МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет компьютерных наук

Кафедра цифровых технологий

Исследование симметрий алгебраических уравнений

ВКР *Бакалаврская работа*

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Распределенные системы и искусственный интеллект

Допущено к защите в ГЭК

Зав. кафедрой ______________ *С.Д. Кургалин, д. ф.-м. н., профессор* __.__.2017

Обучающийся ______________ *Е.Ю. Морозов, 4 курс, д/о*

Руководитель ______________ *А.В. Лобода, д. ф.-м. н., профессор*

Воронеж 2017

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет компьютерных наук
Кафедра цифровых технологий

УТВЕРЖДАЮ
заведующий кафедрой
_____________ Кургалин С. Д.,
подпись *расшифровка подписи*

ЗАДАНИЕ
НА ВЫПОЛНЕНИЕ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
ОБУЧАЮЩЕГОСЯ МОРОЗОВА ЕВГЕНИЯ ЮРЬЕВИЧА
фамилия, имя, отчество

1. Тема работы «Изучение симметрий алгебраических уравнений», утверждена решением ученого совета факультета компьютерных наук от ___.___.20___
2. Направление подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки.
шифр, наименование
3. Срок сдачи студентом законченной работы ___.___.20___
4. Календарный план:

№	Структура ВКР	Сроки выполнения	Примечание
1	Введение	03.09.2016	
2	Глава 1. Постановка задачи	10.09.2016	
3	Глава 2. Симметрии в трехмерном комплексном пространстве	12.10.2016	
4	Глава 3. Определение размерности групп аффинных преобразований	02.02.2017	
5	Глава 4. Компьютерные алгоритмы	15.02.2017	
6	Заключение	13.05.2017	
7	Список использованных источников	03.06.2017	

Обучающийся _____________ Морозов Е. Ю.
подпись *расшифровка подписи*

Руководитель _____________ Лобода А. В.
подпись *расшифровка подписи*

Реферат

Бакалаврская работа 46 с., 14 источников, 4 приложения.

АФФИННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, ГРУППЫ ЛИ, КОМПЛЕКСНОЕ ПРОСТРАНСТВО, ОДНОРОДНОЕ ПОДМНОГООБРАЗИЕ, ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, СИММЕТРИИ.

Объект исследования — вещественные гиперповерхности в пространстве $\mathbb{C}^3$

Цель работы — исследование симметрий одного из классов вещественных кубических гиперповерхностей в трехмерном комплексном пространстве.

Метод исследования и аппаратура — теория групп преобразований, многомерный комплексный анализ, теория алгоритмов, математический пакет символьных вычислений `Wolfram Mathematica`, персональный компьютер.

В настоящей работе было изучены размерности групп аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из данного семейства. В ходе исследования была разработана программа на языке `Wolfram Language` для решения поставленной задачи. Тестирование алгоритмов и проверка результатов были осуществлены с помощью пакета символьных вычислений `Wolfram Mathematica`.

Содержание

Введение

В данной работе рассматривается задача, связанная с описанием симметрий вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств.

Симметричные множества представляли интерес в математике со времен зарождения этой науки. Для подтверждения этого, достаточно вспомнить, что в геометрии Евклида важное место занимали правильные треугольники и четырехугольники (квадраты), а также окружности.

И квадрат, и окружность являются симметричными множествами. Однако, окружность «одинаково устроена» в каждой своей своей точке, в то время как квадрат имеет вершины и точки, которые не являются симметричными. Это свойство множества называется в современной математике однородностью и является обобщением более простого свойства точечной симметрии.

Помимо тел на плоскости, в ранней геометрии также изучались симметричные тела в трехмерном пространстве. Так, уже древним грекам были известны описания всех правильных многогранников — «платоновых тел» — тетраэдра, октаэдра, гексаэдра (куба), икосаэдра и додекаэдра. Также был известен тот факт, что список этих тел полон и что не существует, к примеру, правильного 115-гранника. Однако, строгое доказательство этого факта не является тривиальным и требует определенной математической сноровки. По аналогии с планиметрией, в стереометрии при рассмотрении платоновых тел сфера упоминается как «правильный многогранник с бесконечным числом граней», обладающий из-за этого бесконечным количеством симметрий. Сфера также является однородным объектом с многих «естественных» точек зрения.

Во второй половине XIX века различные симметрии математических объектов стали изучаться на качественно новом уровне строгости. Связано это было с изучением теории групп и, в частности, с развитием теории непрерывных групп. В связи с этим можно упомянуть работы Ф. Клейна, и, например его труд «Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени».

Непрерывные группы (преобразований) получили наибольшую завершенность в работах норвежского математика Софуса Ли, например, в его фундаментальном труде «Теория групп преобразований» [1]. Непрерывные группы преобразований в идеальной их форме получили название «группы Ли» и именно в терминах этих групп производятся современные исследования симметрий различных математических объектов.

Начиная с середины XX века, активно начинают исследоваться симметрии различных математических объектов. Тут следует упомянуть труд У. Миллера «Группы симметрий и их приложения», в котором кратко изложен математический аппарат для изучения симметрий с точки зрения непрерывных групп [2].

Из современных исследований, которые касаются симметрий алгебраических объектов следует выделить работы А. Исаева и Б. Кругликова, к примеру, «On the Symmetry Algebras of 5-dimensional CR-manifolds», в которой изучаются симметрии вещественных гиперповерхностей в трехмерном комплексном пространстве [3]. Этот труд очень близок по тематике к данной работе.

В современной математике представляет интерес задачи, связанные с поиском и описанием различных однородных объектов в вещественных и комплексных пространствах. Сходные по своей сути задачи ставились и решались математиками уже в конце XIX — начале XX веков. Однородные относительно аффинных преобразований поверхности 3-мерного вещественного пространства были описаны в середине XX-го века, и тогда же эти описания были включены в учебники по дифференциальной геометрии [4].

В 1932 г. Э. Картан построил полный список вещественных гиперповерхностей 2-мерных комплексных пространств, которые являются однородными относительно голоморфных преобразований [5]. Решение же более простой по постановке задачи описания аффинно-однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$ было получено А.В. Лободой сравнительно недавно [6].

Задачу описания свойства аффинной однородности можно рассматривать как часть большей проблемы, которая связана с изучением голоморфной однородности. Близость этих задач обусловлена тем, что в рамках второй задачи естественно выделяется класс аффинно-однородных объектов, которые являются однородными относительно голоморфных преобразований.

В настоящее время имеется большое число частных результатов об однородных многообразиях в пространстве $\mathbb{C}^3$ ([7], [8]). Однако, задача, в силу своей объемности и сложности, остается нерешенной.

В данной работе изучаются симметрии одного семейства кубических вещественных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$. Главной задачей является исследование групп аффинных преобразований, сохраняющих каждую поверхность из этого семейства и их размерностей.

Семейство поверхностей, рассматриваемое в данной задаче, является одним из объектов исследования в связи с указанной задачей об аффинной однородности вещественных многообразий в трехмерном комплексном пространстве. Интерес к кубическим поверхностям в задаче об однородности обусловлен тем, что среди них имеются примеры аффинно-однородных поверхностей. Так, например, в работе Иствуда и Ежова [9] приводится следующая аффинно-однородная поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$x_3 = x_1 x_2 + x_1^3,$$

а в работе [7] имеется пример аффинно-однородной кубической поверхности в $\mathbb{C}^3$:

$$v = \frac{x_1^2}{1 - x_2} + |z_2|^2, \ (x_2 \neq 1).$$

В первых главах этой работы производится постановка задачи на формальном уровне, а также вводятся основные понятия и методика, необходимая для решения поставленной задачи.

Основным результатом данной работы является оценка размерности группы аффинных преобразований, сохраняющих все поверхности из исследуемого семейства. Соответствующая теорема и её доказательство представлены в третьем разделе; в нём же присутствует детальный разбор одного из частных случаев поверхностей из этого семейства.

В главе четыре приведено описание отдельных элементов алгоритма по нахождению искомых размерностей групп преобразований. Процедуры были реализованы при помощи пакета символьной математики `Wolfram Mathematica`.

В приложениях можно найти некоторые выражения, которые слишком велики для отображения в тексте, но, тем не менее, представляют интерес. Также в приложение вынесен полный листинг программы на языке `Wolfram Language` и схемы матриц, возникающих в ходе решения поставленной задачи.

1 Постановка задачи

Рассмотрим семейство вещественных «квадро-кубических» гиперповерхностей в трехмерном комплексном пространстве:

$$vx_2 + Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = T(x_1, y_1, x_2, y_2) \tag{1.1}$$

где $x_1 = \Re(z_1)$, $y_1 = \Im(z_1)$, $x_2 = \Re(z_2)$, $y_2 = \Im(z_2)$, $u = \Re(w)$, $v = \Im(w)$ — компоненты координат в трехмерном комплексном пространстве, $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ — некоторая квадратичная, а $T(x_1, y_1, x_2, y_2)$ — некоторая кубическая формы. Под симметрией любой поверхности из данного класса будем понимать любое аффинное преобразование, сохраняющее эту поверхность. В то же время, симметрией определяющей функции поверхности будем называть преобразование, сохраняющее это уравнение с точностью до ненулевого множителя:

$$G(\Phi(z, \overline{z}, v)) \equiv \psi(z, \overline{z}, w, \overline{w}) \cdot \Phi(z, \overline{z}, v), \tag{1.2}$$

где G — некоторое аффинное преобразование, $\Phi(z, \overline{z}, v)$ — определяющая функция поверхности, а $\psi(z, \overline{z}, w, \overline{w})$ — ненулевая функция. Изучая симметрии в таком контексте, вполне естественно обсуждать группы аффинных преобразований, под действиями которых всякая поверхность из класса (1.1) сохраняется. Задача данной работы, в таком случае, заключается в изучении групп аффинных преобразований, сохраняющих конкретные поверхности из данного семейства, и размерностей таких групп.

