ÖREBRO
UNIVERSITET

LÖSNINGSFÖRSLAG

Våg- och materiefysik för civilingenjörer

FY501G-0100

2019-01-15, kl. 08:15–13:15

Hjälpmedel: Skrivmateriel, lärobok[1] och miniräknare.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga deluppgifter kan ge 2 poäng och bedöms utifrån kriterier för *kunskap och förståelse*; *färdighet, förmåga och värderingsförmåga;* samt *skriftlig avrapportering*. För betyg 3/4/5 räcker det med 4 poäng inom vart och ett av områdena *vågrörelselära*, *elektromagnetism*, *kvantmekanik och materiens struktur* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl med sidhänvisningar och formelnummer från läroboken, redovisa alla väsentliga steg, rita tydliga figurer och svara med rätt enhet. Redovisa inte mer än en huvuduppgift per blad och lämna in i uppgiftsordning.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Magnus Ögren.

Lycka till!

1.

a) Från Figur 1 och Figur 2 (eller Figur 3 och Figur 4) kan vi beräkna periodtiden utifrån avläsningar för X i kurvorna

$$\frac{1}{2}T = 1.47993 - 0.719983 \Rightarrow T = 1.5199\, s.$$

Från Figur 3 och Figur 4 kan vi beräkna amplituden utifrån avläsningar för Y i kurvorna

$$2A = 0.864908 - 0.540019 \Rightarrow A = 0.1624\, m.$$

Svar a): Periodtiden för rörelsen är 1.52 s och amplituden är 0.162 m.

b) Amplituden beräknade i **a)** så att $s_m = A = 0.1624$. Vinkelfrekvensen kan beräknas från periodtiden från **a)** så att $\omega = 2\pi/T = 2\pi/1.5199 = 4.1339\, s^{-1}$. Vi använder nu den speciella tiden som är markerad i Figur 3 för att få en ekvation till att bestämma fasen ϕ

$$y\,(0.719983) = s_m \sin(\omega t + \phi) = -s_m \Rightarrow \sin(\omega t + \phi) = -1 \Rightarrow \omega t + \phi = \frac{3\pi}{2}\,(+n2\pi)$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{2} - \omega t = \frac{3\pi}{2} - 4.1339 \cdot 0.719983 = 1.7361.$$

[1] *Principles of Physics* 10.th ed. Halliday, Resnick, Walker

Svar b): Ekvation är $s(t) = 0.162 \sin(4.13t + 1.74)$ m.

c) Vi beräknar accelerationen som andraderivatan map tiden från **b)**, och använder Newtons andra lag för att lösa ut massan

$$a(t) = -s_m\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow F(t) = ma(t) \Rightarrow \max(|F|) = ms_m\omega^2 = \frac{1}{2}(7.22184 - 4.14996) = 1.5359$$

$$\Rightarrow m = \frac{\max(|F|)}{s_m\omega^2} = \frac{1.5359}{0.1624 \cdot 4.1339^2} = 0.5534\, kg.$$

Svar c): Bollen har massan 0.553 kg.

d) Den maximala rörelseenergin är $E_{k,max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}m(s_m\omega)^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.5534 \cdot (0.1624 \cdot 4.1339)^2 = 0.1247$ J.

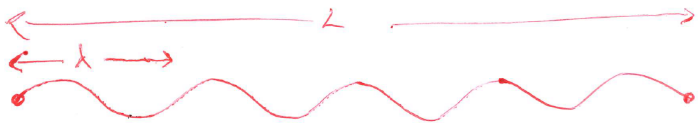
Svar d): Rörelseenergin är som störst 0.125 J.

e) 'Ultraljud' betyder att frekvensen är högre än vad en människa kan höra, dvs över 20 kHz.

Svar e): Storlekordningen på frekvensen av ljudvågorna från detektorn är > 20 kHz.

2.

a) En enkel skiss över en ögonblicksbild av det horisontella snöret om hela längden, L, svarar mot nio halva våglängder, $\frac{9}{2}\lambda$:



Svar a): Se skissen ovan.

b) Vi beräknar våglängden till $\lambda = \frac{2}{9}L = \frac{2}{9}3.52 = 0.7822$ m, vilket för frekvensen $f = 35$ Hz ger vågens utbredningsfart $v = \lambda f = 0.7822 \cdot 35 = 27.38$ m/s.

