ÖREBRO UNIVERSITET

Lösning till tentamen i

Optimering, MA112G

MA3011

2017-08-21

---

1. Mejeriföretaget Hysh har mejerierna $\mathcal{M} = \{1, \ldots, M\}$, och avtal om att hämta mjölk hos mjölkbönderna $\mathcal{B} = \{1, \ldots, B\}$. Mejeri $m \in \mathcal{M}$ har kapacitet att ta emot k_m liter/dag. Bonde $b \in \mathcal{B}$ producerar p_b liter/dag. Mejeriet vill planera vilken bonde som ska leverera till vilket mejeri (varje bonde ska leverera till exakt ett mejeri); planering av ruttning för fordon betraktar mejeriet som ett senare problem. Kostnaden för att transportera mjölken från bonde $b \in \mathcal{B}$ till mejeri $m \in \mathcal{M}$ uppskattar mejeriet till c_{bm} kronor. Hysh skulle gärna stänga mejerier som inte behövs (d.v.s inte tar emot någon mjölk), och uppskattar kostnadsreduktionen av att stänga mejeri $m \in \mathcal{M}$ till s_m. [10p]

   Konstruera en lineär heltalsmodell för att minimera kostnaderna för Hysh. Ge en kort beskrivning av hur dina variabler ska tolkas, samt vad dina bivillkor representerar.

   Lösning:

   Låt x_{bm} för $b \in \mathcal{B}$, $m \in \mathcal{M}$ vara binära variabler där $x_{bm} = 1$ får representera att mjölk levereras från bonde b till mejeri m. Låt y_m för $m \in \mathcal{M}$ vara binära variabler där $y_m = 1$ får representera att mejeri m tar emot någon mjölk. Problemet kan nu modelleras som

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{b=1}^{B} \sum_{m=1}^{M} c_{bm} x_{bm} + \sum_{m=1}^{M} s_m y_m \\
\text{u.b.} \quad & \sum_{m=1}^{M} x_{bm} = 1, && b \in \mathcal{B}, \\
& \sum_{m=b}^{B} p_b x_{bm} \le k_m y_m, && m \in \mathcal{M}, \\
& x_{bm} \in \{0,1\}, && b \in \mathcal{B}, m \in \mathcal{M}, \\
& y_m \in \{0,1\}, && m \in \mathcal{M}.
\end{aligned}
$$

   Den första gruppen bivillkor säger att arbetsuppgifterna varje bonde ska leverera till exakt ett mejeri.

Den andra gruppen bivillkor säger dels att inget mejeri kan ta emot mer mjölk än vad det har kapacitet till, dels kontrollerar den vilka mejerier som tar emot någon mjölk (i och med att $y_m = 0$ blir tillåtet om mejeri m inte tar emot någon mjölk, och målfunktionen är avtagande med avseende på y_m för alla m).

Därefter tillkommer krav på att variablerna ska vara binära.

Angående målfunktionen så har vi valt att formulera den så att vi räknar med en kostnad på s_m om mejeri m tvingas hålla öppet, istället för att räkna på ett avdrag med s_m om mejeri m kan stängas, vilket hade gett en målfunktion på formen

$$\sum_{b=1}^{B} \sum_{m=1}^{M} c_{bm} x_{bm} - \sum_{m=1}^{M} s_m (1 - y_m).$$

De båda alternativen skiljer sig åt med en konstant, och ska generera samma mängd optimala lösningar.

2. Lös följande tre delproblem.

(a) Konvexa höljet av en mängd är den minsta konvexa mängd som innehåller den ursprungliga mängden. Bestäm konvexa höljet av mängden [3p]

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_2| < \mathrm{e}^{-x_1^2} \right\}.$$

(b) Visa eller motbevisa att mängden [4p]

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x^2 - 4| \leq 1 \right\}$$

är konvex.

(c) Låt funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara lineär och given av uttrycket $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + b$ där $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ är givna. Låt funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara konvex på $\mathbb{R}$. Visa att den sammansatta funktionen $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ är konvex på $\mathbb{R}^n$. [3p]

Lösning:

(a) Vi noterar att både

$$X_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, -1 < x_2 < 1 \right\}$$

och

$$X_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = 0 \right\}$$

är delmängder av X. Det konvexa höljet av $X_1 \cup X_2$ är

$$Y = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, -1 < x_2 < 1 \right\},$$

så det konvexa höljet av X måste innehålla Y. Eftersom vi dessutom har $X \subset Y$ så måste Y vara det konvexa höljet av X.

(Lite vid sidan av själva uppgiften noterar vi att det konvexa höljet till

$$Z = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_2| \leq \mathrm{e}^{-x_1^2} \right\}.$$

ges av $Y \cup \{(0,-1)^{\mathrm{T}}, (0,1)^{\mathrm{T}}\}$.)

(b) Om vi noterar att $X = [-\sqrt{5}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{5}]$, så ser vi att X inte är ett intervall, och därmed inte heller är konvex (då det är en endimensionell mängd).

