МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет компьютерных наук
Кафедра цифровых технологий

Исследование симметрий алгебраических уравнений

ВКР Бакалаврская работа
02.03.01 Математика и компьютерные науки
Распределенные системы и искусственный интеллект

Допущено к защите в ГЭК __ . ________ . 2017 г.

Зав. кафедрой	________________	*С.Д. Кургалин, д. ф.-м. н., профессор*
Обучающийся	________________	*Е.Ю. Морозов, 4 курс, д/о*
Руководитель	________________	*А.В. Лобода, д. ф.-м. н., профессор*

Воронеж, 2017

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"
Факультет компьютерных наук
Кафедра цифровых технологий

УТВЕРЖДАЮ
заведующий кафедрой

_____________ ___________________________
подпись *расшифровка подписи*

ЗАДАНИЕ
НА ВЫПОЛНЕНИЕ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
ОБУЧАЮЩЕГОСЯ ____
фамилия, имя, отчество

1. Тема работы ______________________________________, утверждена решением ученого совета ___________________ факультета от ___.___.20___
2. Направление подготовки ____
шифр, наименование
3. Срок сдачи студентом законченной работы ___.___.20___
4. Календарный план:

№	Задание	Срок выполнения
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Обучающийся _____________ ___________________________
подпись *расшифровка подписи*

Руководитель _____________ ___________________________
подпись *расшифровка подписи*

_ _

Выпускная квалификационная работа представлена на кафедру ___.___.20___
Рецензент ____
должность, ученая степень, ученое звание
Выпускная квалификационная работа на тему __________________________________

____

допущена к защите в ГЭК ___.___.20___
Заведующий кафедрой ___________________________ ___.___.20___
подпись, расшифровка подписи

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа с., источника, приложения

Объект исследования —

Цель работы —

Метод исследования и аппаратура —

Полученные результаты и их новизна —

Область применения —

Прогнозные предположения о развитии объекта исследования — .

Содержание

Введение **4**

1 Постановка задачи **8**

2 Симметрии в трехмерном комплексном пространстве **10**

2.1 Группы Ли аффинных преобразований в $\mathbb{C}^3$ 10

2.2 Инфинитезимальные преобразования 10

2.3 Системы полиномиальных уравнений 10

3 Определение размерности групп аффинных преобразований **11**

3.1 Общая схема 11

3.2 Произвольная поверхность 13

3.3 Частный случай семейства 15

4 Компьютерные алгоритмы **16**

4.1 Основные процедуры 16

4.2 Вспомогательные процедуры 16

Заключение **16**

Список использованных источников **17**

Введение

В данной работе рассматривается задача, связанная с описанием симметрий вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств.

Симметричные множества представляли интерес в математике со времен зарождения этой науки. Для подтверждения этого, достаточно вспомнить, что в геометрии Евклида важное место занимали правильные треугольники и четырехугольники (квадраты), а так же окружности.

И квадрат, и окружность являются симметричными множествами. Однако, окружность «одинаково устроена» в каждой своей своей точке, в то время как квадрат имеет вершины и точки, которые не являются симметричными. Это свойство множества называется в современной математике однородностью и является обобщением более простого свойства точечной симметрии.

Помимо тел на плоскости, в ранней геометрии также изучались симметричные тела в трехмерном пространстве. Так, уже древним грекам были известны описания всех правильных многогранников — «платоновых тел» — тетраэдра, октаэдра, гексаэдра (куба), икосаэдра и додекаэдра. Также был известен тот факт, что список этих тел полон и что не существует, к примеру, правильного 115-гранника. Однако, строгое доказательство этого факта не является тривиальным и требует определенной математической сноровки. По аналогии с планиметрией, в стереометрии при рассмотрении платоновых тел сфера упоминается как «правильный многогранник с бесконечным числом граней», обладающий из-за этого бесконечным количеством симметрий. Сфера также является однородным объектом с многих «естественных» точек зрения.

