MA501G Diskret matematik och logik, HT 2019

Inlämning 3

Lösningarna ska lämnas till föreläsaren, eller läggas i tidskriftssamlaren utanför dennes rum, **senast onsdagen 2/10 kl. 10:00**. För att lösningarna ska beaktas måste de lämnas in i tid.

Du ska försöka att lösa alla uppgifter på grundläggande nivå, för överbetyg även de på fördjupad nivå.

En bra lösning är fullständig och välmotiverad, med förklarande text, en struktur och beräkningar som är lätta att följa samt ett tydligt angivet svar; se även betygskriterierna.

Det är tillåtet att samarbeta, men du måste skriva lösningarna själv, med dina egna ord. För att ha chans på betyg 5 bör du lösa minst en uppgift på fördjupad nivå helt på egen hand; **markera dessa uppgifter tydligt**.

Onsdagen **2/10 kl. 10:15** är det obligatoriskt seminarium där lösningarna kommer att presenteras och diskuteras. Observera att även seminarierna är en del av kursens examination. Du ska vara beredd att redovisa (vid tavlan) de uppgifter som du har lämnat in skriftliga lösningar på. Blir det tid över av seminarietiden kommer vi att avsluta passet som en vanlig övning.

Grundläggande nivå

1. (a) Talföljden $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ har följande rekursiva definition:

$$\begin{cases} a_0 = 3, \\ a_n = a_{n-1}^2 - 2a_{n-1} + 1 \quad \text{för } n \geq 1. \end{cases}$$

   Bestäm a_1, a_2 och a_3.

   (b) Talföljden $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ har följande rekursiva definition:

$$\begin{cases} b_0 = 1, \\ b_1 = 2, \\ b_n = b_{n-1} - 2b_{n-2} + 3 \quad \text{för } n \geq 2. \end{cases}$$

   Bestäm b_2, b_3 och b_4.

2. Beräkna följande summor:

   (a) $\sum_{k=8}^{50} (2 + 3k)$

   (b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{256} - \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}$

3. Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

   för alla heltal $n \geq 1$.

4. Talföljden $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ har följande rekursiva definition:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad \text{för } n \geq 1. \end{cases}$$

   Visa att $a_n = 2^{n+1} - 1$ för alla heltal $n \geq 0$.

5. Visa att $3n < 2^n$ för alla heltal $n \geq 4$.

   Tips: I induktionssteget, använd att $p \geq 4$.

Fördjupad nivå

6. Visa att $5 \mid 18^n - 3^n$ för alla heltal $n \geq 0$.

7. Betrakta Fibonaccis talföljd $(f_n)_{n=0}^{\infty}$, där

$$\begin{cases} f_0 = 0, \\ f_1 = 1, \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{för } n \geq 2. \end{cases}$$

   Visa att

$$\sum_{i=1}^{2n} f_i f_{i-1} = f_{2n}^2$$

   för alla heltal $n \geq 1$.