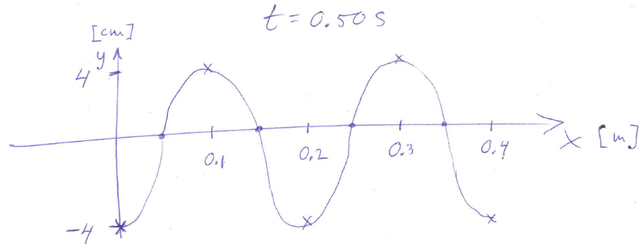
LÖSNINGAR TILL ÖVNINGSTENTAN DEL 1, FY501G

1. Låt oss börja med att skissa vågen för $t = 0.50$, dvs vi löser först uppgift:

e) Med kännedom om två närliggande bukar (på avståndet $\lambda/2$) och elongationen i den första buken ($x = 0$) vid tiden $t = 0.50$ från figuren i uppgiften kan vi direkt skissa vågen:



Ur skissen ovan avläser vi $\lambda = 0.20$ m, så att $k = 2\pi/\lambda = 10\pi\ \text{m}^{-1}$. Ur figuren i uppgiften avläser vi $T = 2.0$ s, så att $\omega = 2\pi/T = \pi\ \text{s}^{-1}$. För att figuren, som liknar en 'minus-sinus'-kurva och skissen skall stämma överens (för $t = 0.50$) krävs att funktionen för rumsdelen $y(x, 0.50)$ uppfyller (tex) $y(0, 0.50) = -4.0$ cm och $y(0.10, 0.50) = 4.0$ cm, vilket $y(x, 0.50) = -4.0\cos(10\pi x)$ cm gör. Alltså beskrivs den stående vågen av $y(x,t) = -4.0\cos(10\pi x)\sin(\pi t)$ cm.

a) Kan besvaras från skissen eller med $y(0.20, 0.50) = -4.0\cos(10\pi \cdot 0.20)\sin(\pi \cdot 0.50) = -4.0\cos(2\pi)\sin(\pi/2) = -4.0$ cm.

b) Kan besvaras från skissen eller med $y(0.30, 0.50) = -4.0\cos(10\pi \cdot 0.30)\sin(\pi \cdot 0.50) = -4.0\cos(3\pi)\sin(\pi/2) = 4.0$ cm.

Den transversella hastigheten ges av $v_t = \frac{\partial y}{\partial t} = -4.0\cos(10\pi x)\frac{\partial}{\partial t}\sin(\pi t) = -4.0\cos(10\pi x)\,\pi\cos(\pi t)$.

c) Då vågen i $x = 0.20$ m är i fas med vågen i $x = 0$ m och vågen där (enligt figuren i uppgiften) har maximal (negativ) elongation för $t = 0.50$ s måste $v_t = 0$ ("vändläge"). Detta bekräftas också av formeln $v_t(0.20, 0.50) = -4.0\cos(10\pi \cdot 0.20)\,\pi\cos(\pi \cdot 0.50) = 0$.

d) Då vågen i $x = 0.20$ m är i fas med vågen i $x = 0$ m och vågen där (enligt figuren i uppgiften) har elongationen 0 för $t = 1.0$ s måste $v_t = +y_m\omega$ ("maximal fart", på väg upp). Detta bekräftas också av formeln $v_t(0.20, 1.0) = -4.0\cos(10\pi \cdot 0.20)\,\pi\cos(\pi \cdot 1.0) = 4.0\pi$ cm/s.

SVAR: Elongationerna är **a)** -4.0 cm och **b)** 4.0 cm. De transversella hastigheterna är **c)** 0 och **d)** 4.0π cm/s. Skissen i **e)** gavs ovan.

Alternativ lösning. 1. Med utgångspunkt från bokens formel (16-60) får vi införa faser för att uppfylla figuren och få noderna på rätt plats. Så med $2y_m = 4.0$ cm kan vi ansätta:

$$y(x,t) = 4.0 \sin(kx + \phi_x) \cos(\omega t + \phi_t) . \tag{1}$$

Först konstaterar vi från figuren i uppgiften att:

$$y(0,t) = 4.0 \sin(\phi_x) \cos(\omega t + \phi_t) = -4.0 \sin(\omega t) . \tag{2}$$

Sedan ser vi att för att (för alla t) få noder i $x = 0.050$, 0.15, 0.25, 0.35, ... (med $k = 10\pi$ m^{-1} enligt lösningen ovan), måste rumsdelen uppfylla

$$\sin(kx + \phi_x) = \sin(k(x - 0.050)) = \sin\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - kx\right) = -\cos(kx) . \tag{3}$$

Dvs $\phi_x = -\frac{\pi}{2}$, vilket vi kan sätta in i VL av (2), så att:

$$4.0 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cos(\omega t + \phi_t) = -4.0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -4.0 \sin(\omega t) , \tag{4}$$

dvs $\phi_t = -\frac{\pi}{2}$.

