Воронежский государственный
университет

Факультет компьютерных наук

Системы билинейных уравнений

Автор:
Евгений Морозов

Руководитель:
Проф. А. В. Лобода

Аннотация

Системы уравнений — одна из самых часто встречающихся конструкций в математике. Наиболее исследованы системы линейных уравнений — они возникают практически во всех областях, так или иначе связанных с математикой. Но чаще всего линейность достигается некоторыми «трюками», например, пренебрежением множителями высокого порядка. В чисто математических задачах такое поведение не всегда допустимо, и, в связи с этим, возникает необходимость работы с системами нелинейных уравнений. К примеру, в задаче описания аффинно-однородных поверхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$ возникают системы билинейных уравнений. В данной работе рассматривается именно этот тип систем и подробно будет разобран случай системы, состоящей из трёх уравнений относительно четырёх неизвестных.

Содержание

1 Определение системы билинейных уравнений

Системой из l билинейных уравнений называется система следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{i,j,k} r_j s_k = d_i,\ \text{для } i = 1..\, l, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$. Параметры системы могут быть коротко записаны в виде $(l; m, n)$. В наиболее общем виде система записывается так:

$$\mathbf{r}T\mathbf{s} = \mathbf{d},$$

где $T = [a_{i,j,k}] \in \mathbb{R}^{l\times m\times n}$ — тензор третьего порядка, составленный из коэффициентов системы (1.1), $\mathbf{r} = [r_1, \cdots r_m]^T$ и $\mathbf{s} = [s_1, \cdots s_n]^T$ — векторы неизвестных, называемые *наборами переменных*, $\mathbf{d} = [d_1, \cdots d_l]^T$ — вектор правой части. Предлагается также альтернативная запись системы (1.1):

$$\mathbf{r}^T A_i \mathbf{s} = d_i,\ \text{для } i = 1..\, l, \tag{1.2}$$

где A_i — матрица следующего вида:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i,1,1} & \cdots & a_{i,1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,m,1} & \cdots & a_{i,m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \text{для } i = 1..\, l$$

Система называется однородной, если вектор правой части $\mathbf{d} = 0$:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{i,j,k} r_j s_k = 0,\ \text{для } i = 1..\, l,$$

Легко видеть, что при фиксировании одного из наборов переменных, получается обыкновенная система линейных уравнений относительно другого набора. Именно благодаря этому свойству билинейные системы получили своё название.

Простейшим примером билинейной системы может послужить уравнение равнобочной гиперболы в прямоугольной системе координат:

$$xy = \frac{a^2}{2},\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Если $m = n$, то такая система называется симметричной. При числе уравнений $l = 2n - 1$ симметричная система считается идеальной. Ясно, что уравнение (1.3) является примером идеальной системы билинейных уравнений. Такие системы представляют особый интерес в уже упомянутой задаче об описании аффинно-однородных поверхностей.

Решением системы вида (1.1) называются такие два вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$, что при подстановке их в систему получаются верные равенства. Тривиальным называется решение, когда один из наборов переменных является нулевым. Соответственно, $\mathbf{r}$- или $\mathbf{s}$-тривиальным решением называется такое решение, в котором соответствующий набор является нулевым. Отсюда следует, что любая однородная билинейная система всегда имеет тривиальные решения. Метода, позволяющего решить билинейную систему уравнений в общем виде на данный момент не существует. Тем не менее, в задаче об однородности интерес представляет наличие нетривиальных наборов переменных в таких системах.

2 Общий случай

Сюда можно написать немного воды, рассказать про базис Грёбнера, редуцирование системы, и прочие приятные вещи. Рассказать в общих чертах про метод МММ? Привести в качестве примера случай (15; 8, 8).

3 Частный случай

Рассмотрим следующую однородную симметричную билинейную систему:

$$\begin{cases} a_{1,1}r_1s_1 + a_{1,2}r_1s_2 + a_{1,3}r_2s_1 + a_{1,4}r_2s_2 = 0 \\ a_{2,1}r_1s_1 + a_{2,2}r_1s_2 + a_{2,3}r_2s_1 + a_{2,4}r_2s_2 = 0 \\ a_{3,1}r_1s_1 + a_{3,2}r_1s_2 + a_{3,3}r_2s_1 + a_{3,4}r_2s_2 = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Предлагается исследовать наличие нетривиальных решений в такой системе.

