi/4\right)}$$

$$\tilde{i}(t) = \tilde{v}(t)\frac{1}{3R}e^{-j\frac{\pi}{2}} = V_0 e^{j\left(\omega t + \pi/4\right)}\frac{1}{3R}e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{V_0}{3R}e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{V_0}{3R}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + j\frac{V_0}{3R}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

då blir den reella strömmen:

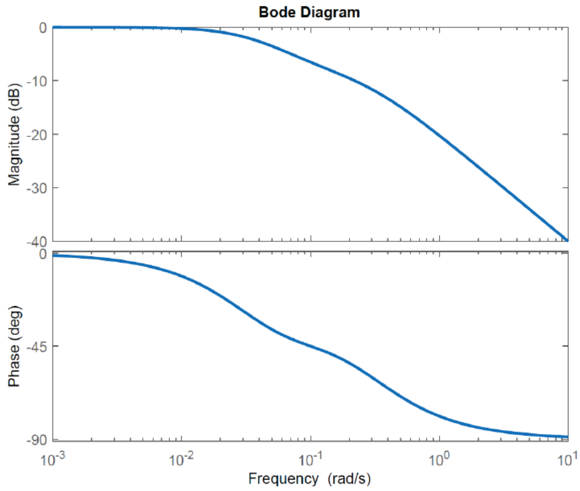
$$i(t) = \frac{V_0}{3R}\cos\left(\frac{R}{L}t - \frac{\pi}{4}\right)$$

e) Vi jämför spänningar med varandra.

Vid *H(0)*, alltså frekvensen noll är signalen 100 gånger starkare än vid frekvensen *H(ω)*.

Eftersom vi jämför *spänningar* används decibel-beräkningen:

$$H_{dB} = 20\log\left(\frac{V_R}{V}\right) = 20\log\left(\frac{1}{100}\right) = -40\ [\text{dB}]$$



Tittar man i amplitudkurvan (magnituden), verkar det inträffa vid ca *ω = 10* rad/s.

Vill man kollräkna (bara för kul) kan man använd uttrycket från 3 c) ovan:

$$\frac{V_R}{V} = \frac{R(R + j\omega L)}{j\omega L(2R + j\omega L) + R(R + j\omega L)} = \frac{R^2 + j\omega LR}{R^2 - \omega^2 L^2 + j\omega L3R}$$

Vi är primärt intresserade av beloppet (magnituden):

$$\left|\frac{V_R}{V}\right| = \left|\frac{R^2 + j\omega LR}{R^2 - \omega^2 L^2 + j\omega L3R}\right| = \frac{\sqrt{R^4 + (\omega LR)^2}}{\sqrt{(R^2 - \omega^2 L^2)^2 + (\omega L3R)^2}} = \frac{\sqrt{0.1^4 + (10 \cdot 1 \cdot 0.1)^2}}{\sqrt{(0.1^2 - 10^2 \cdot 1^2)^2 + (10 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 0.1)^2}}$$

$$= \frac{1.000}{100.0} = \frac{1}{100}$$