1.

Ja. För $x \in [0,4]$ är den givna olikheten ekvivalent med $x+2+2(x-5) > x-6$. Den olikheten har lösningarna $x > 1$. Det är alltså alla tal x som uppfyller att $1 < x \leq 4$ som är lösningar till den ursprungliga olikheten.

2.

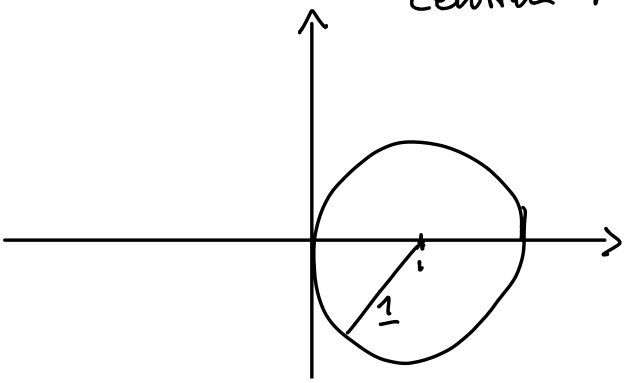
$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

cirkel m. radie 1
centrum i $(1,0)$



3.

tan är injektiv på $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Svar: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4.

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x} \cdot \frac{x-1}{x^2-1}$$

b)

$$2 \cdot \boxed{\frac{e^{2x}-1}{2\cdot x}} \cdot \boxed{\frac{x-1}{x^2-1}} \to 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \text{ då } x \to 0$$

$\to 1$ $\quad \to \frac{-1}{-1} = 1$

a)

$$\frac{e^{2x}-1}{x} \cdot \frac{\cancel{x-1}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} \to \frac{e^2-1}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{e^2-1}{2} \text{ då } x \to 1$$

c)

$$\frac{\underbrace{\boxed{e^{2x}}}_{\to+\infty}\Big(1-\underbrace{\boxed{\frac{1}{e^{2x}}}}_{\to 0}\Big) \cdot \cancel{x} \cdot \Big(1-\underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\to 0}\Big)}{\cancel{x} \cdot \boxed{x^2}\Big(1-\underbrace{\boxed{\frac{1}{x^2}}}_{\to 0}\Big)} \to +\infty \text{ då } x \to +\infty$$

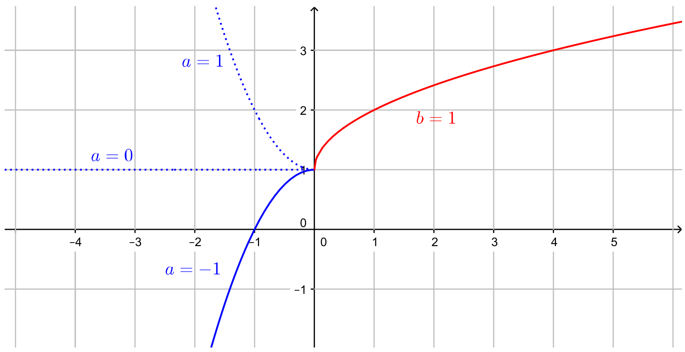
5.

Kontinuiteten: Oavsett val av a och b så är funktionen kontinuerlig då $x \neq 0$. Vi har att $f(0) = b$, $\lim_{x\to 0_+} f(x) = b$ och $\lim_{x\to 0_-} f(x) = 1$. Funktionen är alltså kontinuerlig även i $x = 0$ omm $b = 1$.

Injektiviteten: $1+\sqrt{x}$ är strängt växande i $[0, +\infty[$. I intervallet $]-\infty, 0[$ så är ax^2+1 strängt växande om $a < 0$, konstant om $a = 0$ och strängt avtagande om $a > 0$. Injektivitet fås alltså omm $a < 0$.

Inversen: Om vi t.ex. väljer $a = -1$ så blir inversen

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x} & \text{om } x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{om } x \geq 1 \end{cases}.$$



6.

Vi har att $f'(x) = (1-x)e^{-x} < 0$ om $x > 1$ så $f(x)$ är strängt avtagande i $[1, +\infty[$. Vidare har vi att $f''(x) = (x-2)e^{-x} < 0$ om $x < 2$ så $f(x)$ är strängt konkav i $]-\infty, 2]$. Kombinerar vi detta så får vi att $f(x)$ är både avtagande och konkav i $[1, 2]$.

7.

(a) Se boken. Observera att rent definitionsmässigt så har stationär punkt med derivata att göra vilket lokal extrempunkt inte har.

(b) $f'(x) = 0$ omm $x = 1$. Detta är enda stationära punkt men teckenstudium av $f'(x)$ visar att det inte är en lokal extrempunkt utan en terasspunkt. $f'(x)$ är nämligen ≤ 0 i hela intervallet, d.v.s. $f(x)$ är avtagande. Det innebär å andra sidan att definitionsmängdens vänstra ändpunkt, $x = 0$, är en lokal maxpunkt (till och med global sådan) och att den högra ändpunkten, $x = 4$, är lokal (och global) minpunkt. Några andra lokala extrempunkter finns inte.