Sammanfattningsvis har vi då visat att:

$$y(x,t) = 4.0 \sin(kx + \phi_x) \cos(\omega t + \phi_t) = 4.0 \sin\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -4.0 \cos(kx) \sin(\omega t) , \tag{5}$$

vilket var den form vi 'resonerade' oss fram till i lösningen ovan.

2. Den formel vi behöver för att översätta en intensitet I till en ljudnivå β är (17-29):

$$\beta = 10 \ [\text{dB}] \log\left(\frac{I}{I_0}\right). \tag{6}$$

a) Vi tar mha tabellen fram intensiteten för ett samtal I_s:

$$60 = 10 \ [\text{dB}] \log\left(\frac{I_s}{I_0}\right) \Rightarrow 10^6 = 10^{\log\left(\frac{I_s}{I_0}\right)} = \frac{I_s}{I_0}, \tag{7}$$

och intensiteten för en rockkonsert I_r:

$$100 = 10 \ [\text{dB}] \log\left(\frac{I_r}{I_0}\right) \Rightarrow 10^{10} = \frac{I_r}{I_0}. \tag{8}$$

Så förhållandet mellan I_s och I_r är

$$\frac{I_s}{I_r} = \frac{\frac{I_s}{I_0}}{\frac{I_r}{I_0}} = \frac{10^6}{10^{10}} = 10^{-4}. \tag{9}$$

Svar a): Förhållandet mellan intensiteten vid ett vanligt samtal och en rockkonsert är 10^{-4} (en tiotusendel).

b) Vi söker β för $I = I_0$, så att:

$$\beta = 10 \ [\text{dB}] \log\left(\frac{I_0}{I_0}\right) = 10 \ [\text{dB}] \log 1 = 0. \tag{10}$$

Svar b): Ljudnivån vid hörbarhetsgränsen är 0 dB.

c) Låt oss utgå från en viss nivå $\hat{\beta}$ svarande mot intensiteten $\hat{I}$ och sedan dubblera intensiteten till $I = 2\hat{I}$.

$$\hat{\beta} = 10 \ [\text{dB}] \log\left(\frac{\hat{I}}{I_0}\right) \Rightarrow 10 \ [\text{dB}] \log\left(\frac{2\hat{I}}{I_0}\right) = 10 \ [\text{dB}] \left(\log(2) + \log\left(\frac{\hat{I}}{I_0}\right)\right)$$

$$= 10 \ [\text{dB}] \log(2) + \hat{\beta} = \hat{\beta} + 10 \cdot 0.3010 \ [\text{dB}]. \tag{11}$$

Svar c): Ljudnivån ökar med ca 3 dB om intensiteten fördubblas.

d) Enligt formeln i uppgiften gäller för $\nu = 20$ att:

$$v = 331.3 + 0.606 \cdot 20 = 343.420 \ m/s. \tag{12}$$

Svar d): Enligt wikipedias formel blir ljudhastigheten vid rumstemperatur 343 m/s.

e) Från den ideala gaslagen får vi derivatan:

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{Nk_BT}{V^2}, \tag{13}$$

vilket vi sätter in i definitionen för B :

$$B = -V\frac{\partial p}{\partial V} = \frac{Nk_BT}{V}. \tag{14}$$

Detta ger oss följande formel för ljudets hastighet:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\frac{Nk_B}{V}}{\rho}}\sqrt{T}, \tag{15}$$

där vi brutit ut allt som vi betecknar som konstanter[1] och påminner om att temperaturen T måste anges i SI-enheten Kelvin (K). Om vi nu utgår från farten $v = 331.3$ vid temperaturen $0°C = 273.15$ K, gäller för konstanterna:

$$\sqrt{\frac{\frac{Nk_B}{V}}{\rho}} = \frac{v}{\sqrt{T}} = \frac{331.3}{\sqrt{273.15}} = 20.0457\, ms^{-1}K^{-1/2}. \tag{16}$$

Då kan vi för rumstemperatur $T = 273.15 + 20.0 = 293.15$ K beräkna farten enligt:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\frac{Nk_B}{V}}{\rho}}\sqrt{T} = 20.0457\left[ms^{-1}K^{-1/2}\right]\cdot\sqrt{293.15}\left[K^{1/2}\right] = 343.2146m/s. \tag{17}$$

Svar e): Vi föreslår (samma som wikipedia) ljudhastigheten 343 m/s vid rumstemperatur.

[1] Det kan tyckas som att v påverkas av vilken volym V vi väljer, men då N betecknar antalet molekyler ökar detta proportionellt.

