1 a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ $\vec{u} \times \vec{v} = (-10, 2, -4)$

(b) $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$A A^T = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

(c) 9 rader 12 kolonner.

2. Avgör för vilka värden på a,b som ekv systemet

I

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+3y+az=b \end{cases}$$

har

(a) unik lösning

(b) oändligt många lösningar

(c) inga lösningar.

lös för $a=b=4$

III $a=b=4$ ger totalmatris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad (+1) \quad (2) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

ger $x=-5,\ y=2,\ z=2.$

II

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-4 & b-2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & b-2 \end{array}\right)$$

a) $a \neq 3$. unik lösning

b) $a = 3,\ b = 2$ parameterlösning

c) $a = 3,\ b \neq 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ (-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \underline{} & & \underline{} & \underline{} \\ & s & & t & r \end{array}$$

pivotkolonn

Bas för $K(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Bas för $R(A)$

$= \{ (1\ 1\ 0\ 3\ 3), (0\ 0\ 1\ 0\ 1) \}$

Vi får parameterlösning

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-3t-3r \\ s \\ -r \\ t \\ r \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bas för } N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

En bas är en mängd vektorer som spänner upp rummet och är linjärt oberoende

(a) 2 vektorer räcker inte för att spänna upp ett tredimensionellt rum. Alltså ej en bas.

(b) 3 vektorer spänner upp ett 3dimensionellt rum omm de är linjärt oberoende. Följer om determinant = 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

-1

Alltså en bas

c) Eftersom $4 > 3$ så är vektorerna linjärt beroende och utgör ingen bas

5. $\vec{v}$ är en egenvektor till matrisen A med egenvärde λ

a) om $\vec{v} \neq \vec{0}$ och $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

alltså är $\vec{u}$ en egenvektor till matrisen med egenvärde 4

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

Nej.

Tex ekv 1 ger $\lambda = 7$. Då stämmer inte ekv 2.

Ingen egenvektor.

Antag B inverterbar.

$$BXB = I + B^2$$

multiplicera med B^{-1} från vänster

$$XB = B^{-1}BXB = B^{-1}(I+B^2) = B^{-1}+B$$

Miplicera med B^{-1} från höger

$$X = XBB^{-1} = (B^{-1}+B)B^{-1} = B^{-2} + BB^{-1} = \underline{\underline{B^{-2}+I}} = (B^2)^{-1} + I.$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

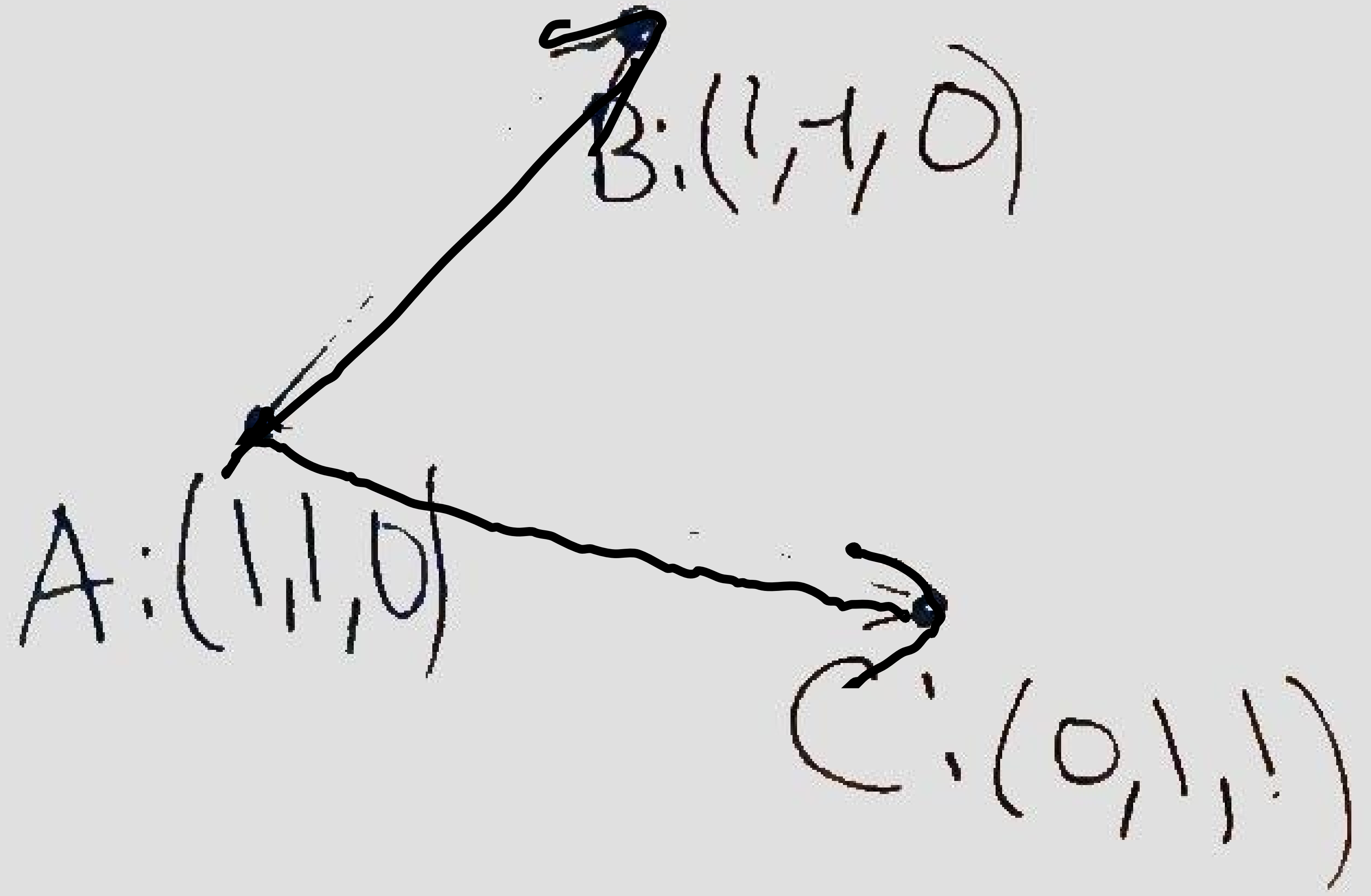
$\det B^2 = \underline{1} \Leftrightarrow \det B = \pm 1$