3.1 Метод мономно-минорной матрицы

Для начала, рассмотрим набор $\mathbf{r}$. Вынесем r_1, r_2 как общие множители во всех уравнениях:

$$\begin{cases} r_1(a_{1,1}s_1 + a_{1,2}s_2) + r_2(a_{1,3}s_1 + a_{1,4}s_2) = 0 \\ r_1(a_{2,1}s_1 + a_{2,2}s_2) + r_2(a_{2,3}s_1 + a_{2,4}s_2) = 0 \\ r_1(a_{3,1}s_1 + a_{3,2}s_2) + r_2(a_{3,3}s_1 + a_{3,4}s_2) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Этой системе соответствует следующее матричное уравнение:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1}s_1 + a_{1,2}s_2 & a_{1,3}s_1 + a_{1,4}s_2 \\ a_{2,1}s_1 + a_{2,2}s_2 & a_{2,3}s_1 + a_{2,4}s_2 \\ a_{3,1}s_1 + a_{3,2}s_2 & a_{3,3}s_1 + a_{3,4}s_2 \end{pmatrix}}_{A} \times \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Если $s_1 = s_2 = 0$, то это, как уже было сказано, тривиальный набор, который обращает предыдущее уравнение в верное тождество. Аналогично с набором $r_1 = r_2 = 0$, который является единственным решением в системе выше, если ранг матрицы A полон.

Таким образом, если решение не является тривиальным, то существует такой нетривиальный набор $\mathbf{r} \neq \{0, 0\}$ и такой набор $\mathbf{s} \neq \{0, 0\}$, что матрица A имеет неполный ранг при соответствующем $\mathbf{s}$. Это равносильно тому, что все миноры второго порядка в матрице A обращаются в ноль. Вообще говоря, миноры будут квадратично зависеть от $\mathbf{s}$. Таким образом, можно составить нелинейную систему уравнений относительно s_1 и s_2:

$$\begin{cases} M_1 = Q_1(\mathbf{s}) = 0 \\ M_2 = Q_2(\mathbf{s}) = 0 \\ M_3 = Q_3(\mathbf{s}) = 0 \end{cases}, \tag{3.3}$$

где M_1, M_2, M_3 — миноры 2-го порядка в матрице A и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M_1 &= (a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1}){s_1}^2 + (a_{1,1}a_{2,4} + a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2} - a_{1,4}a_{2,1})s_2s_1 + (a_{1,2}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,2}){s_2}^2 \\ M_2 &= (a_{1,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{3,1}){s_1}^2 + (a_{1,1}a_{3,4} + a_{1,2}a_{3,3} - a_{1,3}a_{3,2} - a_{1,4}a_{3,1})s_2s_1 + (a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,4}a_{3,2}){s_2}^2 \\ M_3 &= (a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}){s_1}^2 + (a_{2,1}a_{3,4} + a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2} - a_{2,4}a_{3,1})s_2s_1 + (a_{2,2}a_{3,4} - a_{2,4}a_{3,2}){s_2}^2 \end{aligned}$$

Очевидно, что в системе (3.3) тривиальный набор $\mathbf{s} = \{s_1, s_2\}$, уже рассмотренный ранее, является решением. В таком случае, чтобы выбрать нетривиальные решения в системе (3.2), необходимо найти нетривиальные решения системы (3.3). Для этого перепишем систему в виде линейной относительно мономов второго порядка $(s_1 s_2, s_1^2, s_2^2)$:

$$M \times \begin{pmatrix} s_1 s_2 \\ s_1^2 \\ s_2^2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

Введём следующие обозначения:

$$s_1 s_2 = Y_1, s_1^2 = Y_2, s_2^2 = Y_3$$

Таким образом, система (3.4) приобретает вид:

$$M \times \mathbf{Y} = \mathbf{0} \tag{3.5}$$

Эта система является линейной по $\mathbf{Y}$, что позволяет рассматривать её решения с классической точки зрения линейной алгебры.

Легко видеть, что $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ является решением системы (3.5) и не зависит от вида матрицы M. Если рассматривать M как матрицу некоего линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, то справедливо следующее отношение:

$$\dim(\operatorname{im} \mathcal{A}) + \dim(\ker \mathcal{A}) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

Отсюда вытекает уравнение на количество решений в системе (3.5):

$$\operatorname{rank} M + \dim \mathbf{Y} = 3$$

Рассмотрим случай, когда ранг матрицы M полон, т.е. $\operatorname{rank} M = 3$. В этом случае M является невырожденной матрицей. Сказанное выше приводит к $\dim \mathbf{Y} = 0$, из чего следует, что $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$. Для такой матрицы M, с учетом введённых обозначений, получается, что:

$$\begin{cases} s_1 s_2 = 0 \\ s_1^2 = 0 \\ s_2^2 = 0 \end{cases}$$

Если квадратичные комбинации из компонентов $\mathbf{s}$ нулевые, то $s_1 = s_2 = 0$ — тривиальное решение. Исходя из всего этого, предлагается следующая

Теорема 1. *Если матрица M невырождена, то система имеет только тривиальные решения.*

