Problema Turnurilor Hanoi

Libotean Bogdan, Morovan Paul, Vint Alexandru

1 Analiza si intelegerea temei

Problema turnurilor Hanoi a fost formulată în 1883 de catre matematicianul francez Edouard Lucas. Această problemă are la bază trei tije verticale (P_1, P_2, P_3) și un număr variabil de discuri cu diametre diferite. Regula principala nu permite pozitionarea unui disc mai mare peste unul mai mic. La inceput toate discurile sunt pozitionate pe prima tija, P_1, in ordine descrescatoare a dimensiunii, discul cel mai mare fiind la baza. Scopul final este mutarea tutror discurilor pe ultima tija, P_3, fara a incalca regulile.

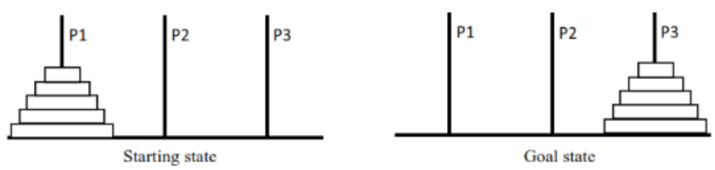

Figure 1: starea initiala si finala a turnurilor

Grupul nostru se va concentra pe cercetarea problemei clasice a Turnurilor Hanoi in cadrul algoritmilor genetici. Vom studia modul in care algoritmii genetici pot fi utilizati pentru a descoperi sau optimiza secventele de mutari (solutiile) necesare pentru a rezolva problema, analizand eficienta reprezentarilor, functiilor fitness si operatorilor genetici specifici.

2 Formularea matematica

Fie $T(n)$ numarul minim de mutari necesare pentru a transfera un turn format din n discuri de pe o tija pe alta, respectand regulile problemei. Observam urmatoarele:

- Pentru $n = 1$, este nevoie de o singura mutare, deci:

$$T(1) = 1$$

- Pentru $n > 1$, pentru a muta turnul de n discuri de pe tija P_1, procedam astfel:

1. Mutam cele $n-1$ discuri de deasupra pe tija $P_2 \rightarrow T(n-1)$ mutari;
2. Mutam discul cel mai mare direct pe tija $P_3 \rightarrow 1$ mutare;
3. Mutam cele $n-1$ discuri de pe tija P_2 pe tija $P_3 \rightarrow T(n-1)$ mutari;

Astfel, obtinem relatia de recurenta: (vezi [2])

$$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 1$$

cu conditia initiala $T(1) = 1$.
Prin substitutie repetata, avem:

$$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 1$$

Substituim $T(n-1)$:

$$T(n) = 2 \cdot (2 \cdot T(n-2) + 1) + 1 = 2^2 \cdot T(n-2) + 3$$

Substituim $T(n-2)$:

$$T(n) = 2^2 \cdot (2 \cdot T(n-3) + 1) + 3 = 2^3 \cdot T(n-3) + 7$$

Daca continuam substitutia, vom ajunge la o formula generala:

$$T(n) = 2^k \cdot T(n-k) + (2^k - 1)$$

tinand cont de conditia initiala $T(1) = 1$, alegem k astfel incat $n - k = 1$, deci $k = n - 1$. Inlocuind $k = n - 1$ in ecuatia generala:

$$T(n) = 2^{n-1} \cdot T(n - (n-1)) + (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1} \cdot T(1) + 2^{n-1} - 1$$

obtinem,

$$T(n) = 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-1} - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$$

Astfel am demonstrat ca numarul minim de miscari necesar pentru rezolvarea problemei turnurilor Hanoi este $2^n - 1$.

3 Alte variante ale problemei

Aceste variatii sunt prezentate cu amanunt in articolul lui Saad Mneimneh [1]

1. Double Decker
    - In aceasta varianta simpla duplicam fiecare disc pentru a crea o stiva de $2n$ discuri cu cate doua din fiecare marime, asa cum putem observa in Figure 2.
    - O solutie triviala pentru Double Decker este sa o rezolvam pur si simplu ca pe o instanta standard a problemei principale (Turnurile Hanoi) cu $2n$ discuri, astfel ajungem la $2^{2n} - 1 = 4^n - 1$, chiar daca aceasta solutie nu este eficienta.

