

Системы билинейных уравнений

Морозов Евгений

Воронежский Государственный Университет
Факультет Компьютерных Наук

19 мая 2016 г.

Общий случай

- Понятие системы билинейных уравнений

- Связь с задачей об однородности

Частный случай

- Постановка задачи

- Достаточное условие регулярности системы

- Другие подходы

Метод мономно-минорной матрицы

- Описание метода

Литература

- ▶ Система билинейных уравнений — это система уравнений следующего вида:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ijk} r_j s_k = d_i, \text{ для } i = 1, \dots, l$$

- ▶ Компактная запись параметров системы — $(l; m, n)$
- ▶ Система называется **однородной**, если $\mathbf{d} = \mathbf{0}$.
- ▶ В однородных системах всегда имеют место **тривиальные** решения: $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.
- ▶ Система, имеющие только тривиальные решения называется **регулярной**.
- ▶ В данной работе рассматриваются только однородные системы.

Задача об однородности

В задаче об однородности аффинных поверхностей возникают системы однородных билинейных уравнений особого вида :

$$l = m + n - 1, m = n.$$

Особый интерес в этой задаче представляют нерегулярные системы. Примеры возникающих систем:

- ▶ Случай $(15; 8, 8)$ — все стандартные методы решения нелинейных систем (например, базис Грёбнера) не дают результатов.
- ▶ В связи с этим имеет смысл исследовать более простой, «модельный» случай $(3; 2, 2)$, чтобы понять природу нерегулярных систем.

Случай (3; 2, 2)

Любая билинейная система является линейной по одному из наборов переменных. Для случая (3; 2, 2):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 & a_{13}s_1 + a_{14}s_2 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 & a_{23}s_1 + a_{24}s_2 \\ a_{31}s_1 + a_{32}s_2 & a_{33}s_1 + a_{34}s_2 \end{pmatrix}}_A \times \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Эта система имеет нетривиальные решения, если $\text{rank } A \neq 3$, что означает, что все миноры третьего порядка в матрице A равны нулю.

Замечание:

Понятие ранга справедливо при фиксированных s . Для их нахождения составим систему уравнений из миноров третьего порядка матрицы A .

Достаточное условие регулярности системы

Составим матрицу $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ из коэффициентов системы так, чтобы $A_{i,j} = a_{i,j}$.

Пусть $d_{k,m,n}$ — минор второго порядка в матрице A , получаемый вычеркиванием строки k и столбцов m и n .

Тогда достаточное условие регулярности системы формулируется так:

Теорема:

Если определитель следующего вида не равен нулю, то система является *регулярной*:

$$\begin{aligned} \det M = & (d_{2,1,4}d_{3,2,4} + d_{2,2,3}d_{3,2,4} - d_{2,2,4}d_{3,1,4} - d_{2,2,4}d_{3,2,3})d_{1,1,3} + \\ & + (d_{1,2,4}d_{3,1,4} + d_{1,2,4}d_{3,2,3} - d_{1,1,4}d_{3,2,4} - d_{1,2,3}d_{3,2,4})d_{2,1,3} + \\ & + (d_{1,1,4}d_{2,2,4} + d_{1,2,3}d_{2,2,4} - d_{1,2,4}d_{2,1,4} - d_{1,2,4}d_{2,2,3})d_{3,1,3} \end{aligned}$$

TOP КЕК

Метод мономно-минорной матрицы (МММ)

TOP КЕК(2)



[Кострикин, 1742] Christian Goldbach.

A problem we should try to solve before the ISPN '43 deadline,
Letter to Leonhard Euler, 1742.

Спасибо за внимание!