Во второй половине XIX века различные симметрии математических объектов стали изучаться на качественно новом уровне строгости. Связано это было с изучением теории групп и, в частности, с развитием теории непрерывных групп. В связи с этим можно упомянуть работы Ф. Клейна, и, например его труд «Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени».

Непрерывные группы (преобразований) получили наибольшую завершенность в работах норвежского математика Софуса Ли, например, в его фундаментальном труде «Теория групп преобразований» [1]. Непрерывные группы преобразований в идеальной их форме получили название «группы Ли» и именно в терминах этих групп производятся современные исследования симметрий различных математических объектов.

Начиная с середины XX века, активно начинают исследоваться симметрии различных математических объектов. Тут следует упомянуть труд У. Миллера «Группы симметрий и их приложения», в котором кратко изложен математический аппарат для изучения симметрий с точки зрения непрерывных групп [2].

Из современных исследований, которые касаются симметрий алгебраических объектов следует выделить работы А. Исаева и Б. Кругликова, к примеру, «On the Symmetry Algebras of 5-dimensional CR-manifolds», в которой изучаются симметрии вещественных гиперповерхностей в трехмерном комплексном пространстве [3]. Этот труд очень близок по тематике к данной работе.

В современной математике представляет интерес задачи, связанные с поиском и описанием различных однородных объектов в вещественных и комплексных пространствах. Сходные по своей сути задачи ставились и решались математиками уже в конце XIX — начале XX веков. Однородные относительно аффинных преобразований поверхности 3-мерного вещественного пространства были описаны в середине XX-го века, и тогда же эти описания были включены в учебники по дифференциальной геометрии [4].

В 1932 г. Э. Картан построил полный список вещественных гиперповерхностей 2-мерных комплексных пространств, которые являются однородными относительно голоморфных преобразований [5]. Решение же более простой по постановке задачи описания аффинно-однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$ было получено А.В. Лободой сравнительно недавно [6].

Задачу описания свойства аффинной однородности можно рассматривать как часть большей проблемы, которая связана с изучением голоморфной однородности. Близость этих задач обусловлена тем, что в рамках второй задачи естественно выделяется класс аффинно-однородных объектов, которые являются однородными относительно голоморфных преобразований.

В настоящее время имеется большое число частных результатов об однородных многообразиях в пространстве $\mathbb{C}^3$ ([7], [8]). Однако, задача, в силу своей объемности и сложности, остается нерешенной.

В данной работе изучаются симметрии одного семейства квадро-кубических вещественных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$. Главной задачей является исследование групп аффинных преобразований, сохраняющих каждую поверхность из данного семейства и их размерностей.

Семейство поверхностей, рассматриваемое в данной задаче, является одним из объектов исследования в связи с указанной задачей об аффинной однородности вещественных многообразий в трехмерном комплексном пространстве.

В первых главах этой работы производится постановка задачи на формальном уровне, а так же вводятся основные понятия и методика, необходимая для решения поставленной задачи.

Основным результатом данной работы является оценка размерности группы аффинных преобразований, сохраняющих все поверхности из исследуемого семейства. Соответствующая теорема и её доказательство представлены в третьем разделе; в нём же присутствует детальный разбор одного и частных случаев поверхностей из этого семейства.

В главе четыре приведено описание отдельных элементов алгоритма по нахождению искомых размерностей групп преобразований. Процедуры были реализованы при помощи пакета символьной математики `Wolfram Mathematica`.

1 Постановка задачи

Пусть дано семейство вещественных квадро-кубических гиперповерхностей в трехмерном комплексном пространстве:

$$vx_2 = Q(x_1, y_1, x_2, y_2) + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \tag{1}$$

где $x_1 = \Re(z_1)$, $y_1 = \Im(z_1)$, $x_2 = \Re(z_2)$, $y_2 = \Im(z_2)$, $u = \Re(w)$, $v = \Im(w)$ — компоненты координат в трехмерном комплексном пространстве, μ, ν — некоторые вещественные параметры, одновременно не равные нулю, а $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ — некоторая квадратичная форма. Под симметрией любой поверхности из данного класса будем понимать любое аффинное преобразование, сохраняющее эту поверхность. В то же время, симметрией определяющей функции поверхности будем называть преобразование, сохраняющее это уравнение с точностью до ненулевого множителя:

$$G(\Phi(z, \overline{z}, v)) = \psi(z, \overline{z}, w, \overline{w}) \cdot \Phi(z, \overline{z}, v), \tag{2}$$

