

Tentamen i Funktioner och derivator

MA502G

2019-08-19, kl. 08:15–13:15

Hjälpmedel: Skrivdon (penna, sudd, linjal, gradskiva)

Betygskriterier: Framgår av separat dokument publicerat på Blackboard. Totalt kan man få 60 poäng. Uppgifterna på Del 1 är uppdelade i de tre huvudområdena Algebra, Funktioner, och Derivator, och kan tillsammans ge 12 poäng per huvudområde. Uppgifterna på Del 2 kan tillsammans ge 24 poäng. För betyg 3/4/5 krävs 3/4/5 poäng per huvudområde på Del 1 och 30/40/50 poäng totalt.

Anvisningar: Motivera väl, redovisa alla väsentliga beräkningssteg och svara exakt. Svara på högst en uppgift per blad.

Skrivningsresultat: Meddelas inom 15 arbetsdagar.

Examinator: Jens Fjelstad

Lycka till!

Del 1

Algebra

1. Har olikheten $|x + 2| - 2|x - 5| > x - 6$ någon lösning i intervallet $0 \leq x \leq 4$? I så fall, vilka? (4p)
2. Vilken kurva beskrivs av ekvationen $x^2 + y^2 = 2x$? Rita figur för att illustrera svaret. (4p)
3. Bestäm värdet på $\cos \alpha$ om $\tan \alpha = \sqrt{3}$ och $\alpha \in [0, \pi/2]$. (4p)

Funktioner

4. Beräkna gränsvärdet av $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x} \cdot \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ då
a) $x \rightarrow 1$ b) $x \rightarrow 0$ c) $x \rightarrow \infty$ (6p)

5. För vilka reella värden på a och b gäller att (6p)

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{om } x < 0 \\ b + \sqrt{x} & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

är både kontinuerlig och injektiv? Rita grafen för ett val av sådana värden på a och b , och bestäm f^{-1} för just detta val.

Derivator

6. Finns något intervall där $f(x) = xe^{-x}$ är både avtagande och konkav? (6p)

7. (a) Förklara skillnaden mellan stationär punkt och lokal extrempunkt. (2p)

- (b) Bestäm alla stationära punkter och alla lokala extrempunkter till (4p)

$$f(x) = (1 + x^2)e^{-x}, \quad x \in [0, 4].$$

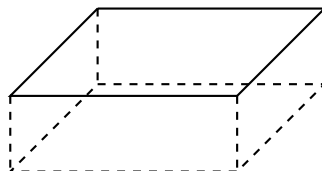
Del 2

8. Bestäm alla asymptoter, lokala extrempunkter och inflexionspunkter till (8p)

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1}.$$

Rita grafen.

9. En låda utan lock ska rymma 32 liter. Den ska ha formen av ett rätblock med kvadratisk botten. När lådan tillverkas så svetsas bottenkivan och de fyra sidorna ihop längs med alla skarvar. I figuren nedan är skarvarna indikerade med streckade linjer. För att minimera tillverkningstiden vill man att skarvarnas sammanlagda längd ska vara så liten som möjligt. Vilka mått ska lådan ha? (8p)



10. En pools form är sådan att sambandet mellan vattenvolymen V och vattendjupet h är (8p)

$$V(h) = \begin{cases} 1,5h^2 + 6h, & 0 \leq h \leq 1 \\ 15h - 7,5, & 1 \leq h \leq 2. \end{cases}$$

Djupet h anges i meter medan volymen V anges i kubikmeter.

Vatten fylls på i poolen med takten 30 liter per minut, och vid en viss tidpunkt ökar djupet med 4 mm per minut. Hur stort är vattendjupet vid just denna tidpunkt?