ÖREBRO
UNIVERSITET

Tentamen i
Matematisk statistik och sannolikhetslära
MA506G

2021-08-16, kl. 8.15–13.15

Hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare med tomt minne

Betygskriterier: Maxpoäng på tentan är 60 poäng, och den nedre gränsen för betyg k ($k \in \{3, 4, 5\}$) är $10k$ poäng.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Besvara högst en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning om ni vill att rättaren ska hitta dem och ge poäng för lösningen.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Niklas Eriksen.

Lycka till!

---

1. En maskin som tillverkar tärningar har blivit felprogrammerad. På varje sida målas en till sex prickar med samma sannolikhet, men sidorna målas oberoende av varandra och kan därför ha flera sidor med samma antal prickar. Vi har fått en av dessa tärningar, men har inte granskat dess sidor.

   (a) Låt X vara antalet sidor som visar 6 på tärningen. Vilken fördelning har X? [3p]

   (b) Vi slår tärningen. Bestäm sannolikheten att vi slår en sexa. [3p]

   (c) Vi slår tärningen två gånger. Bestäm sannolikheten att vi slår sex i båda slagen. [4p]

2. Låt slumpvariabeln X ha fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & \text{för } x \geq 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

   (a) Beräkna den betingade sannolikheten $G(x) = \mathbf{P}(X \leq 5 + x | X > 5)$. [7p]

   (b) Visa att $G(x)$ är en fördelningsfunktion genom att visa egenskaperna för fördelningsfunktioner i formelsamlingen. [3p]

3. Weibullfördelningen är uppkallad efter Waloddi Weibull, som var professor vid KTH. En slumpvariabel $X \sim W(\lambda, \beta)$ är Weibullfördelad med parametrarna λ och β om den har fördelningsfunktionen [10p]

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda x)^\beta} & \text{för } x \geq 0, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Ett system innehåller två komponenter vars livslängder är oberoende och Weibullfördelade: $X_1, X_2 \sim W(\lambda, \beta)$. Systemet fungerar så länge båda komponenterna fungerar. Bestäm fördelningsfunktionen för systemet.

4. Nederbördsmängden, mätt i mm, under en dag kan ses som en stokastisk variabel $X = YZ$, där $Y \sim \mathrm{Be}(p)$ och $Z \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ är oberoende.

   (a) Beräkna $\mathbf{E}(X)$ och $\mathbf{V}(X)$ som funktion av p och λ. [5p]

   (b) Anta att nederbörden under en följd av dagar är oberoende och av samma fördelning som X ovan. Faktiska data indikerar att $\mathbf{E}(X) = 1.5$ och $\mathbf{V}(X) = \frac{27}{4}$, vilket svarar mot $p = 1/2$ och $\lambda = 1/3$. Beräkna sannolikheten att årsnederbörden överstiger 500 mm. [5p]

5. En tärning i form av en ikosaeder har 10 sidor, märkta från 0 till 9. Det florerar en misstanke att tärkningen är skev. Låt p vara sannolikheten att slå 9.

   (a) Mikael slår tärningen 20 gånger och räknar antalet gånger som han får en nia, vilket blir 5. Gör en ML-skattning av p utifrån detta. [5p]

   (b) Niklas slår tärningen tills han har fått 4 nior, vilket sker i kast 3, 9, 13 och 18. Gör en ML-skattning utifrån denna information. [5p]

6. Quercetin ($C_{15}H_{10}O_7$, från *Quercus* (ek på latin)) är ett naturligt förekommande färgämne som kan köpas som kosttillskott, men som hittills inte kunnat visa sig vara verkansfullt mot någon sjukdom. Inte desto mindre genomförs en studie av halterna (mätt i mg/hg) i två äppelsorter. Från den första fås stickprovet $(x_1, \ldots, x_8)$ och från den andra stickprovet $(y_1, \ldots, y_{10})$, som antas vara observationer av slumpvariablerna $X_1, \ldots, X_8$ och $Y_1, \ldots, Y_{10}$ med fördelningarna $X_j \sim N(\mu_1, \sigma)$ och $Y_k \sim N(\mu_2, \sigma)$. Mätningarna ger [10p]

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 4.4723 \\ \sum_{j=1}^{8} (x_j - \bar{x})^2 &= 0.1277 \\ \bar{y} &= 4.6266 \\ \sum_{k=1}^{10} (y_k - \bar{y})^2 &= 0.1997. \end{aligned}$$

   Bestäm ett 95 % konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ och testa sedan hypotesen $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ med felrisk 5 % och lämplig mothypotes.