Alternativt går det bra att notera att $-2 \in X$, $2 \in X$, men $0 \notin X$, och konstatera att X inte är konvex då 0 är en konvexkombination av -2 och 2.

(c) Låt $\lambda, \mu \geq 0$ med $\lambda + \mu = 1$. Vi får

$$h(\lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z}) = g(f(\lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z})) = g(\lambda f(\mathbf{y}) + \mu f(\mathbf{z})),$$

där den andra likheten följer av att f är lineär. Nu ger konvexiteten av g att

$$g(\lambda f(\mathbf{y}) + \mu f(\mathbf{z})) \geq \lambda g(f(\mathbf{y})) + \mu g(f(\mathbf{z})) = \lambda h(\mathbf{y}) + \mu h(\mathbf{z}).$$

Sätter vi samman ovanstående så får vi

$$h(\lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z}) \geq \lambda h(\mathbf{y}) + \mu h(\mathbf{z}),$$

vilket är hur konvexitet definieras, så h är konvex.

(Att bilda meritfunktionen $m(s; \mathbf{y}, \mathbf{d}) = h(\mathbf{y} + s\mathbf{d})$, och visa att $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} m \geq 0$ för alla $\mathbf{y}$ och alla $\mathbf{d}$ fungerar inte, eftersom vi inte vet om g—och därmed m—är två gånger deriverbar. Annars hade det varit ett alternativ.)

3. Lös följande två delproblem.

(a) För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ har problemet [4p]

$$\begin{array}{lrcl} \min & x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - ax_2 & & \\ \text{u.b.} & x_1^2 - x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

en Karush-Kuhn-Tucker-punkt i $\mathbf{x} = (-2, 4)^{\mathrm{T}}$?

(b) Givet det obegränsade optimeringsproblemet [6p]

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - x_1 - 3x_2,$$

antag att man gör en exakt linjesökning från punkten $\mathbf{x} = (1, 1)^{\mathrm{T}}$ i riktningen $\mathbf{d} = (-1, 1)^{\mathrm{T}}$. Visa att den optimala steglängden får värdet 1/2.

Lösning:

(a) KKT-villkoren är

$$\begin{aligned}2x_1 - 4 + 2u_1x_1 + u_2 &= 0,\\ 2x_2 - a - u_1 + u_2 &= 0,\\ x_1^2 - x_2 &\le 0,\\ x_1 + x_2 &\le 2,\\ u_1(x_1^2 - x_2) &= 0,\\ u_2(x_1 + x_2 - 2) &= 0,\\ u_1, u_2 &\ge 0.\end{aligned}$$

I punkten $\mathbf{x} = (-2, 4)^{\mathrm{T}}$ är tillåtenhetsvillkoren uppfyllda, och komplementaritetsvillkoren är uppfyllda för alla u_1 och u_2. Därmed återstår endast villkoren

$$\begin{aligned}2x_1 - 4 + 2u_1x_1 + u_2 &= 0,\\ 2x_2 - a - u_1 + u_2 &= 0,\\ u_1, u_2 &\ge 0,\end{aligned}$$

vilket efter insättning av $x_1 = -2$ och $x_2 = 4$ ger

$$\begin{aligned}-8 - 4u_1 + u_2 &= 0,\\ 8 - a - u_1 + u_2 &= 0,\\ u_1, u_2 &\ge 0,\end{aligned}$$

Från de båda likheterna får vi $u_1 = (a - 16)/3$ och $u_2 = (4a - 24)/3$, alternativt uttryckt $a = 3u_1 + 16$ och $a = (3u_2 + 24)/4$. Då $u_1 \ge 0$ ger den första ekvationen $a \ge 16$, på samma sätt resulterar den andra ekvationen i $a \ge 6$, vilket är redundant om $a \ge 16$.
Alltså är $\mathbf{x} = (-2, 4)$ en KKT-punkt för alla $a \ge 16$.

(b) Bilda meritfunktionen $\mu(s; \mathbf{x}, \mathbf{d}) = f(\mathbf{x} + s\mathbf{d})$, och studera den för $\mathbf{x} = (1, 1)^{\mathrm{T}}$ och $\mathbf{d} = (-1, 1)^{\mathrm{T}}$. Det ger

$$\mu(s) = 2(1-s)^2 - (1-s)(1+s) + (1+s)^2 - (1-s) - 3(1+s) = -2 - 4s + 4s^2,$$

varifrån man får $\mu'(s) = -4 + 8s$, så att $\mu'(s) = 0 \Rightarrow s = 1/2$. Då $\mu''(s) = 8 > 0$ så har vi funnit ett minimum, så den optimala steglängden är $1/2$.