где G — некоторое аффинное преобразование, $\Phi(z, \overline{z}, v)$ — определяющая функция поверхности, а $\psi(z, \overline{z}, w, \overline{w})$ — ненулевая функция. Изучая симметрии в таком контексте, вполне естественно обсуждать группы аффинных преобразований, под действиями которых всякая поверхность из класса (1) сохраняется. Задача данной работы, в таком случае, заключается в изучении групп аффинных преобразований, сохраняющих конкретные поверхности из данного семейства, и размерностей таких групп.

Заметим, что квадратичная форма $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ не является совсем произвольной — первое требование состоит в том, что она должна быть невырождена (это требование было унаследовано от задачи об однородности). Второе требование состоит в том, чтобы форма не делилась на x_2. Предположим, что эта форма делится на x_2, то есть имеет следующий вид:

$$Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = k_1 x_2 x_1 + k_2 x_2^2 + k_3 x_2 y_1 + k_4 x_2 y_2 + k_5 y_2^2,$$

где k_j — некоторые вещественные коэффициенты. В таком случае, можно поделить обе части (1) на x_2, чтобы получить «обычную» квадрику. Данный тип поверхностей не представляет интереса в рамках этой работы и изучаться не будет.

Следует отметить, что можно изучать поставленную задачу с точностью до аффинных преобразований исходных объектов. На размерности и некоторые другие свойства групп это не повлияет.

TODO: нормальные формы

2 Симметрии в трехмерном комплексном пространстве

2.1 Группы Ли аффинных преобразований в $\mathbb{C}^3$

При обсуждении свойств симметрий, удобно использовать группы Ли. Группой Ли называется топологическая группа, если она является параметрической и если функция, задающая закон умножения, является вещественно-аналитичной.

2.2 Инфинитезимальные преобразования

TODO

2.3 Системы полиномиальных уравнений

TODO

3 Определение размерности групп аффинных преобразований

В данном разделе будет описана процедура определения размерностей групп аффинных преобразований для семейства поверхностей (1).

3.1 Общая схема

Пусть дана некоторая вещественная гиперповерхность M из семейства (1) с определяющей функцией

$$\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2, v) = vx_2 - Q(x_1, y_1, x_2, y_2) - x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$

В таком случае, обозначим через F_t однопараметрическую группу Ли аффинных преобразований, сохраняющих эту поверхность. Пусть также эта группа содержит тождественное преобразование при $t = 0$, т.е. $F_0 = \mathrm{Id}$. Тогда уравнения, определяющие эту группу будут иметь вид:

$$\begin{cases} z_1 &= A_1(t)z_1^* + A_2(t)z_2^* + A_3(t)w^* + P_1(t) \\ z_1 &= B_1(t)z_1^* + B_2(t)z_2^* + B_3(t)w^* + P_2(t) \\ w &= C_1(t)z_1^* + C_2(t)z_2^* + C_3(t)w^* + q(t) \end{cases}, \tag{3}$$

где $A_i(t), B_i(t), C_i(t), P_i(t)$ и $q(t)$ — некоторые аналитические комплексные функции от вещественного аргумента. Аналитичность функций возможна, так как группа F_t является группой Ли. Для каждой компоненты координат в комплексном пространстве справедливы следующие уравнения:

$$\begin{cases} x_1 &= x_1a_{1,1} - y_1a_{1,2} + x_2a_{2,1} - y_2a_{2,2} + ua_{3,1} - va_{3,2} + p_{1,1} \\ y_1 &= x_1a_{1,2} + y_1a_{1,1} + x_2a_{2,2} + y_2a_{2,1} + ua_{3,2} + va_{3,1} + p_{1,2} \\ x_2 &= x_1b_{1,1} - y_1b_{1,2} + x_2b_{2,1} - y_2b_{2,2} + ub_{3,1} - vb_{3,2} + p_{2,1} \\ y_2 &= x_1b_{1,2} + y_1b_{1,1} + x_2b_{2,2} + y_2b_{2,1} + ub_{3,2} + vb_{3,1} + p_{2,2} \\ v &= x_1c_{1,2} + y_1c_{1,1} + x_2c_{2,2} + y_2c_{2,1} + uc_{3,2} + vc_{3,1} + q_2 \end{cases}, \tag{4}$$

