

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет компьютерных наук
Кафедра цифровых технологий

Исследование симметрий алгебраических уравнений

ВКР Бакалаврская работа
02.03.01 Математика и компьютерные науки
Распределенные системы и искусственный интеллект

Допущено к защите в ГЭК ____ . ____ . 2017 г.

Зав. кафедрой	_____	<i>С.Д. Кургалин, д. ф.-м. н., профессор</i>
Обучающийся	_____	<i>Е.Ю. Морозов, 4 курс, д/о</i>
Руководитель	_____	<i>А.В. Лобода, д. ф.-м. н., профессор</i>

Воронеж, 2017

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"
Факультет компьютерных наук
Кафедра цифровых технологий

УТВЕРЖДАЮ
заведующий кафедрой

подпись

расшифровка подписи

ЗАДАНИЕ
НА ВЫПОЛНЕНИЕ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
ОБУЧАЮЩЕГОСЯ _____

фамилия, имя, отчество

1. Тема работы _____, утверждена решением ученого совета _____ факультета от _____.20__
2. Направление подготовки _____
3. Срок сдачи студентом законченной работы _____
шифр, наименование
4. Календарный план:

№	Задание	Срок выполнения
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Обучающийся

подпись

расшифровка подписи

Руководитель

подпись

расшифровка подписи

Выпускная квалификационная работа представлена на кафедру _____.20__

Рецензент _____

должность, ученая степень, ученое звание

Выпускная квалификационная работа на тему _____

допущена к защите в ГЭК _____.20__

Заведующий кафедрой _____ _____.20__

подпись, расшифровка подписи

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа с., источника, приложения

Объект исследования —

Цель работы —

Метод исследования и аппаратура —

Полученные результаты и их новизна —

Область применения —

Прогнозные предположения о развитии объекта исследования — .

Содержание

Введение	4
1 Постановка задачи	8
2 Симметрии в трехмерном комплексном пространстве	11
2.1 Группы Ли аффинных преобразований в \mathbb{C}^3	11
2.2 Инфинитезимальные преобразования	12
2.3 Системы полиномиальных уравнений	14
3 Определение размерности групп аффинных преобразований	18
3.1 Общая схема	18
3.2 Частный случай семейства	18
3.3 Произвольная поверхность	26
4 Компьютерные алгоритмы	30
4.1 Основные процедуры	30
4.2 Вспомогательные процедуры	31
4.3 Результаты тестирования	31
Заключение	32
Список использованных источников	33
Приложение А Используемые выражения	35
Приложение Б Листинг программы	36
Приложение В Схема матрицы в частном случае	39
Приложение Г Схема матрицы в общем случае	40

Введение

В данной работе рассматривается задача, связанная с описанием симметрий вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств.

Симметричные множества представляли интерес в математике со времен зарождения этой науки. Для подтверждения этого, достаточно вспомнить, что в геометрии Евклида важное место занимали правильные треугольники и четырехугольники (квадраты), а так же окружности.

И квадрат, и окружность являются симметричными множествами. Однако, окружность «одинаково устроена» в каждой своей точке, в то время как квадрат имеет вершины и точки, которые не являются симметричными. Это свойство множества называется в современной математике однородностью и является обобщением более простого свойства точечной симметрии.

Помимо тел на плоскости, в ранней геометрии также изучались симметричные тела в трехмерном пространстве. Так, уже древним грекам были известны описания всех правильных многогранников — «платоновых тел» — тетраэдра, октаэдра, гексаэдра (куба), икосаэдра и додекаэдра. Также был известен тот факт, что список этих тел полон и что не существует, к примеру, правильного 115-гранника. Однако, строгое доказательство этого факта не является тривиальным и требует определенной математической сноровки. По аналогии с планиметрией, в стереометрии при рассмотрении платоновых тел сфера упоминается как «правильный многогранник с бесконечным числом граней», обладающий из-за этого бесконечным количеством симметрий. Сфера также является однородным объектом с многих «естественных» точек зрения.

Во второй половине XIX века различные симметрии математических объектов стали изучаться на качественно новом уровне строгости. Связано это было с изучением теории групп и, в частности, с развитием теории непрерывных групп. В связи с этим можно упомянуть работы Ф. Клейна, и, например его труд «Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени».

Непрерывные группы (преобразований) получили наибольшую завершенность в работах норвежского математика Софуса Ли, например, в его фундаментальном труде «Теория групп преобразований» [1]. Непрерывные группы преобразований в идеальной их форме получили название «группы Ли» и именно в терминах этих групп производятся современные исследования симметрий различных математических объектов.

Начиная с середины XX века, активно начинают исследоваться симметрии различных математических объектов. Тут следует упомянуть труд У. Миллера «Группы симметрий и их приложения», в котором кратко изложен математический аппарат для изучения симметрий с точки зрения непрерывных групп [2].

Из современных исследований, которые касаются симметрий алгебраических объектов следует выделить работы А. Исаева и Б. Кругликова, к примеру, «On the Symmetry Algebras of 5-dimensional CR-manifolds», в которой изучаются симметрии вещественных гиперповерхностей в трехмерном комплексном пространстве [3]. Этот труд очень близок по тематике к данной работе.

В современной математике представляет интерес задачи, связанные с поиском и описанием различных однородных объектов в вещественных и комплексных пространствах. Сходные по своей сути задачи ставились и решались математиками уже в конце XIX — начале XX веков. Однородные относительно аффинных преобразований поверхности 3-мерного вещественного пространства были описаны в середине XX-го века, и тогда же эти описания были включены в учебники по дифференциальной геометрии [4].

В 1932 г. Э. Картан построил полный список вещественных гиперповерхностей 2-мерных комплексных пространств, которые являются однородными относительно голоморфных преобразований [5]. Решение же более простой по постановке задачи описания аффинно-однородных гиперповерхностей пространства \mathbb{C}^2 было получено А.В. Лободой сравнительно недавно [6].

Задачу описания свойства аффинной однородности можно рассматривать как часть большей проблемы, которая связана с изучением голоморфной однородности. Близость этих задач обусловлена тем,

что в рамках второй задачи естественно выделяется класс аффинно-однородных объектов, которые являются однородными относительно голоморфных преобразований.

В настоящее время имеется большое число частных результатов об однородных многообразиях в пространстве \mathbb{C}^3 ([7], [8]). Однако, задача, в силу своей объемности и сложности, остается нерешенной.

$$v = x_1^2/x_2 + x_2^\alpha$$

$$x_3 = x_1x_2 + x_1^3$$

В данной работе изучаются симметрии одного семейства кубических вещественных гиперповерхностей в пространстве \mathbb{C}^3 . Главной задачей является исследование групп аффинных преобразований, сохраняющих каждую поверхность из этого семейства и их размерностей.

Семейство поверхностей, рассматриваемое в данной задаче, является одним из объектов исследования в связи с указанной задачей об аффинной однородности вещественных многообразий в трехмерном комплексном пространстве.

В первых главах этой работы производится постановка задачи на формальном уровне, а так же вводятся основные понятия и методика, необходимая для решения поставленной задачи.

Основным результатом данной работы является оценка размерности группы аффинных преобразований, сохраняющих все поверхности из исследуемого семейства. Соответствующая теорема и её доказательство представлены в третьем разделе; в нём же присутствует детальный разбор одного из частных случаев поверхностей из этого семейства.

В главе четыре приведено описание отдельных элементов алгоритма по нахождению искоемых размерностей групп преобразований. Процедуры были реализованы при помощи пакета символьной математики Wolfram Mathematica.

В приложениях можно найти некоторые выражения, которые слишком велики для отображения в тексте, но, тем не менее, представляют интерес. Также в приложение вынесен полный листинг программы на языке Wolfram Language.

