

Исследование симметрий алгебраических уравнений

Выполнил: студент 4 курса Морозов Евгений

Руководитель: А.В. Лобода

10 мая 2017 г.

Воронежский Государственный Университет

Факультет Компьютерных Наук

Кафедра Цифровых Технологий

Постановка задачи

Дано семейство вещественных гиперповерхностей в \mathbb{C}^3 :

$$vx_2 + Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \quad (1)$$

$x_1 = \Re(z_1)$, $y_1 = \Im(z_1)$, $x_2 = \Re(z_2)$, $y_2 = \Im(z_2)$, $u = \Re(w)$,
 $v = \Im(w)$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ и одновременно не равны нулю,
 $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ — некоторая квадратичная форма.

- **Симметрия поверхности** — любое аффинное преобразование, сохраняющее эту поверхность.
- **Задача состоит** в изучении групп аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из семейства (1), и их размерностей.
- Задача изучается с точностью до аффинных преобразований исходных объектов.

Метод решения

Любая поверхность из (1) сохраняется сдвигом по переменной $u = \Re(w)$. Следовательно, размерность каждой из изучаемых групп преобразований не меньше 1.

Пусть F_t — однопараметрическая группа аффинных преобразований, сохраняющих уравнение поверхности $\Phi = 0$, $F_0 = \text{Id}$.

Факт сохранения поверхности M из (1) группой F_t :

$$F_t(\Phi) = \Phi(z, \bar{z}, v) \cdot \psi(z, \bar{z}, w, t), \quad (2)$$

где $\psi(z, \bar{z}, w, t)$ — некоторая ненулевая функция,
 $\Phi(z, \bar{z}, v) = vx_2 + Q(x_1, y_1, x_2, y_2) - x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2)$ —
определяющая функция поверхности M .

Метод решения (продолжение)

Продифференцируем (2) по t в точке $t = 0$ и сузим результат на поверхность M :

$$\left\{ \frac{d}{dt} F_t(\Phi) \Big|_{t=0} \right\} \Big|_M \equiv 0 \quad (3)$$

Далее перейти к однородной СЛАУ, ранг матрицы которой определяет искомую размерность группы преобразований:

$$\dim G = 24 - \text{rank } W.$$

Таким образом, исследование размерности группы аффинных преобразований, сохраняющих поверхность M , сводится к исследованию ранга полученной матрицы.

Частный случай

Детально был рассмотрен случай, в котором квадратичная форма Q не зависит от x_2 и y_2 :

$$\nu x_2 + k_1 x_1^2 + k_2 x_1 y_1 + k_3 y_1^2 = x_2 (\mu x_2^2 + \nu y_2^2). \quad (4)$$

В данном случае возникает СЛАУ из 57 уравнений относительно 24 неизвестных.

Замечание: за счёт аффинных преобразований, число параметров в (4) можно фактически свести до одного.

Частный случай: оценка размерности

Теорема 1: размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность вида (4), удовлетворяет неравенствам $3 \leq \dim G \leq 5$, причем:

- $\dim G = 3$ достигается на поверхностях вида

$$vx_2 = kx_1^2 + y_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2); \quad (5)$$

- $\dim G = 4$ достигается на поверхностях вида

$$vx_2 = |z_1|^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2); \quad (6)$$

- $\dim G = 5$ достигается на аффинно-однородных поверхностях вида

$$vx_2 = x_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2). \quad (7)$$

Частный случай: допустимые движения

Для произвольной поверхности вида (4) существуют три основных вида движения:

- сдвиг по переменной u : $w \rightarrow w^* + t$;
- масштабирование: $z_1 \rightarrow e^{3t} \cdot z_1^*, z_2 \rightarrow e^{2t} \cdot z_2^*, w \rightarrow e^{4t} \cdot w^*$;
- поворот со сдвигом ("скользящий поворот"):
 $z_2 \rightarrow z_2^* + it, w \rightarrow w^* + 2t\nu \cdot z_2^* + it^2\nu$.

Для поверхностей (6) имеется еще один тип движений:

- повороты (вращения) в плоскости z_1 : $z_1 \rightarrow e^{i\varphi} \cdot z_1^*$.

Поверхности (7) имеют, в дополнение к основным, допускают еще два типа движений:

- сдвиг по переменной y_1 : $z_1 \rightarrow z_1^* + it$;
- поворот: $z_1 \rightarrow z_1^* + t, z_2 \rightarrow z_2^*, w \rightarrow 2it \cdot z_1^* + it^2 \cdot z_2^* + w^*$.

Частный случай (продолжение)

Теорема 2: для любой тройки вещественных коэффициентов μ, ν, λ , одновременно не равных нулю, поверхность

$$vx_2 = x_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \lambda x_2 y_2 + \nu y_2^2)$$

является аффинно-однородной, а размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих такую поверхность, равна пяти.

Общий случай

Явный вид квадратичной формы $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ для произвольной поверхности из (1):

$$Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = k_1x_1^2 + k_2x_1x_2 + k_3x_2^2 + k_4x_1y_1 + k_5x_2y_1 + k_6y_1^2 + k_7x_1y_2 + k_8x_2y_2 + k_9y_1y_2 + k_{10}y_2^2$$

Возникает СЛАУ из 83 уравнений относительно 24 неизвестных.

Сложность исследования заключается не только в размере системы, но и в том, что коэффициенты этой системы зависят **полиномиально** от k_1, \dots, k_{10} .

Общий случай: оценка размерности

Теорема 3 (основная): размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность из семейства (1), удовлетворяет неравенствам

$$1 \leq \dim G \leq 5.$$

Пример 1: единичная размерность группы достигается на поверхности

$$\nu x_2 + |z_1|^2 + x_1 y_1 + y_2^2 = x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$

Пример 2: $\dim G = 2$ достигается на поверхности

$$\nu x_2 + |z_1|^2 + y_2^2 = x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$



Ли С.

Теория групп преобразований: в 3-х частях. Часть 1.

Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011.



А. В. Лобода, А. С. Ходарев

***Об одном семействе аффинно-однородных
вещественных гиперповерхностей 3-мерного
комплексного пространства.***

Известия вузов, 2003



A.V. Atanov, A.V. Loboda, A.V. Shipovskaya

***Affine homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces
of the type $(1/2,0)$ in \mathbb{C}^3 .***

ArXiv e-prints, 2014



A. Isaev, B. Kruglikov

On the symmetry algebras of 5-dimensional CR-manifolds.

ArXiv e-prints, 2016

Спасибо за внимание