ÖREBRO UNIVERSITET

Flervariabelanalys för civilingenjörer

MA505G-0100

2018-01-13, kl. 08:15–13:15

Hjälpmedel: Endast skrivmateriel. Formelblad delas ut tillsammans med skrivningen.

Betygskriterier: Skrivningens maxpoäng är 60. Samtliga uppgifter bedöms utifrån kriterier för *problemlösning* och *redovisning*. För betyg 3/4/5 räcker det med 6 poäng inom vart och ett av huvudområdena *differentialkalkyl*, *integralkalkyl* och *vektoranalys* samt 30/40/50 poäng totalt. Detaljerna framgår av separat dokument publicerat på Blackboard.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg, rita tydliga figurer och svara exakt. Redovisa inte mer än en uppgift per blad. Lämna in bladen i uppgiftsordning.

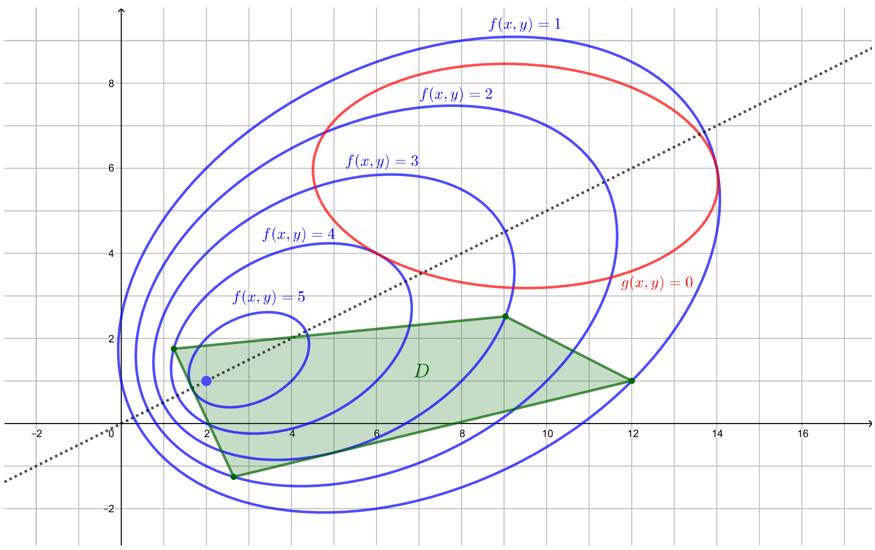
Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Andreas Bergwall.

Lycka till!

---

1. De blå ellipserna i figuren är nivåkurvor till en C^1-funktion $f(x, y)$. Ju mindre ellips desto högre nivå. Punkten $(2, 1)$ är enda stationära punkt och där är $f(2, 1) = 5.8$. Vidare gäller att den röda kurvan kan beskrivas med en ekvation $g(x, y) = 0$ och att det gröna området D är slutet. [8p]



Uppskatta svaren på frågorna nedan utifrån den information som finns i figuren. Ge korta motiveringar.

(a) Vad är största och minsta värdet av $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$?

(b) Vad är största och minsta värdet av $f(x, y)$ då $(x, y) \in D$?

(c) Vad är riktningsderivatan $f'_{\boldsymbol{v}}(2, 4)$ om $\boldsymbol{v} = (0, -1)$.

(d) Vad är störst, $|\operatorname{grad} f(0, 1)|$ eller $|\operatorname{grad} f(8, 1)|$?

2. Vilka av punkterna $(0,0)$, $(1,2)$ och $(-1,1/2)$ är stationära punkter till [6p]

$$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2y + 3x^2 - 6xy - 3y^2?$$

Bestäm deras karaktär! Du behöver inte leta efter fler stationära punkter.

3. Lös differentialekvationen [6p]

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - 2x^2\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2 \qquad (x > 0)$$

genom att införa variablerna $u = x^2 + y$, $v = x^2 - y$.

4. Beräkna en av integralerna nedan. Välj själv vilken. [6p]

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_{x^2}^{\pi} \frac{x \sin y}{y}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\iiint_K (x+y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ där K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $y \geq 0$.

