

Исследование симметрий алгебраических уравнений

Выполнил: студент 4 курса Морозов Евгений

Руководитель: А.В. Лобода

15 июня 2017 г.

Воронежский Государственный Университет

Факультет Компьютерных Наук

Кафедра Цифровых Технологий

Постановка задачи

Дано семейство вещественных гиперповерхностей в \mathbb{C}^3 :

$$\nu x_2 + Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \quad (1)$$

$x_1 = \Re(z_1)$, $y_1 = \Im(z_1)$, $x_2 = \Re(z_2)$, $y_2 = \Im(z_2)$, $u = \Re(w)$,
 $v = \Im(w)$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ и одновременно не равны нулю,
 $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ — некоторая квадратичная форма.

- **Симметрия поверхности** — любое аффинное преобразование, сохраняющее эту поверхность.
- **Задача состоит** в изучении групп аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из семейства (1), и их размерностей.
- Задача изучается с точностью до аффинных преобразований исходных объектов.

Метод решения

Любая поверхность из (1) сохраняется сдвигом по переменной $u = \Re(w)$. Следовательно, размерность каждой из изучаемых групп преобразований не меньше 1.

Пусть F_t — однопараметрическая группа аффинных преобразований, сохраняющих уравнение поверхности $\Phi = 0$, $F_0 = \text{Id}$.

Факт сохранения поверхности M из (1) группой F_t :

$$F_t(\Phi) = \Phi(z, \bar{z}, v) \cdot \psi(z, \bar{z}, w, t), \quad (2)$$

где $\psi(z, \bar{z}, w, t)$ — некоторая ненулевая функция,
 $\Phi(z, \bar{z}, v) = vx_2 + Q(x_1, y_1, x_2, y_2) - x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2)$ —
определяющая функция поверхности M .

Метод решения (продолжение)

Продифференцируем (2) по t в точке $t = 0$ и сузим результат на поверхность M :

$$\left\{ \frac{d}{dt} F_t(\Phi) \Big|_{t=0} \right\} \Big|_M \equiv 0 \quad (3)$$

Далее перейти к однородной СЛАУ, ранг матрицы которой определяет искомую размерность группы преобразований:

$$\dim G = 24 - \text{rank } W.$$

Таким образом, исследование размерности группы аффинных преобразований, сохраняющих поверхность M , сводится к исследованию ранга полученной матрицы.

Детально был рассмотрен случай, в котором квадратичная форма Q не зависит от x_2 и y_2 :

$$\nu x_2 + k_1 x_1^2 + k_2 x_1 y_1 + k_3 y_1^2 = x_2 (\mu x_2^2 + \nu y_2^2). \quad (4)$$

В данном случае возникает СЛАУ из 57 уравнений относительно 24 неизвестных.

Замечание: за счёт аффинных преобразований можно сократить число параметров в (4).

Частный случай: оценка размерности

Теорема 1: размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность вида (4), удовлетворяет неравенствам $3 \leq \dim G \leq 5$, причем:

- $\dim G = 3$ достигается на поверхностях вида

$$\begin{aligned} \nu x_2 &= x_1^2 + Ax_1y_1 + By_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2) \\ &\quad (A \neq 2\sqrt{B}, B \neq 1); \end{aligned} \quad (5)$$

- $\dim G = 4$ достигается на поверхностях вида

$$\nu x_2 = |z_1|^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2); \quad (6)$$

- $\dim G = 5$ достигается на аффинно-однородных [3] поверхностях вида

$$\nu x_2 = x_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2). \quad (7)$$

Частный случай: допустимые движения

Для произвольной поверхности вида (4) существуют три основных вида движения:

- сдвиг по переменной u : $w \rightarrow w^* + t$;
- масштабирование: $z_1 \rightarrow e^{3t} \cdot z_1^*$, $z_2 \rightarrow e^{2t} \cdot z_2^*$, $w \rightarrow e^{4t} \cdot w^*$;
- поворот со сдвигом ("скользящий поворот"):
 $z_2 \rightarrow z_2^* + it$, $w \rightarrow w^* + 2t\nu \cdot z_2^* + it^2\nu$.

Для поверхностей (6) имеется еще один тип движений:

- повороты (вращения) в плоскости z_1 : $z_1 \rightarrow e^{i\varphi} \cdot z_1^*$.

Поверхности (7) имеют, в дополнение к основным, допускают еще два типа движений:

- сдвиг по переменной y_1 : $z_1 \rightarrow z_1^* + it$;
- поворот: $z_1 \rightarrow z_1^* + t$, $z_2 \rightarrow z_2^*$, $w \rightarrow 2it \cdot z_1^* + it^2 \cdot z_2^* + w^*$.

Частный случай (продолжение)

Теорема 2: для любой тройки вещественных коэффициентов μ, ν, λ , одновременно не равных нулю, поверхность

$$vx_2 = x_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \lambda x_2 y_2 + \nu y_2^2)$$

является аффинно-однородной, а размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих такую поверхность, равна пяти.

