ÖREBRO
UNIVERSITET

Lösningsförslag till tentamen på kursen Integraler och differentialekvationer 2020-03-23

1. Notera att $\Delta x = 1/n$ så för att välja lämpligt x_i moteras att
$$\frac{2i}{n} = 2 \cdot i \cdot \frac{1}{n}$$
så att vi lämpligen låter $x_i = i/n$, med indelat intervall [0,1], och får gränsvärdet
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (2x_i + 1)^2 \ .$$
Låt $f(x) = (2x + 1)^2$. Då kan gränsvärdet skrivas om och beräknas enligt integralberäkningen
$$\int_0^1 (2x + 1)^2 \, dx = \left[\frac{(2x + 1)^3}{6} \right]_0^1 = \frac{27 - 1}{6} = \frac{13}{3} \, .$$
Svar: 13/3.

2. Notera att differentialekvationen $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ är linjär och att lösningarna därför är på formen
$$y = y_h + y_p$$
där y_h är allmän lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + y = 0$ och y_p en partikulärlösning till $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$. Vi bestämmer först y_h. Karaktäristik ekvation $r^2 + 2r + 1 = 0$ har dubbelrot $r = -1$ så vi får att
$$y_h(x) = (Cx + D)e^{-x} \, ,$$
där C och D är godtyckliga konstanter. Ansätt $y_p = z(x)e^{-x}$. Då fås att
$$\begin{aligned} y_p' &= z'e^{-x} - ze^{-x} = (z' - z)e^{-x} \, , \\ y_p'' &= (z'' - z')e^{-x} - (z' - z)e^{-x} \\ &= (z'' - 2z' + z)e^{-x} \, , \end{aligned}$$
som insatt i $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ (efter förenkling) ger att
$$z'' = x \, .$$
Upprepad integrering ger att
$$z = \frac{x^3}{6} + cx + d$$

är lösningar. Eftersom vi endast behöver en lösning så väljer vi $c = d = 0$ och får $z_p = x^3/6$ så att en partikulärlösning till $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ ges av

$$y_p(x) = \frac{x^3}{6} \cdot e^{-x} .$$

Vi har att

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Cx + D)e^{-x} + \frac{x^3}{6} \cdot e^{-x} = \left(\frac{x^3}{6} + Cx + D\right) e^{-x} .$$

Svar: $y = ((x^3/6) + Cx + D)e^{-x}$, där C och D är godtyckliga konstanter.

3. Partialbråksuppdelning (gör denna) ger att

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} ,$$

så att

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t^2 + t}\, dt &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= \ln|t| - \ln|t+1| + C = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C . \end{aligned}$$

Notera att vi kan anta att $x > 0$ eftersom vi annars skulle få en diverent integral. Vi bestämmer nu x enligt beräkningen

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1}{t^2 + t}\, dt &= \frac{1}{2} \\ \left[\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\right]_1^x &= \frac{1}{2} \\ \ln\frac{x}{x+1} - \ln\frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\ \frac{x}{x+1} &= \frac{\sqrt{e}}{2} \\ x &= \frac{\sqrt{e}}{2 - \sqrt{e}} . \end{aligned}$$

Svar: $x = \sqrt{e}/(2 - \sqrt{e})$.

4. Med variabelbytet $u = \tan(x)$ fås att $du = (1 + \tan^2(x))dx$ och att $u(0) = \tan(0) = 0$ samt $u(\pi/4) = \tan(\pi/4) = 1$ så att

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \left(\tan^3(x) + \tan(x)\right) dx &= \int_0^{\pi/4} \tan(x) \left(\tan^2(x) + 1\right) dx \\ &= \int_0^1 t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Svar: 1/2.

5. Notera att $y(0) = 2$ eftersom integral över en punkt blir 0. Analysens huvudsats ger att

$$\begin{aligned} y'(x) &= 0 + x - y(x) \\ y'(x) + y(x) &= x\,. \end{aligned}$$

Multiplikation med en integrerande faktor e^x ger att vi kan lösa differentialekvationen enligt

$$\begin{aligned} y'e^x + ye^x &= xe^x \\ (ye^x)' &= xe^x \\ ye^x &= \int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C \\ y(x) &= x - 1 + Ce^{-x}\,. \end{aligned}$$

Villkoret $y(0) = 2$ ger att $2 = 0 - 1 + C$ så att $C = 3$.

Svar: $y(x) = x - 1 + 3e^{-x}$.

6. Notera att Maclaurinutvecklingen för $f(x) = e^x$ ges av

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(\theta x)}{3!} \cdot x^3$$

där $|\theta x| \le |x| \le 1/2$. Eftersom $|f^{(3)}(\theta x)| = e^{\theta x} \le e^{1/2} < e$ om $|x| \le 1/2$ så följer att

$$\frac{|f^{(3)}(\theta x)|}{3!} < \frac{e}{3 \cdot 2 \cdot 1} < \frac{1}{2}$$

om $|x| \le 1/2$ så att

$$\left| e^x - 1 + x - \frac{x^2}{2} \right| = \frac{|f^{(3)}(\theta x)|}{3!} \cdot |x|^3 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

om $|x| \le 1/2$.