5. Ytorna $z = 2x^2 + 2y^2$ och $z = 1 + x^2 + y^2$ begränsar tillsammans en homogen kropp K. Beräkna K:s volym V och K:s tyngdpunkt (x_t, y_t, z_t). Tyngdpunktens koordinater ges av [10p]

$$x_t = \frac{1}{V}\iiint_K x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,\ y_t = \frac{1}{V}\iiint_K y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,\ z_t = \frac{1}{V}\iiint_K z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

6. Beräkna flödet av $\boldsymbol{u} = (xy, yz - y, x^3z)$ ut genom randytan till rätblocket $K = [-1,1] \times [0,2] \times [0,1]$. [6p]

7. Låt $P(x,y) = e^y - 2\sin x$. Välj en funktion $Q(x,y)$ sådan att $\boldsymbol{F} = (P, Q,)$ blir ett potentialfält i $\mathbb{R}^2$. Bestäm en potential och beräkna $\int_\gamma P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y$ för en valfri cirkel γ. [6p]

8. Låt γ vara fyrhörningen med hörn i $(0,0)$, $(2,-1)$, $(3,1)$ och $(1,2)$ genomlupen ett varv moturs. Beräkna $\int_\gamma y^2\, \mathrm{d}x + xy\, \mathrm{d}y$ med hjälp av Greens formel. [12p]

Flervariabelanalys för civilingenjörer 20180113—lösningsförslag

1. Man kan inte med säkerhet veta hur f beter sig mellan nivåkurvorna. Men eftersom det inte finns några fler stationära punkter än i $(2, 1)$ så kan man i alla fall vara säker på följande: Mellan två nivåkurvor antar $f(x, y)$ bara värden mellan de två nivåerna.

   (a) I optimum är mål- och bivillkorsgradienten parallella, d.v.s f:s nivåkurva och kurvan $g(x, y) = 0$ tangerar varandra. Minsta värde är alltså $f(14, 6) = 1$ och största värde är $f(6, 4) = 4$.

   (b) Optimum antas i randpunkt och/eller inre stationär punkt. D ligger innanför, men tangerar, $f(x, y) = 1$ och innehåller den stationära punkten $(2, 1)$. Minsta värde är alltså $f(12, 1) = 1$ och största värde är $f(2, 1) = 5.8$.

   (c) Går man från punkten $(2, 4)$ så kommer ett steg längs med enhetsvektorn $(0, -1)$ att resultara i att funktionsvärdet ökar med 1 enhet. Går man åt motsatt håll minskar funktionsvärdet lika mycket. Baserat på informationen i figuren är det rimligt att göra uppskattningen $f'_{\boldsymbol{v}}(2, 4) = 1$. Notera att $f'_{\boldsymbol{v}}(2, 4) = -f'_y(2, 4)$.

   (d) Nivåkurvorna tycks ligga tätare vid $(0, 1)$ än vid $(4, 1)$, vilket indikerar att funktionens graf är brantare där, alltså att $|\operatorname{grad} f(0, 1)|$ är större än $|\operatorname{grad} f(8, 1)|$.

2. $(0, 0)$ och $(-1, 1/2)$ är stationära punkter men inte $(1, 2)$. Det är bara att sätta in i f'_x och f'_y och kolla om de blir 0 eller ej. Det är alltså onödigt att lägga kraft på att försöka lösa systemet $(f'_x, f'_y) = (0, 0)$. Men om man gör det så får man fram tre stationära punkter: $(0, 0)$, $(-1, 1/2)$ och en till.

   För att avgöra punkternas karaktär studerar vi den kvadratiska formen $Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ där $A = f''_{xx}(a, b)$, $B = f''_{xy}(a, b)$, $C = f''_{yy}(a, b)$ och (a, b) är den stationära punkt som vi är intresserade av (se formelblad). Det är meningslöst att göra en sån undersökning i en punkt som inte är stationär.

   I punkten $(0, 0)$ får vi $A = 6$, $B = -6$, $C = -6$ vilket ger den kvadratiska formen $Q(h, k) = 6h^2 - 12hk - 6k^2$. Den är indefinit eftersom $AC - B^2 = -72 < 0$. Om man inte vill lägga det testet på minnet kan man kvadratkomplettera vilket ger

   $$Q(h, k) = 6(h - k)^2 - 12k^2.$$

   Eftersom kvadraternas koefficienter har olika tecken så kommer $Q(h, k)$ att anta både positiva och negativa värden hur nära $(h, k) = (0, 0)$ som helst, d.v.s. $Q(h, k)$ är indefinit. Hursomhelst innebär det att $(0, 0)$ är en sadelpunkt.