Svar b): Vågens utbredningsfart är 27 m/s.

c) Den linjära densiteten ges av (16-24) $\mu = m/L = 22.2 \cdot 10^{-3}/3.52 = 0.0063$ kg/m. Vi kan då beräkna utbredningsfarten enligt (16-26), $v = \sqrt{\tau/\mu} = \sqrt{4.4/0.0063} = 26.43$ m/s.

Svar c): Vågens utbredningsfart är 26 m/s.

d) En ökning av frekvensen f leder till (högre ordnings excitation) att flera (halva) våglängder passar in på längden L.

En minskning av kraften τ leder enligt (16-26) till mindre utbredningsfart, varför våglängden kan minska (utan att frekvensen påverkas).

Vi beskriver nu de nya parametervärdena enligt det första sättet. Vi behåller $\tau = 4.4$ N och därmed $v = 26.43$ m/s. Den nya våglängden ges av $\lambda = \frac{2}{10}L = 0.2 \cdot 3.52 = 0.7040$ m, och vi kan få frekvensen från (där vi väljer att använda v från **c)**)

$$v = f\lambda \;\Rightarrow\; f = \frac{v}{\lambda} = \frac{26.43}{0.7040} = 37.54\,Hz$$

Svar d): Vi kan öka antalet halva våglängder tex genom att öka frekvensen eller genom att minska spännkraften. En möjlig realisation av det förstnämnda är

$$f = 38\,Hz,\ \lambda = 0.70\,m,\ v = 26\,m/s,\ \tau = 4.4\,N.$$

e) Den teori vi arbetat med i kapitel 16 och 17 i kursboken förutsätter att den 'vanliga' vågekvationen gäller. Som en ser i härledningen av denna, sidan 405 i kursboken, används antagandet att svängningarna är små, dvs $A \ll L$.

Svar e): Sambandet vi använt grundar sig på vågekvationen (16-45) vilken bara är giltig då $A \ll L$.

3.

a) Från definitionen av elektrisk fältstyrka (22-1) får vi för en positiv testladdning $q_1 = q$ styrkan av det elektriska fältet på avståndet $r = R$ från $q_2 = q_0$

$$E = \left|\vec{E}\right| = \frac{\left|\vec{F}\right|}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{R^2}. \tag{1}$$

Svar a): Formeln följer av Coulombs lag och definitionen av elektrisktfält.

b) Vi utgår från Gauss lag för elektriska fält $\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$ (23-7) och undersöker flödet genom en sfärisk yta med radien R runt en positiv punktladdning q

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 E 4\pi R^2 = q_{enc} = q \;\Rightarrow\; E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{R^2}, \tag{2}$$

där den första likheten följer av det elektriska fältet och den utåtgående normalen till ytan hela tiden är parallella $\vec{E} \cdot d\vec{A} = \left|\vec{E}\right| \left|d\vec{A}\right|$.

Svar b): Vi fick samma formel som (1).

c) Elektronens framfart i cirkelbanan med omkretsen $\mathcal{O} = 2\pi a = 3.33 \cdot 10^{-10}$ m motsvarar en elektrisk ström $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$. Då tiden för en passage är $\Delta t = \mathcal{O}/v = 1.51 \cdot 10^{-16}$ s. Enligt (28-35) ges nu storleken $|\vec{\mu}|$ av $\mu = iA = \frac{\Delta q}{\Delta t}\pi a^2 = \frac{1.602 \cdot 10^{-19}}{1.51 \cdot 10^{-16}}\pi \left(53 \cdot 10^{-12}\right)^2 = 9.36 \cdot 10^{-24}\, Am^2$.

Svar c): Storleken på det magnetiska momentet är $9.4 \cdot 10^{-24}$ Am^2 (jämför med Bohrmagnetonen).

d) Om en tittar ovanifrån och elektronen rör sig medurs i cirkeln betyder det en ström moturs. Enligt 'en högerhandsregel', se tex Figure 29-7 sidan 751, gäller då att höger tumme i strömriktningen ger magnetfältets riktning längs med de kupade fingrarna, dvs upp mot betraktaren.