1. Постановка задачи

Рассмотрим семейство вещественных «квадро-кубических» гиперповерхностей в трехмерном комплексном пространстве:

$$vx_2 + Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = T(x_1, y_1, x_2, y_2) \quad (1.1)$$

где $x_1 = \Re(z_1)$, $y_1 = \Im(z_1)$, $x_2 = \Re(z_2)$, $y_2 = \Im(z_2)$, $u = \Re(w)$, $v = \Im(w)$ — компоненты координат в трехмерном комплексном пространстве, $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ — некоторая квадратичная, а $T(x_1, y_1, x_2, y_2)$ — некоторая кубическая формы. Под симметрией любой поверхности из данного класса будем понимать любое аффинное преобразование, сохраняющее эту поверхность. В то же время, симметрией определяющей функции поверхности будем называть преобразование, сохраняющее это уравнение с точностью до ненулевого множителя:

$$G(\Phi(z, \bar{z}, v)) \equiv \psi(z, \bar{z}, w, \bar{w}) \cdot \Phi(z, \bar{z}, v), \quad (1.2)$$

где G — некоторое аффинное преобразование, $\Phi(z, \bar{z}, v)$ — определяющая функция поверхности, а $\psi(z, \bar{z}, w, \bar{w})$ — ненулевая функция. Изучая симметрии в таком контексте, вполне естественно обсуждать группы аффинных преобразований, под действиями которых всякая поверхность из класса (1.1) сохраняется. Задача данной работы, в таком случае, заключается в изучении групп аффинных преобразований, сохраняющих конкретные поверхности из данного семейства, и размерностей таких групп.

Следует сразу отметить, что в классе (1.1) присутствуют частные случаи поверхностей, являющиеся тривиальными. Таковыми являются поверхности, в которых формы $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ и $T(x_1, y_1, x_2, y_2)$ делятся на x_2 . Деление уравнения (1.1) на эту переменную понижает его степень и поверхность выходит из класса кубических. Такие случаи в данной работе рассматриваться не будут.

В задачах, связанных с однородностью, отдельно проверяется свойство невырожденности вещественно-аналитических поверхностей в смысле Леви. Для этого уравнение поверхности необходимо разрешить относительно одной из вещественных переменных, разложить получив-

щуюся функцию в степенной ряд, и аффинными преобразованиями свести к виду

$$v = H(z, \bar{z}) + Q(z) + \overline{Q(z)} + \sum_{k \geq 3} F_k(z, \bar{z}, u), \quad (1.3)$$

где $H(z, \bar{z})$ — эрмитова, $Q(z)$ — квадратичная формы, $F_k(z, \bar{z}, u)$ — компонента однородности веса k . В таком случае, поверхность называется вырожденной по Леви, если эрмитова форма H является вырожденной.

Заметим, что можно изучать поставленную задачу с точностью до аффинных преобразований исходных объектов. На размерности и некоторые другие свойства групп это не повлияет.

Как будет видно далее, задача в наиболее общей постановке (1.1) является довольно сложной. Поэтому, в данной работе изучается более узкий класс поверхностей из данного семейства:

$$vx_2 + Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \quad (1.4)$$

где μ, ν — вещественные параметры, одновременно не равные нулю. Такая постановка задачи возникла в связи с тем, что в данном классе уже имеются примеры однородных поверхностей [7]:

$$v = \frac{x_1^2}{1 - x_2} + |z_2|^2, \quad (x_2 \neq 1). \quad (1.5)$$

Однако, этот класс не изучен в полной мере.

В современной науке сформировалось несколько подходов к изучению симметрий поверхностей — геометрический, аналитический и алгебраический. Первый подход изучает симметрии поверхностей с помощью дифференциальной геометрии и изучения различных инвариантных структур на многообразиях. Яркими примерами работ в этом направлении являются книги геометров бельгийской дифференциально-геометрической школы Ф. Диллена и Л. Вранкена (см. [9], [10]). К сожалению, этот метод, хотя и является естественным, не дал весомых результатов (к примеру, задача построения полного списка однородных поверхностей пространства \mathbb{R}^3 так и не была решена).

Второй подход связан с построением канонических (относительно заданного класса преобразований) уравнений и был предложен А.

В. Лободой. Вопросы существования и построения нормальных форм для невырожденных по Леви вещественных многообразий рассматриваются в работах [8] и [11]. Следует заметить, что именно этот метод позволил существенно продвинуться в классификации однородных многообразий.

В данной работе используется третий (алгебраический) метод, основанный на изучении симметрий исходных объектов с помощью групп Ли и инфинитезимальных преобразований. Подробное описание метода определения размерности групп преобразований, сохраняющих поверхности из изучаемого класса, представлено во втором разделе данной работы.

2. Симметрии в трехмерном комплексном пространстве

2.1. Группы Ли аффинных преобразований в \mathbb{C}^3

Группой Ли называется топологическая группа, если она является параметрической и если функция, задающая закон умножения, является вещественно-аналитичной. Иными словами, зависимость отдельных преобразований от параметров в группе описывается аналитичной функцией.

Действие произвольной подгруппы Ли группы аффинных преобразований пространства \mathbb{C}^3 в координатах этого пространства можно задать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \\ w^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(\mathbf{t}) & A_2(\mathbf{t}) & A_3(\mathbf{t}) \\ B_1(\mathbf{t}) & B_2(\mathbf{t}) & B_3(\mathbf{t}) \\ C_1(\mathbf{t}) & C_2(\mathbf{t}) & C_3(\mathbf{t}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1(\mathbf{t}) \\ P_2(\mathbf{t}) \\ q(\mathbf{t}) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{pmatrix} A_1(\mathbf{t}) & A_2(\mathbf{t}) & A_3(\mathbf{t}) \\ B_1(\mathbf{t}) & B_2(\mathbf{t}) & B_3(\mathbf{t}) \\ C_1(\mathbf{t}) & C_2(\mathbf{t}) & C_3(\mathbf{t}) \end{pmatrix}$$

— вращательная, а

$$\begin{pmatrix} P_1(\mathbf{t}) \\ P_2(\mathbf{t}) \\ q(\mathbf{t}) \end{pmatrix}$$

— сдвиговая компоненты отдельного преобразования из данной группы, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ — вещественные параметры группы, n — размерность группы.

Исследуя группы Ли преобразований больших размерностей, естественно представлять многопараметрическую группу как совокупность независимых однопараметрических групп преобразований. В таком случае, обозначим через F_t однопараметрическую группу Ли аффинных преобразований, сохраняющих эту поверхность. Она содержит, в частности, тождественное преобразование, и удобно считать, что оно к $t = 0$,

т.е. $F_0 = \text{Id}$. Как следует из (2.1), уравнения, определяющие эту группу будут иметь вид:

$$\begin{cases} z_1 &= A_1(t)z_1^* + A_2(t)z_2^* + A_3(t)w^* + P_1(t) \\ z_1 &= B_1(t)z_1^* + B_2(t)z_2^* + B_3(t)w^* + P_2(t) , \\ w &= C_1(t)z_1^* + C_2(t)z_2^* + C_3(t)w^* + q(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

где $A_i(t), B_i(t), C_i(t), P_i(t)$ и $q(t)$ — некоторые аналитические комплексные функции от вещественного аргумента. При переходе от

$$\begin{cases} x_1 &= l_1(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) \\ y_1 &= l_2(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) \\ x_2 &= l_3(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) \\ y_2 &= l_4(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) , \\ u &= l_5(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) \\ v &= l_6(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) \end{cases} \quad (2.3)$$

где $l_i(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*)$ — линейная форма. Явный вид этих форм не приводится, так как его легко получить из выражения (2.2).