Общий случай

Явный вид квадратичной формы $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ для произвольной поверхности из (1):

$$Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = k_1x_1^2 + k_2x_1x_2 + k_3x_2^2 + k_4x_1y_1 + k_5x_2y_1 \\ + k_6y_1^2 + k_7x_1y_2 + k_8x_2y_2 + k_9y_1y_2 + k_{10}y_2^2$$

Возникает СЛАУ из 83 уравнений относительно 24 неизвестных.

Сложность исследования заключается не только в размере системы, но и в том, что коэффициенты этой системы зависят **полиномиально** от k_1, \dots, k_{10} .

Общий случай: оценка размерности

Теорема 3 (основная): размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность из семейства (1), удовлетворяет неравенствам $1 \leq \dim G \leq 5$, и каждая из размерностей достижима.

Пример 1: единичная размерность группы достигается на поверхности

$$vx_2 = |z_1|^2 + x_1y_1 + y_2^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$

Пример 2: $\dim G = 2$ достигается на поверхности

$$vx_2 = |z_1|^2 + y_2^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$

Итоги работы:

- Была получена оценка размерностей групп аффинных преобразований, сохраняющих поверхности исследуемого семейства кубических гиперповерхностей в \mathbb{C}^3
- Написана программа на языке **Wolfram Language** для определения размерности группы преобразований, действующих на поверхности
- Произведены обобщение известных классов аффинно-однородных поверхностей из [3].



Ли С.

Теория групп преобразований: в 3-х частях. Часть 1.

Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011.



А. В. Лобода, А. С. Ходарев

*Об одном семействе аффинно-однородных
вещественных гиперповерхностей 3-мерного
комплексного пространства.*

Известия вузов, 2003



A.V. Atanov, A.V. Loboda, A.V. Shipovskaya

*Affine homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces
of the type $(1/2, 0)$ in \mathbb{C}^3 .*

ArXiv e-prints, 2014



A. Isaev, B. Kruglikov

On the symmetry algebras of 5-dimensional CR-manifolds.

ArXiv e-prints, 2016

Спасибо за внимание

Получение системы

Однопараметрическая группа в \mathbb{C}^3 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) & A_3(t) \\ B_1(t) & B_2(t) & B_3(t) \\ C_1(t) & C_2(t) & C_3(t) \end{pmatrix}}_{\text{вращательная компонента}} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ q(t) \end{pmatrix}}_{\text{сдвиговая компонента}},$$

A_i, B_i, C_i, P_i, q — комплексные функции.

Инфинитезимальное преобразование:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + i \cdot \alpha_{1,2} & \alpha_{2,1} + i \cdot \alpha_{2,2} & \alpha_{3,1} + i \cdot \alpha_{3,2} & \sigma_{1,1} + i \cdot \sigma_{1,2} \\ \beta_{1,1} + i \cdot \beta_{1,2} & \beta_{2,1} + i \cdot \beta_{2,2} & \beta_{3,1} + i \cdot \beta_{3,2} & \sigma_{2,1} + i \cdot \sigma_{2,2} \\ \gamma_{1,1} + i \cdot \gamma_{1,2} & \gamma_{2,1} + i \cdot \gamma_{2,2} & \gamma_{3,1} + i \cdot \gamma_{3,2} & \sigma_{3,1} + i \cdot \sigma_{3,2} \end{pmatrix},$$

здесь элементами матрицы являются производные в точке
ноль соответствующих элементов из матрицы
однопараметрической группы

Получение системы

Основное тождество:

$$\left\{ \frac{d}{dt} F_t(\Phi) \Big|_{t=0} \right\} \Big|_M \equiv 0$$

Умножая на возникающий после подстановки M знаменатель, получаем вещественное полиномиальное уравнение:

$$S(x_1, y_1, x_2, y_2, u) \equiv 0,$$

где $S(x_1, y_1, x_2, y_2, u)$ — многочлен степени 6.

Если полином тождественен нулю, то все коэффициенты при его одночленах равны нулю.

Пример сокращения числа параметров

Семейство в частном случае:

$$\nu x_2 + k_1 x_1^2 + k_2 x_1 y_1 + k_3 y_1^2 = x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$

Предположим, что $k_1 \neq 0$. Произведем замену переменных:
 $z_1^* = z_1/\sqrt{k_1}$. Тогда:

$$\nu x_2 + x_1^2 + k_2^* x_1 y_1 + k_3^* y_1^2 = x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2),$$

где $k_2^* = k_2/\sqrt{k_1}$, $k_3^* = k_3/\sqrt{k_1}$

Ценность в «реальном мире»

Сложно найти применение в повседневной жизни трехмерным комплексным пространствам. Современная физика, однако, очень сильно полагается на аппарат групп Ли и многомерный комплексный анализ.

Теория струн утверждает, что мы живем в 10-мерном пространстве — привычные нам 4 измерения дополняются 6-мерной компактной добавкой. Эта добавка имеет название пространство Калаби-Яу и является трехмерным комплексным пространством с определенными свойствами.