4. Betrakta det lineära problemet

$$\begin{array}{lrcl}\min & -4x_1 + 3x_2 + 3x_3 & & \\ \text{u.b.} & -4x_1 + x_2 - 2x_3 & \ge & 2,\\ & x_1 - x_2 + x_3 & \ge & -1,\\ & x_1, x_2, x_3 & \ge & 0.\end{array}$$

(a) Sätt upp det duala problemet. [2p]

(b) Lös det duala problemet grafiskt. [6p]

(c) Utnyttja lösningen till det duala problemet för att avgöra om det givna problemet har ett unikt optimum eller alternativa optimallösningar, eller om det saknar tillåten lösning eller har obegränsat optimum. [2p]

Lösning:

(a) Det duala problemet är

$$\begin{array}{lrcl} \max & 2u_1 - u_2 & & \\ \text{u.b.} & -4u_1 + u_2 & \leq & -4, \\ & u_1 - u_2 & \leq & 3, \\ & -2u_1 + u_2 & \leq & 3, \\ & u_1, u_2 & \geq & 0. \end{array}$$

(b) När du löser problemet grafiskt ska du hamna på bivillkoret $u_1 - u_2 \leq 3$ (d.v.s. uppfylla det med likhet) och därefter följa bivillkoret obegränsat långt i riktningen $(1,1)^{\mathrm{T}}$, vilket visar att det duala problemet har obegränsat optimum.

(c) Låt z_{P}^* och z_{D}^* beteckna de optimala målfunktionsvärdena för det primala problemet respektive det duala problemet. Baserat på att det primala problemet är ett minimeringsproblem så gäller $z_{\mathrm{P}}^* \geq z_{\mathrm{D}}^*$, förutsatt att både z_{P}^* och z_{D}^* existerar. Då z_{D}^* är obegränsat kan därmed inte z_{P}^* existera, och det primala problemet måste sakna lösning.

(Rimlighetskontroll: Om vi i det primala problemet adderar de båda bivillkoren får vi $-3x_1 - x_3 \geq 1$, vilket naturligtvis saknar lösning då variablerna ska vara icke-negativa.)

5. Beskriv följande begrepp: baslösning, tillåten lösning, billigaste uppspännande träd, globalt maximum, lokalt maximum. Förtydliga gärna med exempel. [10p]

Lösning:

En *baslösning* till ett lineärt optimeringsproblem uttryckt på standardform

$$\begin{array}{lrcl} \min & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} & & \\ \text{u.b.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}, \end{array}$$

är en lösning där alla likhetsvilkoren är uppfyllda.

Ett exempel på en baslösning är $\mathbf{x} = (0, 3, 1)^{\mathrm{T}}$ till problemet

$$\begin{array}{lrcl} \min & -4x_1 + 3x_2 + 3x_3 & & \\ \text{u.b.} & -4x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 1, \\ & x_1 - x_2 + x_3 & = & -2, \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

En *tillåten lösning* till ett optimeringsproblem $\min_{x\in X} f(x)$ är ett elemet i lösningsmängden, d.v.s. $x \in X$. I fall där lösningsmängden är uttryckt som en mängd bivillkor är en tillåten lösning en lösning som uppfyller samtliga bivillkor.

Exemplet på baslösning ovan är även ett exempel på en tillåten lösning.

Ett *billigaste uppspännande träd* för en viktad graf $G = (V,E)$ är en viktad sammanhängande delgraf av G utan cykler, sådan att ingen annan viktad sammanhängande delgraf av G utan cykler har lägre vikt. (Vi förutsätter att vikter ärvs från G till delgrafer av G.)

För ett exempel på ett billigaste uppspännande träd, låt

$$G = (\{a,b,c,d\},\{ab,ac,ad,bc,bd\})$$

med vikterna $v(ab) = v(ac) = v(ad) = 1$, $v(bc) = v(bd) = 2$. Då ges ett billigaste uppspännande träd av $(\{a,b,c,d\},\{ab,ac,ad\})$, med vikten 3. I exemplet finns ett unikt billigaste uppspännande träd; alla andra uppspännande träd har större vikt.

Ett *globalt maximum* till ett maximeringsproblem

$$\max_{x\in X} f(x)$$

är en punkt $x^* \in X$ sådan att $f(x) \leq f(x^*)$ för alla $x \in X$.

Ett exempel på ett globalt maximum är $x = 0$ i problemet $\max_{x\in\mathbb{R}} -x^2$.

Ett *lokalt maximum* till ett maximeringsproblem

$$\max_{x\in X} f(x)$$

är en punkt $\bar{x} \in X$ sådan att det finns ett $\epsilon > 0$ sådant att $f(x) \leq f(\bar{x})$ för alla $x \in X$ som uppfyller $|x - \bar{x}| \leq \epsilon$.

Ett exempel på ett lokalt maximum är $x = -1$ i problemet $\max_{x\geq -1} x^2$.

6. Beskriv kortfattat i matematiska termer hur trädsökning (*branch and bound*) fungerar. [10p]

Lösning:

Se kurslitteratur (Optimeringslära av Lundgren, Rönnqvist, Värbrand), avsnitt 15.