Математическая постановка задачи стратегического планирования. Элементы теории факторного анализа

Планирование ИМ представляет совокупность методов и приемов получения с помощью эксперимента на разработанной модели необходимой информации с учетом затрачиваемых на это ресурсов. Разделяют (в терминологии Р. Шеннона) стратегическое и тактическое планирование.

Стратегическое планирование – планирование совокупности экспериментов, различающихся по исходным данным, в ходе которых должна быть получена вся необходимая информация о системе, то есть определены все интересующие исследователя свойства. Соответственно план экспериментов позволяет разработать экономную стратегию задания исходных данных:

конечного числа вариантов структур $W_a = \{W_{a1},...,W_{an}\}$; подмножеств значений параметров $V_a = \{V_{a1},...,V_{an}\}$ для каждого из вариантов структур;

конечного множества элементов, определяющих характеристики внешней среды $\Omega_a = \{\omega_{a1},...,\omega_{an}\}$, по отношению к которым определяется эффективность системы.

Данная стратегия должна обеспечить перекрытие всего спектра гипотез и условий, подлежащих проверке в ходе анализа вариантов системы и, с другой стороны, – реализовать обозримый по времени и экономичный по затратам характер исследований путем определения наиболее информативных наборов исходных данных для ИМ.

При фиксированных исходных данных модельный эксперимент состоит из серии повторяющихся имитаций процесса функционирования системы, что позволяет получить усредненную картину относительно ее эффективности с учетом случайного характера протекающих процессов и явлений.

Естественно желание получить более точные оценки исследуемых показателей эффективности при минимальном объеме испытаний.

. Оптимизация статистических испытаний в смысле минимизации их объема при выполнении заданных требований к точности и достоверности выполняется в ходе **тактического планирования** модельного эксперимента.

Стратегическое планирование есть оптимизация проведения экспериментов «в большом», а тактическое планирование – оптимизация процесса моделирования «в малом» (в каждой точке фазового пространства исходных данных, определяющих облик исследуемой системы и характеристики внешней среды).

Математическая постановка и решение задачи стратегического планирования (СП) базируется на использовании **методов факторного и регрессионного анализа.**

Факторами $x_1, x_2, ..., x_k$ называются **независимые входные переменные – характеристики исследуемой системы** S **и внешней среды** Ω, определяющие в своей совокупности параметры, условия и режимы ее функционирования.

Каждый из факторов x_i имеет диапазон допустимых значений $x_{i\min} \le x_i \le x_{i\max}$, $i = \overline{1,k}$. Каждый фактор x_i может принимать в эксперименте несколько значений L_i, $i = \overline{1,k}$, называемых уровнями.

Каждому фиксированному набору уровней соответствует определенная точка в многомерном (k-мерном) пространстве, называемом факторным пространством.

Фиксированный набор уровней определяет вариант построения системы и описания внешней среды, одновременно представляя условия проведения или полный набор исходных данных для одного из возможных имитационных экспериментов.

Выходные переменные, характеризующие изучаемые свойства системы и зависящие от основных факторов, **называются откликами или реакцией** системы S и обозначаются как $y_1,...,y_l$.

В ходе планирования эксперимента должны быть определены:

1)необходимый набор факторов, влияющих на исследуемую характеристику системы и описание зависимостей откликов от факторов;

2)установление количества уровней факторов и их значений в ходе проведения эксперимента;

3)определение необходимого количества и порядка проведения экспериментов, то есть составление собственно плана в виде комбинаций уровней различных факторов.

Зависимость любого отклика от факторов $y = \varphi(x_1,...,x_k)$ достаточно сложна и вид ее заранее не известен. Поэтому в ходе эксперимента пытаются искать приближенную зависимость $y \cong \hat{\varphi}(x_1,...,x_k)$. При этом важную роль играют методы регрессионного анализа.