Svar d): Det magnetiska fältet är riktat mot betraktaren.

e) När ett magnetiskt dipolmoment växelverkar med ett externt magnetfält ges energin av $U(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ (28-38). Att 'vända upp och ner' betyder att ändra riktningen 180 grader. Skillnaden i energi blir $\Delta U = U(180^\circ) - U(0) = 2|\vec{\mu}| \cdot \left|\vec{B}\right| = 2\mu \left|\vec{B}\right| = 2 \cdot 9.36 \cdot 10^{-24} \cdot 1.0 = 1.8725 \cdot 10^{-23}$ J$= 1.1689 \cdot 10^{-4}$ eV.

Svar e): Det åtgår ca 0.12 meV att vända dipolmomentet upp och ner. (I jämförelse med energin i väteatomens grundtillstånd är detta en liten energi.)

4.

a) Enheten, här betecknad med [...], för vänsterledet är

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right][E_x] = \left[\frac{\partial}{\partial x}\right]^2 [E_x] = \frac{[E_x]}{[x]^2}.$$

Enheten för högerledet är

$$\frac{1}{[c]^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right][E_x] = \frac{[t]^2}{[x]^2}\frac{[E_x]}{[t]^2} = \frac{[E_x]}{[x]^2}.$$

Svar a): Vi visar ovan att vänsterledet och högerledet i ekvation (3) på tentan har samma enhet.

b) Enheten för vänsterledet är

$$[c] = \frac{[x]}{[t]}. \tag{3}$$

En bland många möjliga lösningar kan vara att nu titta på vänsterledet och den första termen i högerledet av Ampere-Maxwell lag (32-5), där $[\Phi_E] = [EA] = \frac{N}{C} \cdot m^2$ (23-2)

$$\left[\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}\right] = Tm = \left[\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\right] = [\mu_0 \varepsilon_0] \frac{\frac{N}{C} m^2}{s},$$

så att

$$[\mu_0 \varepsilon_0] = \frac{TCs}{Nm} = \frac{\left(\frac{Ns}{Cm}\right) Cs}{Nm} = \frac{s^2}{m^2},$$

där vi använt (tex) formel (28-2) för att uttrycka Tesla i Newton-sekund per Coulombmeter.

Enheten för högerledet är då

$$\frac{1}{\sqrt{[\varepsilon_0]\,[\mu_0]}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{s^2}{m^2}}} = \frac{[x]}{[t]},$$

i överensstämmelse med vänsterledet (3).

Svar b): Vi visar ovan att vänsterledet och högerledet i ekvation (4) på tentan har samma enhet.

c) Först och främst mäts det elektriska fältet och det magnetiska fältet i olika enheter, varför deras styrkor inte direkt kan jämföras. Ett argument som brukar användas för att det elektriska fältet inte är *starkare* än det magnetiska är att energin pga det elektriska fältet och energin pga det magnetiska fältet är lika stora i en EM-våg, se sidan 886 (och 799) i kursboken.

Svar c): Ett bra argument är att energibidragen från de magnetiska- och elektriska-fälten i en EM-våg är lika stora.

d) Enligt (33-19) transporteras energin i riktningen som ges av Poynting vector $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\left|\vec{E}\right|}{\mu_0} \vec{e}_x \times (0, B_y, B_z) = \frac{\left|\vec{E}\right|}{\mu_0} (0, -B_z, B_y)\,,$$

där kryssprodukten tex kan beräknas från minnesregeln $\vec{E}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix}$ (Appendix E), alternativ kan ekvationssystem sättas upp mha bla skalärprodukterna $\vec{S}\cdot\vec{E} = 0$ och $\vec{S}\cdot\vec{B} = 0$.

