МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет компьютерных наук
Кафедра цифровых технологий

Исследование симметрий алгебраических уравнений

ВКР Бакалаврская работа
02.03.01 Математика и компьютерные науки
Распределенные системы и искусственный интеллект

Допущено к защите в ГЭК __ . ________ . 2017 г.

Зав. кафедрой	____________________	*С.Д. Кургалин, д. ф.-м. н., профессор*
Обучающийся	____________________	*Е.Ю. Морозов, 4 курс, д/о*
Руководитель	____________________	*А.В. Лобода, д. ф.-м. н., профессор*

Воронеж, 2017

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"
Факультет компьютерных наук
Кафедра цифровых технологий

УТВЕРЖДАЮ
заведующий кафедрой

_____________ __________________________
подпись *расшифровка подписи*

ЗАДАНИЕ
НА ВЫПОЛНЕНИЕ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
ОБУЧАЮЩЕГОСЯ ____
фамилия, имя, отчество

1. Тема работы ____, утверждена решением ученого совета ____________________ факультета от ___.___.20___
2. Направление подготовки ____
шифр, наименование
3. Срок сдачи студентом законченной работы ___.___.20___
4. Календарный план:

№	Задание	Срок выполнения
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Обучающийся _______________ ______________________________
подпись *расшифровка подписи*

Руководитель _______________ ______________________________
подпись *расшифровка подписи*

_ _

Выпускная квалификационная работа представлена на кафедру ___.___.20___
Рецензент ____
должность, ученая степень, ученое звание
Выпускная квалификационная работа на тему ____________________________________
____

допущена к защите в ГЭК ___.___.20___
Заведующий кафедрой ______________________________ ___.___.20___
подпись, расшифровка подписи

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа с., источника, приложения

Объект исследования —

Цель работы —

Метод исследования и аппаратура —

Полученные результаты и их новизна —

Область применения —

Прогнозные предположения о развитии объекта исследования — .

Содержание

Введение

В данной работе рассматривается задача, связанная с описанием симметрий вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств.

Симметричные множества представляли интерес в математике со времен зарождения этой науки. Для подтверждения этого, достаточно вспомнить, что в геометрии Евклида важное место занимали правильные треугольники и четырехугольники (квадраты), а так же окружности.

И квадрат, и окружность являются симметричными множествами. Однако, окружность «устроена одинаково» в каждой своей своей точке, в то время как квадрат имеет вершины и точки, которые не являются симметричными.

Помимо тел на плоскости, в ранней геометрии также изучались симметричные тела в трехмерном пространстве. Так, уже древним грекам были известны описания всех правильных многогранников — «платоновых тел» — тетраэдра, октаэдра, гексаэдра (куба), икосаэдра и додекаэдра. Также был известен тот факт, что список этих тел полон и что не существует, к примеру, правильного 115-гранника. Однако, строгое доказательство этого факта не является тривиальным и требует определенной математической сноровки.

Во второй половине XIX века различные симметрии математических объектов стали изучаться на качественно новом уровне строгости. Связано это было с изучением теории групп и, в частности, с развитием теории непрерывных групп. В связи с этим можно упомянуть работы Ф. Клейна, и, например его труд «Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени».

Непрерывные группы (преобразований) получили наибольшую завершенность в работах норвежского математика Софуса Ли, например, в его фундаментальном труде «Теория групп преобразований». Непрерывные группы преобразований в идеальной их форме получили название «группы Ли» и именно в терминах этих групп производятся современные исследования симметрий различных математических объектов.

Начиная с середины XX века, активно начинают исследоваться симметрии различных

В данной работе изучаются симметрии одного семейства квадро-кубических вещественных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$. Главной задачей является исследование групп аффинных преобразований, сохраняющих каждую поверхность из данного семейства и их размерностей.

Семейство поверхностей, рассматриваемое в данной задаче, является одним из объектов исследования в связи с задачей об аффинной однородности вещественных многообразий в трехмерном комплексном пространстве.

Для поверхности M из указанного семейства все рассмотрения будут производиться вблизи начала координат. Выбор этой точки обусловлен простотой и не ведет к потере общности рассуждений.

1 Постановка задачи

Пусть дано семейство вещественных квадро-кубических гиперповерхностей в трехмерном комплексном пространстве:

$$vx_2 = Q(x_1, y_1, x_2, y_2) + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \tag{1}$$

где $x_1 = \Re(z_1)$, $y_1 = \Im(z_1)$, $x_2 = \Re(z_2)$, $y_2 = \Im(z_2)$, $u = \Re(w)$, $v = \Im(w)$ — компоненты координат в трехмерном комплексном пространстве, μ, ν — некоторые вещественные параметры, одновременно не равные нулю, а $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ — некоторая квадратичная форма.

