ÖREBRO
UNIVERSITET

Omtentamen på kursen Integraler och differentialekvationer

MA504G

2022-08-18, kl. 14:15–19:15

Hjälpmedel: Skrivmateriel och bifogat formelblad.

Betygskriterier: För betyget 3/4/5 krävs minst 3 poäng på differentialekvationer på grundläggande delen samt totalt 30/40/50 poäng på tentamen.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Marcus Sundhäll.

Lycka till!

Grundläggande del

1. (a) Lös den binomiska ekvationen $z^6 = -64$ och rita en bild som visar var lösningarna kan placeras i det komplexa talplanet. [3p]

   (b) Använd lämplig bild för att tolka och bestämma integralen [3p]

$$\int_{-2}^{4} (3 - |x-1|)\, dx\,.$$

2. Lös differentialekvationen [6p]

$$y' = x(1-y)\,,\; y < 1\,,$$

   under bivillkoret $y(0) = 0$.

3. Beräkna integralen [6p]

$$\int_{-3}^{-2} x^2\sqrt{x+3}\, dx\,.$$

4. Använd lämpliga Maclaurinutvecklingar för att bestämma gränsvärdet [6p]

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos(3x))^2}\,.$$

5. Bestäm allmän lösning $y(x)$ till differentialekvationen [6p]

$$y'' + y = x^2 + 2\cos(x)\,.$$

6. Bestäm $f(x)$ så att [6p]

$$xf(x) = \int_1^x \frac{1}{1+3t^2}\,dt\,.$$

Fördjupad del

7. Bestäm tyngdpunktens x-koordinat och y-koordinat för området D där [8p]

$$D = \left\{(x,y) : \frac{1}{2}\arcsin(y) \le x \le \frac{\pi}{4}\,,\ 0 \le y \le 1\right\}.$$

Tips! Rita mängden för att få en bild av hur området ser ut och kan beskrivas även i termer av y beroende på x.

8. Ett svänghjul roterar med vinkelhastigheten ω. Antag att bromsning av hjulet sker enligt sambandet [8p]

$$\frac{d\omega}{d\phi} = -\frac{\omega \ln 2}{8\pi}$$

där ϕ är rotationsvinkeln. Bestäm hur många varv hjulet roterar innan dess vinkelhastighet minskat från ω_0, motsvarande $\phi = 0$, till $\omega_0/2$.

9. Bestäm alla primitiva funktioner till [8p]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}$$

och visa att $f(x)$ är avtagande om $x > 1$. Gör därefter en lämplig uppskattning av serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k-1)}\,.$$