Следует сразу отметить, что в классе (1.1) присутствуют частные случаи поверхностей, являющиеся тривиальными. Таковыми являются поверхности, в которых формы $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ и $T(x_1, y_1, x_2, y_2)$ делятся на x_2. Деление уравнения (1.1) на эту переменную понижает его степень и поверхность выходит из класса кубических. Такие случаи в данной работе рассматриваться не будут.

В задачах, связанных с однородностью, отдельно проверяется свойство невырожденности вещественно-аналитических поверхностей в смысле Леви. Для этого уравнение поверхности необходимо разрешить относительно одной из вещественных переменных, разложить получившуюся функцию в степенной ряд, и аффинными преобразованиями свести к виду

$$v = H(z, \overline{z}) + Q(z) + \overline{Q(z)} + \sum_{k \geq 3} F_k(z, \overline{z}, u), \tag{1.3}$$

где $H(z, \overline{z})$ — эрмитова, $Q(z)$ — квадратичная формы, $F_k(z, \overline{z}, u)$ — компонента однородности веса k. В таком случае, поверхность называется вырожденной по Леви, если эрмитова форма H является вырожденной.

Заметим, что можно изучать поставленную задачу с точностью до аффинных преобразований исходных объектов. На размерности и некоторые другие свойства групп это не повлияет.

Как будет видно далее, задача в наиболее общей постановке (1.1) является довольно сложной. Поэтому, в данной работе изучается более узкий класс поверхностей из данного семейства:

$$vx_2 + Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \tag{1.4}$$

где μ, ν — вещественные параметры, одновременно не равные нулю. Такая постановка задачи возникла в связи с тем, что в данном классе уже имеются примеры однородных поверхностей [7]:

$$v = \frac{x_1^2}{1 - x_2} + |z_2|^2, \ (x_2 \neq 1). \tag{1.5}$$

Однако, данный класс поверхностей не изучался целенаправленно и, поэтому, не изучен полностью.

В современной науке сформировалось несколько подходов к изучению симметрий поверхностей — геометрический, аналитический и алгебраический. Первый подход изучает симметрии поверхностей с помощью дифференциальной геометрии и изучения различных инвариантных структур на многообразиях. Яркими примерами работ в этом направлении являются книги геометров бельгийской дифференциально-геометрической школы Ф. Диллена и Л. Вранкена (см. [10], [11]). К сожалению, этот метод, хотя и является естественным, не дал весомых результатов (к примеру, задача построения полного списка однородных поверхностей пространства $\mathbb{R}^3$ так и не была решена).

Второй подход связан с построением канонических (относительно за-данного класса преобразований) уравнений и был предложен А. В. Лободой. Вопросы существования и построения нормальных форм для невырожденных по Леви вещественных многообразий рассматриваются в работах [8] и [12]. Следует заметить, что именно этот метод позволил существенно продвинуться в классификации однородных многообразий.

В данной работе используется третий (алгебраический) метод, основанный на изучении симметрий исходных объектов с помощью групп Ли и инфинитезимальных преобразований. Подробное описание метода определения размерности групп преобразований, сохраняющих поверхности из изучаемого класса, представлено во втором разделе данной работы.

2 Симметрии в трехмерном комплексном пространстве

2.1 Группы Ли аффинных преобразований в $\mathbb{C}^3$

Группой Ли называется топологическая группа, если она является параметрической и если функция, задающая закон умножения, является вещественно-аналитичной. Иными словами, зависимость отдельных преобразований от параметров в группе описывается аналитичной функцией.

Действие произвольной подгруппы Ли группы аффинных преобразований пространства $\mathbb{C}^3$ в координатах этого пространства можно задать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \\ w^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(\mathbf{t}) & A_2(\mathbf{t}) & A_3(\mathbf{t}) \\ B_1(\mathbf{t}) & B_2(\mathbf{t}) & B_3(\mathbf{t}) \\ C_1(\mathbf{t}) & C_2(\mathbf{t}) & C_3(\mathbf{t}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1(\mathbf{t}) \\ P_2(\mathbf{t}) \\ q(\mathbf{t}) \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где

$$\begin{pmatrix} A_1(\mathbf{t}) & A_2(\mathbf{t}) & A_3(\mathbf{t}) \\ B_1(\mathbf{t}) & B_2(\mathbf{t}) & B_3(\mathbf{t}) \\ C_1(\mathbf{t}) & C_2(\mathbf{t}) & C_3(\mathbf{t}) \end{pmatrix}$$

— вращательная, а

$$\begin{pmatrix} P_1(\mathbf{t}) \\ P_2(\mathbf{t}) \\ q(\mathbf{t}) \end{pmatrix}$$

— сдвиговая компонеты отдельного преобразования из данной группы, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ — вещественные параметры группы, n — размерность группы.

Исследуя группы Ли преобразований больших размерностей, естественно представлять многопараметрическую группу как совокупность независимых однопараметрических групп преобразований. В таком случае, обозначим через F_t однопараметрическую группу Ли аффинных преобразований, сохраняющих эту поверхность. Она содержит, в частности, тождественное преобразование, и удобно считать, что оно к $t = 0$, т.е. $F_0 = \mathrm{Id}$. Как следует из (2.1), уравнения, определяющие эту группу, будут иметь вид:

$$\begin{cases} z_1 &= A_1(t)z_1^* + A_2(t)z_2^* + A_3(t)w^* + P_1(t) \\ z_1 &= B_1(t)z_1^* + B_2(t)z_2^* + B_3(t)w^* + P_2(t) \\ w &= C_1(t)z_1^* + C_2(t)z_2^* + C_3(t)w^* + q(t) \end{cases}, \qquad (2.2)$$

где $A_i(t), B_i(t), C_i(t), P_i(t)$ и $q(t)$ — некоторые аналитические комплексные функции от вещественного аргумента. При переходе от

$$\begin{cases} x_1 &= l_1(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) \\ y_1 &= l_2(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) \\ x_2 &= l_3(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) \\ y_2 &= l_4(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) \\ u &= l_5(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) \\ v &= l_6(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) \end{cases}, \qquad (2.3)$$

где $l_i(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*)$ — линейная форма. Явный вид этих форм не приводится, так как его легко получить из выражения (2.2).

2.2 Инфинитезимальные преобразования

Важную роль в теории непрерывных групп (Ли) играют инфинитезимальные преобразования. Согласно Софусу Ли: «Инфинитезимальным преобразованием называется преобразование из однопараметрической группы F_t, параметр которого имеет бесконечно малое значение». Иными словами, компонентами этого преобразования являются производные уравнений группы F_t в точке $t = 0$:

$$\begin{cases} \zeta_1 &= A_1'(0)z_1^* + A_2'(0)z_2^* + A_3'(0)w^* + P_1'(0) \\ \zeta_2 &= B_1'(0)z_1^* + B_2'(0)z_2^* + B_3'(0)w^* + P_2'(0) \\ \zeta_3 &= C_1'(0)z_1^* + C_2'(0)z_2^* + C_3'(0)w^* + q'(0) \end{cases}$$

Удобно записывать коэффициенты этого преобразования в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + i \cdot \alpha_{1,2} & \alpha_{2,1} + i \cdot \alpha_{2,2} & \alpha_{3,1} + i \cdot \alpha_{3,2} & \sigma_{1,1} + i \cdot \sigma_{1,2} \\ \beta_{1,1} + i \cdot \beta_{1,2} & \beta_{2,1} + i \cdot \beta_{2,2} & \beta_{3,1} + i \cdot \beta_{3,2} & \sigma_{2,1} + i \cdot \sigma_{2,2} \\ \gamma_{1,1} + i \cdot \gamma_{1,2} & \gamma_{2,1} + i \cdot \gamma_{2,2} & \gamma_{3,1} + i \cdot \gamma_{3,2} & \sigma_{3,1} + i \cdot \sigma_{3,2} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где $\alpha_{i,1} = \Re\{A_i'(0)\}$, $\alpha_{i,2} = \Im\{A_i'(0)\}$, $\beta_{i,1} = \Re\{B_i'(0)\}$, $\beta_{i,2} = \Im\{B_i'(0)\}$, $\gamma_{i,1} = \Re\{C_i'(0)\}$, $\gamma_{i,2} = \Im\{C_i'(0)\}$, $\sigma_{i,1} = \Re\{P_i'(0)\}$, $\sigma_{i,2} = \Im\{P_i'(0)\}$, $\sigma_{3,1} = \Re\{q'(0)\}$, $\sigma_{3,2} = \Im\{q'(0)\}$ — вещественные и мнимые компоненты производных функций из (2.2) в точке $t = 0$.

Инфинитезимальное преобразование ставит в соответствие каждой точке p некоторой поверхности M из $\mathbb{C}^3$ вектор, касательный к p. Иными словами, оно показывает направление движения точки p в результате действия группы F_t для бесконечно малых значений параметра t [1].

Замечание: в современной терминологии переход к инфинитезимальным преобразованиям поверхности означает рассмотрение векторных полей, касательных многообразию, соответствующих группе F_t.

Далее потребуются теорема из теории групп преобразований Ли. Она будет приведена без доказательства.

Теорема (см [1], с. 82). *Если r инфинитезимальных преобразований являются независимыми друг от друга, а $t_1, \ldots, t_r$ — произвольные параметры, то совокупность всех однопараметрических групп, порождаемых этими преобразованиями, образует семейство преобразований, в котором все r параметров $t_1, \ldots, t_r$ являются существенными.*

Таким образом, число независимых инфинитезимальных преобразований равно размерности порождаемой ими группы Ли.

Получение однопараметрических групп достигается интегрированием порождающего её инфинитезимального преобразования. В нашем случае, это означает вычисление матричной экспоненты от произведения матрицы инфинитезимального преобразования (2.4), дополненной нулевой строкой до квадратной и умноженной и вещественного параметра t:

$$F_t = \exp(Z \cdot t)$$

Подробнее о процедуре интегрирования наборов независимых инфинитезимальных преобразований (или, что то же самое, алгебр векторных полей) написано в работах [8], [13].

2.3 Системы полиномиальных уравнений

В ходе решения поставленной задачи возникают системы полиномиальных уравнений. Выкладки далее показывают происхождение этих систем.