   I punkten $(-1, 1/2)$ får vi $A = -9$, $B = 0$, $C = -6$ vilket ger den kvadratiska formen $Q(h, k) = -9h^2 - 6k^2$. Den är definit eftersom $AC - B^2 = 54 > 0$. Eftersom $A < 0$ är den negativ definit. Här behöver vi inte ens kvadratkomplettera för att dra den slutsatsen ut Q:s utseende. Båda kvadraterna har ju negativa koefficienter vilket innebär att $Q(h,k)$ bara kommer att anta negativa värden hur nära $(h,k) = (0,0)$ vi än är. Det innebär i alla fall att $(-1, 1/2)$ är en lokal maxpunkt.

Obs! Begreppen positivt/negativt definit, semidefinit, indefinit står för egenskaper hos den kvadratiska formen. De stationära punkterna kan vara lokala max-, min- eller sadelpunkter. Man kan alltså inte säga att punkten $(0,0)$ är indefinit eller att $Q(h,k) = -9h^2 - 6k^2$ är en maxpunkt.

3. När en funktion f till varje talpar (x,y) ordnar ett tal z så skriver vi $z = f(x,y)$. Idén med att göra ett variabelbyte är att sambandet mellan z och de nya variablerna u och v i någon mening ska kunna beskrivas med en enklare funktion än f. Om man vill vara noga med beteckningar så ska man ha ett annat namn på den funktionen, t.ex. F. Då är alltså $z = F(u,v)$ och sambandet mellan f och F är att $F(x^2+y, x^2-y) = f(x,y)$. För att slippa hålla reda på om det är F eller f man deriverar kan det vara enklare att bara använda z även när man skriver derivator. Det innebär t.ex. att $z'_u = F'_u(u,v)$ medan $z'_y = f'_y(x,y)$.

   Kedjeregeln ger då att

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = 2xz'_u + z'_v \qquad \text{och} \qquad z'_y = z'_u - 2z'_v.$$

   Insättning i diffekvationen ger (efter förenkling)

$$z'_v + 4xz'_v = 1 + 4x \Leftrightarrow z'_v = 1 \Leftrightarrow z = v + g(u),$$

   d.v.s. lösningarna är $z = f(x,y) = x^2 - y + g(x^2+y)$ där g är en godtycklig C^1-funktion av en varaibel.

4. (a) Det går inte att uttrycka $\int((\sin y)/y)\,\mathrm{d}y$ med elementära funktioner. Så vårt enda hopp är att byta integrationsordning. Då fås (rita figur så inser du varför!)

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \frac{y \sin x}{x}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \ldots = 1.$$

   (b) Rymdpolära koordinater och symmetri kring $x = 0$ ger

$$\iiint_{[0,1]\times[0,\pi]\times[0,\pi]} r \sin\theta \sin\varphi \cdot r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

5. $2x^2 + 2y^2 = 1 + x^2 + y^2$ omm $x^2 + y^2 = 1$. Området K ges alltså av att

$$2x^2 + 2y^2 \le z \le 1 + x^2 + y^2, \qquad x^2 + y^2 \le 1.$$

   Rita figur! Allting är rotatinssymmetriskt runt z-axeln så en enkel skiss av kurvorna $z = 2x^2$ och $z = 1 + x^2$ i ett plant koordinatsystem (med en x- och en z-axel) är en bra start.

Områdets volym är (använd planpolära koordinater)

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} (1+x^2+y^2)-(2x^2+2y^2)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} (1-r^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \ldots = \frac{\pi}{2}.$$

Man kan också utgå från att volymen ges av $\iiint_K\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Om man börjar med att integrera med avseende på z så kommer man sen att få exakt samma dubbelintegral som ovan.