Регрессией случайной величины Y на X в широком смысле называется некоторая функция, приближенно представляющая статистическую зависимость

$$Y = F(X) + \alpha(X, Y),$$

где $F(X)$ − является регрессией, а $\alpha(X, Y)$ − случайная ошибка такого представления.

Под регрессией случайной величины Y на X в более узком смысле называют условное математическое ожидание Y при фиксированном значении X: $\hat{y} = M[Y / X = x] = f(x)$.

Регрессионный анализ – метод, обеспечивающий подбор функциональной зависимости заданного вида, при которой экспериментальные точки ложатся на нее наилучшим образом в смысле критерия наименьших квадратов.

Задание вида кривой сводится к определению класса функций, используемых для аппроксимации исходных данных.

Процедура «подбора» состоит в определении параметров (коэффициентов полиномов) функций выбранного класса.

Предполагаем, что в ходе эксперимента изучается влияние $\tilde{k}$ факторов $\tilde{x}_i$ $\tilde{x}_{i\min} \le \tilde{x}_i \le \tilde{x}_{i\max}$, $i = \overline{1, \tilde{k}}$ на некоторую реакцию y. При этом функцию реакции $\varphi(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_k)$ с некоторой точностью можно представить в виде полинома степени $d \ge 1$ от k переменных

$$y = \sum_{\{i_1 ... i_{\tilde{k}}\}} \tilde{b}_{i_1 ... i_{\tilde{k}}} \tilde{x}_1^{i_1} \times ... \times x_{\tilde{k}}^{i_{\tilde{k}}} = \tilde{b}_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \tilde{b}_i \tilde{x}_i + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \sum_{j=1}^{\tilde{k}} \tilde{b}_i \tilde{x}_i \tilde{x}_j + ...$$

$$+ \sum_{\substack{\{i_1 ... i_{\tilde{k}}\} \\ i_1 + ... + i_{\tilde{k}} = d}} \tilde{b}_{i_1 ... i_{\tilde{k}}} \tilde{x}_1^{i_1} \times ... \times \tilde{x}_{\tilde{k}}^{i_{\tilde{k}}} \qquad (2.1)$$

где $\tilde{b}_0$, $\tilde{b}_1, \ldots$ –коэффициенты регрессии общим числом $k = C_{\tilde{k}+d}^{\tilde{k}}$.

Данное соотношение всегда может быть сведено к линейному полиному, если провести замену $x_i = \tilde{x}_i$, $i = \overline{1, k}$; $x_{\tilde{k}+1} = x_1^2, ...$,

$x_{2\tilde{k}+1} = x_{\tilde{k}}^2$, $x_{2\tilde{k}+2} = x_1 x_2, \ldots$ и обозначений $b_0 = \tilde{b}_0$, $b_i = \tilde{b}_i$, $i = \overline{1,k}$; $b_{\tilde{k}+1} = \tilde{b}_{11}, \ldots, b_{2\tilde{k}+1} = b_{\tilde{k}\tilde{k}}$, $b_{2\tilde{k}+2} = b_{12}$ и т.д.

В результате всегда можно получить полином, описывающий линейную регрессию по отношению к k факторам

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i = \sum_{i=0}^{k} b_i x_i . \tag{2.2}$$

В последнем выражении вводится фиктивный фактор $x_0 \equiv 1$.

Пусть общее количество экспериментов равно N. Тогда для решения задачи надо найти оценки коэффициентов $b_0, \ldots, b_k$ по результатам наблюдения совокупности откликов $y_1, \ldots, y_N$, считая, что полученные данные удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{array}{l} y_1 \;= b_0 x_{01} + b_1 x_{11} + \ldots + b_k x_{k1} + \varepsilon_1, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \ldots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_N = b_0 x_{0N} + b_1 x_{1N} + \ldots + b_k x_{kN} + \varepsilon_N , \end{array}$$

где x_{ij}, $i = \overline{0,k}; j = \overline{1,N}$ – значения факторов в ходе экспериментов, а ε_j, $j = \overline{1,N}$ – случайные погрешности определения отклика, имеющие нулевое математическое ожидание и дисперсию σ_ε^2.