где $a_{i,1} = \Re\{A_i(t)\}$, $a_{i,2} = \Im\{A_i(t)\}$, $b_{i,1} = \Re\{B_i(t)\}$, $b_{i,2} = \Im\{B_i(t)\}$, $c_{i,1} = \Re\{C_i(t)\}$, $c_{i,2} = \Im\{C_i(t)\}$, $p_{i,1} = \Re\{P_i(t)\}$, $p_{i,2} = \Im\{P_i(t)\}$, $q_1 = \Re\{q(t)\}$ и $q_2 = \Im\{q(t)\}$ — вещественные функции от аргумента t (опущен для компактности записи). Под действием группы F_t определяющая функция примет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
F_t(\Phi) = (x_1c_{1,2} + y_1c_{1,1} + x_2c_{2,2} + y_2c_{2,1} + uc_{3,2} + vc_{3,1} + q_2) \times \\
\times (x_1b_{1,1} - y_1b_{1,2} + x_2b_{2,1} - y_2b_{2,2} + ub_{3,1} - vb_{3,2} + p_{2,1}) + \tilde{Q}(x_1, y_1, x_2, y_2) - \\
- (x_1b_{1,1} - y_1b_{1,2} + x_2b_{2,1} - y_2b_{2,2} + ub_{3,1} - vb_{3,2} + p_{2,1}) \times \\
\times \left[\mu\,(x_1b_{1,1} - y_1b_{1,2} + x_2b_{2,1} - y_2b_{2,2} + ub_{3,1} - vb_{3,2} + p_{2,1})^2 + \right. \\
\left. + \;\nu\,(x_1b_{1,2} + y_1b_{1,1} + x_2b_{2,2} + y_2b_{2,1} + ub_{3,2} + vb_{3,1} + p_{2,2})^2\right],
\end{gathered}
$$

где $\tilde{Q}(x_1, y_1, x_2, y_2)$ — новая квадратичная форма, полученная после действия группы. Введём следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
T(\mathrm{I}) = {} & (x_1c_{1,2} + y_1c_{1,1} + x_2c_{2,2} + y_2c_{2,1} + uc_{3,2} + vc_{3,1} + q_2) \times \\
& \times (x_1b_{1,1} - y_1b_{1,2} + x_2b_{2,1} - y_2b_{2,2} + ub_{3,1} - vb_{3,2} + p_{2,1}), \\
T(\mathrm{II}) = {} & \tilde{Q}(x_1, y_1, x_2, y_2), \\
T(\mathrm{III}) = {} & (x_1b_{1,1} - y_1b_{1,2} + x_2b_{2,1} - y_2b_{2,2} + ub_{3,1} - vb_{3,2} + p_{2,1}) \times \\
& \times \left[\mu\,(x_1b_{1,1} - y_1b_{1,2} + x_2b_{2,1} - y_2b_{2,2} + ub_{3,1} - vb_{3,2} + p_{2,1})^2 + \right. \\
& \left. + \nu\,(x_1b_{1,2} + y_1b_{1,1} + x_2b_{2,2} + y_2b_{2,1} + ub_{3,2} + vb_{3,1} + p_{2,2})^2\right].
\end{aligned}
$$

Из (2) следует, что факт сохранения определяющей функции Φ поверхности M из класса (1) будет описываться следующим уравнением:

$$F_t(\Phi(z, \overline{z}, v) = \psi(z, \overline{z}, w, \overline{w}, t) \cdot \Phi(z, \overline{z}, v). \tag{5}$$