Отметим, что критерием невырождености матрицы является её определитель. Таким образом, если определитель матрицы M не равен нулю, то матрица не является вырожденной. В явном виде этот определитель выглядит довольно громоздко:

$$
\begin{aligned}
\det M = {} & {a_{1,1}}^2 a_{2,2} a_{2,3} {a_{3,4}}^2 - {a_{1,1}}^2 a_{2,2} a_{2,4} a_{3,3} a_{3,4} - {a_{1,1}}^2 a_{2,3} a_{2,4} a_{3,2} a_{3,4} + {a_{1,1}}^2 {a_{2,4}}^2 a_{3,2} a_{3,3} - \\
& - a_{1,1} a_{1,2} a_{2,1} a_{2,3} {a_{3,4}}^2 + a_{1,1} a_{1,2} a_{2,1} a_{2,4} a_{3,3} a_{3,4} - a_{1,1} a_{1,2} a_{2,2} a_{2,3} a_{3,3} a_{3,4} + a_{1,1} a_{1,2} a_{2,2} a_{2,4} {a_{3,3}}^2 + \\
& + a_{1,1} a_{1,2} {a_{2,3}}^2 a_{3,2} a_{3,4} + a_{1,1} a_{1,2} a_{2,3} a_{2,4} a_{3,1} a_{3,4} - a_{1,1} a_{1,2} a_{2,3} a_{2,4} a_{3,2} a_{3,3} - a_{1,1} a_{1,2} {a_{2,4}}^2 a_{3,1} a_{3,3} - \\
& - a_{1,1} a_{1,3} a_{2,1} a_{2,2} {a_{3,4}}^2 + a_{1,1} a_{1,3} a_{2,1} a_{2,4} a_{3,2} a_{3,4} + a_{1,1} a_{1,3} {a_{2,2}}^2 a_{3,3} a_{3,4} - a_{1,1} a_{1,3} a_{2,2} a_{2,3} a_{3,2} a_{3,4} + \\
& + a_{1,1} a_{1,3} a_{2,2} a_{2,4} a_{3,1} a_{3,4} - a_{1,1} a_{1,3} a_{2,2} a_{2,4} a_{3,2} a_{3,3} + a_{1,1} a_{1,3} a_{2,3} a_{2,4} {a_{3,2}}^2 - a_{1,1} a_{1,3} {a_{2,4}}^2 a_{3,1} a_{3,2} + \\
& + a_{1,1} a_{1,4} a_{2,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{3,4} + a_{1,1} a_{1,4} a_{2,1} a_{2,3} a_{3,2} a_{3,4} - 2\, a_{1,1} a_{1,4} a_{2,1} a_{2,4} a_{3,2} a_{3,3} - a_{1,1} a_{1,4} {a_{2,2}}^2 {a_{3,3}}^2 - \\
& - 2\, a_{1,1} a_{1,4} a_{2,2} a_{2,3} a_{3,1} a_{3,4} + 2\, a_{1,1} a_{1,4} a_{2,2} a_{2,3} a_{3,2} a_{3,3} + a_{1,1} a_{1,4} a_{2,2} a_{2,4} a_{3,1} a_{3,3} - a_{1,1} a_{1,4} {a_{2,3}}^2 {a_{3,2}}^2 + \\
& + a_{1,1} a_{1,4} a_{2,3} a_{2,4} a_{3,1} a_{3,2} + {a_{1,2}}^2 a_{2,1} a_{2,3} a_{3,3} a_{3,4} - {a_{1,2}}^2 a_{2,1} a_{2,4} {a_{3,3}}^2 - {a_{1,2}}^2 {a_{2,3}}^2 a_{3,1} a_{3,4} + \\
& + {a_{1,2}}^2 a_{2,3} a_{2,4} a_{3,1} a_{3,3} + a_{1,2} a_{1,3} {a_{2,1}}^2 {a_{3,4}}^2 - a_{1,2} a_{1,3} a_{2,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{3,4} - a_{1,2} a_{1,3} a_{2,1} a_{2,3} a_{3,2} a_{3,4} - \\
& - 2\, a_{1,2} a_{1,3} a_{2,1} a_{2,4} a_{3,1} a_{3,4} + 2\, a_{1,2} a_{1,3} a_{2,1} a_{2,4} a_{3,2} a_{3,3} + 2\, a_{1,2} a_{1,3} a_{2,2} a_{2,3} a_{3,1} a_{3,4} - a_{1,2} a_{1,3} a_{2,2} a_{2,4} a_{3,1} a_{3,3} - \\
& - a_{1,2} a_{1,3} a_{2,3} a_{2,4} a_{3,1} a_{3,2} + a_{1,2} a_{1,3} {a_{2,4}}^2 {a_{3,1}}^2 - a_{1,2} a_{1,4} {a_{2,1}}^2 a_{3,3} a_{3,4} + a_{1,2} a_{1,4} a_{2,1} a_{2,2} {a_{3,3}}^2 + \\
& + a_{1,2} a_{1,4} a_{2,1} a_{2,3} a_{3,1} a_{3,4} - a_{1,2} a_{1,4} a_{2,1} a_{2,3} a_{3,2} a_{3,3} + a_{1,2} a_{1,4} a_{2,1} a_{2,4} a_{3,1} a_{3,3} - a_{1,2} a_{1,4} a_{2,2} a_{2,3} a_{3,1} a_{3,3} + \\
& + a_{1,2} a_{1,4} {a_{2,3}}^2 a_{3,1} a_{3,2} - a_{1,2} a_{1,4} a_{2,3} a_{2,4} {a_{3,1}}^2 + {a_{1,3}}^2 a_{2,1} a_{2,2} a_{3,2} a_{3,4} - {a_{1,3}}^2 a_{2,1} a_{2,4} {a_{3,2}}^2 - \\
& - {a_{1,3}}^2 {a_{2,2}}^2 a_{3,1} a_{3,4} + {a_{1,3}}^2 a_{2,2} a_{2,4} a_{3,1} a_{3,2} - a_{1,3} a_{1,4} {a_{2,1}}^2 a_{3,2} a_{3,4} + a_{1,3} a_{1,4} a_{2,1} a_{2,2} a_{3,1} a_{3,4} - \\
& - a_{1,3} a_{1,4} a_{2,1} a_{2,2} a_{3,2} a_{3,3} + a_{1,3} a_{1,4} a_{2,1} a_{2,3} {a_{3,2}}^2 + a_{1,3} a_{1,4} a_{2,1} a_{2,4} a_{3,1} a_{3,2} + a_{1,3} a_{1,4} {a_{2,2}}^2 a_{3,1} a_{3,3} - \\
& - a_{1,3} a_{1,4} a_{2,2} a_{2,3} a_{3,1} a_{3,2} - a_{1,3} a_{1,4} a_{2,2} a_{2,4} {a_{3,1}}^2 + {a_{1,4}}^2 {a_{2,1}}^2 a_{3,2} a_{3,3} - {a_{1,4}}^2 a_{2,1} a_{2,2} a_{3,1} a_{3,3} - \\
& - {a_{1,4}}^2 a_{2,1} a_{2,3} a_{3,1} a_{3,2} + {a_{1,4}}^2 a_{2,2} a_{2,3} {a_{3,1}}^2
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Для того, чтобы сократить запись этого выражения, составим новую матрицу, объединив развернутые в строки матрицы билинейных форм, соответствующие каждому уравнению, то есть $B = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Введём новое обозначение: пусть $d_{k,j,k}$ — минор второго порядка в матрице B, полученный вычеркиванием i-й строки и столбцов j и k. Тогда определитель матрицы M может быть записан в следующем (компактном) виде:

