



Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчёт по заданию в рамках курса

“Суперкомпьютерное моделирование и технологии”

Численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в
криволинейной области

Выполнил: Морозов М.Г.

608 группа

Вариант 6

Москва 2023

Введение

Требуется приближенно решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области. Задание необходимо выполнить на ПВС Московского университета IBM Polus.

Исследуемая область $D = |x| + |y| < 2, y < 1$

Математическая постановка задачи

В области $D \subset R^2$, ограниченной контуром γ , рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Функция $f(x, y) = 1$. Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничным условием Дирихле:

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in \gamma$$

Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению в области D и краевому условию на ее границе.

Численный метод решения уравнения

Для решения был выбран предложенный метод наименьших невязок. Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций $w^{(k)} \in H, k = 1, 2, \dots$, сходящуюся по норме пространства H к решению разностной схемы, т.е.

$$\|w - w^{(k)}\|_E \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

Начальное приближение $w^{(0)}$ можно выбрать любым способом, например, равным нулю во всех точках расчетной сетки. Метод является одношаговым. Итерация $w^{(k+1)}$ вычисляется по итерации w^k согласно равенствам:

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)}$$

где невязка $r^k = Aw^{(k)} - B$, итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}{\|Ar^{(k)}\|_E^2}$$

В качестве условия остановки итерационного процесса следует использовать неравенство

$$\|w^{(k+1)} - w^{(k)}\|_E < \sigma$$

Где σ – положительное число, определяющее точность итерационного метода.

Краткое описание проделанной работы по созданию OpenMP-программы

Для реализации поставленной задачи была использована технология OpenMP.

При подсчете площадей пересечения данной в 6 варианте фигуры с областью Π_{ij} на каждом узле сетки $w_1 = \{x_i = A_1 + ih_1, i = \overline{0, M}\}$, $w_2 = \{y_j = A_2 + jh_2, j = \overline{0, N}\}$

$$h_1 = (B_1 - A_1)/M, h_2 = (B_2 - A_2)/N$$

был использован Метод Монте-Карло для полущелых узлов $x_{i \pm \frac{1}{2}} = x_i \pm$

$$0.5h_1, y_{j \pm \frac{1}{2}} = y_j \pm 0.5h_2.$$

Количество случайно-сгенерированных точек $npoints = 1000$.

Размер сетки: $\{A_1 = A_2 = -4.0, B_1 = B_2 = 4.0\}$ был увеличен, для корректного подсчета на сетке 160X160.

Для реализации распараллеливания использовались директивы:

`#pragma omp parallel for` для арифметических операций

`#pragma omp parallel for reduction(+:res)` для скалярного произведения

Результаты расчетов для разных размеров задач и на разном числе процессов.

Число OpenMP-нитей	Число точек Сетки MN	Время Решения (с)	Ускорение
1	40*40	17.079	
4	40*40	7.528	2.26
16	40*40	5.69	3.001

Число OpenMP-нитей	Число точек Сетки M×N	Время Решения (с)	Ускорение
2	80*80	158.07	
4	80*80	130.064	1.21
8	80*80	91.922	1.71
16	80*80	68.688	2.3
4	160*160	621.171	
8	160*160	275.166	2.25
16	160*160	154.969	4.008
32	160*160	121.422	5.11

Ускорение считалось как отношение времени выполнения последовательной программы(программы на 2 нитях для 80*80, программы на 4 нитях для 160*160) к времени выполнения программы на определённой конфигурации программы для заданного числа точек сетки M*N и числа нитей OpenMP.

Графики результатов для сетки размером 160*160.