Пусть дана некоторая вещественная гиперповерхность M из семейства (1.4) с определяющей функцией

$$\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2, v) = vx_2 + Q(x_1, y_1, x_2, y_2) - x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$

Пусть также F_t — однопараметрическая группа аффинных преобразований в $\mathbb{C}^3$, $F_0 = \mathrm{Id}$. Под действием группы F_t определяющая функция примет следующий вид:

$$F_t(\Phi) = l_1(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*)\cdot l_6(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) + \tilde{Q}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*) - \\ - l_3(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*)\cdot\left[\mu \cdot l_4(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*)^2 + \nu \cdot l_4(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*)^2\right],$$

где $\tilde{Q}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, u^*, v^*)$ — новая квадратичная форма, полученная после действия группы. Далее в работе символ * при координатах будет опущен для компактности. Введём следующие обозначения:

$$F_t(\Phi) = T(\mathrm{I}) + T(\mathrm{II}) - T(\mathrm{III}),$$

где

$$\begin{aligned} T(\mathrm{I}) = \;& (x_1c_{1,2} + y_1c_{1,1} + x_2c_{2,2} + y_2c_{2,1} + uc_{3,2} + vc_{3,1} + q_2)\times \\ & \times(x_1b_{1,1} - y_1b_{1,2} + x_2b_{2,1} - y_2b_{2,2} + ub_{3,1} - vb_{3,2} + p_{2,1}), \\ T(\mathrm{II}) = \;& \tilde{Q}(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v), \\ T(\mathrm{III}) = \;& (x_1b_{1,1} - y_1b_{1,2} + x_2b_{2,1} - y_2b_{2,2} + ub_{3,1} - vb_{3,2} + p_{2,1})\times \\ & \times\Big[\mu\,(x_1b_{1,1} - y_1b_{1,2} + x_2b_{2,1} - y_2b_{2,2} + ub_{3,1} - vb_{3,2} + p_{2,1})^2 + \\ & + \nu\,(x_1b_{1,2} + y_1b_{1,1} + x_2b_{2,2} + y_2b_{2,1} + ub_{3,2} + vb_{3,1} + p_{2,2})^2\Big], \end{aligned}$$

а $a_{i,1} = \Re\{A_i(t)\}$, $a_{i,2} = \Im\{A_i(t)\}$, $b_{i,1} = \Re\{B_i(t)\}$, $b_{i,2} = \Im\{B_i(t)\}$, $c_{i,1} = \Re\{C_i(t)\}$, $c_{i,2} = \Im\{C_i(t)\}$, $p_{i,1} = \Re\{P_i(t)\}$, $p_{i,2} = \Im\{P_i(t)\}$, $q_1 = \Re\{q(t)\}$ и $q_2 =$

$\Im\{q(t)\}$ — вещественные функции от аргумента t (опущен для компактности записи).

Из (1.2) следует, что факт сохранения определяющей функции Φ поверхности M из класса (1.4) будет описываться следующим уравнением:

$$F_t\left(\Phi(z,\overline{z},v)\right) \equiv \psi(z,\overline{z},w,\overline{w},t)\cdot\Phi(z,\overline{z},v). \tag{2.5}$$

Для того, чтобы перейти от аффинных преобразований к инфинитезимальным, продифференцируем выражение (2.5) по параметру t в точке $t=0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_t\left(\Phi(z,\overline{z},v)\right)\Big|_{t=0} \equiv \Phi(z,\overline{z},v)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(z,\overline{z},w,\overline{w},t)\Big|_{t=0} \tag{2.6}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(\mathrm{I})\Big|_{t=0} &= (x_1\gamma_{1,2}+y_1\gamma_{1,1}+x_2\gamma_{2,2}+y_2\gamma_{2,1}+u\gamma_{3,2}+v\gamma_{3,1}+\sigma_{3,2})\,x_2+\\
&\quad+v\,(x_1\beta_{1,1}-y_1\beta_{1,2}+x_2\beta_{2,1}-y_2\beta_{2,2}+u\beta_{3,1}-v\beta_{3,2}+\sigma_{2,1}),\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(\mathrm{II})\Big|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{Q}(x_1,y_1,x_2,y_2,u,v)\Big|_{t=0} = \tilde{Q}'(x_1,y_1,x_2,y_2,u,v),\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(\mathrm{III})\Big|_{t=0} &= \left(\mu x_2^2+\nu y_2^2\right)\times\\
&\quad\times(\sigma_{2,1}+u\beta_{3,1}-v\beta_{3,2}+x_1\beta_{1,1}+x_2\beta_{2,1}-y_1\beta_{1,2}-y_2\beta_{2,2})+x_2\times\\
&\quad\times\left[2\mu x_2\,(\sigma_{2,1}+u\beta_{3,1}-v\beta_{3,2}+x_1\beta_{1,1}+x_2\beta_{2,1}-y_1\beta_{1,2}-y_2\beta_{2,2})+\right.\\
&\quad\left.+\,2\nu y_2\,(\sigma_{2,2}+u\beta_{3,2}+v\beta_{3,1}+x_1\beta_{1,2}+x_2\beta_{2,2}+y_1\beta_{1,1}+y_2\beta_{2,1})\right],
\end{aligned}$$

Заметим, что левая часть выражения (2.6) является действием инфинитезимального преобразования, порождающего группу F_t, на поверхность M. Для того, чтобы найти это преобразование, необходимо произвести сужение выражения (2.6) на эту поверхность. Для этого выразим переменную v из выражения (1.4):

$$v = -\frac{Q(x_1,y_1,x_2,y_2)}{x_2}+\mu x_2^2+\nu y_2^2. \tag{2.7}$$

Так как сужение определяющей функции поверхности на саму поверхность дает ноль, справедливо следующее тождество:

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_t\left(\Phi(z,\overline{z},v)\right)\Big|_{t=0}\right\}\Big|_M \equiv 0 \tag{2.8}$$

В результате данной подстановки возникает рациональная функция, общий вид которой, вообще говоря, зависит от квадратичной формы Q. Проиллюстрируем данный факт на примере компоненты $T(\mathrm{I})$:

$$\left.\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(\mathrm{I})\bigg|_{t=0}\right\}\right|_M = \left(-\frac{Q\left(x_1, y_1, x_2, y_2\right)}{x_2} + \mu x_2^2 + \nu y_2^2\right)\times$$
$$\times\left(\sigma_{2,1} + u\beta_{3,1} + x_1\beta_{1,1} + x_2\beta_{2,1} + x_2\gamma_{3,1} - y_1\beta_{1,2} - y_2\beta_{2,2}\right) -$$
$$-\beta_{3,2}\left(-\frac{Q\left(x_1, y_1, x_2, y_2\right)}{x_2} + \mu x_2^2 + \nu y_2^2\right)^2 +$$
$$+ u x_2\gamma_{3,2} + x_2^2\gamma_{2,2} + x_1 x_2\gamma_{1,2} + x_2\sigma_{3,2} + x_2 y_1\gamma_{1,1} + x_2 y_2\gamma_{2,1} \quad (2.9)$$

Замечание: другие компоненты из-за своей громоздкости вынесены в приложение 1 (см. формулы (ПА.1) – (ПА.3)) .

Отсюда видно, что общий знаменатель выражения (2.8) равен x_2^2. Умножая выражение (2.8) на него, получаем полиномиальное уравнение шестой степени:

$$S(x_1, y_1, x_2, y_2, u) = \mathrm{ST(I)} + \mathrm{ST(II)} + \mathrm{ST(III)} \equiv 0,$$

где

$$\mathrm{ST(I)} = x_2^2\cdot\left.\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(\mathrm{I})\bigg|_{t=0}\right\}\right|_M,\ \mathrm{ST(II)} = x_2\cdot\left.\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(\mathrm{II})\bigg|_{t=0}\right\}\right|_M,$$
$$\mathrm{ST(III)} = -x_2\cdot\left.\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(\mathrm{III})\bigg|_{t=0}\right\}\right|_M.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, становится видно, что коэффициентами при мономах в полиноме S являются линейные комбинации элементов инфинитезимального преобразования, порождающего группу преобразований F_t. Известно, что тождественное равенство нулю полинома означает равенство нулю всех коэффициентов при его одночленах. В таком случае, возникает система однородных уравнений, линейных относительно элементов инфинитезимального преобразования.

Каждое решение полученной системы уравнений есть инфинитезимальное преобразование. Таким образом, размерность пространства решений данной системы равно количеству независимых инфинитезимальных преобразований. Из теоремы, сформулированной ранее, следует, что размерность подгруппы группы аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из исследуемого класса равна числу независимых инфинитезимальных преобразований, а значит и размерности пространства решений полученной однородной системы линейных уравнений.

Как известно, размерность пространства решений однородной системы уравнений равна $n - r$, где n — число неизвестных в системе, а r — ранг основной матрицы системы [14]. Таким образом, задача определения размерности группы аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из семейства (1.4), сводится к определению ранга основной матрицы полученной системы уравнений, а размерность группы будет равна

$$\dim G = 24 - \operatorname{rank} W, \tag{2.10}$$

где W — основная матрица системы.

Замечание: особый интерес представляют поверхности, которым соответствуют пятимерные группы аффинных преобразований, представляют особый интерес, например, потому, что эти поверхности могут являться однородными. Напомним, что поверхность называется однородной относительно некоторой группы, если эта группы транзитивно действует на ней. Поверхность называется аффинно-однородной относительно группы аффинных преобразований, если под действием преобразований из этой группы можно сдвигаться в любом направлении вдоль этой поверхности.

Несмотря на то, что рассматриваются системы линейных уравнений, коэффициентами при уравнениях выступают многочлены от коэффициентов квадратичной формы $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ и параметров μ и ν. Как будет видно далее, при изучении ранга матрицы приходится иметь дело с одновременным рассмотрением различных полиномиальных уравнений, то есть систем полиномиальных уравнений.

3 Определение размерности групп аффинных преобразований

В данном разделе будет описана процедура определения размерностей групп аффинных преобразований для семейства поверхностей (1.4).

