СИСТЕМЫ БИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.Ю. Морозов
Студент
А.В. Лобода
Профессор

Введение

Для билинейных систем не существует теории, которая бы позволила решать их в общем виде. Тем не менее, в некоторых математических задачах, к примеру, в задаче описания аффинно-однородных поверхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$, возникает такая потребность. В однородных билинейных системах, которые появляются в указанной задаче, особый интерес представляет наличие ненулевых решений. В данной работе рассматриваются частные случаи билинейных систем и выводится критерий, позволяющий определить, имеет ли система ненулевые решения.

1. Постановка задачи

Система билинейных уравнений (или билинейная система) — это система следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a^i_{jk} r_j s_k = d_i,\ i = \overline{1,l}, \tag{1}$$

где m,n — число неизвестных в векторах $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$, l — число уравнений и $a^i_{jk} \in \mathbb{R}$ — действительные числовые коэффициенты [1]. Для такой системы введём компактную запись её параметров $(l;m,n)$.

Билинейную систему можно записать в альтернативном виде:

$$\mathbf{r}^T \cdot A_i \cdot \mathbf{s} = d_i, \tag{2}$$

где $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ — наборы неизвестных, $A_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — матрица билинейной формы i-го уравнения.

п

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & \dots & a_{1n}^1 & \dots & a_{mn}^1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{11}^l & \dots & a_{1n}^l & \dots & a_{mn}^l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times m \cdot n}$$

Ранг системы билинейных форм (1) совпадает с рангом этой матрицы. В этой работе будут рассматриваться только системы полного ранга.

Билинейная система называется *однородной*, если правая часть равна нулю, т.е. $d_i = 0$. У таких систем всегда есть тривиальные решения — решения, при которых один из наборов в переменных является нулевым, т.е. $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

В данной работе будет рассматриваться вопрос наличия именно нетривиальных решений в однородных системах билинейных уравнений. Как правило, системы с большим количеством уравнений имеют только тривиальные решения, поэтому системы, имеющие нетривиальные решения будем называть *нерегулярными*.

В уже упомянутой задаче описания аффинно-однородных поверхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$, возникает потребность в установлении факта регулярности системы. Один из возникающих сложных случаев связан с $m = n$, $l = 2m - 1$. Особый интерес в уже упомянутой задаче представляют именно нерегулярные системы и в основном случае $(15; 8, 8)$ нетривиальные решения пока не описаны. В связи с этим, в данной работе изучаются более простые случаи. Самый простой из них — $(1; 1, 1)$, являющийся тривиальным, и рассматривать его отдельно не имеет смысла.

2. Случай (3;2,2)-систем

В следующем случае $(3; 2, 2)$ возникает система вида:

$$\begin{cases} a_{1,1} r_1 s_1 + a_{1,2} r_1 s_2 + a_{1,3} r_2 s_1 + a_{1,4} r_2 s_2 = 0 \\ a_{2,1} r_1 s_1 + a_{2,2} r_1 s_2 + a_{2,3} r_2 s_1 + a_{2,4} r_2 s_2 = 0 \\ a_{3,1} r_1 s_1 + a_{3,2} r_1 s_2 + a_{3,3} r_2 s_1 + a_{3,4} r_2 s_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим набор переменных $\mathbf{r}$. Вынося r_1 и r_2 как общие множители и переписывая систему (3) в матричном виде, получаем:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 & a_{13}s_1 + a_{14}s_2 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 & a_{23}s_1 + a_{24}s_2 \\ a_{31}s_1 + a_{32}s_2 & a_{33}s_1 + a_{34}s_2 \end{pmatrix}}_{B} \times \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ясно, что при фиксированных значениях $\mathbf{s}$ эта система будет иметь нетривиальные по $\mathbf{r}$ решения, если ранг матрицы B не полон (в противном случае система имеет единственное решение — $\mathbf{r} = \mathbf{0}$) [2]. Составим из трёх миноров второго порядка матрицы B новую систему уравнений:

$$\begin{cases} M_1 = Q(\mathbf{s}) = 0 \\ M_2 = Q(\mathbf{s}) = 0 \\ M_3 = Q(\mathbf{s}) = 0 \end{cases}, \tag{5}$$

