Системы билинейных уравнений

Морозов Евгений

19 мая 2016 г.

Воронежский Государственный Университет
Факультет Компьютерных Наук

Содержание

- **Система билинейных уравнений** — это система уравнений следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ijk} r_j s_k = d_i, \text{ для } i = 1, \ldots, l$$

- Компактная запись параметров системы — $(l; m, n)$
- Система называется **однородной**, если $\mathbf{d} = \mathbf{0}$.
- В однородных системах всегда имеют место **тривиальные** решения: $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.
- Система, имеющие только тривиальные решения называется **регулярной**.
- В данной работе рассматриваются только однородные системы.

Задача об однородности

В задаче об однородности аффинных поверхностей возникают системы однородных билинейных уравнений особого вида :

$$l = m + n - 1,\ m = n.$$

Особый интерес в этой задаче представляют нерегулярные системы. Примеры возникающих систем:

- Случай $(15; 8, 8)$ — все стандартные методы решения нелинейных систем (например, базис Грёбнера) не дают результатов.
- В связи с этим имеет смысл исследовать более простой, «модельный» случай $(3; 2, 2)$, чтобы понять природу нерегулярных систем.

Случай $(3;2,2)$

Любая билинейная система является линейной по одному из наборов переменных. Для случая $(3;2,2)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 & a_{13}s_1 + a_{14}s_2 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 & a_{23}s_1 + a_{24}s_2 \\ a_{31}s_1 + a_{32}s_2 & a_{33}s_1 + a_{34}s_2 \end{pmatrix}}_{A} \times \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Эта система имеет нетривиальные решения, если $\operatorname{rank} A \neq 3$, что означает, что все миноры третьего порядка в матрице A равны нулю.

Замечание:

Понятие ранга справедливо при фиксированных $\mathbf{s}$. Для их нахождения составим систему уравнений из миноров третьего порядка матрицы A.

Достаточное условие регулярности системы

Составим матрицу $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ из коэффициентов системы так, чтобы $A_{i,j} = a_{i,j}$.

Пусть $d_{k,m,n}$ — минор второго порядка в матрице A, получаемый вычеркиванием строки k и столбцов m и n.

Тогда достаточное условие регулярности системы формулируется так:

Теорема:

Если определитель следующего вида не равен нулю, то система является *регулярной*:

$$\begin{aligned}\det M = {} & (d_{2,1,4}d_{3,2,4} + d_{2,2,3}d_{3,2,4} - d_{2,2,4}d_{3,1,4} - d_{2,2,4}d_{3,2,3})d_{1,1,3} + \\ & + (d_{1,2,4}d_{3,1,4} + d_{1,2,4}d_{3,2,3} - d_{1,1,4}d_{3,2,4} - d_{1,2,3}d_{3,2,4})d_{2,1,3} + \\ & + (d_{1,1,4}d_{2,2,4} + d_{1,2,3}d_{2,2,4} - d_{1,2,4}d_{2,1,4} - d_{1,2,4}d_{2,2,3})d_{3,1,3}\end{aligned}$$

Канонический вид системы

Теорема:

Пусть дана система билинейных уравнений с параметрами $(3,2,2)$ и матрица одной из билинейных форм невырождена. Тогда эта система приводима к одному из четырех канонических видов:

$$\begin{cases} r_1 s_1 = 0 \\ r_2 s_2 = 0 \\ r_1 s_2 \cos\varphi + r_2 s_1 \sin\varphi = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} r_1 s_1 + r_2 s_2 = 0 \\ a'_1 r_1 s_1 + a'_2 r_1 s_2 + a'_3 r_2 s_1 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} r_1 s_1 + r_2 s_2 = 0 \\ r_1 s_1 = 0 \\ s_1(a'_1 r_1 + a'_2 r_2) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} r_1 s_1 + r_2 s_2 = 0 \\ r_1 s_2 - r_2 s_1 = 0 \\ s_1(a'_1 r_1 + a'_2 r_2) = 0 \end{cases}$$

Метод мономно-минорной матрицы (MMM)

Этот метод был введен проф. А.В. Лободой для исследования нетривиальных решений в однородных системах билинейных уравнений.

Метод заключается в построении особой системы *линейных* уравнений на основе исходной. Решая новую систему, можно получить нетривиальные решения соответствующей билинейной системы или доказать её регулярность.

Замечание:

К сожалению, этот метод не дает должных результатов на больших системах. В случае $(15; 8, 8)$ возникакет матрица 6435×6435, которую необходимо решить аналитически. С этой задачей не справился ни один математический пакет.

Литература

Кострикин А.И.
***Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры*.**
М.: Физико-математическая литература, 2000.

S. Cohen, C. Tomasi
***Systems of Bilinear Equations*.**
Computer Science Department, Stanford University

Спасибо за внимание!