

The Tower of Hanoi Problem

Libotean Bogdan, Morovan Paul, Vint Alexandru

1 Introduction

Problema turnurilor Hanoi a fost formulată în 1883 de către matematicianul francez Edouard Lucas. Această problemă are la bază trei tije verticale (P1, P2, P3) și un număr variabil de discuri cu diametre diferite. Regula principală nu permite poziționarea unui disc mai mare peste unul mai mic. La început toate discurile sunt poziționate pe prima tijă, P1, în ordine descrescătoare a dimensiunii, discul cel mai mare fiind la baza. Scopul final este mutarea tuturor discurilor pe ultima tijă, P3, fără a încălca regulile.



Figure 1: starea initiala si finala a turnurilor

2 Formularea matematica

Fie $T(n)$ numărul minim de mutări necesare pentru a transfera un turn format din n discuri de pe o tijă pe alta, respectând regulile problemei. Observăm următoarele:

- Pentru $n = 1$, este nevoie de o singură mutare, deci:

$$T(1) = 1$$

- Pentru $n > 1$, pentru a muta turnul de n discuri de pe tijă P1, procedăm astfel:
 1. Mutăm cele $n - 1$ discuri de deasupra pe tijă P2 $\rightarrow T(n - 1)$ mutări;
 2. Mutăm discul cel mai mare direct pe tijă P3 $\rightarrow 1$ mutare;

3. Mutam cele $n - 1$ discuri de pe tija P2 pe tija P3 $\rightarrow T(n - 1)$ mutari;

Astfel, obtinem relatia de recurenta:

$$T(n) = 2 \cdot T(n - 1) + 1$$

cu conditia initiala $T(1) = 1$.

Rezolvand aceasta relatie de recurenta prin substitutie (sau prin inductie matematica), obtinem:

$$T(n) = 2^n - 1$$