

# Системы билинейных уравнений

---

Выполнил: студент 3 курса Морозов Евгений

Руководитель: А.В. Лобода

19 мая 2016 г.

Воронежский Государственный Университет

Факультет Компьютерных Наук

Кафедра Цифровых Технологий

- Система билинейных уравнений — это система уравнений следующего вида:

$$\sum_{k,j} a_{jk}^i r_j s_k = d_i, \quad j = 1 \dots m, \quad k = 1 \dots n,$$

$i = 1 \dots l$  — номер уравнения в системе.

- Компактная запись параметров системы —  $(l; m, n)$
- Система называется **однородной**, если  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ .
- В однородных системах всегда имеются **тривиальные** решения:  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$  или  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ .
- В данной работе изучается вопрос о наличии нетривиальных решений у однородных систем.
- Систему, имеющую нетривиальные решения будем называть **нерегулярной**.

# Задача об однородности

Системы однородных билинейных уравнений возникают, например, в задаче об аффинной однородности поверхностей. Один из возникающих сложных случаев связан с

$$m = n, l = 2m - 1, \text{ в частности, } (15; 8, 8).$$

Особый интерес в этой задаче представляют именно нерегулярные системы.

- В основном случае  $(15; 8, 8)$  — полная картина пока не получена.
- В связи с этим в работе исследуются более простые случаи.

## Случай (3; 2, 2): основные понятия

Любую билинейную систему можно записать в ином виде:

$$\mathbf{r}^T \cdot A_i \cdot \mathbf{s} = 0, \quad i = 1 \dots l$$

$$A_i = [a_{jk}^i] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Тогда составим матрицу  $A \in \mathbb{R}^{l \times m \cdot n}$  из развернутых в строки матриц билинейных форм  $A_i$  и назовем **матрицей системы**.  
Для случая (3; 2, 2):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{21}^1 & a_{22}^1 \\ a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{21}^2 & a_{22}^2 \\ a_{11}^3 & a_{12}^3 & a_{21}^3 & a_{22}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Далее будем рассматривать только системы, имеющие полный ранг матрицы  $A$ , т.е.  $\text{rank } A = 3$ .

## Случай (3; 2, 2): исследование решений

Любая билинейная система является линейной по одному из наборов переменных. Для случая (3; 2, 2):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 & a_{13}s_1 + a_{14}s_2 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 & a_{23}s_1 + a_{24}s_2 \\ a_{31}s_1 + a_{32}s_2 & a_{33}s_1 + a_{34}s_2 \end{pmatrix}}_B \times \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

При фиксированных  $s$  эта система имеет нетривиальные по  $r$  решения, если ранг матрицы  $B$  не полон. В таком случае составим новую систему уравнений из трёх миноров второго порядка матрицы  $B$ , приравняв их к нулю:

$$\begin{cases} M_1 = Q_1(s) = 0 \\ M_2 = Q_2(s) = 0 \\ M_3 = Q_3(s) = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad M \times \begin{pmatrix} s_1 s_2 \\ s_1^2 \\ s_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Достаточное условие регулярности системы

Для нахождения нетривиальных по  $r$  решений, нужно найти решения предыдущей системы уравнений относительно  $s$ . Если  $\det M \neq 0$ , то решения только тривиальные. Аналогичные рассуждения по  $s$  приводят к точно такому же определителю, что дает **достаточное условие регулярности**.

Пусть  $d_{k,m,n}$  — минор второго порядка в матрице  $A$ , получаемый вычеркиванием строки  $k$  и столбцов  $m$  и  $n$ .

**Теорема 1:** Если определитель

$$\begin{aligned}\det M = & (d_{2,1,4}d_{3,2,4} + d_{2,2,3}d_{3,2,4} - d_{2,2,4}d_{3,1,4} - d_{2,2,4}d_{3,2,3})d_{1,1,3} + \\ & + (d_{1,2,4}d_{3,1,4} + d_{1,2,4}d_{3,2,3} - d_{1,1,4}d_{3,2,4} - d_{1,2,3}d_{3,2,4})d_{2,1,3} + \\ & + (d_{1,1,4}d_{2,2,4} + d_{1,2,3}d_{2,2,4} - d_{1,2,4}d_{2,1,4} - d_{1,2,4}d_{2,2,3})d_{3,1,3}\end{aligned}$$

не равен нулю, то  $(3; 2, 2)$ -система является *регулярной*.

# Преобразования билинейной системы

Обозначим допустимые преобразования, которые не изменяют факт регулярности произвольной  $(l; m, n)$ -системы:

- линейные комбинации уравнений;
- замены переменных  $\mathbf{r} = C\mathbf{r}^*$ ,  $\mathbf{s} = D\mathbf{s}^*$ , изменяющие матрицу по следующему закону:

$$A^* = C^T \cdot A \cdot D, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$C, D$  — невырожденные матрицы соответствующих размерностей.

## Лемма 1 (о невырожденной форме):

Если ранг матрицы  $(3; 2, 2)$ -системы полон, то существует линейная комбинация билинейных форм из этой системы, имеющая невырожденную матрицу.

## Упрощенный вид системы

### Теорема 2 (промежуточная):

Билинейная  $(3; 2, 2)$ -система полного ранга приводима допустимыми преобразованиями к одному из трёх упрощенных видов:

$$1) \begin{cases} r_1 s_1 + r_2 s_2 = 0 \\ r_1 s_2 - r_2 s_1 = 0 \\ s_1(a'_1 r_1 + a'_2 r_2) = 0 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} r_1 s_2 = 0 \\ r_1 s_1 + r_2 s_2 = 0 \\ s_1(a'_1 r_1 + a'_2 r_2) = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} r_1 s_1 = 0 \\ r_2 s_2 = 0 \\ r_1 s_2 \cos \varphi + r_2 s_1 \sin \varphi = 0 \end{cases}$$



# Критерий нерегулярности

## Теорема 3 (критерий нерегулярности):

Билинейная  $(3; 2, 2)$ -система полного ранга нерегулярна тогда и только тогда, когда она приводима к одному из двух канонических видов:

$$1) \begin{cases} r_1 s_1 = 0 \\ r_2 s_2 = 0 \\ r_1 s_2 = 0 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} r_1 s_1 = 0 \\ r_2 s_2 = 0 \\ r_2 s_1 = 0 \end{cases}$$

# Метод мономов и миноров (МММ)

Метод заключается в построении специальной системы уравнений, состоящей из приравненных к нулю *миноров* матрицы, построенной аналогично матрице  $B$ . Решая эту систему относительно получившихся *мономов*, можно получить нетривиальные решения системы или доказать её регулярность.

Этот метод позволил полностью описать нетривиальные решения  $(7; 4, 4)$ - и  $(9; 5, 5)$ -систем.

## Замечание:

Этот метод не дает должных результатов на больших системах. В случае  $(15; 8, 8)$  возникает СЛАУ  $6435 \times 6435$ , которую необходимо решить аналитически. С этой задачей пока что не справился ни один математический пакет.



Кострикин А.И.

*Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры.*

М.: Физико-математическая литература, 2000.



S. Cohen, C. Tomasi

*Systems of Bilinear Equations.*

Computer Science Department, Stanford University, 1998

Спасибо за внимание