2.2. Инфинитезимальные преобразования

Важную роль в теории непрерывных групп (Ли) играют инфинитезимальные преобразования. Согласно Софусу Ли: «Инфинитезимальным преобразованием называется преобразование из однопараметрической группы F_t , параметр которого имеет бесконечно малое значение». Иными словами, компонентами этого преобразования являются производные уравнений группы F_t в точке $t = 0$:

$$\begin{cases} \zeta_1 &= A'_1(0)z_1^* + A'_2(0)z_2^* + A'_3(0)w^* + P'_1(0) \\ \zeta_2 &= B'_1(0)z_1^* + B'_2(0)z_2^* + B'_3(0)w^* + P'_2(0) \\ \zeta_3 &= C'_1(0)z_1^* + C'_2(0)z_2^* + C'_3(0)w^* + q'(0) \end{cases}$$

Удобно записывать коэффициенты этого преобразования в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + i \cdot \alpha_{1,2} & \alpha_{2,1} + i \cdot \alpha_{2,2} & \alpha_{3,1} + i \cdot \alpha_{3,2} & \sigma_{1,1} + i \cdot \sigma_{1,2} \\ \beta_{1,1} + i \cdot \beta_{1,2} & \beta_{2,1} + i \cdot \beta_{2,2} & \beta_{3,1} + i \cdot \beta_{3,2} & \sigma_{2,1} + i \cdot \sigma_{2,2} \\ \gamma_{1,1} + i \cdot \gamma_{1,2} & \gamma_{2,1} + i \cdot \gamma_{2,2} & \gamma_{3,1} + i \cdot \gamma_{3,2} & \sigma_{3,1} + i \cdot \sigma_{3,2} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где $\alpha_{i,1} = \Re\{A'_i(0)\}$, $\alpha_{i,2} = \Im\{A'_i(0)\}$, $\beta_{i,1} = \Re\{B'_i(0)\}$, $\beta_{i,2} = \Im\{B'_i(0)\}$, $\gamma_{i,1} = \Re\{C'_i(0)\}$, $\gamma_{i,2} = \Im\{C'_i(0)\}$, $\sigma_{i,1} = \Re\{P'_i(0)\}$, $\sigma_{i,2} = \Im\{P'_i(0)\}$, $\sigma_{3,1} = \Re\{q'(0)\}$, $\sigma_{3,2} = \Im\{q'(0)\}$ — вещественные и мнимые компоненты производных функций из (2.2) в точке $t = 0$.

Инфинитезимальное преобразование ставит в соответствие каждой точке p некоторой поверхности M из \mathbb{C}^3 вектор, касательный к p . Иными словами, оно показывает направление движения точки p в результате действия группы F_t для бесконечно малых значений параметра t [1].

Замечание: в современной терминологии переход к инфинитезимальным преобразованиям поверхности означает рассмотрение векторных полей, касательных многообразию, соответствующих группе F_t .

Далее потребуются теорема из теории групп преобразований Ли. Она будет приведена без доказательства.

Теорема (см [1], с. 82). Если r инфинитезимальных преобразований являются независимыми друг от друга, а t_1, \dots, t_r — произвольные параметры, то совокупность всех однопараметрических групп, порождаемых этими преобразованиями, образует семейство преобразований, в котором все r параметров t_1, \dots, t_r являются существенными.

Таким образом, число независимых инфинитезимальных преобразований равно размерности порождаемой ими группы Ли.

Получение однопараметрических групп достигается интегрированием порождающего её инфинитезимального преобразования. В простейшем случае, это означает вычисление матричной экспоненты от произведения матрицы инфинитезимального преобразования (2.4), дополненной нулевой строкой до квадратной и умноженной и вещественного параметра t :

$$F_t = \exp(Z \cdot t)$$

Подробнее о процедуре интегрирования наборов независимых инфинитезимальных преобразований (или, что то же самое, алгебр векторных полей) написано в работах [8], [12].

2.3. Системы полиномиальных уравнений

В ходе решения поставленной задачи возникают системы полиномиальных уравнений.

Пусть дана некоторая вещественная гиперповерхность M из семейства (1.4) с определяющей функцией

$$\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2, v) = vx_2 + Q(x_1, y_1, x_2, y_2) - x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$

Пусть также F_t — однопараметрическая группа аффинных преобразований в \mathbb{C}^3 , $F_0 = \text{Id}$. Под действием группы F_t определяющая функция примет следующий вид:

$$F_t(\Phi) = l_1(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) \cdot l_6(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) + \tilde{Q}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) - l_3(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) \cdot [\mu \cdot l_4(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*)^2 + \nu \cdot l_4(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*)^2],$$

где $\tilde{Q}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*)$ — новая квадратичная форма, полученная после действия группы. Далее в работе символ $*$ при координатах будет опущен для компактности. Введём следующие обозначения:

$$F_t(\Phi) = T(\text{I}) + T(\text{II}) - T(\text{III}),$$

где

$$\begin{aligned} T(\text{I}) &= (x_1 c_{1,2} + y_1 c_{1,1} + x_2 c_{2,2} + y_2 c_{2,1} + u c_{3,2} + v c_{3,1} + q_2) \times \\ &\quad \times (x_1 b_{1,1} - y_1 b_{1,2} + x_2 b_{2,1} - y_2 b_{2,2} + u b_{3,1} - v b_{3,2} + p_{2,1}), \\ T(\text{II}) &= \tilde{Q}(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v), \\ T(\text{III}) &= (x_1 b_{1,1} - y_1 b_{1,2} + x_2 b_{2,1} - y_2 b_{2,2} + u b_{3,1} - v b_{3,2} + p_{2,1}) \times \\ &\quad \times [\mu (x_1 b_{1,1} - y_1 b_{1,2} + x_2 b_{2,1} - y_2 b_{2,2} + u b_{3,1} - v b_{3,2} + p_{2,1})^2 + \\ &\quad + \nu (x_1 b_{1,2} + y_1 b_{1,1} + x_2 b_{2,2} + y_2 b_{2,1} + u b_{3,2} + v b_{3,1} + p_{2,2})^2], \end{aligned}$$

а $a_{i,1} = \Re\{A_i(t)\}$, $a_{i,2} = \Im\{A_i(t)\}$, $b_{i,1} = \Re\{B_i(t)\}$, $b_{i,2} = \Im\{B_i(t)\}$, $c_{i,1} =$

$\Re\{C_i(t)\}$, $c_{i,2} = \Im\{C_i(t)\}$, $p_{i,1} = \Re\{P_i(t)\}$, $p_{i,2} = \Im\{P_i(t)\}$, $q_1 = \Re\{q(t)\}$ и $q_2 = \Im\{q(t)\}$ — вещественные функции от аргумента t (опущен для компактности записи).

Из (1.2) следует, что факт сохранения определяющей функции Φ поверхности M из класса (1.4) будет описываться следующим уравнением:

$$F_t(\Phi(z, \bar{z}, v)) \equiv \psi(z, \bar{z}, w, \bar{w}, t) \cdot \Phi(z, \bar{z}, v). \quad (2.5)$$

Для того, чтобы перейти от аффинных преобразований к инфинитезимальным, продифференцируем выражение (2.5) по параметру t в точке $t = 0$:

$$\left. \frac{d}{dt} F_t(\Phi(z, \bar{z}, v)) \right|_{t=0} \equiv \Phi(z, \bar{z}, v) \cdot \left. \frac{d}{dt} \psi(z, \bar{z}, w, \bar{w}, t) \right|_{t=0} \quad (2.6)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} T(\text{I}) \right|_{t=0} &= (x_1 \gamma_{1,2} + y_1 \gamma_{1,1} + x_2 \gamma_{2,2} + y_2 \gamma_{2,1} + u \gamma_{3,2} + v \gamma_{3,1} + \sigma_{3,2}) x_2 + \\ &\quad + v (x_1 \beta_{1,1} - y_1 \beta_{1,2} + x_2 \beta_{2,1} - y_2 \beta_{2,2} + u \beta_{3,1} - v \beta_{3,2} + \sigma_{2,1}), \\ \left. \frac{d}{dt} T(\text{II}) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \tilde{Q}(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) \right|_{t=0} = \tilde{Q}'(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v), \\ \left. \frac{d}{dt} T(\text{III}) \right|_{t=0} &= (\mu x_2^2 + \nu y_2^2) \times \\ &\quad \times (\sigma_{2,1} + u \beta_{3,1} - v \beta_{3,2} + x_1 \beta_{1,1} + x_2 \beta_{2,1} - y_1 \beta_{1,2} - y_2 \beta_{2,2}) + x_2 \times \\ &\quad \times [2\mu x_2 (\sigma_{2,1} + u \beta_{3,1} - v \beta_{3,2} + x_1 \beta_{1,1} + x_2 \beta_{2,1} - y_1 \beta_{1,2} - y_2 \beta_{2,2}) + \\ &\quad + 2\nu y_2 (\sigma_{2,2} + u \beta_{3,2} + v \beta_{3,1} + x_1 \beta_{1,2} + x_2 \beta_{2,2} + y_1 \beta_{1,1} + y_2 \beta_{2,1})], \end{aligned}$$