(och därför inverterbar)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \end{matrix} (-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(B^2)^{-1} = (B^{-1})^2$$

$$X = (B^2)^{-1} + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\vec{AB} = (0, -2, 0)$$

$$\vec{AC} = (-1, 0, 1)$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (-2, 0, -2)$$

punkt-normalform med punkt A.

Planets ekvation $\quad -2 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-1) - 2 \cdot (z-0) = 0$

ger ~~$-2x - 2z = -2$~~ ger $x + z = 1$!

linjens ekvation: $L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

parameterform

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

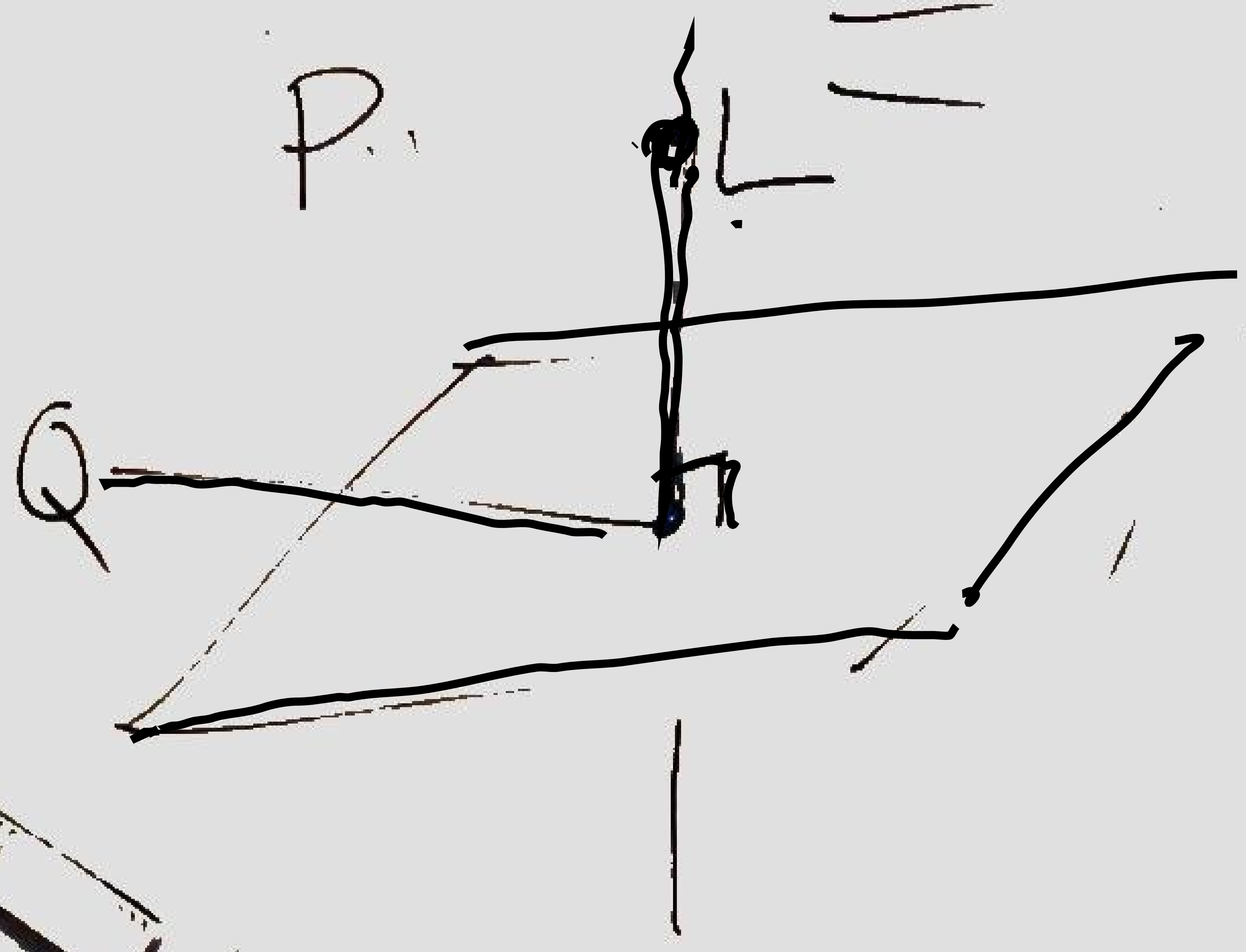
sätt in linjens ekv i planets ekvation!