8.

$f(x)$ är definierad för alla $x \neq -1$. Eftersom $f(x) \to \mp\infty$ då $x \to -1_{\pm}$ så är $x = -1$ lodrät asymptot. Det finns inga andra asymptoter.

Det gäller att

$$f'(x) = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}.$$

Alltså är $f'(x) = 0$ omm $x = 0$ eller $x = -3/2$. Teckenstudium visar att $x = 0$ är terasspunkt men att $f(-3/2) = 27/4$ är lokal minpunkt.

Vidare är

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3x+3)}{(x+1)^3}.$$

Alltså är $f''(x) = 0$ omm $x = 0$. Teckenstudium visar att detta är en inflexionspunkt. f är konkav till vänster och konvex till höger om $x = 0$.

9.

Om lådans bredd är b och höjd är h så ska vi minimera $L = 4b + 4h$ under bivillkoret att volymen är $V = b^2h = 32$, d.v.s. att $h = 32/b^2$. Vi ska alltså minimera

$$L(b) = 4b + \frac{128}{b^2} \text{ då } b > 0.$$

Derivering ger

$$L'(b) = 4 - \frac{256}{b^3} = 0 \Leftrightarrow 4b^3 = 256 \Leftrightarrow b^3 = 64 \Leftrightarrow b = 4.$$

Det finns alltså en stationär punkt och där är $L(b) = L(4) = 24$. Motsvarande höjd är $h = 2$.

Eftersom $L'(b)$ är kontinuerlig och $b = 4$ är enda nollställe, så är har $L'(b)$ samma tecken i hela $]0,4[$ och samma tecken i hela $]4,+\infty[$. $L(b)$ är alltså strängt monoton både i $]0,4[$ och i $]4,+\infty[$. Då finns bara tre tänkbara scenarion. Antingen är $L(b)$ strängt växande i $]0,4[$ och strängt avtagande i $]4,+\infty[$. I så fall är $b = 4$ global maxpunkt. Eller så är $L(b)$ strängt avtagande i $]0,4[$ och strängt växande i $]4,+\infty[$. I så fall är $b = 4$ global minpunkt. Eller så är $L(b)$ strängt växande (eller strängt avtagande) i hela $]0,+\infty[$. I så fall är $b = 4$ varken max- eller minpunkt. Det finns flera sätt att ta reda på vilket som gäller i just den här uppgiften.

Alt. 1. Eftersom $L(b) \to +\infty$ då $b \to 0_+$ och då $b \to +\infty$ så måste det vara så att $L(b)$ är strängt avtagande i $]0,4[$ och strängt växande i $]4,+\infty[$. Det följer att $b = 4$ är global minpunkt.

Alt. 2. Eftersom t.ex. $L'(1) = 4-256 < 0$ så måste $L'(b) < 0$ i hela $]0,4[$. Eftersom t.ex. $L'(10) = 4 - 0,256 > 0$ så måste $L'(b) > 0$ i hela $]4,+\infty[$. $L(b)$ är alltså strängt avtagande i $]0,4[$ och strängt växande i $]4,+\infty[$. Det följer att $b = 4$ är global minpunkt. Ovanstående redovisas med fördel i en teckentabell. Som alternativ till att beräkna $L'(b)$ i vissa punkter kan man utgå från en faktorisering av $L'(b)$:

$$L'(b) = \frac{4b^3 - 256}{b^3} = \frac{4(b-4)(b^2+4b+16)}{b^3}$$

Det ger nedanstående teckentabell.

b	0		4		$+\infty$
$4(b-4)$		$-$	0	$+$	
$b^2+4b+16$		$+$	$+$	$+$	
b^3		$+$	$+$	$+$	
$L'(b)$	$*$	$-$	0	$+$	
$L(b)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

10.

Enligt given information är $dV/dt = 0,03$ kubikmeter per minut, $dh/dt = 0,004$ meter per minut och

$$\frac{dV}{dh} = \begin{cases} 3h + 6, & 0 \leq h < 1 \\ 15, & 1 < h \leq 2 \end{cases}.$$

dV/dh existerar inte då $h = 1$.

Enligt kedjeregeln är $(dV/dt) = (dV/dh) \cdot (dh/dt)$. Om den aktuella tidpunkten skulle infalla när vattendjupet är över 1 meter så skulle alltså $0,03 = 15 \cdot 0,004$. Men denna likhet är inte sann, så djupet kan inte vara över 1 meter. Om den aktuella tidpunkten istället infaller när vattendjupet är under 1 meter så ska $0,03 = (3h+6) \cdot 0,004$. Denna likhet gäller omm $h = 0,5$, vilket lyckligtvis är ett tal i intervallet $[0,1[$. Därmed är $h = 0,5$ m det sökta vattendjupet.