Исследование симметрий алгебраических уравнений

Выполнил: студент 4 курса Морозов Евгений
Руководитель: А.В. Лобода

15 июня 2017 г.

Воронежский Государственный Университет
Факультет Компьютерных Наук
Кафедра Цифровых Технологий

Постановка задачи

Дано семейство вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$:

$$v x_2 + Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_2(\mu {x_2}^2 + \nu {y_2}^2), \tag{1}$$

$x_1 = \Re(z_1)$, $y_1 = \Im(z_1)$, $x_2 = \Re(z_2)$, $y_2 = \Im(z_2)$, $u = \Re(w)$, $v = \Im(w)$, μ, $\nu \in \mathbb{R}$ и одновременно не равны нулю, $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ — некоторая квадратичная форма.

- **Симметрия поверхности** — любое аффинное преобразование, сохраняющее эту поверхность.
- **Задача состоит** в изучении групп аффинных преобразований, сохраняющих поверхности из семейства (1), и их размерностей.
- Задача изучается с точностью до аффинных преобразований исходных объектов.

Метод решения

Любая поверхность из (1) сохраняется сдвигом по переменной $u = \Re(w)$. Следовательно, размерность каждой из изучаемых групп преобразований не меньше 1.

Пусть F_t — однопараметрическая группа аффинных преобразований, сохраняющих уравнение поверхности $\Phi = 0$, $F_0 = \mathrm{Id}$.

Факт сохранения поверхности M из (1) группой F_t:

$$F_t(\Phi) = \Phi(z, \bar{z}, v) \cdot \psi(z, \bar{z}, w, t), \tag{2}$$

где $\psi(z, \bar{z}, w, t)$ — некоторая ненулевая функция, $\Phi(z, \bar{z}, v) = vx_2 + Q(x_1, y_1, x_2, y_2) - x_2(\mu\, {x_2}^2 + \nu\, {y_2}^2)$ — определяющая функция поверхности M.

Метод решения (продолжение)

Продифференцируем (2) по t в точке $t = 0$ и сузим результат на поверхность M:

$$\left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_t(\Phi) \Big|_{t=0} \right\} \Big|_M \equiv 0 \tag{3}$$

Далее перейти к однородной СЛАУ, ранг матрицы которой определяет искомую размерность группы преобразований:

$$\dim G = 24 - \operatorname{rank} W.$$

Таким образом, исследование размерности группы аффинных преобразований, сохраняющих поверхность M, сводится к исследованию ранга полученной матрицы.

Частный случай

Детально был рассмотрен случай, в котором квадратичная форма Q не зависит от x_2 и y_2:

$$vx_2 + k_1{x_1}^2 + k_2x_1y_1 + k_3{y_1}^2 = x_2(\mu\, {x_2}^2 + \nu\, {y_2}^2). \tag{4}$$

В данном случае возникает СЛАУ из 57 уравнений относительно 24 неизвестных.

Замечание: за счёт аффинных преобразований можно сократить число параметров в (4).

Частный случай: оценка размерности

Теорема 1: размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность вида (4), удовлетворяет неравенствам $3 \le \dim G \le 5$, причем:

- $\dim G = 3$ достигается на поверхностях вида
$$v x_2 = {x_1}^2 + A x_1 y_1 + B {y_1}^2 + x_2(\mu {x_2}^2 + \nu {y_2}^2) \qquad (A \neq 2\sqrt{B},\ B \neq 1); \tag{5}$$
- $\dim G = 4$ достигается на поверхностях вида
$$v x_2 = |z_1|^2 + x_2(\mu {x_2}^2 + \nu {y_2}^2); \tag{6}$$
- $\dim G = 5$ достигается на аффинно-однородных [3] поверхностях вида
$$v x_2 = {x_1}^2 + x_2(\mu {x_2}^2 + \nu {y_2}^2). \tag{7}$$

Частный случай: допустимые движения

Для произвольной поверхности вида (4) существуют три основных вида движения:

- *сдвиг* по переменной u: $w \to w^* + t$;
- *масштабирование*: $z_1 \to e^{3t} \cdot z_1^*$, $z_2 \to e^{2t} \cdot z_2^*$, $w \to e^{4t} \cdot w^*$;
- *поворот со сдвигом ("скользящий поворот")*: $z_2 \to z_2^* + it$, $w \to w^* + 2t\nu \cdot z_2^* + it^2\nu$.

Для поверхностей (6) имеется еще один тип движений:

- *повороты (вращения)* в плоскости z_1: $z_1 \to e^{i\varphi} \cdot z_1^*$.

Поверхности (7) имеют, в дополнение к основным, допускают еще два типа движений:

- *сдвиг* по переменной y_1: $z_1 \to z_1^* + it$;
- *поворот*: $z_1 \to z_1^* + t$, $z_2 \to z_2^*$, $w \to 2it \cdot z_1^* + it^2 \cdot z_2^* + w^*$.

Частный случай (продолжение)

Теорема 2: для любой тройки вещественных коэффициентов μ, ν, λ, одновременно не равных нулю, поверхность

$$vx_2 = x_1^2 + x_2(\mu \, x_2{}^2 + \lambda \, x_2 y_2 + \nu \, y_2{}^2)$$

является аффинно-однородной, а размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих такую поверхность, равна пяти.