Svar d): EM-vågen transporterar energi i riktningen $(0, -B_z, B_y)$.

e) Med effekten $P = 10^{20}$ W och arean $A = (1.0\,mm)^2 = 10^{-6}$ m^2 blir intensiteten $I = \frac{P}{A} = 10^{26}\,\frac{W}{m^2}$. Vi kan relatera intensiteten till RMS-styrkorna på det elektriska- och magnetiska fälten enligt (33-26), (33-25) och (33-4)

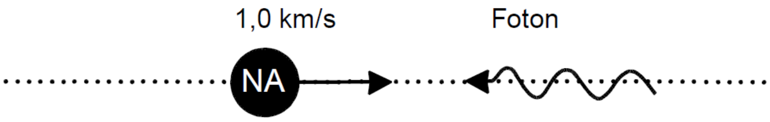
$$I = \frac{1}{c\mu_0}E_{RMS}^2 = \frac{1}{c\mu_0}\frac{E_m^2}{2} = \frac{c}{\mu_0}\frac{B_m^2}{2} = \frac{c}{\mu_0}B_{RMS}^2.$$

Vi får då följande RMS-styrka på det magnetiska fälten

$$B_{RMS} = \sqrt{\frac{\mu_0 I}{c}} = \sqrt{\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot10^{26}}{2.998\cdot10^8}} = 6.4742\cdot10^5\,T.$$

Svar e): RMS-styrkan på det magnetiska fältet blir ca $6.5\cdot10^5$ T.

5.



a) Initialfarten är $v_0 = 1.0$ km/s $= 10^3$ m/s och accelerationen är $a = -10^6$ m/s^2. Tiden det tar för atomen att stanna blir

$$v = v_0 + at = 0 \;\Rightarrow\; t = -\frac{v_0}{a} = \frac{10^3\left[\frac{m}{s}\right]}{10^6\left[\frac{m}{s^2}\right]} = 10^{-3}\,[s]\,.$$

Sträckan som atomen färdas på denna tiden är (alternativt kan du skissa ett $v-t-$diagram)

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = 0 + 10^3\left[\frac{m}{s}\right]10^{-3}\,[s] - \frac{1}{2}10^6\left[\frac{m}{s^2}\right]\left(10^{-3}\,[s]\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,[m]\,.$$

Svar a): Stoppsträckan för natriumatomen blir ca 0.5 m.

b) När natriumatomen absorberat en foton minskar dess rörelsemängd p med storleken på fotonens rörelsemängd $p_{foton} = h/\lambda$, så att

$$\Delta p = p_{foton} \;\Rightarrow\; \Delta v = \frac{p_{foton}}{m} = \frac{h}{m\lambda} = \frac{6.6261\cdot10^{-34}}{23\cdot1.6605\cdot10^{-27}\cdot589\cdot10^{-9}} = 0.0295\,m/s.$$

Svar b): Hastighetsminskningen blir ca 0.03 m/s.

c) Låt antalet kollisioner vara N och tiden $\Delta t = 1$ s, då gäller

$$|a| = N\frac{\Delta v}{\Delta t} = 10^6 \ \Rightarrow \ N = |a|\,\frac{\Delta t}{\Delta v} = \frac{10^6}{0.0295} = 3.3949 \cdot 10^7.$$

Svar c): Det behöver ske $3.4 \cdot 10^7$ kollisioner per sekund.

d) Varje foton har energin $E = hf = hc/\lambda$. Effekten för en Na atom blir då

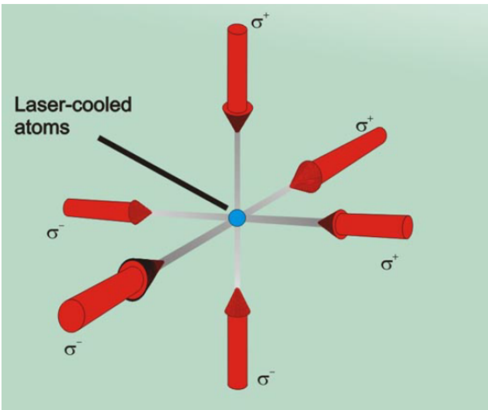
$$P = \frac{NE}{\Delta t} = \frac{Nh\frac{c}{\lambda}}{\Delta t} = \frac{3.3949 \cdot 10^7 \cdot 6.6261 \cdot 10^{-34} \cdot 2.998 \cdot 10^8}{589 \cdot 10^{-9}} = 1.1450 \cdot 10^{-11}\, W.$$

