ÖREBRO
UNIVERSITET

Lösning till tentamen i

Introduktionskurs i matematik för civilingenjörer

MA001G

2018-09-03

---

1. Lös ekvationen [6p]

$$(2x+1)(x-5) = 0\,.$$

Lösning: Eftersom en produkt bara kan vara noll om någon av faktorerna är noll gäller $2x+1=0$ eller $x-5=0$. Dessa ekvationer har lösningarna $x=-\frac{1}{2}$ och $x=5$.

2. Förenkla [6p]

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}}\,.$$

Lösning: Vi har

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}} = \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{1}{ab}} = b+a.$$

3. Bestäm eventuella skärningspunkter mellan linjen $y=x$ och den cirkel som har centrum i punkten (2,0) och radien 2. [6p]

Lösning: Rita gärna figur!

Cirkelns ekvation är $(x-2)^2+y^2=4$. Med $x=y$ får vi

$$4 = (x-2)^2 + x^2 = x^2 - 4x + 4 + x^2 = 2(x^2 - 2x + 2),$$

vilket ger $0 = x^2 - 2x = x(2-x)$. Lösningarna är alltså $(x,y) = (0,0)$ och $(x,y) = (2,2)$.

4. Olivia köper en TV-skärm i det litet ovanligare formatet 12:5, för att kunna se filmer i CinemaScope-format. Hennes skärm har en diagonal som är 52 tum. Bestäm skärmens höjd (mätt i tum) och även $\sin(\alpha)$, där α är den mindre vinkeln mellan diagonalen och horisontallinjen. [6p]

Lösning: Vi ritar en rektangel med diagonal och ser att kateterna i den triangel som uppstår har proportionerna 12:5. Då är den proportionella längden av hypotenusan $\sqrt{12^2+5^2}=13$. Om diagonalen är 52 tum blir då skärmens höjd $\frac{52}{13}\cdot 5 = 20$ tum. Vi får dessutom ur figuren att $\sin(\alpha)=5/13$.

5. Lös olikheten [6p]

$$3x \geq \frac{1-x^2}{x}\,.$$

För vilka värden på x råder likhet?

Lösning:

För $x>0$ får vi

$$\begin{aligned} 3x^2 &\geq 1-x^2 \\ 4x^2 &\geq 1 \\ x^2 &\geq \frac{1}{4} \\ x &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

För $x<0$ får vi

$$\begin{aligned} 3x^2 &\leq 1-x^2 \\ 4x^2 &\leq 1 \\ x^2 &\leq \frac{1}{4} \\ x &\geq -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Olikheten är alltså uppfylld för $-\frac{1}{2}\leq x<0$ och för $x\geq\frac{1}{2}$, med likhet då $x=\pm\frac{1}{2}$.

Anmärkning: Det går även att lösa olikheten genom att använda teckentabell.

6. Förklara hur du resonerar när du beräknar [6p]

$$^2\log(0{,}25)+\ln(e\sqrt{e})+\lg(100000)\,.$$

Lösning: Varje term måste behandlas för sig. I varje term måste vi bestämma vad logaritmens bas ska upphöjas i för att få logaritmens argument.

- Eftersom $2^2 = 4$ gäller $2^{-2} = 1/4$.
- Vi har $\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{3/2}$.
- Vi har $100000 = 10^5$.

Därmed har vi

$$^2\log(0{,}25) + \ln(e\sqrt{e}) + \lg(100000) = -2 + \frac{3}{2} + 5 = \frac{9}{2}.$$

7. Avgör för vilka ekvationer nedan som lösning finns respektive saknas. Motivera algebraiskt eller grafiskt. [6p]

$$\ln(x+1) = 2 \quad , \quad x^{1/3} = -2 \quad , \quad (x+1)^2 = -1\,.$$

Lösning: För $\ln(x+1) = 2$ gäller att logaritmen antar alla värden, till exempel 2. Därmed finns en lösning (nämligen $x = \mathrm{e}^2 - 1$).

För $x^{1/3} = -2$ kan vi ta båda sidorna upphöjt i 3 och får då $x = (-2)^3 = 8$.

För $(x+1)^2 = -1$ vet vi att inga (reella) tal blir negativa efter kvadrering. Ekvationen saknar alltså lösning.

8. Lös ekvationen [6p]

$$4^{x+1} + 3 \cdot 2^x - 1 = 0\,.$$

Lösning: Ekvationen kan skrivas

$$4 \cdot (2^x)^2 + 3 \cdot 2^x - 1 = 0.$$

Med $t = 2^x$ får vi $4t^2 + 3t - 1 = 0$, vilket ger

$$t = -\frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{1}{4}} = -\frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64}} = -\frac{3}{8} \pm \frac{5}{8}.$$

Eftersom $t = 2^x > 0$ får vi som enda lösning $t = \frac{1}{4}$, vilket ger $x = -2$.

9. Lös ekvationen [6p]

$$2\cos(4x-1) = 1.$$

Lösning: Vi får

$$\begin{aligned} 2\cos(4x-1) &= 1 \\ \cos(4x-1) &= \frac{1}{2} \\ 4x-1 &= \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ 4x &= \pm\frac{3+\pi}{3} + 2\pi n \\ x &= \pm\frac{3+\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}. \end{aligned}$$

10. En studiekamrat har gjort följande lösning på en viss logaritmekvation: [6p]

$$\lg(x) + \lg(5) = 1 = \lg(5x) = 1 = 5x = 10 = x = 2\,.$$

Ange vilken ekvation studiekamraten har löst. Som du märker så är lösningen inte så enkel att följa och det finns även felaktigheter i resonemanget. Identifiera minst en felaktighet i lösningen och presentera en egen korrekt lösning.

Lösning: Den ekvation som kamraten försökt lösa är $\lg(x) + \lg(5) = 1$, där lösningen $x = 2$ är helt korrekt. Däremot anger lösningen till exempel att $5x = x$ och att $1 = 10 = 2$, vilket inte stämmer. Vartannat likhetstecken i presentation ska vara ekvivalenstecken.

Ett sätt att presentera en korrekt lösning är enligt: Notera först att $x > 0$ måste gälla för att $\lg(x)$ ska vara definierat. Vi får

$$\begin{aligned} \lg(x) + \lg(5) &= 1 \\ \lg(5x) &= 1 \\ 5x &= 10 \\ x &= 2. \end{aligned}$$