Заметим, что левая часть выражения (2.6) является действием инфинитезимального преобразования, порождающего группу F_t , на поверхность M . Для того, чтобы найти это преобразование, необходимо произвести сужение выражения (2.6) на эту поверхность. Для этого выразим переменную v из выражения (1.4):

$$v = -\frac{Q(x_1, y_1, x_2, y_2)}{x_2} + \mu x_2^2 + \nu y_2^2. \quad (2.7)$$

Так как сужение определяющей функции поверхности на саму поверх-

ность дает ноль, справедливо следующее тождество:

$$\left\{ \frac{d}{dt} F_t(\Phi(z, \bar{z}, v)) \Big|_{t=0} \right\} \Big|_M \equiv 0 \quad (2.8)$$

В результате данной подстановки возникает рациональная функция, общий вид которой, вообще говоря, зависит от квадратичной формы Q . Проиллюстрируем данный факт на примере компоненты $T(\text{I})$:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d}{dt} T(\text{I}) \Big|_{t=0} \right\} \Big|_M &= \left(-\frac{Q(x_1, y_1, x_2, y_2)}{x_2} + \mu x_2^2 + \nu y_2^2 \right) \times \\ &\times (\sigma_{2,1} + u\beta_{3,1} + x_1\beta_{1,1} + x_2\beta_{2,1} + x_2\gamma_{3,1} - y_1\beta_{1,2} - y_2\beta_{2,2}) - \\ &- \beta_{3,2} \left(-\frac{Q(x_1, y_1, x_2, y_2)}{x_2} + \mu x_2^2 + \nu y_2^2 \right)^2 + \\ &+ ux_2\gamma_{3,2} + x_2^2\gamma_{2,2} + x_1x_2\gamma_{1,2} + x_2\sigma_{3,2} + x_2y_1\gamma_{1,1} + x_2y_2\gamma_{2,1} \quad (2.9) \end{aligned}$$

Замечание: другие компоненты из-за своей громоздкости вынесены в приложение 1 (см. формулы (ПА.1) – (ПА.3)) .

Отсюда видно, что общий знаменатель выражения (2.8) равен x_2^2 . Умножая выражение (2.8) на него, получаем полиномиальное уравнение шестой степени:

$$S(x_1, y_1, x_2, y_2, u) = \text{ST}(\text{I}) + \text{ST}(\text{II}) + \text{ST}(\text{III}) \equiv 0,$$

где

$$\begin{aligned} \text{ST}(\text{I}) &= x_2^2 \cdot \left\{ \frac{d}{dt} T(\text{I}) \Big|_{t=0} \right\} \Big|_M, \quad \text{ST}(\text{II}) = x_2 \cdot \left\{ \frac{d}{dt} T(\text{II}) \Big|_{t=0} \right\} \Big|_M, \\ \text{ST}(\text{III}) &= -x_2 \cdot \left\{ \frac{d}{dt} T(\text{III}) \Big|_{t=0} \right\} \Big|_M. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, становится видно, что коэффициентами при мономах в полиноме S являются линейные комбинации элементов инфинитезимального преобразования, порождающего группу преобразований F_t . Известно, что тождественное равенство нулю полинома означает равенство нулю всех коэффициентов при его одночленах. В таком случае, возникает система однородных уравнений, линейных относительно элементов инфинитезимально-

го преобразования.

Каждое решение полученной системы уравнений есть инфинитезимальное преобразование. Таким образом, размерность пространства решений данной системы равно количеству независимых инфинитезимальных преобразований. Из теоремы, сформулированной ранее, следует, что размерность подгруппы группы аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из исследуемого класса равна числу независимых инфинитезимальных преобразований, а значит и размерности пространства решений полученной однородной системы линейных уравнений.

Как известно, размерность пространства решений однородной системы уравнений равна $n - r$, где n — число неизвестных в системе, а r — ранг основной матрицы системы [13]. Таким образом, задача определения размерности группы аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из семейства (1.4), сводится к определению ранга основной матрицы полученной системы уравнений, а размерность группы будет равна

$$\dim G = 24 - \text{rank } W, \quad (2.10)$$

где W — основная матрица системы.

Несмотря на то, что рассматриваются системы линейных уравнений, коэффициентами при уравнениях выступают многочлены от коэффициентов квадратичной формы $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ и параметров μ и ν . При изучении ранга матрицы, приходится иметь дело с рассмотрением полиномиальных уравнений.

3. Определение размерности групп аффинных преобразований

В данном разделе будет описана процедура определения размерностей групп аффинных преобразований для семейства поверхностей (1.4).

3.1. Общая схема

Основываясь на сведениях из раздела 2, можно сформулировать следующий алгоритм для нахождения размерности групп аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из семейства (1.4):

1. Применить аффинное преобразование (2.1) к уравнению поверхности
2. Продифференцировать полученное выражение по параметру группы t в точке $t = 0$.
3. Разрешить уравнение поверхности относительно переменной v и подставить в выражение и предыдущего шага и умножить на возникающий общий знаменатель (x_2^2) .
4. Составить однородную систему линейных относительно элементов инфинитезимального преобразования уравнений и выписать матрицу этой системы.
5. Размерность группы Ли аффинных преобразований G , сохраняющих поверхность из исследуемого семейства, равна $\dim G = 24 - \text{rank } W$, где W — полученная матрица системы.

3.2. Частный случай семейства

В связи со сложностью рассмотрения общего случая, был рассмотрен частный случай семейства поверхностей (1.4), в котором квадратичная форма Q не зависит от переменных x_2 и y_2 . В таком случае,

семейство может быть описано следующим образом:

$$vx_2 = k_1x_1^2 + k_2x_1y_1 + k_3x_2^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \quad (3.1)$$

где k_1, k_2, k_3 — вещественные параметры.

Следует заметить, что за счёт применения невырожденных аффинных преобразований, можно фактически сократить число параметров k_1, k_2 и k_3 до одного:

Применим описанный метод для этого класса поверхностей.