$$
\begin{aligned}
\det M = {} & (d_{2,1,4} d_{3,2,4} + d_{2,2,3} d_{3,2,4} - d_{2,2,4} d_{3,1,4} - d_{2,2,4} d_{3,2,3}) d_{1,1,3} + \\
& + (d_{1,2,4} d_{3,1,4} + d_{1,2,4} d_{3,2,3} - d_{1,1,4} d_{3,2,4} - d_{1,2,3} d_{3,2,4}) d_{2,1,3} + \\
& + (d_{1,1,4} d_{2,2,4} + d_{1,2,3} d_{2,2,4} - d_{1,2,4} d_{2,1,4} - d_{1,2,4} d_{2,2,3}) d_{3,1,3}
\end{aligned}
$$

Следует отметить, что аналогичные рассуждения относительно набора $\mathbf{s}$ приводят к точно такому же определителю.

Введём новое понятие: система билинейных уравнений называется *регулярной*, если она имеет только тривиальные решения. Таким образом, теорема 1 является **достаточным** условием регулярности системы. Поэтому, теорему 1 можно переформулировать в виде:

Теорема (альтернативная формулировка) 1. *Если определитель матрицы M не равен нулю, то исходная система билинейных уравнений регулярна:*

$$\det M \neq 0 \implies \textit{исходная система регулярна}$$

Во многих задачах представляют интерес нерегулярные системы (т.е. системы, которые имеют нетривиальные решения). В таком случае, из теоремы 1 можно сформулировать следующее следствие, являющееся необходимым условием нерегулярности исходной системы:

Следствие 1. *Если система билинейных уравнений не регулярна, то определитель матрицы M равен нулю:*

$$\text{исходная система не регулярна} \implies \det M = 0$$