# Системы билинейных уравнений

Выполнил: студент 3 курса Морозов Евгений
Руководитель: А.В. Лобода

19 мая 2016 г.

Воронежский Государственный Университет
Факультет Компьютерных Наук
Кафедра Цифровых Технологий

# Основные понятия

- **Система билинейных уравнений** — это система уравнений следующего вида:

$$\sum_{k,j} a^i_{jk} r_j s_k = d_i,\ j = 1 \dots m,\ k = 1 \dots n,$$

$$i = 1 \dots l \text{ — номер уравнения в системе.}$$

- Компактная запись параметров системы — $(l; m, n)$
- Система называется **однородной**, если $\mathbf{d} = \mathbf{0}$.
- В однородных системах всегда имеются **тривиальные** решения: $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.
- В данной работе изучается вопрос о наличии нетривиальных решений у однородных систем.
- Систему, имеющую нетривиальные решения будем называть **нерегулярной**.

# Задача об однородности

Системы однородных билинейных уравнений возникают, например, в задаче об аффинной однородности поверхностей. Один из возникающих сложных случаев связан с

$$m = n,\ l = 2m - 1, \text{ в частности, } (15; 8, 8).$$

Особый интерес в этой задаче представляют именно нерегулярные системы.

- В основном случае $(15; 8, 8)$ — полная картина пока не получена.
- В связи с этим в работе исследуются более простые случаи.

# Случай $(3;2,2)$: основные понятия

Любую билинейную систему можно записать в ином виде:

$$\mathbf{r}^T \cdot A_i \cdot \mathbf{s} = 0, \;\; i = 1 \dots l$$
$$A_i = \left[a^i_{jk}\right] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Тогда составим матрицу $A \in \mathbb{R}^{l \times m \cdot n}$ из развернутых в строки матриц билинейных форм $A_i$ и назовем **матрицей системы**. Для случая $(3;2,2)$:

$$A = \begin{pmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} & a^1_{21} & a^1_{22} \\ a^2_{11} & a^2_{12} & a^2_{21} & a^2_{22} \\ a^3_{11} & a^3_{12} & a^3_{21} & a^3_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Далее будем рассматривать только системы, имеющие полный ранг матрицы $A$, т.е. $\operatorname{rank} A = 3$.

## Случай $(3; 2, 2)$: исследование решений

Любая билинейная система является линейной по одному из наборов переменных. Для случая $(3; 2, 2)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 & a_{13}s_1 + a_{14}s_2 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 & a_{23}s_1 + a_{24}s_2 \\ a_{31}s_1 + a_{32}s_2 & a_{33}s_1 + a_{34}s_2 \end{pmatrix}}_{B} \times \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

При фиксированных $\mathbf{s}$ эта система имеет нетривиальные по $\mathbf{r}$ решения, если ранг матрицы $B$ не полон. В таком случае составим новую систему уравнений из трёх миноров второго порядка матрицы $B$, приравняв их к нулю:

$$\begin{cases} M_1 = Q_1(\mathbf{s}) = 0 \\ M_2 = Q_2(\mathbf{s}) = 0 \\ M_3 = Q_3(\mathbf{s}) = 0 \end{cases} \backsim \; M \times \begin{pmatrix} s_1 s_2 \\ s_1^2 \\ s_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Достаточное условие регулярности системы

Для нахождения нетривиальных по **r** решений, нужно найти решения предыдущей системы уравнений относительно **s**. Если $\det M \neq 0$, то решения только тривиальные. Аналогичные рассуждения по **s** приводят к точно такому же определителю, что дает **достаточное условие регулярности**.

Пусть $d_{k,m,n}$ — минор второго порядка в матрице $A$, получаемый вычеркиванием строки $k$ и столбцов $m$ и $n$.

**Теорема 1:** Если определитель

$$\begin{aligned}\det M = {} & (d_{2,1,4}d_{3,2,4} + d_{2,2,3}d_{3,2,4} - d_{2,2,4}d_{3,1,4} - d_{2,2,4}d_{3,2,3})d_{1,1,3} + \\ & + (d_{1,2,4}d_{3,1,4} + d_{1,2,4}d_{3,2,3} - d_{1,1,4}d_{3,2,4} - d_{1,2,3}d_{3,2,4})d_{2,1,3} + \\ & + (d_{1,1,4}d_{2,2,4} + d_{1,2,3}d_{2,2,4} - d_{1,2,4}d_{2,1,4} - d_{1,2,4}d_{2,2,3})d_{3,1,3}\end{aligned}$$

не равен нулю, то $(3;2,2)$-система является *регулярной*.

# Преобразования билинейной системы

Обозначим **допустимые** преобразования, которые не изменяют факт регулярности произвольной $(l; m, n)$-системы:

- линейные комбинации уравнений;
- замены переменных $\mathbf{r} = C\mathbf{r}^*, \mathbf{s} = D\mathbf{s}^*$, изменяющие матрицу по следующему закону:
$$A^* = C^T \cdot A \cdot D,\ \ A \in \mathbb{R}^{m \times n},$$
$C$, $D$ — невырожденные матрицы соответствующих размерностей.

**Лемма 1 (о невырожденной форме):**
Если ранг матрицы $(3; 2, 2)$-системы полон, то существует линейная комбинация билинейных форм из этой системы, имеющая невырожденную матрицу.

# Упрощенный вид системы

**Теорема 2 (промежуточная):**

Билинейная $(3; 2, 2)$-система полного ранга приводима допустимыми преобразованиями к одному из трёх упрощенных видов:

$$1) \begin{cases} r_1 s_1 + r_2 s_2 = 0 \\ r_1 s_2 - r_2 s_1 = 0 \\ s_1(a'_1 r_1 + a'_2 r_2) = 0 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} r_1 s_2 = 0 \\ r_1 s_1 + r_2 s_2 = 0 \\ s_1(a'_1 r_1 + a'_2 r_2) = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} r_1 s_1 = 0 \\ r_2 s_2 = 0 \\ r_1 s_2 \cos\varphi + r_2 s_1 \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

**Теорема 3 (критерий нерегулярности):**
Билинейная $(3;2,2)$-система полного ранга нерегулярна тогда и только тогда, когда она приводима к одному из двух канонических видов:

$$1)\begin{cases} r_1 s_1 = 0 \\ r_2 s_2 = 0 \\ r_1 s_2 = 0 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} r_1 s_1 = 0 \\ r_2 s_2 = 0 \\ r_2 s_1 = 0 \end{cases}$$

# Метод мономов и миноров (МММ)

Метод заключается в построении специальной системы уравнений, состоящей из приравненных к нулю *миноров* матрицы, построенной аналогично матрице $B$. Решая эту систему относительно получившихся *мономов*, можно получить нетривиальные решения системы или доказать её регулярность.

Этот метод позволил полностью описать нетривиальные решения $(7;4,4)$- и $(9;5,5)$-систем.

**Замечание:**

Этот метод не дает должных результатов на больших системах. В случае $(15;8,8)$ возникает СЛАУ $6435 \times 6435$, которую необходимо решить аналитически. С этой задачей пока что не справился ни один математический пакет.

# Литература


Кострикин А.И.
***Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры*.**
М.: Физико-математическая литература, 2000.

S. Cohen, C. Tomasi
***Systems of Bilinear Equations*.**
Computer Science Department, Stanford University, 1998

Спасибо за внимание