Общий случай

Явный вид квадратичной формы $Q(x_1, y_1, x_2, y_2)$ для произвольной поверхности из (1):

$$\begin{aligned} Q(x_1, y_1, x_2, y_2) &= k_1 x_1^2 + k_2 x_1 x_2 + k_3 x_2^2 + k_4 x_1 y_1 + k_5 x_2 y_1 \\ &+ k_6 y_1^2 + k_7 x_1 y_2 + k_8 x_2 y_2 + k_9 y_1 y_2 + k_{10} y_2^2 \end{aligned}$$

Возникает СЛАУ из 83 уравнений относительно 24 неизвестных.

Сложность исследования заключается не только в размере системы, но и в том, что коэффициенты этой системы зависят **полиномиально** от $k_1, \ldots, k_{10}$.

Общий случай: оценка размерности

Теорема 3 (основная): размерность группы Ли аффинных преобразований, сохраняющих любую поверхность из семейства (1), удовлетворяет неравенствам $1 \leq \dim G \leq 5$, и каждая из размерностей достижима.

Пример 1: единичная размерность группы достигается на поверхности

$$vx_2 = |z_1|^2 + x_1 y_1 + {y_2}^2 + x_2(\mu {x_2}^2 + \nu {y_2}^2).$$

Пример 2: $\dim G = 2$ достигается на поверхности

$$vx_2 = |z_1|^2 + {y_2}^2 + x_2(\mu {x_2}^2 + \nu {y_2}^2).$$

Заключение

Итоги работы:

- Была получена оценка размерностей групп аффинных преобразований, сохраняющих поверхности исследуемого семейства кубических гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$
- Написана программа на языке `Wolfram Language` для определения размерности группы преобразований, действующих на поверхности
- Произведени обобщение известных классов аффинно-однородных поверхностей из [3].

Литература

Ли С.
Теория групп преобразований: в 3-х частях. Часть 1.
Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011.

А. В. Лобода, А. С. Ходарев
Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства.
Известия вузов, 2003

A.V. Atanov, A.V. Loboda, A.V. Shipovskaya
Affine homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces of the type (1/2,0) in $\mathbb{C}^3$.
ArXiv e-prints, 2014

A. Isaev, B. Kruglikov
On the symmetry algebras of 5-dimensional CR-manifolds.
ArXiv e-prints, 2016

Спасибо за внимание

Получение системы

Однопараметрическая группа в $\mathbb{C}^3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_1(\mathbf{t}) & A_2(\mathbf{t}) & A_3(\mathbf{t}) \\ B_1(\mathbf{t}) & B_2(\mathbf{t}) & B_3(\mathbf{t}) \\ C_1(\mathbf{t}) & C_2(\mathbf{t}) & C_3(\mathbf{t}) \end{pmatrix}}_{\text{вращательная компонента}} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} P_1(\mathbf{t}) \\ P_2(\mathbf{t}) \\ q(\mathbf{t}) \end{pmatrix}}_{\text{сдвиговая компонента}},$$

A_i, B_i, C_i, P_i, q — комплексные функции.

Инфинитезимальное преобразование:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + i \cdot \alpha_{1,2} & \alpha_{2,1} + i \cdot \alpha_{2,2} & \alpha_{3,1} + i \cdot \alpha_{3,2} & \sigma_{1,1} + i \cdot \sigma_{1,2} \\ \beta_{1,1} + i \cdot \beta_{1,2} & \beta_{2,1} + i \cdot \beta_{2,2} & \beta_{3,1} + i \cdot \beta_{3,2} & \sigma_{2,1} + i \cdot \sigma_{2,2} \\ \gamma_{1,1} + i \cdot \gamma_{1,2} & \gamma_{2,1} + i \cdot \gamma_{2,2} & \gamma_{3,1} + i \cdot \gamma_{3,2} & \sigma_{3,1} + i \cdot \sigma_{3,2} \end{pmatrix},$$

здесь элементами матрицы являются производные в точке ноль соответствующих элементов из матрицы однопараметрической группы

Получение системы

Основное тождество:

$$\left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_t(\Phi) \Big|_{t=0} \right\} \Big|_M \equiv 0$$

Умножая на возникающий после подстановки M знаменатель, получаем вещественное полиномиальное уравнение:

$$S(x_1, y_1, x_2, y_2, u) \equiv 0,$$

где $S(x_1, y_1, x_2, y_2, u)$ — многочлен степени 6.

Если полином тождественен нулю, то все коэффициенты при его одночленах равны нулю.

Пример сокращения числа параметров

Семейство в частном случае:

$$vx_2 + k_1{x_1}^2 + k_2x_1y_1 + k_3{y_1}^2 = x_2(\mu\,{x_2}^2 + \nu\,{y_2}^2).$$

Предположим, что $k_1 \neq 0$. Произведем замену переменных: ${z_1}^* = z_1/\sqrt{k_1}$. Тогда:

$$vx_2 + {x_1}^2 + {k_2}^*x_1y_1 + {k_3}^*{y_1}^2 = x_2(\mu\,{x_2}^2 + \nu\,{y_2}^2),$$

где ${k_2}^* = k_2/\sqrt{k_1}$, ${k_3}^* = k_3/\sqrt{k_1}$

Ценность в «реальном мире»

Сложно найти применение в повседневной жизни трехмерным комплексным пространствам. Современная физика, однако, очень сильно полагается на аппарат групп Ли и многомерный комплексный анализ.

Теория струн утверждает, что мы живем в 10-мерном пространстве — привычные нам 4 измерения дополняются 6-мерной компактной добавкой. Эта добавка имеет название пространство Калаби-Яу и является трехмерным комплексным пространством с определенными свойствами.