3.1 Общая схема

Основываясь на сведениях из раздела 2, можно сформулировать следующий алгоритм для нахождения размерности групп аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из семейства (1.4):

1. Применить аффинное преобразование (2.1) к уравнению поверхности

2. Продифференцировать полученное выражение по параметру группы t в точке $t = 0$.

3. Разрешить уравнение поверхности относительно переменной v и подставить в выражение и предыдущего шага и умножить на возникающий общий знаменатель (x_2^2).

4. Составить однородную систему линейных относительно элементов инфинитезимального преобразования уравнений и выписать матрицу этой системы.

5. Размерность группы Ли аффинных преобразований G, сохраняющих поверхность из исследуемого семейства, равна $\dim G = 24 - \operatorname{rank} W$, где W — полученная матрица системы.

3.2 Частный случай семейства

В связи со сложностью рассмотрения общего случая, был рассмотрен частный случай семейства поверхностей (1.4), в котором квадратичная форма Q не зависит от переменных x_2 и y_2. В таком случае, семейство может быть описано следующим образом:

$$vx_2 = k_1x_1^2 + k_2x_1y_1 + k_3x_2^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \tag{3.1}$$

где k_1, k_2, k_3 — вещественные параметры.

Следует заметить, что за счёт применения невырожденных аффинных преобразований, можно фактически сократить число параметров k_1, k_2 и k_3 до одного:

Применим описанный метод для этого класса поверхностей.

1. Применим аффинное преобразование к определяющей функции поверхности из семейства (3.1):

$$
\begin{gathered}
F_t(\Phi) = l_6(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) \cdot l_3(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + k_1 l_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v)^2 + \\
+ k_2 l_1(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) \cdot l_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + k_3 l_2(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v)^2 - \\
- l_3(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) \left[\mu l_3(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v)^2 + \nu l_4(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v)^2\right]
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

2. Производная (3.2) по t в точке $t = 0$:

$$
\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_t\left(\Phi\right)\bigg|_{t=0} = v l_3'(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + x_2 l_6'(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + \\
+ 2k_1 x_1 l_1'(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + k_2 y_1 l_2'(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + \\
+ k_2 x_1 l_2'(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + 2k_3 y_1 l_2'(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) - \left(\mu x_2^2 + \nu y_2^2\right) \times \\
\times l_3'(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) - x_2 \left[2\mu x_2 l_3'(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v) + \right. \\
\left. + 2\nu y_2 l_4'(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v)\right]
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

3. Разрешим уравнение (3.1) относительно v:

$$
v = \frac{k_1 x_1^2 + k_2 x_1 y_1 + k_3 x_2^2}{x_2} + \mu x_2^2 + \nu y_2^2
$$

и подставим его в (3.3), умножая на x_2^2. В данном многочлене имеется 57 мономов и 101 слагаемое. Приведем подобные и выпишем по одному примеру одночленов для каждой из степеней:

$$
\begin{aligned}
&\text{степень } 6: \ x_1 x_2^2 y_2 \left(k_2 \alpha_{2,1} - 2k_1 \alpha_{2,2}\right) \\
&\text{степень } 5: \ x_1 x_2^4 \left(-2\mu\beta_{1,1} + k_2 \mu \alpha_{3,1} - 2k_1 \mu \alpha_{3,2}\right) \\
&\text{степень } 4: \ x_1 x_2 y_1^2 \left(k_2^2 \alpha_{3,2} - 3k_3 k_2 \alpha_{3,1} + 2k_1 k_3 \alpha_{3,2} + k_2 \beta_{1,2} - k_3 \beta_{1,1}\right) \\
&\text{степень } 3: \ x_2^3 \sigma_{3,2}
\end{aligned}
$$

Видно, что есть как довольно простые (степень 3), так и довольно сложные (степень 4) коэффициенты при одночленах.

4. Составим однородную систему линейных уравнений на основе многочлена, полученного в предыдущем пункт. Получается система из 57 уравнений относительно 24 неизвестных. Схему основной матрицы этой системы можно посмотреть в приложении B.

   В качестве примеров, приведем некоторые уравнения из этой системы:

$$
\begin{aligned}
k_2^2\left(-\alpha_{3,1}\right)+3k_1k_2\alpha_{3,2}-2k_1k_3\alpha_{3,1}-k_2\beta_{1,1}+k_1\beta_{1,2}&=0\\
2k_2\alpha_{1,1}-2k_1\alpha_{1,2}+2k_3\alpha_{1,2}-k_2\beta_{2,1}-k_2\gamma_{3,1}&=0\\
-2\mu\beta_{1,1}+k_2\mu\alpha_{3,1}-2k_1\mu\alpha_{3,2}&=0\\
\left(k_2^2+2k_1k_3\right)\beta_{3,2}&=0\\
k_2\alpha_{2,1}-2k_1\alpha_{2,2}&=0\\
\gamma_{3,2}&=0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

5. Для изучения ранга этой матрицы, приведем её элементарными преобразованиями к ступенчатому виду.

Предположим, что $k_1 \neq 0$. В таком случае, мы можем сделать замену переменных $z_1^* = z_1/\sqrt{k}_1$, и замену параметров $k_2^* = k_2/k_1$, $k_3^* = k_3/k_1$, чтобы избавиться от параметра k_1 в уравнении поверхности, а значит, и в системе уравнений. Теперь мы можем привести матрицу системы W к следующему квазитреугольному виду:

$$
W \sim \begin{pmatrix} A & N \\ 0 & B \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

где матрица A — диагональная матрица размерами 14×14, $N \in \mathbb{R}^{14\times 10}$, $B \in \mathbb{R}^{15\times 10}$ и имеет вид (символы * при параметрах k_2 и k_3 опущены):

$$
\begin{pmatrix}
0 & -\nu\left(k_2^2-4k_3\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu k_2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & k_2^2-2k_3+2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(k_2^2+4\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_2}{2}\\
0 & -\frac{1}{2}\left(k_2^2+4\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_2}{2} & 0 & 0 & 0\\
4\mu & 0 & 3\mu & 2\mu k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{3}{2}\mu\left(k_2^2-4k_3\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\mu k_2}{2} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\nu & 0 & 0 & 0\\
4\nu & 0 & 3\nu & 2\nu k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\mu & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & k_2\left(k_3+1\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{2}\nu\left(k_2^2-4k_3\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu k_2}{2} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & k_2\left(k_3+1\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_3\\
0 & -k_2\left(k_3+1\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(k_2^2-4k_3\right) & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}. \tag{3.5}
$$

Очевидно, что $\operatorname{rank} W = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$. Так как матрица A является диагональной, то $\operatorname{rank} W = 14 + \operatorname{rank} B$. В таком случае, найдем ранг матрицы B, приведя её к ступенчатому виду.

Из (3.5) видно, что в матрице B существуют независимые столбцы с заведомо ненулевыми элементами. Это, во-первых, столбцы 2 и 5 с элементами вида k_2^2+4, и, во-вторых, столбцы 7 и 1 (или 3) с элементами μ и ν. Таким образом, ранг матрицы B не меньше четыркх. Пусть далее $\mu \neq 0$ (случай $\nu \neq 0$ рассматривается по аналогии).

Далее, придется рассмотреть два случая — когда $k_2 = 0$ и $k_2 \neq 0$. В первом случае, матрица B приводится к виду

$$
\begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 3\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\mu\\
0 & 0 & 0 & -3\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -2k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\left(k_3-1\right) & 0 & 0 & 0\\
 & & & & & \dots & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Очевидно, что ранг матрицы B будет равен 5 при $k_3 = 0$, 6 при $k_3 = 1$ и 7 в ином случае. Таким образом, ранг матрицы W будет равен 19, 20 и 21 соответственно, а размерность соответствующей группы преобразований, как видно из (2.10), равна 5, 4 и 3.

В случае, когда $k_2 \neq 0$, матрица B приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{2}\left(k_2^2+4\right) & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2}\left(-k_2^2-4\right) & 0 & \frac{k_2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3\mu & 0 & 0 & 0 & 2\mu k_2 & 0 & 0 & 4\mu \\
0 & 0 & 0 & -3\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_2^2-4k_3}{k_2^2+4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(k_2^2-4k_3\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2\left(k_3+1\right) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2^2-2k_3+2 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & \ldots & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что ранг матрицы B равен 5 при $k_2 = 2\sqrt{k_3},\ k_3 > 0$ и 7 в иных случаях, что означает размерности 5 и 3 у групп аффинных преобразований, сохраняющих соответствующие поверхности.

Производя аналогичные рассуждения для случая $k_1 = 0$, получаем следующую классификацию поверхностей по размерностях групп преобразований, сохраняющих эти поверхности:

- $\dim G = 5$ соответствуют поверхности

$$\nu x_2 = x_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \tag{3.6}$$

$$\nu x_2 = y_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), \tag{3.7}$$

$$\nu x_2 = (x_1 + y_1\sqrt{k_3})^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2),\ (k_3 > 0); \tag{3.8}$$

- $\dim G = 4$ соответствуют поверхности

$$\nu x_2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2); \tag{3.9}$$

- $\dim G = 3$ соответствуют поверхности

$$vx_2 = x_1y_1 + k_3y_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2), (k_3 \neq 0) \tag{3.10}$$

$$vx_2 = x_1^2 + k_2x_1y_1 + k_3y_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2),\ (k_2 \neq 2\sqrt{k_3}, k_3 \neq 1), \tag{3.11}$$

Проанализируем полученные поверхности.

Заметим, что поверхности (3.6) – (3.8) являются аффинно- эквивалентными. Действительно, произведя замену переменных $z_1 = -i/(\sqrt{k_3} + i)z_1^*$ в уравнении (3.8) и $z_1 = -iz_1^*$ в уравнении (3.7), получаем уравнение поверхности (3.6).

Также отметим, что поверхность (3.10) является частным случаем поверхности (3.11) с точностью до аффинного преобразования.