Для того, чтобы перейти от аффинных преобразований к инфинитезимальным, продифференцируем выражение (5) по параметру t в точке $t = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_t\left(\Phi(z, \overline{z}, v)\right)\Big|_{t=0} = \Phi(z, \overline{z}, v) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(z, \overline{z}, w, \overline{w}, t)\Big|_{t=0} \tag{6}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(\mathrm{I})\right|_{t=0} &= \left(x_1\gamma_{1,2}+y_1\gamma_{1,1}+x_2\gamma_{2,2}+y_2\gamma_{2,1}+u\gamma_{3,2}+v\gamma_{3,1}+\sigma_{3,2}\right)x_2+\\
&\quad+v\left(x_1\beta_{1,1}-y_1\beta_{1,2}+x_2\beta_{2,1}-y_2\beta_{2,2}+u\beta_{3,1}-v\beta_{3,2}+\sigma_{2,1}\right),\\
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(\mathrm{II})\right|_{t=0} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{Q}(x_1,y_1,x_2,y_2)\right|_{t=0}=\tilde{Q}'(x_1,y_1,x_2,y_2),\\
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(\mathrm{III})\right|_{t=0} &= \left(\mu x_2^2+\nu y_2^2\right)\times\\
&\quad\times\left(\sigma_{2,1}+u\beta_{3,1}-v\beta_{3,2}+x_1\beta_{1,1}+x_2\beta_{2,1}-y_1\beta_{1,2}-y_2\beta_{2,2}\right)+x_2\times\\
&\quad\times\left[2\mu x_2\left(\sigma_{2,1}+u\beta_{3,1}-v\beta_{3,2}+x_1\beta_{1,1}+x_2\beta_{2,1}-y_1\beta_{1,2}-y_2\beta_{2,2}\right)+\right.\\
&\quad\left.+2\nu y_2\left(\sigma_{2,2}+u\beta_{3,2}+v\beta_{3,1}+x_1\beta_{1,2}+x_2\beta_{2,2}+y_1\beta_{1,1}+y_2\beta_{2,1}\right)\right],
\end{aligned}$$

где $a'_{i,j}(0)=\alpha_{i,j}$, $b'_{i,j}(0)=\beta_{i,j}$, $c'_{i,j}(0)=\gamma_{i,j}$, $p'_{i,j}(0)=\sigma_{i,j}$, $q'_j(0)=\sigma_{3,j}$ — производные функций из (4).

В сужении на поверхность M

3.2 Произвольная поверхность

В общем случае, квадратичную форму $Q(x_1,y_1,x_2,y_2)$ можно записать в явном виде:

$$\begin{aligned}
Q(x_1,y_1,x_2,y_2) &= k_1x_1^2+k_2x_2x_1+k_3x_2^2+k_4x_1y_1+k_5x_2y_1\\
&\quad+k_6y_1^2+k_7x_1y_2+k_8x_2y_2+k_9y_1y_2+k_{10}y_2^2
\end{aligned}$$

Применяя метод, указанный в предыдущем пункте, получим линейную однородную систему из 83 уравнений относительно 24 неизвестных, причем переменная $\sigma_{3,1}$ является «фиктивной» — в связи с тем, что

Наиболее простые уравнения в системе имеют вид

$$
\begin{aligned}
k_1\beta_{3,2} &= 0\\
k_1\beta_{3,1} &= 0\\
k_1\sigma_{2,1} &= 0\\
k_4\beta_{3,1} &= 0\\
k_4\sigma_{2,1} &= 0\\
k_7\beta_{3,1} &= 0\\
k_7\sigma_{2,1} &= 0\\
k_6\beta_{3,1} &= 0\\
k_6\sigma_{2,1} &= 0\\
k_9\beta_{3,1} &= 0\\
k_9\sigma_{2,1} &= 0\\
k_6\beta_{3,2} &= 0\\
k_{10}\beta_{3,2} &= 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

Отсюда можно выделить два случая:

1. Все k_j равны нулю: $k_1 = k_4 = k_6 = k_7 = k_9 = k_{10} = 0$.
2. Хотя бы один k_j из указанного набора не равен нулю.