7. Två väsentligen olika metoder för att lösa uppgiften är att använda antingen rörformeln eller skivformeln. Låt oss först lösa uppgiften med rörformeln, där vi noterar att volymen av ett rör vid position x med tjocklek dx ges av $dV = 2\pi x(\sqrt{8 - x^2} - x)\,dx$ så att sökt volym ges av

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 x(\sqrt{8 - x^2} - x)\,dx \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3} \cdot (8 - x^2)^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= 2\pi \left(-\frac{8}{3} - \frac{8}{3} + \frac{8\sqrt{8}}{3} \right) = \frac{32\pi(\sqrt{2} - 1)}{3} \end{aligned}$$

Låt oss nu använda skivformeln istället. Då behöver området delas upp i två delar, D_1 och D_2, enligt nedan:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) : 0 \le x \le y \,, 0 \le y \le 2\}\,, \\ D_2 &= \{(x,y) : 0 \le x \le \sqrt{8-y^2}\, 2 \le y \le \sqrt{8}\}\,. \end{aligned}$$

Skivformeln tillämpad på rotation kring y-axeln för D_1 respektive D_2 ger att sökt volym ges av

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 y^2\, dy + \pi \int_2^{\sqrt{8}} (8-y^2)\, dy \\ &= \pi \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 + \pi \left[8y - \frac{y^3}{3}\right]_2^{\sqrt{8}} \\ &= \frac{8\pi}{3} + \pi \left(8\sqrt{8} - \frac{8\sqrt{8}}{3} - 16 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32\pi(\sqrt{2}-1)}{3}\,. \end{aligned}$$

Svar: $32\pi(\sqrt{2}-1)/3$ v.e.

8. Enligt Torricellis lag fås att

$$\frac{dV}{dt} = k\sqrt{h(t)}$$

för någon konstant k där $h(t)$ är vattennivån vid tiden t minuter. Kedjeregeln ger att vi kan skriva om differentialekvationen enligt

$$\frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}\,.$$

Analysens huvidsats ger att

$$\frac{dV}{dh} = \pi h$$

så att vi ytterligare kan skriva om differentialekvationen enligt

$$\pi h \cdot \frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}\,.$$

Det är rimligt att anta att $h \neq 0$ (dvs ej konstant lika med 0) vilket ger att vi kan lösa den separabla differentialekvationen enligt

$$\begin{aligned} \pi h \cdot \frac{dh}{dt} &= k\sqrt{h} \\ \int \pi h^{1/2}\, dh &= \int k\, dt \\ h^{3/2} &= k't + C\,, \end{aligned}$$

där k' och C är konstanter. Notera att vi har två villkor, $h(0) = H$ och $h(10) = H/4$. Villkoret $h(0) = H$ ger att $C = H^{3/2}$. Villkoret $h(10) = H/4$ ger att

$$\begin{aligned} \frac{H^{3/2}}{8} &= 10k' + H^{3/2} \\ k' &= -\frac{7H^{3/2}}{80}. \end{aligned}$$

Vi vill bestämma t så att $h(t) = 0$ vilket sker då

$$t = -\frac{C}{k'} = -\frac{H^{3/2}}{-\frac{7H^{3/2}}{80}} = \frac{80}{7}.$$

Svar: Det tar 80/7 sekunder att tömma behållaren.

9. Integralen är genariserad i 1 och ∞. Det kan därför vara lämpligt att hantera en gräns i taget för att avgöra konvergens. Eftersom integranden är positiv så är den generaliserade integralen konvergent om och endast om den är ändlig. Vi studerar först vad som händer nära $x = 1$ där vi kan göra omskrivningen

$$\frac{1}{(x+1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{x+1}$$

Eftersom $1/(x+1) \to 1/2 > 0$ då $x \to 1$ så är den enda term som påverkar konvergens given av $1/\sqrt{x-1}$. Med ett enkelt variabelbyte ($t = x-1$) är detta ekvivalent med att avgöra konvergens vid integrering av

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$$

där $a > 0$. Vi vet att denna integral är konvergent vilket ger att

$$\int_1^2 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-1}}\, dx$$

är konvergent. Nu återstår att avgöra om integralen

$$\int_2^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-1}}\, dx$$

är konvergent. Detta kan ses genom att studera integranden för stora positiva x enligt omskrivningen

$$\frac{1}{(x+1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

där vi kan se att

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \to 1 > 0$$

då $x \to \infty$ så att konvergens avgörs av möjlig konvergens för

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx\,.$$

Eftersom denna konvergens är känd så förljer att

$$\int_2^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-1}}\,dx$$

är konvergent. Eftersom vi erhöll konvergens i de två delarna så är helheten konvergent. Vi ska nu bestämma integralens värde. Notera att det kan vara lämpligt att först bestämma en primitiv. Detta kan göras genom variabelbytet $t=\sqrt{x-1}$ som ger att $x=t^2+1$ och därmed $dx=2tdt$ vilket ger integreringen

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-1}}\,dx &= \int \frac{1}{(t^2+2)t}\cdot 2t\,dt \\
&= \int \frac{2}{t^2+2}\,dt \\
&= \int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dt \\
&= \sqrt{2}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C \\
&= \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}\right)+C\,.
\end{aligned}$$

Detta ger att önskat värde ges av

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-1}}\,dx &= \lim_{R\to\infty, r\to 1^+} \int_r^R \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-1}}\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty, r\to 1^+} \left[\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}\right)\right]_r^R \\
&= \lim_{R\to\infty, r\to 1^+} \sqrt{2}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{R-1}}{\sqrt{2}}\right)-\arctan\left(\frac{\sqrt{r-1}}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Svar: Den generaliserade integralen är konvergent och dess värde ges av $\pi\sqrt{2}/2$.