Исходя их этих соображений, можно сформулировать следующую теорему:

***Теорема* 1.** *размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность вида (3.1), удовлетворяет неравенствам* $3 \le \dim G \le 5$, *причем*

- $\dim G$ = *3 достигается на поверхностях вида*

$$vx_2 = x_1^2 + Ax_1y_1 + By_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2),\ (A \neq 2\sqrt{B}, B \neq 1); \tag{3.12}$$

- $\dim G$ = *4 достигается на поверхностях вида*

$$vx_2 = |z_1|^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2); \tag{3.13}$$

- $\dim G$ = *5 достигается на аффинно-однородных поверхностях следующего вида*

$$vx_2 = x_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2). \tag{3.14}$$

Рассмотрим движения, которые сохраняют классы поверхностей, перечисленных в теореме 1. Для этого решим возникающие системы уравнений для каждого из случаев, чтобы получить инфинитезимальные преобразования, порождающие однопараметрические группы аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из обозначенных случаев.

Для каждой поверхности из класса (3.1) существуют три «основных» движения, сохраняющие эти поверхности. Инфинитезимальные преобразования, порождающие группу движений, имеют следующий вид:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2\nu & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим соответствующие аффинные преобразования:

- *сдвиг* по переменной u (E_1). В данном случае получается следующая замена переменных: $z_1 = z_1^*$, $z_2 = z_2^*$, $w = w + i \cdot t$. Сохранение поверхности очевидно, так как она не зависит от переменной u;

- *масштабирование* (E_2). Преобразование имеет вид: $z_1 = e^{3t} z_1^*$, $z_2 = e^{2t} z_2^*$, $w = e^{4t} w^*$. Убедимся, что поверхность действительно сохраняется:

  $$v^* x_2^* \cdot e^{6t} = e^{6t} \cdot \left[k_1 (x_1^*)^2 + k_2 x_1^* y_1^* + k_3 (y_1^*)^2 \right] + e^{6t} \cdot x_2^* \cdot \left[\mu (x_2^*)^2 + \nu (y_2^*)^2 \right]$$

  Множитель e^{6t} является общим для обеих частей уравнения. После деления на него, получается исходная поверхность (3.1);

- *поворот со сдвигом («скользящий поворот»)* (E_3). Замена переменных: $z_1 = z_1^*$, $z_2 = z_2^* + i \cdot t$, $w = w^* + 2t\nu z_2^* + i \cdot t^2 \nu$. Применим данное преобразование к произвольной поверхности (3.1):

  $$\left(v^* + t^2 \nu + 2t\nu y_2 \right) x_2^* = k_1 (x_1^*)^2 + k_2 x_1^* y_1^* + k_3 (y_1^*)^2 + x_2^* \left[\mu (x_2^*)^2 + \nu \left(y_2^* + it \right)^2 \right]$$

  Перегруппируем слагаемые следующим образом:

  $$\begin{aligned} \left(v^* x_2^* \right) + \nu t^2 x_2 + 2\nu t x_2 y_2 = k_1 (x_1^*)^2 + k_2 x_1^* y_1^* + k_3 (y_1^*)^2 + \\ + x_2^* \left[\mu (x_2^*)^2 + \nu \left(y_2^* \right)^2 \right] + \nu t^2 x_2 + 2\nu t x_2 y_2. \end{aligned}$$

Видно, что член $vt^2x_2+2vtx_2y_2$ присутствует в обеих частях уравнения и может быть сокращен, после чего получается исходное уравнение.

Для поверхностей типа (3.13) добавляется еще один вид движений — повороты в плоскости z_1. Соответствующее инфинитезимальное преобразование и порождаемое аффинное преобразование:

$$E_4 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} \cdot z_1^* \\ z_2^* \\ w^* \end{pmatrix}.$$

Факт сохранения поверхности этим преобразованием довольно очевиден: так как $|e^{it}| = 1$, уравнение поверхности (3.13) останется неизменным.

Поверхности (3.14), в дополнение к трем основным, имеют еще два типа движений, которым соответствуют следующие инфинитезимальные преобразования:

$$E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Порождаемые аффинные преобразования:

- *сдвиг* по переменной y_1. Замена переменных — $z_1 = z_1^*+it$, $z_2 = z_2^*$, $w = w^*$. Факт сохранения поверхности этим преобразованием очевиден, так как уравнение поверхности (3.14) не зависит от переменной y_1.

- *поворот*:
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^* + t \cdot z_2^* \\ z_2^* \\ 2itz_1^* + it^2 z_2^* + w^* \end{pmatrix}.$$

  Проверим сохранение поверхности (3.14) этим преобразованием:

$$\left(t^2x_2^* + 2tx_1^* + v^*\right) x_2^* = \left(x_1^* + tx_2^*\right)^2 + x_2^* \left[\mu(x_2^*)^2 + \nu(y_2^*)^2\right]$$

  Раскрывая скобки и перегруппировывая слагаемые:

$$v^*x_2^*+2t^2(x_2^*)^2+2tx_1^*x_2^* = (x_1^*)^2+x_2^* \left[\mu(x_2^*)^2 + \nu(y_2^*)^2\right]+2t^2(x_2^*)^2+2tx_1^*x_2^*$$

Слагаемое $2t^2(x_2^*)^2 + 2tx_1^*x_2^*$, которое присутствует в обеих частях, может быть сокращено. В таком случае, получается уравнение (3.14).

В рамках данной работы было также произведено расширение класса аффинно-однородных поверхностей (1.5) за счет расширения кубической формы в правой части:

Теорема 2. *для тройки коэффициентов μ, ν, λ, одновременно не равных нулю, поверхность*

$$\nu x_2 = x_1^2 + x_2(\mu x_2^2 + \lambda x_2 y_2 + \nu y_2^2) \tag{3.15}$$

является аффинно-однородной, а размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих такую поверхность, равна 5.

Доказательство. Рассмотрим уравнение поверхности (3.15) в точке $(0, 1, i\mu)$. Для этого, совершим следующую замену переменных: $z_1 = z_1^*$, $z_2 = z_2^* + 1$, $w = w^* + i \cdot \mu$. Тогда уравнение принимает следующий вид (звездочки опущены для наглядности):

$$\nu\left(x_1 + 1\right) = x_1^2 + \left(x_2 + 1\right)\left(\mu x_2^2 + \nu y_2^2\right) + \left(x_2 + 1\right)\left(2\mu x_2 + \lambda y_2\right).$$

Далее применим поворот $z_1 = z_1^*$, $z_2 = z_2^*$, $w = w^* + (\lambda + 2\mu i)z_2^*$, чтобы привести уравнение к следующему виду:

$$\nu(x_2 + 1) = x_1^2 + (x_2 + 1)(\mu x_2^2 + \lambda x_2 y_2 + \nu y_2^2).$$

Теперь покажем, что группа аффинных преобразований, сохраняющих данную поверхность, имеет размерность 5. Для этого, построим систему уравнений на коэффициенты инфинитезимальных преобразований по алгоритму, описанному в начале данной главы, по аналогии с тем, что уже проделано для случая (3.1). Отметим лишь, что различие будет в возникающем знаменателе (он будет равен $(1 + x_2)^2$).

В результате возникает система из 61 уравнения относительно 24 неизвестных. Схема основной матрицы этой системы представлена в приложении Г. Из схемы видно, что в матрице имеется большое число заведомо ненулевых элементов, которые располагаются в 17 разных столбцах. В таком случае, приведем эту матрицу к ступенчатому виду.

Матрицу системы W можно записать в квазитреугольном виде:

$$W \sim \begin{pmatrix} A & N \\ 0 & B \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица A — диагональная матрица размерами 17×17, $N \in \mathbb{R}^{17\times 7}$, $B \in \mathbb{R}^{26\times 7}$ и имеет вид:

$$\begin{pmatrix}
-2\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-12\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-9\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2\mu & 0 & 0 & \mu \\
-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2\lambda & 0 & 0 & \lambda \\
-3\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2\nu & 0 & 0 & \nu \\
-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-6\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -6\nu & 0 & 0 & 3\nu \\
0 & 0 & 0 & 12\lambda & 0 & 0 & -6\lambda \\
0 & 0 & 0 & -20\mu & 0 & 0 & 10\mu \\
8\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -6\nu & 0 & 0 & 3\nu \\
0 & 0 & 0 & 16\lambda & 0 & 0 & -8\lambda \\
0 & 0 & 0 & -30\mu & 0 & 0 & 15\mu \\
3\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2\nu & 0 & 0 & \nu \\
0 & 0 & 0 & 6\lambda & 0 & 0 & -3\lambda \\
0 & 0 & 0 & -12\mu & 0 & 0 & 6\mu
\end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Видно, что в матрице (3.16) столбцы 4 и 7 являются линейно зависимыми. В таком случае, ранг матрицы B равен двум, а размерность группы преобразований, сохраняющих поверхность (3.15) равна пяти (см. (2.10)).

Рассмотрим теперь независимые инфинитезимальные преобразования, которые получаются после решения системы линейных уравнений:

$$
\begin{gathered}
E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda + 2i\mu & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & i\lambda + 2\nu & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{3.17}
$$

Следует обратить внимание на четвертый столбец в матрицах (3.17). Как известно, четвертый столбец в матрице (2.4) отвечает за сдвиговую часть в порождаемой однопараметрической группе аффинных преобразований [1]. Благодаря произведенным преобразованиям, можно увидеть, что направления движений, задаваемые инфинитезимальными преобразованиями $E_1 - E_5$, позволяют сдвигаться под действием порождаемой группы в любом направлении вдоль поверхности (3.15). Таким образом, группа аффинных преобразований, сохраняющая эту поверхность действует транзитивно, а значит, поверхность является аффинно-однородной.

□

3.3 Произвольная поверхность

В общем случае квадратичную форму $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ можно записать в явном виде:

$$
\begin{aligned}
Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = {} & k_1 x_1^2 + k_2 x_2 x_1 + k_3 x_2^2 + k_4 x_1 y_1 + k_5 x_2 y_1 \\
& + k_6 y_1^2 + k_7 x_1 y_2 + k_8 x_2 y_2 + k_9 y_1 y_2 + k_{10} y_2^2
\end{aligned}
$$

Применяя метод, указанный в предыдущем пункте, получим линейную однородную систему из 83 уравнений относительно 24 неизвестных.