Если использовать метод наименьших квадратов, то оценки $\hat{b}_i$, $i = \overline{0,k}$ можно получить из условия минимизации величины

$$A(b_0 \ldots b_k) = \sum_{j=1}^{N} (y_j - b_0 x_{0j} - \ldots - b_k x_{kj})^2 \underset{b_0 \ldots b_k}{\rightarrow} \min .$$

$$\left.\frac{\partial A}{\partial b_i}\right|_{b_i = \hat{b}_i} = 0, \; i = \overline{0,k},$$

$$\frac{\partial A}{\partial b_i} = -2\sum_{j=1}^{N}(y_j - \hat{b}_0 x_{0j} - \ldots - \hat{b}_k x_{kj})\,x_{ij} = 0, \quad i = \overline{0,k}.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \sum_{t=0}^{k} \hat{b}_t x_{tj} = \sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_j, \quad i = \overline{0,k}.$$

Введем векторы $\hat{b} = (\hat{b}_0,\ldots,\hat{b}_k)^T$, $y = (y_1,\ldots,y_N)^T$ и матрицу $X = \|x_{rs}\|$, где $r = \overline{0,k}$ – строки, $s = \overline{1,N}$ – столбцы.

Матрица X^T **называется матрицей планирования, ее размерность равна** $N \times (k+1)$**.**

В результате получим матричное уравнение вида

$$XX^T\hat{b} = Xy, \quad C = XX^T, \quad C\hat{b} = Xy.$$

Решение уравнения для компонентов $\hat{b}$ имеет вид

$$\hat{b} = C^{-1}Xy. \tag{2.3}$$

Значительного упрощения в вычислениях можно достичь, если столбцы матрицы X ортогональны, то есть

$$\sum_{j=1}^{N} x_{lj} x_{rj} = 0, \quad l \neq r, \quad 0 \leq r, l \leq k.$$

Это значит, что матрица C имеет вид

$$C = XX^T = \begin{pmatrix} c_{00} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{kk} \end{pmatrix}, \quad c_{ii} = \sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 .$$

При ортогональной матрице X коэффициенты регрессии определяются по формуле

$$\hat{b}_i = \sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_j \Big/ \sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 , \quad i = \overline{0,k} . \qquad (2.4)$$

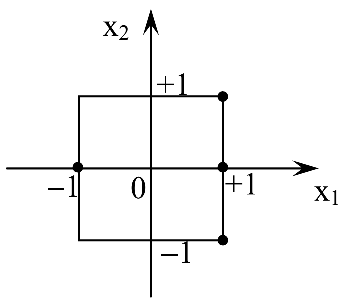
Если теперь пронормировать факторы

$$x_i^* = (x_i - x_{i0}) / \Delta x_i ,$$
$$x_{i0} = x_{i\min} + \Delta x_i ; \quad \Delta x_i = (x_{i\max} - x_{i\min}) / 2 ,$$

то условия ортогональности будут выполняться, если уровни факторов в ходе эксперимента будут взяты симметрично относительно начала координат и равны $+1$ и -1. **Такой план эксперимента называется ортогональным**.

$$N = 2^k .$$

Если осуществляют все возможные сочетания уровней факторов, то получают так называемый **полный факторный эксперимент** (ПФЭ). Полный факторный план при двух уровнях называют еще **планом** D или **планом –** 2^k.



№ эксперимента	x_0	ПФЭ		$x_1 x_2$ (x_3)	Реакция y
		x_1	x_2		
1	1	–1	–1	+1	y_1
2	1	+1	–1	–1	y_2
3	1	–1	+1	–1	y_3
4	1	+1	+1	+1	y_4

Рис. 2.7. Пример формирования матрицы планирования при $k = 2$

Для сокращения количества экспериментов в ряде случаев можно реализовать матрицу планирования, содержащую часть полного факторного плана, то есть провести **дробный факторный эксперимент** (дробный план).

