Problema Turnurilor Hanoi

Libotean Bogdan, Morovan Paul, Vint Alexandru

1 Analiza si intelegerea temei

Problema turnurilor Hanoi a fost formulată în 1883 de catre matematicianul francez Edouard Lucas. Această problemă are la bază trei tije verticale (P1, P2, P3) și un număr variabil de discuri cu diametre diferite. Regula principala nu permite pozitionarea unui disc mai mare peste unul mai mic. La inceput toate discurile sunt pozitionate pe prima tija, P1, in ordine descrescatoare a dimensiunii, discul cel mai mare fiind la baza. Scopul final este mutarea tutror discurilor pe ultima tija, P3, fara a incalca regulile.

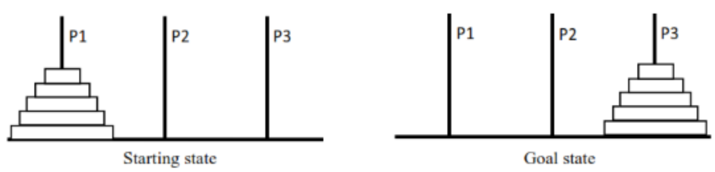

Figure 1: starea initiala si finala a turnurilor

2 Formularea matematica

Fie $T(n)$ numarul minim de mutari necesare pentru a transfera un turn format din n discuri de pe o tija pe alta, respectand regulile problemei. Observam urmatoarele:

- Pentru $n = 1$, este nevoie de o singura mutare, deci:

$$T(1) = 1$$

- Pentru $n > 1$, pentru a muta turnul de n discuri de pe tija P1, procedam astfel:

  1. Mutam cele $n - 1$ discuri de deasupra pe tija P2 $\rightarrow T(n-1)$ mutari;
  2. Mutam discul cel mai mare direct pe tija P3 $\rightarrow$ 1 mutare;

3. Mutam cele $n-1$ discuri de pe tija P2 pe tija P3 $\rightarrow T(n-1)$ mutari;

Astfel, obtinem relatia de recurenta: (vezi [1])

$$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 1$$

cu conditia initiala $T(1) = 1$.
Prin substitutie repetata, avem:

$$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 1$$

Substituim $T(n-1)$:

$$T(n) = 2 \cdot (2 \cdot T(n-2) + 1) + 1 = 2^2 \cdot T(n-2) + 3$$

Substituim $T(n-2)$:

$$T(n) = 2^2 \cdot (2 \cdot T(n-3) + 1) + 3 = 2^3 \cdot T(n-3) + 7$$

Daca continuam substitutia, vom ajunge la o formula generala:

$$T(n) = 2^k \cdot T(n-k) + (2^k - 1)$$

tinand cont de conditia initiala $T(1) = 1$, alegem k astfel incat $n - k = 1$, deci $k = n - 1$. Inlocuind $k = n - 1$ in ecuatia generala:

$$T(n) = 2^{n-1} \cdot T(n-(n-1)) + (2^{n-1} - 1) = 2^n - 1 \cdot T(1) + 2^{n-1} - 1$$

obtinem,

$$T(n) = 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-1} - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$$

Astfel am demonstrat ca numarul minim de miscari necesar pentru rezolvarea problemei turnurilor Hanoi este $2^n - 1$.

3 Alte variante ale problemei

1. Double Decker

   - In aceasta varianta simpla duplicam fiecare disc pentru a crea o stiva de $2n$ discuri cu cate doua din fiecare marime, asa cum putem observa in Figure 2.
   - O solutie triviala pentru Double Decker este sa o rezolvam pur si simplu ca pe o instanta standard a problemei principale (Turnurile Hanoi) cu $2n$ discuri, astfel ajungem la $2^{2n} - 1 = 4^n - 1$, chiar daca aceasta solutie nu este eficienta.

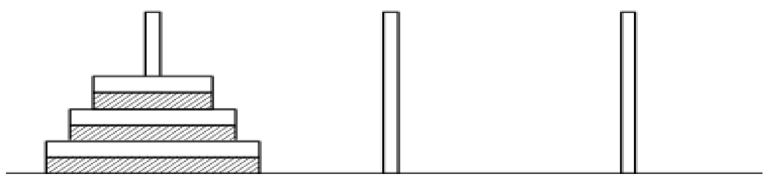

Figure 2: Double Decker pentru $n = 3$

2. Rubber Disk In The Way

   - In aceasta variatie pe langa discurile propriu-zise, exista si un disc de cauciuc plasat initial pe una dintre cele doua tije ramase, asa cum arata in Figure 3. Discul de cauciuc este elastic si usor astfel incat poate sta pe orice disc, dar numai discurile de la 1...k, unde $k \in \{0\} \cup N$, pot aparea deasupra discului de cauciuc.
   - Scopul acestei variatii este de a transfera toate discurile pe alta tija si de a sfarsi cu discul de cauciuc pe tija sa originala (fara nimic deasupra sau dedesubt)

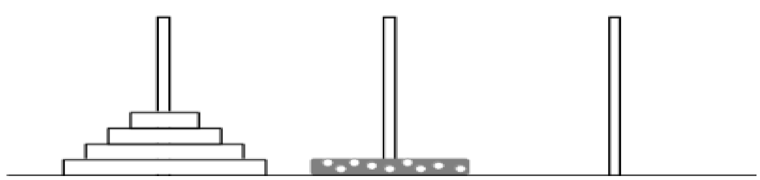

Figure 3: Rubber Disk in the way pentru $n = 4$

3. The Pivot

   - In aceasta varianta sunt permise doar doua tipuri de mutari. Fie discul cel mai mic (disc 1) este mutat pe orice tija, fie un disc oarecare si cel mai mic disc fac schimb de locuri (si aceasta se considera o singura mutare). Prin urmare, cu exceptia celui mai mic disc, discurile se pot muta doar pivotand in jurul discului 1, de unde si numele acestei variatii.

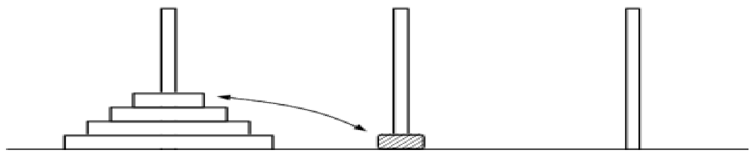

Figure 4: Pivot Turnurile Hanoi $n = 5$

References

[1] WIRIS Team. Towers of hanoi: a math and programming challenge. https://www.wiris.com/en/blog/towers-of-hanoi-a-math-and-programming-challenge, 2019. Accessed on: 29 Oct. 2025.