ÖREBRO
UNIVERSITET

# Övningstentamen 3 på kursen Integraler och differentialekvationer
## MA504G

---

**Hjälpmedel:** Skrivmateriel och eget medtaget handskrivet formelblad i A4-format där det endast är tillåtet med formler och definitioner och endast på ena sidan av bladet.

**Betygskriterier:** För betyget 3/4/5 krävs minst 3 poäng på differentialekvationer på grundläggande delen samt totalt 30/40/50 poäng på tentamen.

**Anvisningar:** Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

**Skrivningsresultat:** Meddelas inom 15 arbetsdagar.

**Examinator:** Marcus Sundhäll.

**Lycka till!**

---

## Grundläggande del

1. Bestäm alla komplexa tal $z = a + ib$ sådana att [6p]

$$|z - i| = |z + 1| .$$

2. I en IR-krets ges strömmen, vid tiden $t$ sekunder efter att strömbrytaren slagits på, av $I(t)$ i ampere enligt differentialekvationen [6p]

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V ,$$

där $I(0) = 0$. Induktansen $L$, resistansen $R$ och spänningen $V$ är positiva konstanter. Lös differentialekvationen och bestäm $\lim_{t\to\infty} I(t)$. Ge ett uttryck för hur lång tid det tar efter att strömbrytaren slagits på till att strömmen uppnår hälften av gränsvärdet.

3. Bestäm allmän lösning $y(x)$ till differentialekvationen [6p]

$$y'' + y = x + \sin(x)$$

4. Beräkna [6p]

$$\int_0^1 x^2 \arctan(x)\, dx .$$

5. Använd integraluppskattning för att bestämma ett så stort tal $A$ och ett så litet tal $B$ som möjligt så att [6p]

$$A \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^3 - k} \le B .$$

6. Använd Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet [6p]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2}{e^{x^2} - 1 - x^2} .$$

## Fördjupad del

7. En ellipsskiva kan, givet $a > 0$ och $b > 0$, beskrivas av olikheten [8p]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 .$$

Troliggör med hjälp av integralberäkning att arean av en sådan ellipsskiva ges av $\pi ab$. Om vi antar att ellipsskivan kan betraktas som en tunn och homogen skiva så kommer tyngdpunkten att ligga i origo. Använd integraler för att motivera varför det blir så.

8. En vattentank har formen av en stående cirkulär cylinder med radien $R = 1$ m och höjden $H = 3$ m. Tanken fylls genom en ventil i locket, sådan att volymflödet genom den är proportionellt mot avståndet ner till vattenytan. Proportionalitetskonstanten är $\pi$ $\mathrm{m}^2/\mathrm{min}$. Efter hur lång tid är tanken fylld till hälften om tanken är tom från början? [8p]

9. Bestäm volymen av den kropp som fås då området [8p]

$$D = \{(x,y) : 1 + \ln x \leq y \leq 2\, , 1 \leq x \leq e\}$$

får rotera kring $y = 1$.