1. Применим аффинное преобразование к определяющей функции поверхности из семейства (3.1):

$$\begin{aligned} F_t(\Phi) = & l_6(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) \cdot l_3(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + k_1 l_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v)^2 + \\ & + k_2 l_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) \cdot l_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + k_3 l_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v)^2 - \\ & - l_3(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) [\mu l_3(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v)^2 + \nu l_4(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v)^2] \end{aligned} \quad (3.2)$$

2. Производная (3.2) по t в точке $t = 0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} F_t(\Phi) \right|_{t=0} = & v l'_3(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + x_2 l'_6(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + \\ & + 2k_1 x_1 l'_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + k_2 y_1 l'_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + \\ & + k_2 x_1 l'_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + 2k_3 y_1 l'_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) - (\mu x_2^2 + \nu y_2^2) \times \\ & \times l'_3(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) - x_2 [2\mu x_2 l'_3(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + \\ & + 2\nu y_2 l'_4(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

3. Разрешим уравнение (3.1) относительно v :

$$v = \frac{k_1x_1^2 + k_2x_1y_1 + k_3x_2^2}{x_2} + \mu x_2^2 + \nu y_2^2$$

и подставим его в (3.3), умножая на x_2^2 . В данном многочлене имеется 57 мономов и 101 слагаемое. Приведем подобные и выпишем

по одному примеру одночленов для каждой из степеней:

$$\text{степень 6 : } x_1 x_2^2 y_2 (k_2 \alpha_{2,1} - 2k_1 \alpha_{2,2})$$

$$\text{степень 5 : } x_1 x_2^4 (-2\mu \beta_{1,1} + k_2 \mu \alpha_{3,1} - 2k_1 \mu \alpha_{3,2})$$

$$\text{степень 4 : } x_1 x_2 y_1^2 (k_2^2 \alpha_{3,2} - 3k_3 k_2 \alpha_{3,1} + 2k_1 k_3 \alpha_{3,2} + k_2 \beta_{1,2} - k_3 \beta_{1,1})$$

$$\text{степень 3 : } x_2^3 \sigma_{3,2}$$

Видно, что есть как довольно простые (степень 3), так и довольно сложные (степень 4) коэффициенты при одночленах.

4. Составим однородную систему линейных уравнений на основе многочлена, полученного в предыдущем пункт. Получается система из 57 уравнений относительно 24 неизвестных. Схему основной матрицы этой системы можно посмотреть в приложении 3.

В качестве примеров, приведем некоторые уравнения из этой системы:

$$\begin{aligned} k_2^2 (-\alpha_{3,1}) + 3k_1 k_2 \alpha_{3,2} - 2k_1 k_3 \alpha_{3,1} - k_2 \beta_{1,1} + k_1 \beta_{1,2} &= 0 \\ 2k_2 \alpha_{1,1} - 2k_1 \alpha_{1,2} + 2k_3 \alpha_{1,2} - k_2 \beta_{2,1} - k_2 \gamma_{3,1} &= 0 \\ -2\mu \beta_{1,1} + k_2 \mu \alpha_{3,1} - 2k_1 \mu \alpha_{3,2} &= 0 \\ (k_2^2 + 2k_1 k_3) \beta_{3,2} &= 0 \\ k_2 \alpha_{2,1} - 2k_1 \alpha_{2,2} &= 0 \\ \gamma_{3,2} &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

5. Для изучения ранга этой матрицы, приведем её элементарными преобразованиями к ступенчатому виду.

Предположим, что $k_1 \neq 0$. В таком случае, мы можем сделать замену переменных $z_1^* = z_1 / \sqrt{k_1}$, и замену параметров $k_2^* = k_2 / k_1$, $k_3^* = k_3 / k_1$, чтобы избавиться от параметра k_1 в уравнении поверхности, а значит, и в системе уравнений. Теперь мы можем привести матрицу

системы W к следующему квазитреугольному виду:

$$W \sim \begin{pmatrix} A & N \\ 0 & B \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица A — диагональная матрица размерами 14×14 , $N \in \mathbb{R}^{14 \times 10}$, $B \in \mathbb{R}^{15 \times 10}$ и имеет вид (символы $*$ при параметрах k_2 и k_3 опущены):

$$\begin{pmatrix} 0 & -\nu(k_2^2 - 4k_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2^2 - 2k_3 + 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(k_2^2 + 4) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_2}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}(k_2^2 + 4) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 4\mu & 0 & 3\mu & 2\mu k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\mu(k_2^2 - 4k_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\mu k_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\nu & 0 & 0 & 0 \\ 4\nu & 0 & 3\nu & 2\nu k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2(k_3 + 1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\nu(k_2^2 - 4k_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu k_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2(k_3 + 1) & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_3 \\ 0 & -k_2(k_3 + 1) & 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(k_2^2 - 4k_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Очевидно, что $\text{rank } W = \text{rank } A + \text{rank } B$. Так как матрица A является диагональной, то $\text{rank } W = 14 + \text{rank } B$. В таком случае, найдем ранг матрицы B , приведя её к ступенчатому виду.

Из (3.5) видно, что в матрице B существуют независимые столбцы с заведомо ненулевыми элементами. Это, во-первых, столбцы 2 и 5 с элементами вида $k_2^2 + 4$, и, во-вторых, столбцы 7 и 1 (или 3) с элементами μ и ν . Таким образом, ранг матрицы B не меньше четырех. Пусть далее $\mu \neq 0$ (случай $\nu \neq 0$ рассматривается по аналогии).

Далее, придется рассмотреть два случая — когда $k_2 = 0$ и $k_2 \neq 0$.

В первом случае, матрица B приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\mu \\ 0 & 0 & 0 & -3\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2(k_3 - 1) & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг матрицы B будет равен 5 при $k_3 = 0$, 6 при $k_3 = 1$ и 7 в ином случае. Таким образом, ранг матрицы W будет равен 19, 20 и 21 соответственно, а размерность соответствующей группы преобразований, как видно из (2.10), равна 5, 4 и 3.

В случае, когда $k_2 \neq 0$, матрица B приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(k_2^2 + 4) & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(-k_2^2 - 4) & 0 & \frac{k_2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu & 0 & 0 & 0 & 2\mu k_2 & 0 & 0 & 4\mu \\ 0 & 0 & 0 & -3\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_2^2 - 4k_3}{k_2^2 + 4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(k_2^2 - 4k_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2(k_3 + 1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2^2 - 2k_3 + 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что ранг матрицы B равен 5 при $k_2 = 2\sqrt{k_3}$, $k_3 > 0$ и 7 в иных случаях, что означает размерности 5 и 3 у групп аффинных преобразований, сохраняющих соответствующие поверхности.

Проведём аналогичные рассуждения для случая $k_1 = 0$.

Таким образом, для случая $k_1 \neq 0$ возможна следующая классификация поверхностей по размерности группы преобразований, сохраняющих эти поверхности:

- $\dim G = 5$ соответствуют поверхности

$$vx_2 = x_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \quad (3.6)$$

$$vx_2 = (x_1 + y_1\sqrt{k_3})^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \quad (k_3 > 0); \quad (3.7)$$

- $\dim G = 4$ соответствуют поверхности

$$vx_2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2); \quad (3.8)$$

- $\dim G = 3$ соответствуют поверхности

$$vx_2 = x_1^2 + k_2 x_1 y_1 + k_3 y_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \quad (k_2 \neq 2\sqrt{k_3}, k_3 \neq 1) \quad (3.9)$$

Заметим, что поверхности (3.6) и (3.7) являются аффинно-эквивалентными. Действительно, произведя замену переменных $z_1^* = (1+i)/(a^2+1)z_1$ в уравнении (3.7), получаем поверхность (3.6).

Исходя из этих соображений, можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 1. *размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность вида (3.1), удовлетворяет неравенствам $3 \leq \dim G \leq 5$, причем*

- $\dim G = 3$ достигается на поверхностях вида

$$vx_2 = x_1^2 + ky_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \quad k \neq 0, \quad k \neq 1; \quad (3.10)$$

- $\dim G = 4$ достигается на поверхностях вида

$$vx_2 = |z_1|^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2); \quad (3.11)$$

- $\dim G = 5$ достигается на аффинно-однородных поверхностях следующего вида

$$vx_2 = x_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2). \quad (3.12)$$

Рассмотрим движения, которые сохраняют классы поверхностей,

перечисленных в теореме 1. Для этого решим возникающие системы уравнений для каждого из случаев, чтобы получить инфинитезимальные преобразования, порождающие однопараметрические группы аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из обозначенных случаев.