$$(2-2t) + (1-2t) = 1$$

$$-4t = -2 \text{ ger } t = \frac{1}{2}.$$

$$Q = \text{Skärningspunkten} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

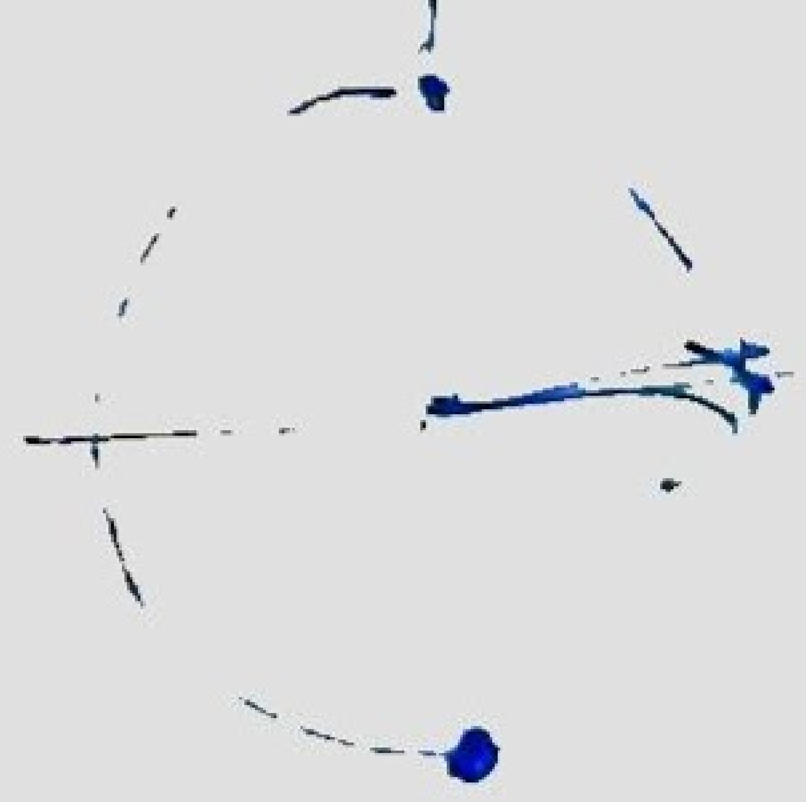
$$\text{avståndet} = |\overrightarrow{QP}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2}$$



$R:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad R(x,y) = (x-y,\ x+y,\ 2x) \qquad [R]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ 2x \end{pmatrix}$

$$[R] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad [S] = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R \circ S] = [R][S] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



$y = -2x$

$x = t$
$y = -2t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{}$$

riktningsvektor för linjen

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|^2} = \frac{-2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$[T] = \left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

9 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ har ekv $\det(\lambda I - A)$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 \\ 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 3^2 = (\lambda-4)(\lambda+2) = 0$$

Egenvärden: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$.

Eftersom egenvärdena har olika tecken (en negativ, en positiv)

så är den kvadratiska formen indefinit

Egenrum: $\lambda = -2$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\binom{x}{y} = \binom{t}{t} = t \cdot \underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{egenvektor.}}$$

Normaliserad egenvektor

$$\frac{\binom{1}{1}}{\left\|\binom{1}{1}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$$

Egenrum: $\lambda = 4$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ ger $$\binom{x}{y} = t \cdot \binom{-1}{1}$$

Normaliserad egenvektor

$$\frac{\binom{-1}{1}}{\left\|\binom{-1}{1}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$