Наиболее простые уравнения в системе имеют вид

$$\begin{aligned} &k_1\beta_{3,2} = 0 \quad k_1\beta_{3,1} = 0 \quad k_1\sigma_{2,1} = 0 \\ &k_6\beta_{3,2} = 0 \quad k_6\beta_{3,1} = 0 \quad k_6\sigma_{2,1} = 0 \\ &k_4\beta_{3,1} = 0 \quad k_4\sigma_{2,1} = 0 \\ &k_7\sigma_{2,1} = 0 \quad k_7\beta_{3,1} = 0 \\ &k_9\beta_{3,1} = 0 \quad k_9\sigma_{2,1} = 0 \\ &k_{10}\beta_{3,2} = 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Отсюда можно выделить два случая:

1. Все k_j равны нулю: $k_1 = k_4 = k_6 = k_7 = k_9 = k_{10} = 0$.
2. Хотя бы один k_j из указанного набора не равен нулю.

В первом случае поверхность приобретает следующий вид:

$$vx_2 = k_2x_2x_1 + k_3x_2^2 + k_5x_2y_1 + k_8x_2y_2 + x_2(\mu x_2^2 + \nu y_2^2).$$

Это один из тривиальных частных случаев, обозначенных в разделе 1 данной работы — квадратичная форма делится на x_2. Таким образом, можно перейти сразу к рассмотрению случая 2.

По аналогии с рассуждениями для частного случая (3.1), предположим, что $k_1 \neq 0$. В таком случае, за счёт аффинных преобразований, параметр k_1 можно сделать равным единицей. Приведём основную матрицу системы уравнений W элементарными преобразованиями к ступенчатому виду. Матрица принимает вид (по аналогии с выкладками выше):

$$W \sim \begin{pmatrix} A & N \\ 0 & B \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица A — диагональная матрица размерами 18×18, $N \in \mathbb{R}^{18\times 6}$, $B \in$

$\mathbb{R}^{16\times 6}$ и имеет вид:

$$\begin{pmatrix} k_4^2-2k_6+2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_4\left(k_6+1\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3\left(k_4^2+4\right)}f_1 & 0 & \frac{1}{3\left(k_4^2+4\right)}f_3 & 0 & 0 & -\frac{4k_6-k_4^2}{k_4^2+4} \\ 0 & \frac{1}{2}\left(k_4^2-4k_6\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(k_4k_7-2k_9\right) & 0 & 0 \\ \frac{1}{3\left(k_4^2+4\right)}f_2 & 0 & \frac{1}{3\left(k_4^2+4\right)}f_4 & 0 & 0 & -\frac{2k_9-k_4k_7}{k_4^2+4} \\ 0 & \frac{1}{2}\left(k_4k_7-2k_9\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(k_7^2-4k_{10}\right) & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

а коэффициенты $f_1 - f_4$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1 = {} & k_9k_4^3-\left(3k_5+4k_6k_7+k_7\right)k_4^2+2\left(3k_6+7\right)k_9k_4+2k_2\left(k_4^3-4k_4k_6\right)+ \\ & +12\left(k_5k_6+k_7\right), \\ f_2 = {} & k_{10}k_4^3-2k_7k_9k_4^2+2k_2\left(k_4k_7-2k_9\right)k_4+\left(-4k_7^2-3k_5k_7+3k_9^2+4k_{10}\right)k_4+ \\ & +6\left(k_5+k_7\right)k_9, \\ f_3 = {} & k_2\left(k_4^2-4k_6\right)-2k_4\left(k_6+1\right)k_7+\left(k_4^2+4\right)k_9, \\ f_4 = {} & k_2\left(k_4k_7-2k_9\right)-k_7\left(2k_7+k_4k_9\right)+2\left(k_4^2+4\right)k_{10}. \end{aligned}$$

Ранг матрицы W в таком случае будет равен $18+\operatorname{rank} B$. Тогда изучим ранг матрицы B.

Из (3.19) видно, что ранг матрицы B изменяется от принимает значения от 1 до 5. Это означает, что размерность группы аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из семейства (1.4) изменяется от 1 до 5. Примеры значений параметров $k_2, \dots, k_{10}$ для каждой из размерностей:

$$\begin{aligned} &\dim G = 1, && k_4 = k_6 = k_{10} = 1,\ k_2 = k_3 = k_5 = 0,\ k_7 = \ldots = k_9 = 0 \\ &\dim G = 2, && k_6 = k_{10} = 1,\ k_2 = \ldots = k_5 = 0, k_7 = \ldots = k_9 = 0 \\ &\dim G = 3, && k_4 = k_6 = 1,\ k_2 = \ldots = k_5 = 0, k_7 = \ldots = k_{10} = 0 \\ &\dim G = 4, && k_6 = 1,\ k_2 = \ldots = k_5 = 0,\ k_7 = \ldots = k_{10} = 0 \\ &\dim G = 5, && k_2 = \ldots = k_{10} = 0 \end{aligned}$$

Проводя аналогичные рассуждения для остальных параметров, можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 3. *Размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность из семейства (1.4), удовлетворяет неравенству* $1 \leq \dim G \leq 5$*, и каждая из размерностей достижима.*

Доказательство. Первая часть доказательства, связанная с оценкой размерности группы, представлена выше. В таком случае, покажем, что каждая из этих размерностей достижима.

В теореме 1 данной работы приведены поверхности, для которых размерности группы изменяются от 3 до 5. Остается доказать достижимость размерностей 1 и 2. Рассмотрим следующие поверхности, которые получились после рассмотрения рангов матрицы (3.19):

$$\dim G = 1, \qquad vx_2 = |z_1|^2 + x_1 y_1 + y_2^2 + x_2 |z_2|^2, \tag{3.20}$$

$$\dim G = 2, \qquad vx_2 = |z_1|^2 + y_2^2 + x_2 |z_2|^2. \tag{3.21}$$

С помощью программы на языке `Wolfram Language`, представленной в приложении, были получены группы преобразований для обеих заявленных поверхностей. Первую поверхность сохраняет сдвиг по переменной u. Для второй поверхности добавляется еще одно движение — повороты в плоскости z_1. □

4 Компьютерные алгоритмы

В данном разделе приведены описания процедур и функций, которые позволяют реализовать алгоритм нахождения размерности групп аффинных преобразований, предложенный в пункте 3 данной работы.

В связи с трудоемкостью процедуры и большим объемом вычислений, сложно обойтись без использования пакетов символьных вычислений. С помощью пакета символьной математики `Wolfram Mathematica` были разработаны функции, способные выполнять отдельные этапы алгоритма решения поставленной задачи.

Замечание: Пакет `Wolfram Mathematica` имеет очень богатую стандартную библиотеку функций, что довольно сильно облегчает работу. Для разработки процедур использовались стандартные средства сопоставления по образцу, подстановки в выражение (`Replace`), решения уравнений (`Solve`) и многие другие.

Листинги представленных функций и примеры их использования можно найти в приложении Б.

4.1 Основные функции

- `TransformSurface` — функция, применяющая аффинное преобразование в трехмерном комплексном пространстве к данному уравнению поверхности. Входными параметрами данной функции является уравнение поверхности и матрица аффинного преобразования, которое должно быть применено к этой поверхности.

- `AdaptiveElimination` — функция, приводящая заданную матрицу к ступенчатому виду. Особенность этой процедуры в том, что, помимо матриц, на вход подается список переменных, которые считаются отличными от нуля и элементы, которые содержат в себе только эти переменные, могут стоять на главной диагонали матрицы. Эта процедура была необходима, потому что пакет `Wolfram Mathematica` не позволяет приводить матрицу к ступенчатому виду, принимая в расчет какие-либо предположения относительно переменных, кроме наиболее общих (комлексное, вещественное число и т.п.).

- `GetSystem` — функция для получения системы линейных уравнений на элементы инфинитезимального преобразования для данной поверхности. На вход подается уравнение поверхности. Функция возвращает список из уравнений полученной линейной системы.

- `GetInfinitesimalTransforms` — функция для решения системы линейных уравнений, полученной в результате применения функции `GetSystem`. На вход принимается список уравнений. Функция возвращает список из матриц независимых инфинитезимальных преобразований.

- `IntegrateTransforms` — функция для интегрирования набора из независимых инфинитезимальных преобразований. Возвращает список однопараметрических групп, полученных в результате интегрирования.

- `CheckPreservation` — функция, проверяющая факта сохранения поверхности однопараметрической группой преобразований. Входные параметры — уравнение поверхности и однопараметрическая группа в матричном виде. Возвращает `True`, если поверхность сохраняется, `False` в ином случае.

4.2 Вспомогательные процедуры

- `CreateTransform` — Генерирует однопарметрическую группу преобразований в матричном виде (2.1). Функция не имеет входных параметров и возвращает матрицу для произвольной однопараметрической группы аффинных преобразований.

- `PrintMatrix` — Распечатывает матрицу с нумерацией строк и столбцов.

- `MatrixReduceRow` — Функция, осуществляющая шаг приведения матрицы к ступенчатому виду. Входными параметрами является матрица и номер строки.

- `SwapRows` — функция для обмена местами строк в матрице. На вход подается матрица и два списка одинакового размера: в первом находятся исходные позиции строк, во втором — конечные. Функция возвращает матрицу с переставленными строками.

- `SwapColumns` — Меняет местами столбцов в матрице. Функция является аналогичной `SwapRows`.

4.3 Результаты тестирования

В ходе тестирования представленной программы было обнаружено, что в случае произвольных поверхностей с большим количеством неопределенных коэффициентов, не удается получить точную размерность группы, не прибегая к «ручному режиму». Часть инфинитезимальных преобразований теряется в ходе решения системы уравнений с большим количеством параметров.

Поскольку мы не можем знать, какие решения системы будут потеряны, приходится все компьютерные действия сопровождать ручными вычислениями. При этом отдельные функции, написанные в `Wolfram Mathematica`, выполняют большую часть работы, существенно ускоряя решение задачи и освобождая от естественных ошибок «ручного режима».