где $Q_1(\mathbf{s})$, $Q_2(\mathbf{s})$ и $Q_3(\mathbf{s})$ — квадратичные формы от $\mathbf{s}$. Эту систему можно переписать в матричном виде, выделяя в качестве вектора неизвестных мономы второго порядка относительно s:

$$M \times \begin{pmatrix} s_1 s_2 \\ s_1^2 \\ s_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Рассмотрим случай, когда ранг матрицы M полон, т.е. матрица M невырожденна. Тогда система (6) имеет единственное решение. Как следствие, $\mathbf{s} = \mathbf{0}$. Это означает, что система (3) имеет только тривиальные решения. Отсюда вытекает *достаточное условие регулярности*:

Теорема 1. *(достаточное условие регулярности): если определитель матрицы M не равен нулю, то билинейная* $(3;2,2)$*-система является регулярной.*

Примечательно, что аналогичные рассуждения относительно набора переменных $\mathbf{s}$ приводят к точно такому же определителю. Следствием из теоремы 1 является *необходимое условие нерегулярности*:

Следствие 1. *(необходимое условие нерегулярности): если билинейная* $(3;2,2)$-*система является нерегулярной, то определитель матрицы M равен нулю.*

Определитель матрицы M имеет шестой порядок, зависит от двенадцати коэффициентов и выглядит довольно громоздко. Пусть $d_{i,j,k}$ — минор второго порядка в матрице системы (3), полученный вычеркиванием i-й строки и столбцов j и k. Тогда определитель матрицы M будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\det M = (&d_{2,1,4}d_{3,2,4}+d_{2,2,3}d_{3,2,4}-d_{2,2,4}d_{3,1,4}-d_{2,2,4}d_{3,2,3})d_{1,1,3}+\\ &+(d_{1,2,4}d_{3,1,4}+d_{1,2,4}d_{3,2,3}-d_{1,1,4}d_{3,2,4}-d_{1,2,3}d_{3,2,4})d_{2,1,3}+\\ &+(d_{1,1,4}d_{2,2,4}+d_{1,2,3}d_{2,2,4}-d_{1,2,4}d_{2,1,4}-d_{1,2,4}d_{2,2,3})d_{3,1,3}\end{aligned}$$

3. Критерий регулярности для (3;2,2)-систем

Перепишем систему (3) в виде (2):

$$\begin{cases}\mathbf{r}^T\cdot A_1\cdot\mathbf{s}=0\\ \mathbf{r}^T\cdot A_2\cdot\mathbf{s}=0\\ \mathbf{r}^T\cdot A_3\cdot\mathbf{s}=0\end{cases}\tag{7}$$

Обозначим *допустимые преобразования*, которые не изменяют факта регулярности произвольной $(l;m,n)$ -системы:

- гауссовы преобразования уравнений в системе,
- замены переменных $\mathbf{r}=C\cdot\mathbf{r}^*$, $\mathbf{s}=D\cdot\mathbf{s}^*$ (матрицы C и D невырожденны), которые изменяют матрицу билинейной формы A_i по закону:

$$A_i^*=C^T\cdot A_i\cdot D$$

Для дальнейших преобразований потребуется хотя бы одно уравнение с невырожденной матрицей билинейной формы.