Для каждой поверхности из класса (3.1) существуют три «основных» движения, сохраняющие эти поверхности. Инфинитезимальные преобразования, порождающие группу движений, имеют следующий вид:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2\nu & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим соответствующие аффинные преобразования:

- *сдвиг* по переменной u (E_1). В данном случае получается следующая замена переменных: $z_1 = z_1^*$, $z_2 = z_2^*$, $w = w + i \cdot t$. Сохранение поверхности очевидно, так как она не зависит от переменной u ;
- *масштабирование* (E_2). Преобразование имеет вид: $z_1 = e^{3t} z_1^*$, $z_2 = e^{2t} z_2^*$, $w = e^{4t} w^*$. Убедимся, что поверхность действительно сохраняется:

$$v^* x_2^* \cdot e^{6t} = e^{6t} \cdot [k_1(x_1^*)^2 + k_2 x_1^* y_1^* + k_3 (y_1^*)^2] + e^{6t} \cdot x_2^* \cdot [\mu(x_2^*)^2 + \nu(y_2^*)^2]$$

Множитель e^{6t} является общим для обеих частей уравнения. После деления на него, получается исходная поверхность (3.1);

- *поворот со сдвигом* («скользящий поворот») (E_3). Замена переменных: $z_1 = z_1^*$, $z_2 = z_2^* + i \cdot t$, $w = w^* + 2t\nu z_2^* + i \cdot t^2 \nu$. Применим данное преобразование к произвольной поверхности (3.1):

$$(v^* + t^2 \nu + 2t\nu y_2) x_2^* = k_1(x_1^*)^2 + k_2 x_1^* y_1^* + k_3 (y_1^*)^2 + x_2^* [\mu(x_2^*)^2 + \nu(y_2^* + it)^2]$$

Перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$(v^* x_2^*) + \nu t^2 x_2 + 2\nu t x_2 y_2 = k_1 (x_1^*)^2 + k_2 x_1^* y_1^* + k_3 (y_1^*)^2 + x_2^* \left[\mu (x_2^*)^2 + \nu (y_2^*)^2 \right] + \nu t^2 x_2 + 2\nu t x_2 y_2.$$

Видно, что член $\nu t^2 x_2 + 2\nu t x_2 y_2$ присутствует в обеих частях уравнения и может быть сокращен, после чего получается исходное уравнение.

Для поверхностей типа (3.11) добавляется еще один вид движений — повороты в плоскости z_1 . Соответствующее инфинитезимальное преобразование и порождаемое аффинное преобразование:

$$E_4 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} \cdot z_1^* \\ z_2^* \\ w^* \end{pmatrix}.$$

Факт сохранения поверхности этим преобразованием довольно очевиден: так как $|e^{it}| = 1$, уравнение поверхности (3.11) останется неизменным.

Поверхности (3.12), в дополнение к трем основным, имеют еще два типа движений, которым соответствуют следующие инфинитезимальные преобразования:

$$E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Порождаемые аффинные преобразования:

- *сдвиг* по переменной y_1 . Замена переменных — $z_1 = z_1^* + it$, $z_2 = z_2^*$, $w = w^*$. Факт сохранения поверхности этим преобразованием очевиден, так как уравнение поверхности (3.12) не зависит от переменной y_1 .

- поворот:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^* + t \cdot z_2^* \\ z_2^* \\ 2itz_1^* + it^2 z_2^* + w^* \end{pmatrix}.$$

Проверим сохранение поверхности (3.12) этим преобразованием:

$$(t^2 x_2^* + 2tx_1^* + v^*) x_2^* = (x_1^* + tx_2^*)^2 + x_2^* [\mu(x_2^*)^2 + \nu(y_2^*)^2]$$

Раскрывая скобки и перегруппировывая слагаемые:

$$v^* x_2^* + 2t^2(x_2^*)^2 + 2tx_1^* x_2^* = (x_1^*)^2 + x_2^* [\mu(x_2^*)^2 + \nu(y_2^*)^2] + 2t^2(x_2^*)^2 + 2tx_1^* x_2^*$$

Слагаемое $2t^2(x_2^*)^2 + 2tx_1^* x_2^*$, которое присутствует в обеих частях, может быть сокращено. В таком случае, получается уравнение (3.12).

В рамках данной работы было также произведено расширение класса аффинно-однородных поверхностей (1.5) за счет расширения кубической формы в правой части:

Теорема 2. для тройки коэффициентов μ, ν, λ , одновременно не равных нулю и $\mu + \nu \neq 0$, поверхность

$$vx_2 = x_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \lambda x_2 y_2 + \nu y_2^2) \quad (3.13)$$

является аффинно-однородной, а размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих такую поверхность, равна 5.

Доказательство. □

3.3. Произвольная поверхность

В общем случае, квадратичную форму $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ можно записать в явном виде:

$$\begin{aligned} Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = & k_1 x_1^2 + k_2 x_2 x_1 + k_3 x_2^2 + k_4 x_1 y_1 + k_5 x_2 y_1 \\ & + k_6 y_1^2 + k_7 x_1 y_2 + k_8 x_2 y_2 + k_9 y_1 y_2 + k_{10} y_2^2 \end{aligned}$$

Применяя метод, указанный в предыдущем пункте, получим линейную однородную систему из 83 уравнений относительно 24 неизвест-

ных, причем переменная $\sigma_{3,1}$ является «фиктивной» — в связи с тем, что Наиболее простые уравнения в системе имеют вид

$$\begin{aligned}
k_1\beta_{3,2} &= 0 & k_1\beta_{3,1} &= 0 & k_1\sigma_{2,1} &= 0 \\
k_6\beta_{3,2} &= 0 & k_6\beta_{3,1} &= 0 & k_6\sigma_{2,1} &= 0 \\
k_4\beta_{3,1} &= 0 & k_4\sigma_{2,1} &= 0 & & \\
k_7\sigma_{2,1} &= 0 & k_7\beta_{3,1} &= 0 & & \\
k_9\beta_{3,1} &= 0 & k_9\sigma_{2,1} &= 0 & & \\
k_{10}\beta_{3,2} &= 0 & & & &
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Отсюда можно выделить два случая:

1. Все k_j равны нулю: $k_1 = k_4 = k_6 = k_7 = k_9 = k_{10} = 0$.
2. Хотя бы один k_j из указанного набора не равен нулю.

В первом случае поверхность приобретает следующий вид:

$$vx_2 = k_2x_2x_1 + k_3x_2^2 + k_5x_2y_1 + k_8x_2y_2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$

Легко видеть, что данное уравнение можно поделить на x_2 , что в итоге даст новую поверхность, которая является квадрикой. Рассмотрение поверхностей данного типа не представляет интереса в данной работе, поэтому можно сразу перейти к рассмотрению второго случая.

По аналогии с рассуждениями для частного случая, предположим, что $k_1 \neq 0$. В таком случае, за счёт аффинных преобразований, параметр k_1 можно сделать равным единицей. Приведём основную матрицу системы уравнений W к ступенчатому виду элементарными преобразованиями. Матрица принимает вид (по аналогии с выкладками выше):

$$W \sim \begin{pmatrix} A & N \\ 0 & B \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица A — диагональная матрица размерами 18×18 , $N \in \mathbb{R}^{18 \times 6}$,

$B \in \mathbb{R}^{16 \times 6}$ и имеет вид:

$$\begin{pmatrix} k_4^2 - 2k_6 + 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_4(k_6 + 1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3(k_4^2 + 4)}f_1 & 0 & \frac{1}{3(k_4^2 + 4)}f_3 & 0 & 0 & -\frac{4k_6 - k_4^2}{k_4^2 + 4} \\ 0 & \frac{1}{2}(k_4^2 - 4k_6) & 0 & \frac{1}{2}(k_4k_7 - 2k_9) & 0 & 0 \\ \frac{1}{3(k_4^2 + 4)}f_2 & 0 & \frac{1}{3(k_4^2 + 4)}f_4 & 0 & 0 & -\frac{2k_9 - k_4k_7}{k_4^2 + 4} \\ 0 & \frac{1}{2}(k_4k_7 - 2k_9) & 0 & \frac{1}{2}(k_7^2 - 4k_{10}) & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

а коэффициенты $f_1 - f_4$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1 &= k_9k_4^3 - (3k_5 + 4k_6k_7 + k_7)k_4^2 + 2(3k_6 + 7)k_9k_4 + 2k_2(k_4^3 - 4k_4k_6) + \\ &\quad + 12(k_5k_6 + k_7), \\ f_2 &= k_{10}k_4^3 - 2k_7k_9k_4^2 + 2k_2(k_4k_7 - 2k_9)k_4 + (-4k_7^2 - 3k_5k_7 + 3k_9^2 + 4k_{10})k_4 + \\ &\quad + 6(k_5 + k_7)k_9, \\ f_3 &= k_2(k_4^2 - 4k_6) - 2k_4(k_6 + 1)k_7 + (k_4^2 + 4)k_9, \\ f_4 &= k_2(k_4k_7 - 2k_9) - k_7(2k_7 + k_4k_9) + 2(k_4^2 + 4)k_{10}. \end{aligned}$$

Ранг матрицы W в таком случае будет равен $18 + \text{rank } B$. Тогда изучим ранг матрицы B .