Сущность дробного факторного эксперимента сводится к сокращению числа членов аппроксимирующего полинома за счет смешивания основных факторов с теми, которые на основании априорных или интуитивных соображений слабо влияют на изучаемый процесс.

Используя матрицу планирования рис. 2.7, можно вычислить коэффициенты и представить результаты в виде уравнения

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 .$$

Если в выбранных интервалах варьирования ограничиться описанием системы линейной моделью, то достаточно определить три коэффициента b_0, b_1, b_2. При этом остается одна степень свободы, которую можно использовать для минимизации числа испытаний.

При линейном описании $b_{12} \to 0$ и вектор-столбец значений x_1x_2 можно использовать для нового фактора x_3. В этом случае раздельных оценок, которые имели бы место при реализации ПФЭ типа 2^3, уже не будет.

При использовании плана, полученного после подстановки значений $x_3 = x_1x_2$, нет, также, разницы между значениями x_0 и $x_1x_2x_3$, x_1 и x_2x_3, x_2 и x_1x_3. **В результате происходит смешивание факторов**, **а получаемые оценки смещаются**

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3 =$$

$$= b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + (b_3 + b_{12})x_1x_2 + b_{13}x_1^2x_2 + b_{23}x_2^2x_1 + b_{123}x_3^2 =$$

$$= (b_0 + b_{123}) + (b_1 + b_{23})x_1 + (b_2 + b_{13})x_2 + (b_3 + b_{12})x_3 .$$

Это означает, что вместо искомых оценок коэффициентов фактически находятся **смещенные** оценки

$$b_0 \to b_0 + b_{123}, \;\; b_1 \to b_1 + b_{23}, \;\; b_2 \to b_2 + b_{13}, \;\; b_3 \to b_3 + b_{12},$$

Этим смещением пренебрегают, считая, что $b_{12} \cong 0$, $b_{23} \cong 0$, $b_{13} \cong 0$, $b_{123} \cong 0$.

Таким образом, вместо 2^3 испытаний в рамках ПФЭ можно провести только 2^2 в рамках дробного эксперимента.

Правило проведения дробного эксперимента формулируется следующим образом: для сокращения числа испытаний новому фактору присваиваются значения вектор-столбца матрицы, принадлежащего взаимодействию, которым можно пренебречь.

Формирование дробного эксперимента из четырех испытаний для оценки влияния трех факторов осуществляется на основе половины ПФЭ типа 2^3. Эта половина называется полурепликой. Их может быть две:

первая полуреплика получается, если приравнять x_3 и x_1x_2, при этом $x_1x_2x_3 = 1$;

вторая полуреплика получается, если приравнять $-x_1x_2$ и x_3, при этом $x_1x_2x_3 = -1$.

Таблица 2.1. Формирование дробных планов

№ испыта-ния	$x_3 = x_1x_2$			
	x_1	x_2	x_3	$x_1x_2x_3$
1	+1	+1	+1	1
2	–1	–1	+1	1
3	+1	–1	–1	1
4	–1	+1	–1	1

№ испыта-ния	$x_3 = -x_1x_2$			
	x_1	x_2	x_3	$x_1x_2x_3$
1	+1	+1	–1	–1
2	–1	–1	–1	–1
3	+1	–1	+1	–1
4	–1	+1	+1	–1

Таким образом, для выбора условий испытаний в рамках СП необходимо установить перечень существенных факторов, значимо влияющих на величину искомого показателя эффективности системы.

Далее из априорных предположений выбирается вид аппроксимирующего полинома, для которого определяется матрица планирования, реализующая различные комбинации уровней факторов.

С учетом анализа взаимодействий проводится рациональное усечение матрицы с целью сокращения объема экспериментов.

Полученная совокупность сочетаний уровней факторов дает полное представление о том, каков должен быть стратегический план эксперимента.