

# The Tower of Hanoi Problem

Libotean Bogdan, Morovan Paul, Vint Alexandru

## 1 Introduction

Problema turnurilor Hanoi a fost formulată în 1883 de către matematicianul francez Edouard Lucas. Această problemă are la bază trei tije verticale (P1, P2, P3) și un număr variabil de discuri cu diametre diferite. Regula principală nu permite poziționarea unui disc mai mare peste unul mai mic. La început toate discurile sunt poziționate pe prima tija, P1, în ordine descrescătoare a dimensiunii, discul cel mai mare fiind la baza. Scopul final este mutarea tuturor discurilor pe ultima tija, P3, fără a încalca regulile.

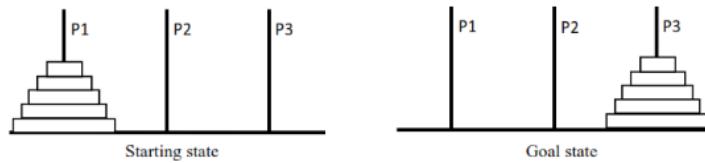


Figure 1: starea initiala si finala a turnurilor

## 2 Formularea matematică

Fie  $T(n)$  numărul minim de mutari necesare pentru a transfera un turn format din  $n$  discuri de pe o tija pe alta, respectând regulile problemei. Observăm următoarele:

- Pentru  $n = 1$ , este nevoie de o singura mutare, deci:

$$T(1) = 1$$

- Pentru  $n > 1$ , pentru a muta turnul de  $n$  discuri de pe tija P1, procedăm astfel:

1. Mutam cele  $n - 1$  discuri de deasupra pe tija P2  $\rightarrow T(n - 1)$  mutari;
2. Mutam discul cel mai mare direct pe tija P3  $\rightarrow 1$  mutare;

3. Mutam cele  $n - 1$  discuri de pe tija P2 pe tija P3  $\rightarrow T(n - 1)$  mutari;

Astfel, obtinem relatia de recurrenta:

$$T(n) = 2 \cdot T(n - 1) + 1$$

cu conditia initiala  $T(1) = 1$ .

Rezolvand aceasta relatia de recurrenta prin substitutie (sau prin inductie matematica), obtinem:

$$T(n) = 2^n - 1$$