Из (3.15) видно, что ранг матрицы B изменяется от принимает значения от 1 до 5. Это означает, что размерность группы аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из семейства (1.4) изменяется от 1 до 5. Примеры значений параметров k_2, \dots, k_{10} для каждой из размерностей:

$$\begin{aligned} \dim G = 1, & \quad k_4 = k_6 = k_{10} = 1, k_2 = k_3 = k_5 = 0, k_7 = \dots = k_9 = 0 \\ \dim G = 2, & \quad k_6 = k_{10} = 1, k_2 = \dots = k_5 = 0, k_7 = \dots = k_9 = 0 \\ \dim G = 3, & \quad k_4 = k_6 = 1, k_2 = \dots = k_5 = 0, k_7 = \dots = k_{10} = 0 \\ \dim G = 4, & \quad k_6 = 1, k_2 = \dots = k_5 = 0, k_7 = \dots = k_{10} = 0 \\ \dim G = 5, & \quad k_2 = \dots = k_{10} = 0 \end{aligned}$$

Проводя аналогичные рассуждения для остальных параметров, можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 3. *Размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность из семейства (1.4), удовлетворяет неравенству $1 \leq \dim G \leq 5$, и каждая из размерностей достижима.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы, нам необходимо лишь привести примеры поверхностей с размерностями групп 1 и 2, так как доказательство для размерностей 3-5 приведено в рамках теоремы 1.

$$\dim G = 1, \quad vx_2 = |z_1|^2 + x_1y_1 + y_2^2 + x_2|z_2|^2, \quad (3.16)$$

$$\dim G = 2, \quad vx_2 = |z_1|^2 + y_2^2 + x_2|z_2|^2. \quad (3.17)$$

Покажем, что эти поверхности действительно имеют заявленные размерности.

С помощью программы на языке *Wolfram Language*, представленной в приложении, были получены группы преобразований для обеих заявленных поверхностей. Первую поверхность сохраняет сдвиг по переменной u . Для второй поверхности добавляется еще одно движение — повороты в плоскости z_1 . \square

Замечание: поверхности (3.16) и (3.17) являются невырожденными по Леви.

4. Компьютерные алгоритмы

В данном разделе приведены описания процедур и функций, которые позволяют реализовать алгоритм нахождения размерности групп аффинных преобразований, предложенный в пункте 3 данной работы.

В связи с трудоемкостью процедуры и большим объемом вычислений, сложно обойтись без использования пакетов символьных вычислений. С помощью пакета символьной математики *Wolfram Mathematica* были разработаны функции, способные выполнять отдельные этапы алгоритма решения поставленной задачи.

Замечание: Пакет *Wolfram Mathematica* имеет очень богатую стандартную библиотеку функций, что довольно сильно облегчает работу. Для разработки процедур использовались стандартные средства сопоставления по образцу, подстановки в выражение (*Replace*), решения уравнений (*Solve*) и многие другие.

Листинги представленных процедур можно найти в приложении Б.

4.1. Основные процедуры

- *TransformSurface* — функция, применяющее аффинное преобразование в трехмерном комплексном пространстве к данному уравнению поверхности.
- *AdaptiveElimination* — функция, приводящая заданную матрицу к ступенчатому виду. Особенность этой процедуры в том, что, помимо матриц, на вход подается список переменных, которые считаются отличными от нуля и элементы, которые содержат в себе только эти переменные, могут стоять на главной диагонали матрицы. Эта процедура была необходима, потому что пакет *Wolfram Mathematica* не позволяет приводить матрицу к ступенчатому виду, принимая в расчет какие-либо предположения относительно переменных, кроме наиболее общих (комплексное, вещественное число и т.п.).
- *GetSystem* — Получает систему линейных уравнений на элементы

инфинитезимального преобразования для данной поверхности.

- `IntegrateIT` — Интегрирует инфинитезимальные преобразования для получения аффинных.

4.2. Вспомогательные процедуры

- `CreateTransform` — Создает матрицу произвольного аффинного преобразования, зависящего от параметра t .
- `PrintMatrix` — Распечатывает матрицу с нумерацией строк и столбцов.
- `MatrixReduceRow` —

4.3. Результаты тестирования

TODO

Заключение

TODO

Список литературы

- [1] Ли, Софус. Теория групп преобразований: в 3-х частях [Текст] / Софус Ли ; Под ред. А. В. Болсинова. — 1 изд. — [Б. м.] : Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. — Пер. с нем. Л. А. Фрая.
- [2] Miller, W. Symmetry Groups and Their Applications [Text] / W. Miller. Pure and Applied Mathematics. — [S. l.] : Elsevier Science, 1973. — ISBN: 9780080873657. — URL: <https://books.google.ru/books?id=rW7-eLDdVm0C>.
- [3] Isaev, A. On the symmetry algebras of 5-dimensional CR-manifolds [Electronic resource] / A. Isaev, B. Kruglikov // ArXiv e-prints. — 2016. — Jul. — 1607.06072.
- [4] Широков, П. А. Аффинная дифференциальная геометрия [Электронный ресурс] / П. А. Широков, А. П. Широков. — [S. l.] : Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1959. — URL: <https://books.google.ru/books?id=UNu0AAAAIAAJ>.
- [5] Cartan, E. Sur la structure des groupes de transformations finis et continus [Text] / E. Cartan. Thèses présentées a la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques. — [S. l.] : Nony, 1894. — URL: <https://books.google.ru/books?id=JY8LAAAAYAAJ>.
- [6] Лобода, А. В. Классификация аффинно-однородных невырожденных по Леви гиперповерхностей пространства \mathbb{C}^2 [Text] / А. В. Лобода // Современные проблемы математики и механики, М.: Изд-во МГУ. — 2011. — Vol. 6: Математика., Вып. 3: К 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова. — Р. 56–58.
- [7] Atanov, A. V. Affine homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces of the type $(1/2,0)$ in \mathbb{C}^3 [Text] / A. V. Atanov, A. V. Loboda, A. V. Shipovskaya // ArXiv e-prints. — 2014. — Jan. — 1401.2252.
- [8] Лобода, А. В. Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного

- пространства [Text] / А. В. Лобода, А. С. Ходарев // Изв. вузов. Матем. — 2003. — Vol. 47, no. 10. — P. 38–50.
- [9] Dillen, F.J.E. Handbook of Differential Geometry [Text] / F.J.E. Dillen, L.C.A. Verstraelen. — [S. 1.] : Elsevier Science, 1999. — Vol. 1.
- [10] Vrancken, Luc. Degenerate homogeneous affine surfaces in \mathbb{R}^3 [online] / Luc Vrancken // Geometriae Dedicata. — 1994. — Vol. 53, no. 3. — P. 333–351. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01264006>.
- [11] Данилов, М. С. Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности с индефинитной формой Леви [Text] / М. С. Данилов // Международная школа-семинар по геометрии и анализу. Тез. докл. — [S. 1.] : Абрау-Дюрсо, 2009. — P. 25–26.
- [12] Fels, G. Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5 [Electronic resource] / G. Fels, W. Kaup // ArXiv Mathematics e-prints. — 2006. — Oct. — math/0610375.
- [13] Кострикин, А. И. Часть I. Основы алгебры [Текст] / А. И. Кострикин. — 2 изд. — [Б. м.] : М.: Физико-математическая литература, 2000.