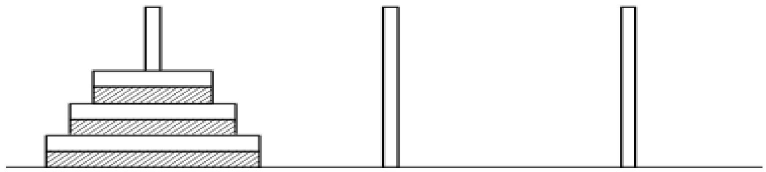

Figure 2: Double Decker pentru $n = 3$

2. Rubber Disk In The Way

    - In aceasta variatie pe langa discurile propriu-zise, exista si un disc de cauciuc plasat initial pe una dintre cele doua tije ramase, asa cum arata in Figure 3. Discul de cauciuc este elastic si usor astfel incat poate sta pe orice disc, dar numai discurile de la 1...k, unde $k \in \{0\} \cup N$, pot aparea deasupra discului de cauciuc.
    - Scopul acestei variatii este de a transfera toate discurile pe alta tija si de a sfarsi cu discul de cauciuc pe tija sa originala (fara nimic deasupra sau dedesubt)

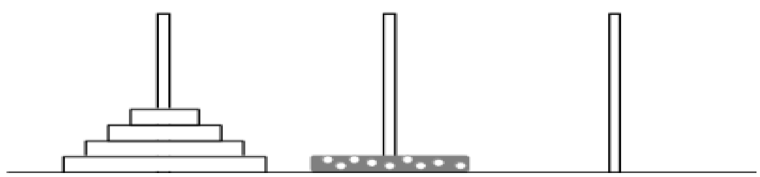

Figure 3: Rubber Disk in the way pentru $n = 4$

3. The Pivot

    - In aceasta varianta sunt permise doar doua tipuri de mutari. Fie discul cel mai mic (disc 1) este mutat pe orice tija, fie un disc oarecare si cel mai mic disc fac schimb de locuri (si aceasta se considera o singura mutare). Prin urmare, cu exceptia celui mai mic disc, discurile se pot muta doar pivotand in jurul discului 1, de unde si numele acestei variatii.

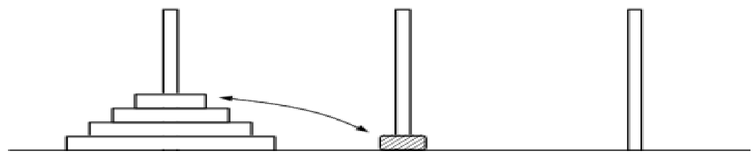

Figure 4: Pivot Turnurile Hanoi $n = 5$

4 Reprezentarea individului

Fie P_1, P_2, P_3 notatiile pentru turnuri, unde P_1 este turnul initial, P_2 este turnul auxiliar, iar P_3 este turnul destinatie. Asadar, pentru 3 discuri, am putea reprezenta un individ sub forma de lista de tupluri, astfel:

$$Individ = [(P_1, P_3), (P_1, P_2), (P_3, P_2), (P_1, P_3), (P_2, P_1), (P_2, P_3), (P_1, P_3)]$$

Totusi, consideram ca o reprezentare mai eficienta ar consta in codificarea fiecarei mutari posibile dupa cum urmeaza:

1) 0 codifica muratea de pe P_1 pe P_2
2) 1 codifica muratea de pe P_2 pe P_1
3) 2 codifica muratea de pe P_1 pe P_3
4) 3 codifica muratea de pe P_3 pe P_1
5) 4 codifica muratea de pe P_2 pe P_3
6) 5 codifica muratea de pe P_3 pe P_2

Astfel, pentru 3 discuri, individul va fi reprezentat sub forma de lista:

$$Individ = [2, 0, 5, 2, 1, 4, 2]$$

5 Functia de Fitness

Functia de fitness trebuie sa evalueze un individ si sa-i dea o nota. In cazul nostru, individul este reprezentat printr-o secventa de mutari. Scorul trebuie sa reflecte cat de aproape este acea secventa de mutari de a rezolva corect problema. Functia de fitness urmareste doua obiective principale: atingerea scopului final si validitatea mutarilor.
Obiectivul nostru este sa maximizăm functia. Ea combină o recompensă majoră pentru progresul realizat (în special al discurilor mari) cu penalizări severe pentru erori și ineficiență.

