



Omtentamen
Funktioner och derivator
MA502G
2017-01-07, kl. 14:15–19:15

Hjälpmedel: Endast skrivmateriel. Miniräknare och formelsamling *ej* tillåtna.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Uppgifterna på grundläggande nivå (uppgift 1–6) är uppdelade efter huvudområde och kan ge upp till 6 poäng vardera, varav 4 poäng utifrån kriterier för *metod* och 2 poäng utifrån kriterier för *motivering*. Uppgifterna på fördjupad nivå (uppgift 7–8) kan ge upp till 12 poäng vardera, varav 8 poäng utifrån kriterier för *metod* och 4 poäng utifrån kriterier för *motivering*. För betyg 3/4/5 krävs 3 poäng på per huvudområde på den grundläggande nivån, 3 poäng för såväl *metod* som *motivering* på den grundläggande nivån, samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Andreas Bergwall.

Lycka till!

Grundläggande nivå—Algebra

- Gör *en* av uppgifterna nedan. Lämna *inte* in lösningar till båda uppgifterna.
 - Lös ekvationen $\cos(x) = \cos(2x)$.
 - Lös olikheten $|x + 1| \geq |2x - 1|$.
- Vilken kurva beskrivs av ekvationen $4x^2 + 16x + 9y^2 - 18y = 11$? Rita!

Grundläggande nivå—Funktioner

- Bestäm *två* av gränsvärdena nedan. Lämna *inte* in lösningar till alla tre.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln x}{1 + e^x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4} \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2x)}{\ln(1 + 3x)}$$

- För vilka reella värden på a och b gäller att

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{om } x < 0 \\ b + \sqrt{x} & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

är både kontinuerlig och injektiv?

Rita grafen för något val av sådana värden på a och b och bestäm f^{-1} för just detta val.

Grundläggande nivå—Derivator

5. Finns det något intervall där $f(x) = x - \ln(1+x^2)$ både är växande och konkav?
6. En 4 dm djup vattenbehållare har en sådan form att sambandet mellan vattendjup h och volym V i behållaren är $V = 24h + 3h^2 - h^3$, $0 \leq h \leq 4$, förutsatt att djup mäts i dm och volym i liter.

Antag att man tömmer ut 3 liter vatten per minut genom ett hål i behållarens botten.

- (a) Hur snabbt sjunker vattendjupet vid den tidpunkt då djupet är 2 dm?
- (b) Vid vilket vattendjup sjunker djupet långsammast?

Fördjupad nivå

7. Låt $f(x) = 2 - x - \frac{4}{x-1}$.

Bestäm alla asymptoter och lokala extrempunkter samt var funktionen är konvex respektive konkav. Gör en tydlig skiss av funktionens graf och ange värdemängden.

Använd resultaten från dina beräkningar ovan för att också skissa kurvan $y = \arctan f(x)$.

8. Civan och Civert (båda civilingenjörer) vill dra in fiber till sin fjällstuga. Fiberkabeln kan anslutas till befintligt fibernät i punkt A och sedan dras en bit längs med en väg fram till en punkt B. Därifrån kan kabeln sedan dras genom skogen fram till stugan i punkt C. Problemet är att kostnaden per meter är dubbelt så stor när kabeln dras genom skogen som när den dras längs med vägen. Civan och Civert behöver därför räkna ut var längs med vägen som punkten B ska ligga för att totalkostnaden ska bli så liten som möjligt.

Hur löser du detta problem? Var ska punkten B ligga?

Stugans läge framgår av figuren nedan. Kabeldragningen är rödmarkerad.