3. Vi använder laddningarna $+1$ elementarladdning (e) för en proton och -1 elementarladdning för en elektron. Vi kan använda formeln (22-3) för att beräkna (styrkan av) det elektriska fältet från en punktladdning och delar upp riktningsvektorn i två komponenter (z-koordinaten kan antas vara noll då alla laddningar ligger i ett plan). En elektron ger tex en positiv y-komponent för det elektriska fältet då riktningen sammanfaller med kraften på en positiv testladdning.

a) Vi summerar alla x- och y-komponent ($\theta_0 = 0$):

$$E_{x,tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta_1 - \cos(\theta_1+\theta_2) - \cos(\theta_3+\theta_4) + \cos\theta_4\right)e = 0.2575\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{18}$$

$$E_{y,tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta_1 - \sin(\theta_1+\theta_2) + \sin(\theta_3+\theta_4) - \sin\theta_4\right)e = -1.061\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{19}$$

Med siffervärden på konstanterna och $r = 0.0250$ m erhåller vi $E_{x,tot} = 5.932 \cdot 10^{-7}$ N/C och $E_{y,tot} = -2.444 \cdot 10^{-6}$ N/C. Så att $\left|\vec{E}\right| = \sqrt{E_{x,tot}^2 + E_{y,tot}^2} = 2.515 \cdot 10^{-6}$ N/C och $\theta = \arctan\left(\frac{E_{y,tot}}{E_{x,tot}}\right) = -76.36°$ (verkar rimligt map figuren).

Svar a): Styrkan för E-fältet är $2.52 \cdot 10^{-6}$ N/C och dess riktning är $-76.4°$.

b) Principen är den samma som i a) men vi har nu att göra med en kontinuerlig laddningsfördelning som vi behöver integrera över. Då funktionen $\lambda(\theta)$ är symmetrisk kring $\theta = \pi/2$ (y-axeln) tar alla bidrag till x-komponenterna ut varandra, så $E_{x,tot} = 0$. Vi vet då också direkt att riktningen av fältet ges av den positiva y-axeln. Vi summerar nu alla y-bidrag (jämför Sample Problem 22.03 sidan 569):

$$E_{y,tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int \sin\theta dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int \lambda(\theta)\sin\theta ds \tag{20}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^\pi \lambda(\theta)\sin\theta r d\theta = \frac{3.77\cdot 10^{-15}}{4\varepsilon_0 r}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \frac{3.77\cdot 10^{-15}}{8\varepsilon_0 r}. \tag{21}$$

Med siffervärden på konstanterna och $r = 0.0250$ m erhåller vi $\left|\vec{E}\right| = E_{y,tot} = 2.129 \cdot 10^{-3}$ N/C.

Svar b): Styrkan för E-fältet är $2.13 \cdot 10^{-3}$ N/C och dess riktning är 90°.

c) Enligt (22-38) gäller för dipolens energi i E-fältet $U = -\vec{p} \bullet \vec{E}$. Enligt figuren gäller (tex)

$$\max(U) = \max\left(-\vec{p}\bullet\vec{E}\right) = |\vec{p}|\left|\vec{E}\right| = U_s, \tag{22}$$

så att $|\vec{p}| = U_s / \left|\vec{E}\right| = 100 \cdot 10^{-28}\ [Nm] / 50\ [N/C] = 2.0 \cdot 10^{-28}\ [Cm]$.

Svar c): Styrkan av dipolsmomentet är $2.0 \cdot 10^{-28}$ Cm.

d) Gauss sats för elektriska fält (23-7):

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}. \tag{23}$$

Då $\vec{E}$-fältet är parallellt med z-axeln kan endast den övre och den undre ytan på kuben ge bidrag till skalärprodukten i integralen, så att

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = -34\vec{e_z} \bullet \left(0.040^2 \vec{e_z}\right) + 20\vec{e_z} \bullet \left(-0.040^2 \vec{e_z}\right) = (-34 - 20)\, 0.040^2 \vec{e_z} \bullet \vec{e_z} = -0.0864 = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}. \tag{24}$$

Den totala elektriska laddningen inne kuben är då $q_{enc} = -0.0864 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} = -7.6499 \cdot 10^{-13}$ C.

Svar d): I kuben finns totalt laddningen $-7.6 \cdot 10^{-13}$ C.

e) Gauss sats för magnetiska fält (32-1):

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{A} = 0. \tag{25}$$

Då $\vec{B}$-fältet är parallellt med z-axeln kan endast den övre och den undre ytan på kuben ge bidrag till skalärprodukten i integralen, så att

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{A} = -34\vec{e_z} \bullet \left(0.040^2 \vec{e_z}\right) + B_{undre}\vec{e_z} \bullet \left(-0.040^2 \vec{e_z}\right) = (-34 - B_{undre})\, 0.040^2 \vec{e_z} \bullet \vec{e_z} = 0. \tag{26}$$

Det magnetiska fältet vid den undre ytan är då $|B_{undre}| = 34$ mT riktat nedåt.

Svar e): Det magnetiska fältet vid den undre ytan är $-34\vec{e_z}$ mT (samma som vid den övre ytan).