$$\text{Fitness}(\mathbf{M}) = \text{Scor} - \text{Penalizare miscare Invalida} - \text{Penalizare Lungime}$$

- **Recompensa principala:** scorul stării atinse. Această componentă măsoară cât de departe a ajuns cromozomul spre starea finală (P_3), ținând cont de valoarea exponențială a fiecărui disc.

  a. **Mecanismul de ponderare:** in loc să contorizăm doar numărul de discuri pe P_3, atribuim fiecărui disc k (unde $k = 1$ este cel mai mic și $k = n$ este cel mai mare) o pondere de 2^{k-1}.

     - **Logica:** mutarea unui sub-turn de $k-1$ discuri necesită $2^{k-1} - 1$ pași. Mutarea discului k necesită 1 pas. În total, mutarea întregului turn de k discuri pe P_3 necesită $2^k - 1$ pași. Prin urmare, contribuția la progresul total este exponențială.
     - **Formula:**

$$\text{Score Stare} = \sum_{k=1}^{n} \begin{cases} 2^{k-1} & \text{dacă discul } k \text{ se află pe tija } P_3 \text{ la final} \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

  b. **Scorul maxim:** Dacă toate cele n discuri ajung pe P_3, scorul maxim atins este $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \mathbf{2^n - 1}$.

- **Penalizare Miscare Invalida:** această componentă este cea mai importantă și penalizează orice încălcare a regulii de bază a Turnurilor din Hanoi: discul mare peste discul mic.

  a. **Mecanismul de penalizare:** cromozomul (secvența de mutări) este simulat pas cu pas. Oricând se detectează o mutare care încalcă regula (un disc mai mare este plasat peste unul mai mic), se contorizează ca mutare invalidă.

     - **Formula:**

$$\text{PMI} = C_{pen} \cdot (\text{Nr de mutări invalide în } M)$$

     Unde C_{pen} este o constantă foarte mare (de exemplu, $C_{pen} = 2^n$ sau $2 \cdot (2^n - 1)$).

  b. **Impact:** Dacă un individ are chiar și o singură mutare invalidă, penalizarea va depăși scorul maxim posibil ($2^n - 1$), rezultând un scor Fitness(M) negativ sau foarte mic. Acest lucru asigură că indivizii invalizi sunt rapid eliminați din populație prin selecție.

- **Penalizare Lungime:** Această componentă încurajează Algoritmul Genetic să găsească soluția optimă (cea mai scurtă), adică de lungime exact $L_{optim} = 2^n - 1$.

  a. **Formula:**

$$\text{Penalizare Lungime} = C_{lungime} \cdot \max(0, L - (2^n - 1))$$

  Unde $C_{lungime}$ este o constantă mică (de exemplu, $C_{lungime} = 0.1$ sau 1).

b. **Impact:** Dacă un cromozom valid a atins starea finală, dar este mai lung decât L_{optim} (de exemplu, $L = 9$ pentru $n = 3$, unde $L_{optim} = 7$), el va primi un scor total puțin mai mic decât un cromozom optim, menținând presiunea evolutivă spre soluțiile minime.

Criteriul de succes: Un cromozom M este considerat soluția optimă când îndeplinește simultan:

1. Scor $= 2^n - 1$ (Toate discurile sunt pe P_3).
2. Penalizare Miscare Invalida $= 0$ (Toate mutările sunt legale).
3. $L = 2^n - 1$ (Lungimea este cea optimă).

In acest caz: Fitness$(M) = 2^n - 1 - 0 - 0 = \mathbf{2^n - 1}$. $L = 2^n - 1$ (Lungimea este cea optimă).

References

[1] Saad Mneimneh. Simple variations on the tower of hanoi. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 17(2):131–158, 2020.

[2] WIRIS Team. Towers of hanoi: a math and programming challenge. `https://www.wiris.com/en/blog/towers-of-hanoi-a-math-and-programming-challenge`, 2019. Accessed on: 29 Oct. 2025.