Приложение А

Используемые выражения

В данном приложении перечислены выражения, которые слишком велики для того, чтобы помещать их напрямую в текст.

А.1 Компоненты $T(\text{I})$, $T(\text{II})$ и $T(\text{III})$ в сужении на M

$$\left\{ \frac{d}{dt} T(\text{I}) \Big|_{t=0} \right\} \Big|_M = \frac{1}{x_2^2} \left[Q(x_1, y_1, x_2, y_2) \left(-ux_2\beta_{3,1} + 2\mu x_2^3\beta_{3,2} - x_2^2\beta_{2,1} - \right. \right. \\ \left. - x_1x_2\beta_{1,1} - x_2^2\gamma_{3,1} - x_2\sigma_{2,1} + 2\nu x_2y_2^2\beta_{3,2} + x_2y_1\beta_{1,2} + x_2y_2\beta_{2,2} \right) - \\ \left. - \beta_{3,2}Q(x_1, y_1, x_2, y_2)^2 + \mu ux_2^4\beta_{3,1} + ux_2^3\gamma_{3,2} + \nu ux_2^2y_2^2\beta_{3,1} - \mu^2x_2^6\beta_{3,2} + \mu x_2^5\beta_{2,1} + \right. \\ \left. + \mu x_1x_2^4\beta_{1,1} + \mu x_2^5\gamma_{3,1} + x_2^4\gamma_{2,2} + x_1x_2^3\gamma_{1,2} + \mu x_2^4\sigma_{2,1} + x_2^3\sigma_{3,2} - 2\mu\nu x_2^4y_2^2\beta_{3,2} - \mu x_2^4y_1\beta_{1,2} - \right. \\ \left. - \mu x_2^4y_2\beta_{2,2} - \nu^2x_2^2y_2^4\beta_{3,2} + \nu x_2^3y_2^2\beta_{2,1} + \nu x_1x_2^2y_2^2\beta_{1,1} - \nu x_2^2y_1y_2^2\beta_{1,2} - \nu x_2^2y_2^3\beta_{2,2} + \right. \\ \left. + \nu x_2^3y_2^2\gamma_{3,1} + x_2^3y_1\gamma_{1,1} + x_2^3y_2\gamma_{2,1} + \nu x_2^2y_2^2\sigma_{2,1} \right] \quad (\text{ПА.1})$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} T(\text{II}) \Big|_{t=0} \right\} \Big|_M = \text{TODO} \quad (\text{ПА.2})$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} T(\text{III}) \Big|_{t=0} \right\} \Big|_M = \frac{1}{x_2} \left[Q(x_1, y_1, x_2, y_2) \left(3\mu x_2^2\beta_{3,2} - 2\nu x_2y_2\beta_{3,1} + \nu y_2^2\beta_{3,2} \right) + \right. \\ \left. + 3\mu ux_2^3\beta_{3,1} + 2\nu ux_2^2y_2\beta_{3,2} + \nu ux_2y_2^2\beta_{3,1} - 3\mu^2x_2^5\beta_{3,2} + 3\mu x_2^4\beta_{2,1} + 3\mu x_1x_2^3\beta_{1,1} + \right. \\ \left. + 3\mu x_2^3\sigma_{2,1} + 2\mu\nu x_2^4y_2\beta_{3,1} - 4\mu\nu x_2^3y_2^2\beta_{3,2} - 3\mu x_2^3y_1\beta_{1,2} - 3\mu x_2^3y_2\beta_{2,2} + 2\nu^2x_2^2y_2^3\beta_{3,1} - \right. \\ \left. - \nu^2x_2y_2^4\beta_{3,2} + 2\nu x_2^3y_2\beta_{2,2} + 2\nu x_2^2y_1y_2\beta_{1,1} + 2\nu x_1x_2^2y_2\beta_{1,2} + 3\nu x_2^2y_2^2\beta_{2,1} + \right. \\ \left. + \nu x_1x_2y_2^2\beta_{1,1} - \nu x_2y_1y_2^2\beta_{1,2} - \nu x_2y_2^3\beta_{2,2} + 2\nu x_2^2y_2\sigma_{2,2} + \nu x_2y_2^2\sigma_{2,1} \right] \quad (\text{ПА.3})$$

Приложение Б

Листинг программы

В данном приложении представлен листинги процедур, реализующие этапы представленного в пункте 3 алгоритма решения задачи. Для написания программ использовался язык Wolfram Language.

```
(* Применяет аффинное преобразование к поверхности sruface *)
TransformSurface[surface_] :=
Module[{s = surface, st, tr = CreateTransform[]},
  st = s /. {Subscript[x, 1] -> ComplexExpand@Re@Subscript[Z, 1]
    @tr,
    Subscript[y, 1] -> ComplexExpand@Im@Subscript[Z, 1]@tr,
    Subscript[x, 2] -> ComplexExpand@Re@Subscript[Z, 2]@tr,
    Subscript[y, 2] -> ComplexExpand@Im@Subscript[Z, 2]@tr,
    u -> ComplexExpand@Re@W@tr, v -> ComplexExpand@Im@W@tr};
  Evaluate@st
]

(* Приводит матрицу к ступенчатому виду, принимая в расчет, что переменные
variables не являются нулевыми *)
AdaptiveElmination[matrix_, variables_] :=
Module[{m = matrix, perms = {}, dim = Dimensions@matrix,
  h = Dimensions@matrix[[1]], w = Dimensions@matrix[[2]],
  vars = Flatten@{variables}, pattern, pos, i},
  pattern = Except[0, _Integer | _?(Variables@# === vars &)];
  For[i = 1, i < Min[w, h], i++,
    pos = Flatten@Position[m[[i ;;, i ;;]], pattern, 2, 1];
    If[pos === {}, Break[], pos += {i - 1, i - 1}];
    m[[{i, pos[[1]]}]] = m[[{pos[[1]], i}]];
    m[[All, {i, pos[[2]]}]] = m[[All, {pos[[2]], i}]];
    m[[i + 1 ;;]] = Factor@MatrixReduceRow[m, i];
  ];
  m
];

(* Печатает матрицу с номерами столбцов и строк *)
PrintMatrix[matrix_] :=
Module[{m = matrix, dim = Dimensions@matrix},
  MatrixForm[m, TableHeadings -> {Range@dim[[1]], Range@dim
    [[2]]}]
]
```

```

(* Обнуляет столбец ниже элемента (row, row) в матрице *)
MatrixReduceRow[matrix_, row_] :=
Module[{m = matrix, r = row},
  m = # - #[[row]]*matrix[[row]]/matrix[[row, row]] & /@
    matrix[[row + 1 ;;]];
  m
]

(* Создает матрицу аффинного преобразования в C3 *)
CreateTransform[] :=
Module[{at},
  at = ({Subscript[A, 1], Subscript[A, 2], Subscript[A,
    3]}, {Subscript[B, 1], Subscript[B, 2], Subscript[B,
    3]}, {Subscript[C, 1], Subscript[C, 2], Subscript[C,
    3]})).
  ({Subscript[z, 1]}, {Subscript[z, 2]}, {w}) + ({Subscript
    [P,
    1]}, {Subscript[P, 2]}, {q});
  at = at /. transformSubstitutions;
  Expand@at
]

```


Приложение В

Схема матрицы в частном случае

[illegible]

Приложение Г

Схема матрицы в общем случае