В первом случае поверхность приобретает следующий вид:

$$vx_2 = k_2x_2x_1 + k_3x_2^2 + k_5x_2y_1 + k_8x_2y_2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$

Легко видеть, что данное уравнение можно поделить на x_2, что в итоге даст новую поверхность, которая является квадрикой. Рассмотрение поверхностей данного типа не представляет интереса в данной работе, поэтому можно сразу перейти к рассмотрению второго случая.

Предположим, что $k_1 \neq 0$. В таком случае, приведем элементарными преобразованиями матрицу системы W к ступенчатому виду.

Исходя их этих соображений можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 1. *Размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность из семейства (1), удовлетворяет неравенству* $1 \leq \dim G \leq 5$, *и каждая из размерностей достижима.*

3.3 Частный случай семейства

В связи со сложностью рассмотрения общего случая, был рассмотрен частный случай семейства поверхностей (1), в котором квадратичная форма Q не зависит от переменных x_2 и y_2. В таком случае, семейство может быть описано следующим образом:

$$vx_2 = k_1x_1^2 + k_2x_1y_1 + k_3x_2^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \tag{8}$$

Следует заметить, что за счёт применения невырожденных аффинных преобразований, можно фактически сократить число параметров k_1, k_2 и k_3 до одного.

В результате применения описанного метода, получается однородная линейная система из 57 уравнений относительно 24 неизвестных.

Теорема 2. *размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность вида (8), удовлетворяет неравенствам* $3 \leq \dim G \leq 5$, *причем*

- $\dim G = 3$ *достигается на поверхностях вида*

$$vx_2 = kx_1^2 + y_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2),\ \ k \neq 0,\ \ k \neq 1; \tag{9}$$

- $\dim G = 4$ *достигается на поверхностях вида*

$$vx_2 = |z_1|^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2); \tag{10}$$

- $\dim G = 5$ *достигается на аффинно-однородных поверхностях следующего вида*

$$vx_2 = x_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2). \tag{11}$$

4 Компьютерные алгоритмы

В данном разделе приведены описания процедур и функций, которые позволяют реализовать методику, предложенную в разделе 2.

4.1 Основные процедуры

TODO

4.2 Вспомогательные процедуры

TODO

Заключение

TODO

Список литературы

1. *Ли С.* Теория групп преобразований: в 3-х частях. Часть 1 / под ред. А. В. Болсинова. — 1-е изд. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. — пер. с нем. Л. А. Фрай.
2. *Miller W.* Symmetry Groups and Their Applications. — Elsevier Science, 1973. — (Pure and Applied Mathematics). — URL: `https://books.google.ru/books?id=rW7-eLDdVm0C`.
3. *Isaev A.*, *Kruglikov B.* On the symmetry algebras of 5-dimensional CR-manifolds // ArXiv e-prints. — 2016. — July. — arXiv: `1607.06072 [math.CV]`.
4. *Широков П.*, *Широков А.* Аффинная дифференциальная геометрия. — Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1959. — URL: `https://books.google.ru/books?id=UNu0AAAAIAAJ`.
5. *Cartan E.* Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. — Nony, 1894. — (Théses présentées a la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques). — URL: `https://books.google.ru/books?id=JY8LAAAAYAAJ`.
6. *Лобода А. В.* Классификация аффинно-однородных невырожденных по Леви гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$ // Современные проблемы математики и механики, М.: Изд-во МГУ. — 2011. — Т. 6: Математика., 6: Математика. — С. 56—58.
7. *Atanov A. V.*, *Loboda A. V.*, *Shipovskaya A. V.* Affine homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces of the type (1/2,0) in $\mathbb{C}^3$ // ArXiv e-prints. — 2014. — Jan. — arXiv: `1401.2252 [math.CV]`.
8. *А. В. Лобода*, *А. С. Ходарев* Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства // Изв. вузов. Матем. — 2003. — Т. 47, № 10. — С. 38—50.