Заключение

В представленной работе были исследованы симметрии одного из классов кубических гиперповерхностей в трехмерном комплексном пространстве.

В данной работе используются как компьютерные вычисления в пакете символьной математики `Wolfram Mathematica`, так и чисто теоретические рассуждения, требующие аккуратной работы с большим количеством возникающих параметров. Показано, что даже при использовании современных высокотехнологичных информационных систем и, в частности, пакетов символьных вычислений, полное решение изучаемой задачи невозможно без участия человеческого (естественного) интеллекта.

В предлагаемом исследовании была получена оценка размерностей группы аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из данного семейства. В ходе исследования было также произведено обобщение уже известного класса аффинно-однородных поверхностей в $\mathbb{C}^3$ [7].

Список литературы

1 Ли, Софус. Теория групп преобразований: в 3-х частях [Текст] / Софус Ли ; Под ред. А. В. Болсинова. — 1 изд. — [Б. м.] : Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. — Пер. с нем. Л. А. Фрая.

2 Miller, W. Symmetry Groups and Their Applications [Text] / W. Miller. Pure and Applied Mathematics. — [S. l.] : Elsevier Science, 1973. — ISBN: 9780080873657. — URL: https://books.google.ru/books?id=rW7-eLDdVm0C.

3 Isaev, A. On the symmetry algebras of 5-dimensional CR-manifolds [Electronic resource] / A. Isaev, B. Kruglikov // ArXiv e-prints. — 2016. — Jul. — 1607.06072.

4 Широков, П. А. Аффинная дифференциальная геометрия [Электронный ресурс] / П. А. Широков, А. П. Широков. — [S. l.] : Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1959. — URL: https://books.google.ru/books?id=UNu0AAAAIAAJ.

5 Cartan, E. Sur la structure des groupes de transformations finis et continus [Text] / E. Cartan. Théses présentées a la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques. — [S. l.] : Nony, 1894. — URL: https://books.google.ru/books?id=JY8LAAAAYAAJ.

6 Лобода, А. В. Классификация аффинно-однородных невырожденных по Леви гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$ [Text] / А. В. Лобода // Современные проблемы математики и механики, М.: Изд-во МГУ. — 2011. — Vol. 6: Математика., Вып. 3: К 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова. — P. 56–58.

7 Atanov, A. V. Affine homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces of the type (1/2,0) in $\mathbb{C}^3$ [Text] / A. V. Atanov, A. V. Loboda, A. V. Shipovskaya // ArXiv e-prints. — 2014. — Jan. — 1401.2252.

8 Лобода, А. В. Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства [Text] / А. В. Лобода, А. С. Ходарев // Изв. вузов. Матем. — 2003. — Vol. 47, no. 10. — P. 38–50.

9 Eastwood, M. On affine normal forms and a classication of homogeneous surfaces in affine three-space [Text] / M. Eastwood, V. V. Ezhov // Geom Dedicata. — 1999. — Vol. 77. — P. 11 – 69.

10 Dillen, F.J.E. Handbook of Differential Geometry [Text] / F.J.E. Dillen, L.C.A. Verstraelen. — [S. l.] : Elsevier Science, 1999. — Vol. 1.

11 Vrancken, Luc. Degenerate homogeneous affine surfaces in $\mathbb{R}^3$ [online] / Luc Vrancken // Geometriae Dedicata. — 1994. — Vol. 53, no. 3. — P. 333–351. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF01264006.

12 Данилов, М. С. Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности с индефинитной формой Леви [Text] / М. С. Данилов // Международная школа-семинар по геометрии и анализу. Тез. докл. — [S. l.] : Абрау-Дюрсо, 2009. — P. 25–26.

13 Fels, G. Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5 [Electronic resource] / G. Fels, W. Kaup // ArXiv Mathematics e-prints. — 2006. — Oct. — math/0610375.

14 Кострикин, А. И. Часть I. Основы алгебры [Текст] / А. И. Кострикин. — 2 изд. — [Б. м.] : М.: Физико-математическая литература, 2000.

Приложение А

Используемые выражения

В данном приложении перечислены выражения, которые слишком велики для того, чтобы помещать их напрямую в текст.

А.1 Компоненты $T(\mathrm{I}), T(\mathrm{II})$ и $T(\mathrm{III})$ в сужении на M

$$\left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(\mathrm{I}) \bigg|_{t=0} \right\} \bigg|_M = \frac{1}{x_2{}^2} \Big[Q\left(x_1, y_1, x_2, y_2\right) \Big(-u x_2 \beta_{3,1} + 2\mu x_2^3 \beta_{3,2} - x_2^2 \beta_{2,1} - \\ - x_1 x_2 \beta_{1,1} - x_2^2 \gamma_{3,1} - x_2 \sigma_{2,1} + 2\nu x_2 y_2^2 \beta_{3,2} + x_2 y_1 \beta_{1,2} + x_2 y_2 \beta_{2,2} \Big) - \\ - \beta_{3,2} Q\left(x_1, y_1, x_2, y_2\right)^2 + \mu u x_2^4 \beta_{3,1} + u x_2^3 \gamma_{3,2} + \nu u x_2^2 y_2^2 \beta_{3,1} - \mu^2 x_2^6 \beta_{3,2} + \mu x_2^5 \beta_{2,1} + \\ + \mu x_1 x_2^4 \beta_{1,1} + \mu x_2^5 \gamma_{3,1} + x_2^4 \gamma_{2,2} + x_1 x_2^3 \gamma_{1,2} + \mu x_2^4 \sigma_{2,1} + x_2^3 \sigma_{3,2} - 2\mu\nu x_2^4 y_2^2 \beta_{3,2} - \mu x_2^4 y_1 \beta_{1,2} - \\ - \mu x_2^4 y_2 \beta_{2,2} - \nu^2 x_2^2 y_2^4 \beta_{3,2} + \nu x_2^3 y_2^2 \beta_{2,1} + \nu x_1 x_2^2 y_2^2 \beta_{1,1} - \nu x_2^2 y_1 y_2^2 \beta_{1,2} - \nu x_2^2 y_2^3 \beta_{2,2} + \\ + \nu x_2^3 y_2^2 \gamma_{3,1} + x_2^3 y_1 \gamma_{1,1} + x_2^3 y_2 \gamma_{2,1} + \nu x_2^2 y_2^2 \sigma_{2,1} \Big] \quad (\text{ПА.1})$$

$$\left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(\mathrm{II}) \bigg|_{t=0} \right\} \bigg|_M = \frac{1}{x_2} F(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v), \qquad (\text{ПА.2})$$

где $F(x_1, y_1, x_2, y_2, u, v)$ — некоторая форма четвертой степени, общий вид которой зависит от квадратичной формы $Q(x_1, x_2, y_1, y_2)$.

$$\left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(\mathrm{III}) \bigg|_{t=0} \right\} \bigg|_M = \frac{1}{x_2} \Big[Q\left(x_1, y_1, x_2, y_2\right) \Big(3\mu x_2^2 \beta_{3,2} - 2\nu x_2 y_2 \beta_{3,1} + \nu y_2^2 \beta_{3,2} \Big) + \\ + 3\mu u x_2^3 \beta_{3,1} + 2\nu u x_2^2 y_2 \beta_{3,2} + \nu u x_2 y_2^2 \beta_{3,1} - 3\mu^2 x_2^5 \beta_{3,2} + 3\mu x_2^4 \beta_{2,1} + 3\mu x_1 x_2^3 \beta_{1,1} + \\ + 3\mu x_2^3 \sigma_{2,1} + 2\mu\nu x_2^4 y_2 \beta_{3,1} - 4\mu\nu x_2^3 y_2^2 \beta_{3,2} - 3\mu x_2^3 y_1 \beta_{1,2} - 3\mu x_2^3 y_2 \beta_{2,2} + 2\nu^2 x_2^2 y_2^3 \beta_{3,1} - \\ - \nu^2 x_2 y_2^4 \beta_{3,2} + 2\nu x_2^3 y_2 \beta_{2,2} + 2\nu x_2^2 y_1 y_2 \beta_{1,1} + 2\nu x_1 x_2^2 y_2 \beta_{1,2} + 3\nu x_2^2 y_2^2 \beta_{2,1} + \\ + \nu x_1 x_2 y_2^2 \beta_{1,1} - \nu x_2 y_1 y_2^2 \beta_{1,2} - \nu x_2 y_2^3 \beta_{2,2} + 2\nu x_2^2 y_2 \sigma_{2,2} + \nu x_2 y_2^2 \sigma_{2,1} \Big] \quad (\text{ПА.3})$$

Приложение Б

Листинг программы

В данном приложении представлен листинги процедур, реализующие этапы представленного в пункте 3 алгоритма решения задачи. Для написания программ использовался язык `Wolfram Language`.