2 Симметрии в трехмерном комплексном пространстве

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

2.1 Группы Ли аффинных преобразований

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

2.2 Инфинитезимальные преобразования

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetuer at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

3 Определение размерности групп аффинных преобразований

В данном разделе будет описана процедура определения размерностей групп аффинных преобразований для семейства поверхностей (**??**).

3.1 Общая схема

Пусть дана некоторая вещественная гиперповерхность M из семейства (**??**) с определяющей функцией

$$\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2, v) = vx_2 - Q(x_1, y_1, x_2, y_2) - x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$

В таком случае, обозначим через F_t однопараметрическую группу Ли аффинных преобразований, сохраняющих эту поверхность. Пусть также эта группа содержит тождественное преобразование при $t = 0$, т.е. $F_0 = \mathrm{Id}$. Тогда уравнения, определяющие эту группу будут иметь вид:

$$z_i = A_i(t)z_1 + B_i(t)z_2 + C_i(t)z_3 + S_i(t), \; i = 1, \ldots, 3, \tag{2}$$

где $A_{i,j}(t)$ и $S_i(t)$ — некоторые аналитические комплексные функции от вещественного аргумента, а $z_3 = w = u + iv$. Аналитичность функций возможна, так как на группа F_t является группой Ли.

Под действием группы F_t определяющая функция примет следующий вид:

$$F_t(\Phi) = 1$$

3.2 Произвольная поверхность

В общем случае, квадратичную форму $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ можно записать в явном виде:

$$\begin{aligned} Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = k_1x_1^2 + k_2x_2x_1 + k_3x_2^2 + k_4x_1y_1 + k_5x_2y_1 \\ + k_6y_1^2 + k_7x_1y_2 + k_8x_2y_2 + k_9y_1y_2 + k_{10}y_2^2 \end{aligned}$$

Применяя метод, указанный в предыдущем пункте, получим линейную однородную систему из 83 уравнений относительно 24 неизвестных, причем переменная $\sigma_{3,1}$ является «фиктивной» — в связи с тем, что Наиболее простые уравнения в системе имеют вид

$$\begin{aligned}
k_1\beta_{3,2} &= 0\\
k_1\beta_{3,1} &= 0\\
k_1\sigma_{2,1} &= 0\\
k_4\beta_{3,1} &= 0\\
k_4\sigma_{2,1} &= 0\\
k_7\beta_{3,1} &= 0\\
k_7\sigma_{2,1} &= 0\\
k_6\beta_{3,1} &= 0\\
k_6\sigma_{2,1} &= 0\\
k_9\beta_{3,1} &= 0\\
k_9\sigma_{2,1} &= 0\\
k_6\beta_{3,2} &= 0\\
k_{10}\beta_{3,2} &= 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Отсюда можно выделить два случая:

1. Все k_j равны нулю: $k_1 = k_4 = k_6 = k_7 = k_9 = k_{10} = 0$.

2. Хотя бы один k_j из указанного набора не равен нулю.

В первом случае поверхность приобретает следующий вид:

$$\upsilon x_2 = k_2x_2x_1 + k_3x_2^2 + k_5x_2y_1 + k_8x_2y_2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$

Легко видеть, что данное уравнение можно поделить на x_2, что в итоге даст новую поверхность, которая является квадрикой. Рассмотрение поверхностей данного типа не представляет интереса в данной работе, поэтому можно сразу перейти к рассмотрению второго случая.

Предположим, что $k_1 \neq 0$. В таком случае, приведем элементарными преобразованиями матрицу системы W к ступенчатому виду.

Исходя их этих соображений можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 1. *Размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность из семейства (**??**), удовлетворяет неравенству* $1 \le \dim G \le 5$*, и каждая из размерностей достижима.*

3.3 Частный случай семейства

В связи со сложностью рассмотрения общего случая, был рассмотрен частный случай семейства поверхностей (**??**), в котором квадратичная форма Q не зависит от переменных x_2 и y_2. В таком случае, семейство может быть описано следующим образом:

$$vx_2 = k_1x_1^2 + k_2x_1y_1 + k_3x_2^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \tag{4}$$

Следует заметить, что за счёт применения невырожденных аффинных преобразований, можно фактически сократить число параметров k_1, k_2 и k_3 до одного.

В результате применения описанного метода, получается однородная линейная система из 57 уравнений относительно 24 неизвестных.

Теорема 2. *размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность вида (**??**), удовлетворяет неравенствам* $3 \le \dim G \le 5$*, причем*

- $\dim G = 3$ *достигается на поверхностях вида*

$$vx_2 = kx_1^2 + y_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \;\; k \ne 0, \;\; k \ne 1; \tag{5}$$

- $\dim G = 4$ *достигается на поверхностях вида*

$$vx_2 = |z_1|^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2); \tag{6}$$

- $\dim G = 5$ *достигается на аффинно-однородных поверхностях следующего вида*

$$vx_2 = x_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2). \tag{7}$$

Заключение

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetuer tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.