Исследование симметрий алгебраических уравнений

Выполнил: студент 4 курса Морозов Евгений
Руководитель: А.В. Лобода

10 мая 2017 г.

Воронежский Государственный Университет
Факультет Компьютерных Наук
Кафедра Цифровых Технологий

Постановка задачи

Дано семейство вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$:

$$vx_2 + Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_2(\mu {x_2}^2 + \nu {y_2}^2), \tag{1}$$

$x_1 = \Re(z_1)$, $y_1 = \Im(z_1)$, $x_2 = \Re(z_2)$, $y_2 = \Im(z_2)$, $u = \Re(w)$, $v = \Im(w)$, μ, $\nu \in \mathbb{R}$ и одновременно не равны нулю, $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ — некоторая квадратичная форма.

- Симметрия поверхности — любое аффинное преобразование, сохраняющее эту поверхность.
- Задача состоит в изучении групп аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из семейства (1), и их размерностей.
- Задача изучается с точностью до аффинных преобразований исходных объектов.

Метод решения

Любая поверхность из (1) сохраняется сдвигом по переменной $u = \Re(w)$. Следовательно, размерность каждой из изучаемых групп преобразований не меньше 1.

Пусть F_t — однопараметрическая группа аффинных преобразований, сохраняющих уравнение поверхности $\Phi = 0$, $F_0 = \mathrm{Id}$.

Факт сохранения поверхности M из (1) группой F_t:

$$F_t(\Phi) = \Phi(z, \bar{z}, v) \cdot \psi(z, \bar{z}, w, t), \tag{2}$$

где $\psi(z, \bar{z}, w, t)$ — некоторая ненулевая функция, $\Phi(z, \bar{z}, v) = vx_2 + Q(x_1, y_1, x_2, y_2) - x_2(\mu {x_2}^2 + \nu {y_2}^2)$ — определяющая функция поверхности M.

Продифференцируем (2) по t в точке $t = 0$ и сузим результат на поверхность M:

$$\left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_t(\Phi) \Big|_{t=0} \right\} \Big|_M \equiv 0 \tag{3}$$

Далее перейти к однородной СЛАУ, ранг матрицы которой определяет искомую размерность группы преобразований:

$$\dim G = 24 - \operatorname{rank} W.$$

Таким образом, исследование размерности группы аффинных преобразований, сохраняющих поверхность M, сводится к исследованию ранга полученной матрицы.

Общий случай

Явный вид квадратичной формы $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ для произвольной поверхности из (1):

$$\begin{aligned} Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = {} & k_1 x_1^2 + k_2 x_1 x_2 + k_3 x_2^2 + k_4 x_1 y_1 + k_5 x_2 y_1 \\ & + k_6 y_1^2 + k_7 x_1 y_2 + k_8 x_2 y_2 + k_9 y_1 y_2 + k_{10} y_2^2 \end{aligned}$$

Возникает СЛАУ из 83 уравнений относительно 24 неизвестных.

Сложность исследования заключается не только в размере системы, но и в том, что коэффициенты этой системы зависят **полиномиально** от $k_1, \dots, k_{10}$.

Теорема 1: размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность из семейства (1), удовлетворяет неравенствам

$$1 \leq \dim G \leq 5.$$

Пример 1: единичная размерность группы достигается на поверхности

$$v x_2 + |z_1|^2 + x_1 y_1 + y_2^2 = x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$

Пример 2: $\dim G = 2$ достигается на поверхности

$$v x_2 + |z_1|^2 + y_2^2 = x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$

Частный случай

Детально был рассмотрен случай, в котором квадратичная форма Q не зависит от x_2 и y_2:

$$vx_2 + k_1x_1^2 + k_2x_1y_1 + k_3y_1^2 = x_2(\mu {x_2}^2 + \nu {y_2}^2). \tag{4}$$

В данном случае возникает СЛАУ из 57 уравнений относительно 24 неизвестных.

Замечание: за счёт аффинных преобразований, число параметров в (4) можно фактически свести до одного.

Частный случай: оценка размерности

Теорема 2: размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность вида (4), удовлетворяет неравенствам $3 \leq \dim G \leq 5$, причем:

- $\dim G = 3$ достигается на поверхностях вида
$$v x_2 = k x_1^2 + y_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2); \tag{5}$$
- $\dim G = 4$ достигается на поверхностях вида
$$v x_2 = |z_1|^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2); \tag{6}$$
- $\dim G = 5$ достигается на аффинно-однородных поверхностях вида
$$v x_2 = x_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2). \tag{7}$$

Частный случай: допустимые движения

Для произвольной поверхности вида (4) существуют три основных вида движения:

- *сдвиг* по переменной u: $w \to w^* + t$;
- *масштабирование*: $z_1 \to e^{3t} \cdot z_1^*$, $z_2 \to e^{2t} \cdot z_2^*$, $w \to e^{4t} \cdot w^*$;
- *поворот со сдвигом ("скользящий поворот")*: $z_2 \to z_2^* + it$, $w \to w^* + 2t\nu \cdot z_2^* + it^2\nu$.

Для поверхностей (6) имеется еще один тип движений:

- *повороты (вращения)* в плоскости z_1: $z_1 \to e^{i\varphi} \cdot z_1^*$.

Поверхности (7) имеют, в дополнение к основным, допускают еще два типа движений:

- *сдвиг* по переменной y_1: $z_1 \to z_1^* + it$;
- *поворот*: $z_1 \to z_1^* + t$, $z_2 \to z_2^*$, $w \to 2it \cdot z_1^* + it^2 \cdot z_2^* + w^*$.

Частный случай (продолжение)

Теорема 3: для любой тройки вещественных коэффициентов μ, ν, λ, одновременно не равных нулю, поверхность

$$vx_2 = x_1^2 + x_2(\mu {x_2}^2 + \lambda x_2 y_2 + \nu {y_2}^2)$$

является аффинно-однородной, а размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих такую поверхность, равна пяти.

Литература

Ли С.
Теория групп преобразований: в 3-х частях. Часть 1.
Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011.

А. В. Лобода, А. С. Ходарев
Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства.
Известия вузов, 2003

A.V. Atanov, A.V. Loboda, A.V. Shipovskaya
Affine homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces of the type (1/2,0) in $\mathbb{C}^3$ *.*
ArXiv e-prints, 2014

A. Isaev, B. Kruglikov
On the symmetry algebras of 5-dimensional CR-manifolds.
ArXiv e-prints, 2016

Спасибо за внимание