Лемма 1. *Если* $(3;2,2)$*-система является системой полного ранга, то существует гауссово преобразование билинейных форм из этой системы, приводящее к системе с невырожденной матрицей билинейной формы.*

Используя эту лемму, можно получить систему с одной невырожденной матрицей билинейной формы. Пусть этой матрицей будет матрица A_1. Тогда «улучшим» вид этой матрицы, вводя замену $\mathbf{r} = A_1^T \mathbf{r}^*, \mathbf{s} = \mathbf{s}^*$. В результате получаем

$$A_1^* = (A_1^{-T})^T \cdot A_1 \cdot E = E$$

Произведём еще одну замену так, чтобы «улучшить» вид формы A_2^*, полученной после первой замены, сохраняя тривиальный (единичный) вид формы A_1. Вид матрицы $A_2^{'}$ будет зависеть от собственных значений и собственных векторов матрицы A_2^*. Для матрицы 2×2 возможны следующие три случая [3]:

- Различные собственные значения (простой спектр): $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
- Кратные собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2$
- Комплексные собственные значения: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \imath\beta,\ \beta \neq 0.$

Рассматривая все три случая, можно сформулировать промежуточную теорему об упрощенном виде системы (7):

Теорема 2. *Любая билинейная* $(3;2,2)$*-система полного ранга приводима допустимыми преобразованиями к одному из трёх упрощенных видов:*

$$1)\begin{cases} r_1s_1 + r_2s_2 = 0 \\ r_1s_2 - r_2s_1 = 0 \\ s_1(a_1'r_1 + a_2'r_2) = 0 \end{cases},\quad 2)\begin{cases} r_1s_2 = 0 \\ r_1s_1 + r_2s_2 = 0 \\ s_1(a_3'r_1 + a_4'r_2) = 0 \end{cases},$$

$$3)\begin{cases} r_1s_1 = 0 \\ r_2s_2 = 0 \\ r_1s_2\cos\varphi + r_2s_1\sin\varphi = 0 \end{cases}, \qquad (8)$$

где a'_1, a'_2 и a'_3, a'_4 одновременно не равны нулю, φ — некоторые коэффициенты, полученные после произведённых преобразований.

Рассмотрим условия, при которых упрощенные виды (8) могут иметь нетривиальные решения. Воспользуемся необходимым условием нерегулярности, сформулированным в следствии 1 и вычислим определители соответствующих матриц для каждого вида, приравнивая их к нулю:

$$1)\ \det M = -({a'_1}^2 + {a'_2}^2) = 0 \quad 2)\ \det M = a'_4 = 0 \quad 3)\ \det M = \cos\varphi \cdot \sin\varphi = 0 \tag{9}$$

Накладывая ограничения (9) на коэффициенты в упрощенных формах (8), мы получим *канонические* виды, которые имеют нетривиальные решения. Отсюда формулируется необходимое и достаточное условие нерегулярности для билинейной системы полного ранга (критерий нерегулярности):

Теорема 3. *(критерий нерегулярности) Билинейная $(3;2,2)$-система полного ранга нерегулярна тогда и только тогда, когда она приводима к одному из двух канонических видов:*

$$1)\begin{cases} r_1 s_1 = 0 \\ r_2 s_2 = 0 \\ r_1 s_2 = 0 \end{cases} \qquad\qquad 2)\begin{cases} r_1 s_1 = 0 \\ r_2 s_2 = 0 \\ r_2 s_1 = 0 \end{cases}$$

4. Заключение

В этой работе была рассмотрена проблема определения нерегулярности однородной системы билинейных уравнений. В общем случае эта задача слишком сложна для рассмотрения, поэтому были исследованы более простые случаи. Досконально был проанализирован случай $(3;2,2)$-системы и был выведен критерий нерегулярности для случая системы полного ранга, который позволяет, не решая систему, определить факт её нерегулярности.

Список литературы

1. *Cohen S.* Systems of Bilinear Equations / Stanford University Computer Science Departament. — 1999.
2. *Кострикин А. И.* Часть I. Основы алгебры. Введение в алгебру. — 2-е изд. — М.: Физико-математическая литература, 2000.
3. *Кострикин А. И.* Часть II. Линейная алгебра. Введение в алгебру. — 2-е изд. — М.: Физико-математическая литература, 2000.