Nu till tyngdpunkten. Av symmetriskäl är $x_t = y_t = 0$. Vi får

$$\begin{aligned}
z_t &= \frac{1}{V} \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(\int_{2x^2+2y^2}^{1+x^2+y^2} z\,\mathrm{d}z \right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2V} \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left((1+x^2+y^2)^2 - (2x^2+2y^2)^2 \right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2V} \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left((1+r^2)^2 - (2r^2)^2 \right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\pi}{V} \left[\frac{1}{6}(1+r^2)^3 - \frac{2}{3}r^6 \right]_0^1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

6. Enligt Gauss sats är flödet (observera symmetrin kring $x = 0$ och att K:s volym är 4)

$$\begin{aligned}
&\iint_{\partial K} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_K \operatorname{div}\boldsymbol{u}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \iiint\limits_{[-1,1]\times[0,2]\times[0,1]} (y+z-1+x^3)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \iiint\limits_{[-1,1]\times[0,2]\times[0,1]} (y+z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 4 \\
&= 2\int_0^2 y\,\mathrm{d}y + 4\int_0^1 z\,\mathrm{d}z - 4 = 4+2-4 = 2.
\end{aligned}$$

7. $\boldsymbol{F}$ är potentialfält omm $Q'_x = P'_y = e^y$, d.v.s. omm $Q = xe^y + g(y)$ där g är en godtycklig C^1-funktion av en variabel.

   Välj för enkelhets skull $g = 0$. En potential U är sådan att $U'_x = P$ och $U'_y = Q$. Lite räkningar leder till att $U = xe^y + 2\cos x$ är en potential.

   Eftersom (P, Q) är ett potentialfält så är $\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$ för alla slutna kurvor γ, och då speciallt för alla cirklar.

8. Låt D vara den inneslutna kvadratiska skivan. D ges då av olikheterna $0 \leq 2x - y \leq 5$, $0 \leq x + 2y \leq 5$. Sätter vi $u = 2x - y$, $v = x + 2y$, så svarar D mot $E = [0,5] \times [0,5]$ i uv-planet. Då är $y = (2v - u)/5$ och $d(x,y)/d(u,v) = 1/5$.

   Greens formel och variabelbyte i dubbelintegralen ger

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma y^2 \,\mathrm{d}x + xy \,\mathrm{d}y = \iint_D (y - 2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_D y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\iint_E \frac{1}{5}(2v - u)\frac{1}{5}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = -\frac{1}{25}\left(5 \cdot 25 - \frac{25}{2} \cdot 5\right) = -\frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

   Om man hellre vill tänka att man inför ett nytt uv-koordinatsystem med samma origo men med D:s sidor som bas så kan man sätta $(x,y) = u(2,-1) + v(1,2)$, d.v.s. $x = 2u + v$, $y = -u + 2v$. Då kommer D att svara mot kvadraten $E = [0,1] \times [0,1]$ och funktionaldeterminanten blir $d(x,y)/d(u,v) = 5$.

   Observera att vi använder Greens formel först och sen gör variabelbytet i dubelintegralen. Det går att göra tvärtom om man vet hur man byter variabler i kurvintegraler. Det har vi inte tagit upp i kursen men det är inte så svårt.

   Låt säga att vi vill göra variabelbytet $x = 2u + v$, $y = -u + 2v$. Då kommer γ att motsvaras av den kurva σ i uv-planet som går ett varv moturs runt enhetskvadraten $E = [0,1] \times [0,1]$ i uv-planet. *Differentialen* av x som funktion av u och v är

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v = 2\mathrm{d}u + \mathrm{d}v.$$

   På liknande sätt är $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}u + 2\mathrm{d}v$. Alltså är

$$\begin{aligned}
&y^2 \,\mathrm{d}x + xy \,\mathrm{d}y = (-u + 2v)^2(2\mathrm{d}u + \mathrm{d}v) + (2u + v)(-u + 2v)(-\mathrm{d}u + 2\mathrm{d}v) \\
&= \ldots = (4u^2 - 11uv + 6v^2)\mathrm{d}u + (-3u^2 + 2uv + 8v^2)\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

   Alltså är

$$\int_\gamma y^2 \,\mathrm{d}x + xy \,\mathrm{d}y = \int_\sigma (4u^2 - 11uv + 6v^2)\mathrm{d}u + (-3u^2 + 2uv + 8v^2)\mathrm{d}v.$$

   Greens formel ger nu dubbelintegralen

$$\iint_E (-3u^2 + 2uv + 8v^2)'_u - (4u^2 - 11uv + 6v^2)'_v \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_E (5u - 10v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = -\frac{5}{2}.$$