ÖREBRO
UNIVERSITET

Tentamen i Matematisk statistik och sannolikhetslära

MA506G, 2019-06-04, kl. 08:15–13:15

Hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare med tomt minne.

Betygskriterier: Maxpoäng på tentan är 60 poäng, och den nedra gränsen för betyg k ($k \in \{3, 4, 5\}$) är $10k$ poäng.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga antaganden och beräkningssteg, svara exakt. Behandla inte fler än en uppgift per blad.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

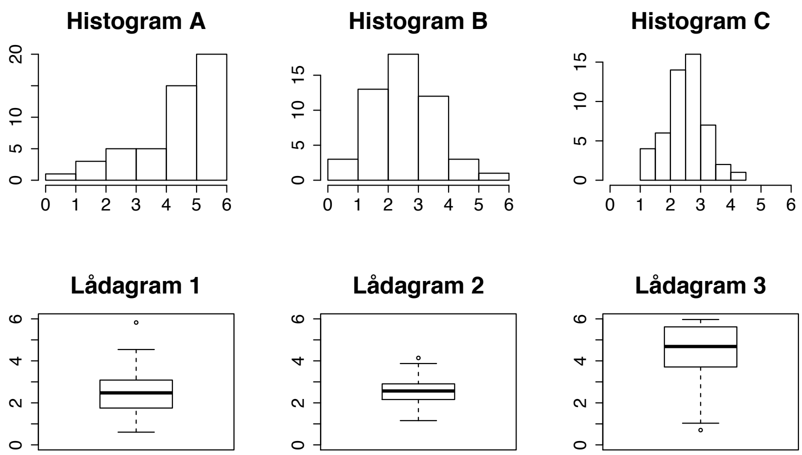
Examinator: Jens Fjelstad

Lycka till!

---

1. (a) För händelserna A och B är det givet att $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$, och $P(A \cup B) = 0.55$. Beräkna den betingade sannolikheten $P(A|B)$. (2p)

(b) Nedan har tre datamaterial illustrerats dels med histogram och dels med lådagram. Para ihop var och ett av histogrammen med rätt lådagram. (2p)



(c) Från 10 mätningar av en normalfördelad variabel beräknar man stickprovsvariansen $s^2 = 15.2$. Bestäm ett ensidigt konfidensintervall för variansen σ^2 (begränsat uppifrån) med konfidensgrad 95%. (2p)

2. En slumpvariabel X har sannolikhetsfunktionen

k	0	1	2	3	4	5
$p_X(k)$	0.1	0.1	0.6	0.05	0.1	0.05

(a) Beräkna $E(X)$ och $V(X)$. (4p)

(b) Bestäm fördelningsfunktionen $F_X(x)$. (2p)

(c) X_1, X_2, och X_3 är oberoende och fördelade som X. Låt $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Beräkna $E(Y)$, $V(Y)$, samt $p_Y(13)$. (4p)

3. Ett parti med 1000 godisbilar har kontaminerats, däri finns nu ett antal bilar med lakritssmak. Du får i uppgift att ta reda på hur många sådana bilar som finns i partiet.

(a) För att skatta antalet lakritsbilar drar du, med återläggning, bilar på måfå ur partiet tills du får en lakritsbil. Den första lakritsbilen dyker upp i den 158;e respektive 183:e dragningen i två upprepade försök. (5p)

Gör en ML- *eller* en MK-skattning av antalet lakritsbilar.

(b) Kontaminationen beror på ett fel i produktionslinan så att varje parti om 1000 bilar innehåller ett antal lakritsbilar, det exakta antalet varierar dock slumpmässigt. En noggrann analys ger att antalet lakritsbilar i ett parti om 1000 bilar har väntevärde 9 och standardavvikelse 5. Bestäm ett ungefärligt värde på sannolikheten att en dagsproduktion om 100000 bilar innehåller fler än 1000 lakritsbilar. (5p)

4. För en ledlampa som inte går sönder under de första timmarna är sanolikheten att den ska sluta fungera med mycket god noggrannhet konstant i tiden. I en låda finns 10 (fungerande) ledlampor som alla har testats under några timmar, 2 st med angiven medellivslängd 5000 h och 8 st med angiven medellivslängd 8000 h. I deluppgifterna (a)-(c) antages att du är given en av lamporna med medellivslängd 5000 h.

(a) Låt X vara livslängden hos lampan. Vilken fördelning har X? (2p)

(b) Hur stor är sannolikheten att lampan fortfarande fungerar efter ett års användning? Antag att lampan är tänd i genomsnitt 3 h per dag. (4p)

(c) Efter hur lång tid är sannolikheten 5 % att lampan fortfarande fungerar? (4p)

(d) Antag istället att du väljer en lampa på måfå ur lådan, och att den fortfarande fungerar efter 6 års användning. Hur stor är sannolikheten att du valt en av lamporna med medellivslängd 8000 h? (4p)

5. En producent av frukostflingor påstår att förpackningen innehåller 240 g torkad frukt. Du misstänker att den faktiska mängden torkad frukt är mindre än 240 g. För att undersöka saken införskaffas 28 förpackningar, och du finner att medelvärdet av fruktmängden är 227 g, med standardavvikelse $s = 25$ g. Kan du hävda att fruktmängden är mindre än 240 g? Genomför ett lämpligt test med felrisk 1 %. Om lösningen inte redan innehåller ett p-värde så ska den verifieras via ett sådant. (10p)

Ledning: Har du inte tillräckligt med information? Utgå från att frukten i förpackningen är uppdelad i många små bitar, med slumpmässig variation i storlek och form.

6. Betrakta pilkastning mot en cirkulär tavla med radien 0.25m. Låt X och Y vara slumpvariablerna som anger x- och y-koordinaterna för pilens träffpunkt i ett koordinatsystem med origo i tavlans mitt. För en viss professionell pilkastare är det empiriskt belagt att täthetsfunktionen approximeras väl av funktionen

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{c}{1+(x-y)^2+y^2} & \text{om } x^2+y^2 \leq 0.25^2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

(kast som inte träffar tavlan räknas ej).

(a) Bestäm värdet på konstanten c och beräkna väntevärdena för X och Y. (4p)

Ledning: Ett möjligt sätt att beräkna dubbelintegraler i uppgiften är via koordinatbytet $y = r\sin\varphi$, $x-y = r\cos\varphi$. Glöm inte Jacobianen (funktionaldeterminanten) $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$.

(b) Bestäm kovariansen $C(X,Y)$. Om en pil träffar till vänster om mittpunkten, är det mer sannolikt att den samtidigt träffar över eller under mittpunkten? (3p)

(c) Vad är det förväntade avståndet från tavlans mittpunkt? (3p)

Ledning: Det kan vara svårt att direkt beräkna väntevärdet av avståndet, så försök med ett annat lägesmått, t.ex. väntevärdet av avståndet i kvadrat.