23 gram natrium motsvarar, eftersom molmassan för natrium enligt Appendix F är ca 23g/mol, 1 mol atomer dvs $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ atomer, så att den totala effekten för lasern skulle behöva vara

$$P_{tot} = N_A P = 6.022 \cdot 10^{23} \cdot 1.1450 \cdot 10^{-11} = 6.8951 \cdot 10^{12}\, W.$$

Svar d): Lasern behöver ha effekten $7 \cdot 10^{12}$ W.

e)



Svar e): Enligt figuren ovan behöver vi kunna bromsa atomer i båda riktningarna i de tre rumsdimensionerna.

6.

a) Enligt (39-4) ges grundtillståndet för elektronen av följande formel för $n = 1$

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2 = \frac{h^2}{8mR^2} = \frac{\left(6.6261 \cdot 10^{-34}\right)^2}{8 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot \left(5 \cdot 10^{-10}\right)^2} = 2.4100 \cdot 10^{-19} J = 1.5044 eV. \tag{4}$$

Svar a): Energin blir 1.5 eV.

b) Enligt (39-4) ges grundtillståndet för protonen av följande formel för $n = 1$

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2 = \frac{h^2}{8mR^2} = \frac{\left(6.6261 \cdot 10^{-34}\right)^2}{8 \cdot 1.673 \cdot 10^{-27} \cdot \left(5 \cdot 10^{-15}\right)^2} = 1.3122 \cdot 10^{-12} J = 8.1908 MeV. \tag{5}$$

Svar b): Energin blir 8.2 MeV.

c) Resultaten från **a)** var $E_1 = 1.5$ eV, vilket är mindre men av samma storleksordning som 'höjden' $V_0 = 3$ eV för den ändliga lådpotentialen med samma bredd $L = R$. I likhet med vad vi ser i Figure 39-8 sidan 1082 kommer vågfunktionen för grundtillståndet i den ändliga lådpotentialen att fortsätta en bit in i ('tunnla') potentialväggen. Vågfunktionen blir utsträckt, jämfört med den oändliga lådpotentialen, så att våglängden blir större. Enligt (tex) (38-17) svarar en större våglängd mot lägre energi för materievågen.

Svar c): Energin kommer bli lägre än 1.5 eV eftersom våglängden nu blir större.

d) Enligt (39-21) ges grundtillståndet för elektronen nu av följande formel för $n_x = n_y = n_z = 1$

$$E_n = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right) = \frac{3h^2}{8mR^2} = 3 \cdot 2.4100 \cdot 10^{-19}\, J = 4.5131\, eV. \tag{6}$$

Svar d): Energin blir 4.5 eV, vilket är högre än **a)**, enligt ovanstående uträkning.

e) Påståendet är att vågfunktionen $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a}$ insatt i den radiella Schrödingerekvationen i sfäriska koordinater nedan, skall ge oss grundtillstånd $E_1 = (-)\,13.66$ eV.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi(r)}{\partial r}\right) + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2}\psi(r) + U(r)\psi(r) = E_1\psi(r). \tag{7}$$

Vi sätter in uttrycket $U\left(r\right)=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (39-32) för väteatomen potential i Schrödingerekvationen ovan. Vidare är $n=1$ för grundtillståndet och då följer att $\ell=0$ från Table 39-2, så att

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a}-\frac{2}{ar}\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a}\right)-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a}=E_1\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a}. \tag{8}$$

Vi kan nu förkorta med $\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a}$ på båda sidor och sätter in uttrycket $a=\frac{h^2\varepsilon_0}{\pi me^2}$ (39-28) för Bohrradien. Förenkling ger nu

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 ma}\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{r}\right)-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=E_1. \tag{9}$$

$$-\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=E_1. \tag{10}$$

Så att

$$E_1=-\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}=-13.66\,eV, \tag{11}$$

i överensstämmelse med (39-33), (39-34) för $n=1$, vilket skulle visas.

Svar e): Det stämmer!