Б.1 Основные функции

```
(* Применяет аффинное преобразование к поверхности *)
TransformSurface[surface_, transform_] :=
 Module[{s = surface, st, tr = transform},
  st = s /. {Subscript[x, 1] -> ComplexExpand@Re@Subscript[Z, 1]
     @tr,
     Subscript[y, 1] -> ComplexExpand@Im@Subscript[Z, 1]@tr,
      Subscript[x, 2] -> ComplexExpand@Re@Subscript[Z, 2]@tr,
     Subscript[y, 2] -> ComplexExpand@Im@Subscript[Z, 2]@tr,
     u -> ComplexExpand@Re@W@tr, v -> ComplexExpand@Im@W@tr};
  st
  ]

(*  Получает систему линейных уравнений на коэффициенты
   инфинитезимального преобразования  *)
GetSystem[surface_] :=
  Module[{s = surface,
    system = {}, \[CapitalPhi] = Subtract @@ surface, ts, vars =
      {}},
   vars = {Subscript[x, 1], Subscript[x, 2], Subscript[y, 1],
     Subscript[y, 2], u, v};
   ts = TransformSurface[\[CapitalPhi], CreateTransform[]] /.
     parameterSubstitutions;
   ts = D[ts, t] /. t -> 0 /. diffSubstitution;
   ts = Simplify[(ts /. Solve[s, v][[1]])];
   ts *= Denominator@Simplify@ts;
   system =
    Times @@ (vars^#[[1]]) -> #[[2]] & /@ CoefficientRules[ts,
      vars];
   system = DeleteCases[system[[All, 2]], 0];
   system
   ];
```

```
(* Приводит матрицу к ступенчатому виду с учетом предположений *)
AdaptiveElmination[matrix_, variables_] :=
  Module[{m = matrix, perms = {}, dim = Dimensions@matrix,
    h = Dimensions@matrix[[1]], w = Dimensions@matrix[[2]], pos,
       i,
    vars = Flatten@{variables}, pattern},
   pattern = Except[0,
     _Integer | _?(Variables@# === vars &)];
   For[i = 1, i < Min[w, h], i++,
    pos = Flatten@Position[m[[i ;;, i ;;]], pattern, 2, 1];
    If[pos === {}, Break[], pos += {i - 1, i - 1}];
    m[[{i, pos[[1]]}]] = m[[{pos[[1]], i}]];
    m[[All, {i, pos[[2]]}]] = m[[All, {pos[[2]], i}]];
    m[[i + 1 ;;]] = Factor@MatrixReduceRow[m, i];
    ];
   m
   ];

(* Получает инфинитезимальные преобразования на основе системы *)
GetInfinitesimalTransforms[system_] :=
  Module[{s = system, ta = {}, vars = {}, basis = {}, sol, itm =
     {},
    subs = {}},
   vars =
    Sort@Flatten@
      Table[{Subscript[\[Alpha], i, j], Subscript[\[Beta], i, j],
        Subscript[\[Gamma], i, j], Subscript[\[Sigma], i, j]}, {i
           , 1,
        3}, {j, 1, 2}];
   itm = {Append[
      Table[Subscript[\[Alpha], i, 1] +
        I*Subscript[\[Alpha], i, 2], {i, 1, 3}],
      Subscript[\[Sigma], 1, 1] + I*Subscript[\[Sigma], 1, 2]],
     Append[Table[
       Subscript[\[Beta], i, 1] + I*Subscript[\[Beta], i, 2], {i,
          1,
        3}], Subscript[\[Sigma], 2, 1] + I*Subscript[\[Sigma], 2,
          2]],
      Append[Table[
       Subscript[\[Gamma], i, 1] + I*Subscript[\[Gamma], i, 2], {
         i, 1,
```

```
        3}], Subscript[\[Sigma], 3, 1] + I*Subscript[\[Sigma],
           3, 2]],
      {0, 0, 0, 0}};
    sol = Solve[#1 == 0 & /@ reducedSystem, vars];
    ta = itm /. sol[[1]];
    vars = Intersection[Variables@ta, vars];
    subs =
     Sort@Flatten[{vars[[#]] -> 1,
          Function[e, e -> 0] /@
           Complement[vars, {vars[[#]]}]}] & /@ (Range @@
        Dimensions@vars);
    ta = ta /. # & /@ subs;
    ta
    ];

(* Интегрирует инфинитезимальные преобразования для получения
   однопараметрических групп *)
IntegrateTransforms[transforms_List] :=
  Module[{tr = transforms, affine = {}},
    affine = MatrixExp[t*#] & /@ tr;
    affine
    ];

(* Проверяет факт сохранения поверхности группой *)
CheckPreservation[surface_, transform_] :=
  Module[{s = surface, t, ts},
    t = transform.{{Subscript[x, 1] + I*Subscript[y, 1]}, {
       Subscript[x,
          2] + I*Subscript[y, 2]}, {u + I*v}, {1}};
    ts = Subtract @@ (FullSimplify@TransformSurface[s, t]);
    NumberQ[FullSimplify[(Subtract @@ s)/ts]]
    ];
```

Б.2 Вспомогательные функции

```
(* Создает матрицу произвольного аффинного преобразования *)
CreateTransform[] :=
 Module[{at},
  at = ({{Subscript[A, 1], Subscript[A, 2], Subscript[A,
        3]}, {Subscript[B, 1], Subscript[B, 2], Subscript[B,
        3]}, {Subscript[C, 1], Subscript[C, 2], Subscript[C,
           3]}}).
     ({{Subscript[z, 1]}, {Subscript[z, 2]}, {w}}) + ({{Subscript
```

```
        [P,
       1]}, {Subscript[P, 2]}, {q}});
  at = at /. transformSubstitutions;
  Expand@at
  ]

(* Печатает матрицу с нумерацией строк и столбцов *)
PrintMatrix[matrix_] :=
 Module[{m = matrix, dim = Dimensions@matrix},
  MatrixForm[m, TableHeadings -> {Range@dim[[1]], Range@dim
     [[2]]}]
  ]

(* Меняет местами столбцы в матрице *)
SwapRows[matrix_, from_List, to_List] :=
  Module[{m = matrix, f = from, t = to},
   m[[Flatten@{f, t}]] = m[[Flatten@{t, f}]];
   m
   ];

(* Меняет местами столбцы в матрице *)
SwapColumns[matrix_, from_List, to_List] :=
  Module[{m = matrix, f = from, t = to},
   m[[All, Flatten@{f, t}]] = m[[All, Flatten@{t, f}]];
   m
   ];

(* Приводит указанный столбец матрицы к нулевоу виду, начиная со
   строки с номером row *)
MatrixReduceRow[matrix_, row_] :=
 Module[{m = matrix, r = row},
  m = # - #[[row]]*matrix[[row]]/matrix[[row, row]] & /@
    matrix[[row + 1 ;;]];
  m
  ]
```

Б.3 Пример использования функций

Листинг программы для получению размерности группы аффинных преобразований и вида этих преобразований для поверхности (3.14):

```
S = v*Subscript[x, 2] ==
   Subscript[x, 1]^2 +
    Subscript[x,
```

```
    2]*(\[Mu]*Subscript[x, 2]^2 + \[Nu]*Subscript[y, 2]^2);
system = GetSystem[S];
matrix = Normal@CoefficientArrays[system, variables][[2]];
Print["Количество␣уравнений␣в␣системе:␣", Length@system];
Print["Максимальный␣ранг␣матрицы:␣", MatrixRank@matrix];
ITs = GetInfinitesimalTransforms[system];
Print["Размерность␣группы:␣", Length@ITs];
Print@"Инфинитезимальные␣преобразования:";
PrintMatrix /@ ITs
groups = IntegrateTransforms@ITs;
Print@"Однопараметрические␣группы:"
PrintMatrix /@ groups
CheckPreservation[S, #] & /@ groups
```

Дополнительные переменные, которые использовались в функциях:

```
(*  Подстановки для общего аффинного преобразования  *)
transformSubstitutions =
  Flatten[{Table[{Subscript[A, i] ->
       Subscript[a, i, 1] + I * Subscript[a, i, 2],
      Subscript[B, i] -> Subscript[b, i, 1] + I * Subscript[b, i,
         2],
      Subscript[C, i] ->
       Subscript[c, i, 1] + I * Subscript[c, i, 2]}, {i, 1, 3}],
    Subscript[z, 1] -> Subscript[x, 1] + I*Subscript[y, 1],
    Subscript[z, 2] -> Subscript[x, 2] + I*Subscript[y, 2],
    w -> u + I*v,
    Subscript[P, 1] -> Subscript[p, 1, 1] + I*Subscript[p, 1, 2],
    Subscript[P, 2] -> Subscript[p, 2, 1] + I*Subscript[p, 2, 2],
    q -> Subscript[q, 1] + I*Subscript[q, 2]}];

(*  Подстановки для параметров  *)
parameterSubstitutions =
  Flatten[{Table[{Subscript[a, i, j] -> Subscript[a, i, j][t],
      Subscript[b, i, j] -> Subscript[b, i, j][t],
      Subscript[c, i, j] -> Subscript[c, i, j][t]}, {i, 1, 3}, {j
        , 1,
      2}], Table[
     Subscript[p, i, j ] -> Subscript[p, i, j][t], {i, 1, 2}, {j,
        1,
      2}], Subscript[q, 1] -> Subscript[q, 1][t],
    Subscript[q, 2] -> Subscript[q, 2][t]}];

(*  Подстановки для параметров после дифференцирования  *)
```

```
diffSubstitution =
  Flatten[{Table[{Subscript[a, i, j]'[0] -> Subscript[\[Alpha], i
     ,
       j], Subscript[b, i, j]'[0] -> Subscript[\[Beta], i, j],
      Subscript[c, i, j]'[0] -> Subscript[\[Gamma], i, j]}, {i,
         1,
      3}, {j, 1, 2}],
    Table[Subscript[p, i, j]'[0] -> Subscript[\[Sigma], i, j], {i
       , 1,
      2}, {j, 1, 2}], {Subscript[q, 1]'[0] -> Subscript[\[Sigma],
          3,
      1], Subscript[q, 2]'[0] -> Subscript[\[Sigma], 3, 2]}}];
```

Приложение B

Схема матрицы в частном случае

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&N&N&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
N&N&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&N&N&N&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&N&N&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&N&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
N&N&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&N&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&N&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&N&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&N&0&0&0&0\\
0&0&0&0&N&N&N&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&N&N&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&N&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&N&N&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&N&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
N&N&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&N&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&N&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&N&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&N&0&0&0&0\\
0&0&0&0&N&N&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&N&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
$$

где N — некоторое полиномиальное выражение от $k_1, \ldots, k_{10}$, μ, ν.

Приложение Г

Схема матрицы в общем случае

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&2&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-2&0&0&0&0&0&0&0&1&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-4&0&0&0&0&0&0&0&1&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&2&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-2&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&2&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-4&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&-2&0&0&0&0&0\\
0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&4&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-2&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&-4&0&0&0&0&0\\
0&0&0&2&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&-2&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&1&\mathrm{N}&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&1&0&\mathrm{N}&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&3&\mathrm{N}&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&1\\
0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&3&0&\mathrm{N}&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&3&\mathrm{N}&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&3\\
0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&3&0&\mathrm{N}&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&3\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&\mathrm{N}&\mathrm{N}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}
$$

где N — некоторое полиномиальное выражение от λ, ν, μ.