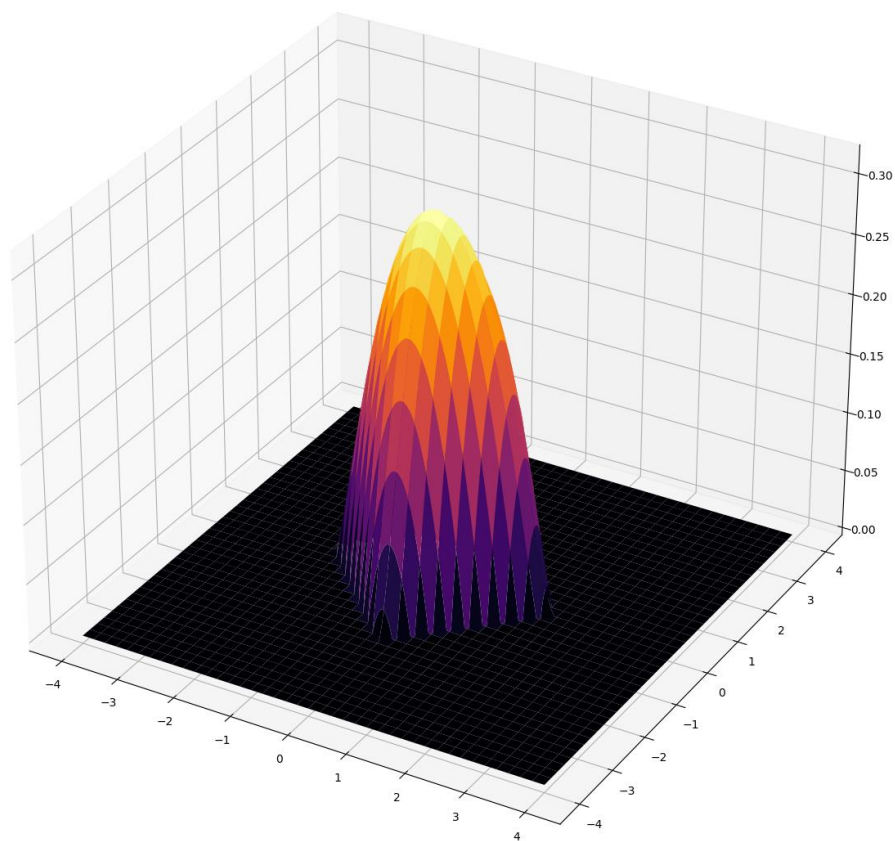


Рис 1. Полученное решение

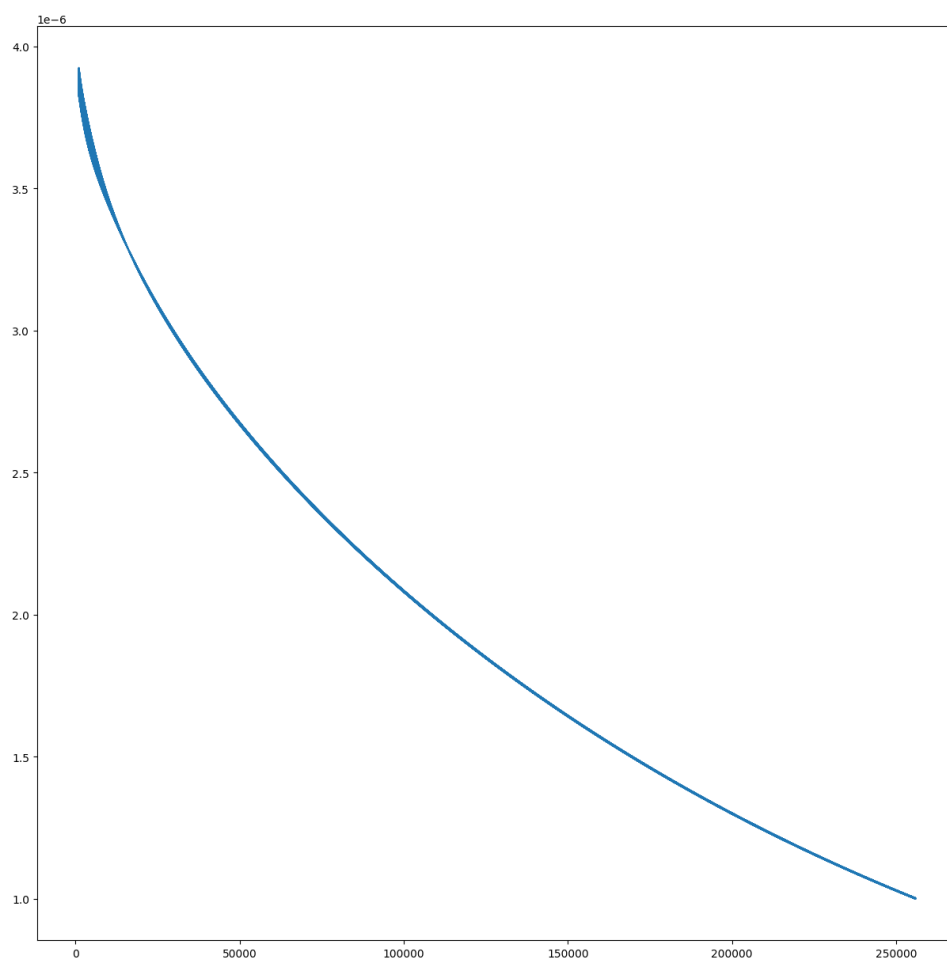


Рис 2. Макс. Отклонение от решения

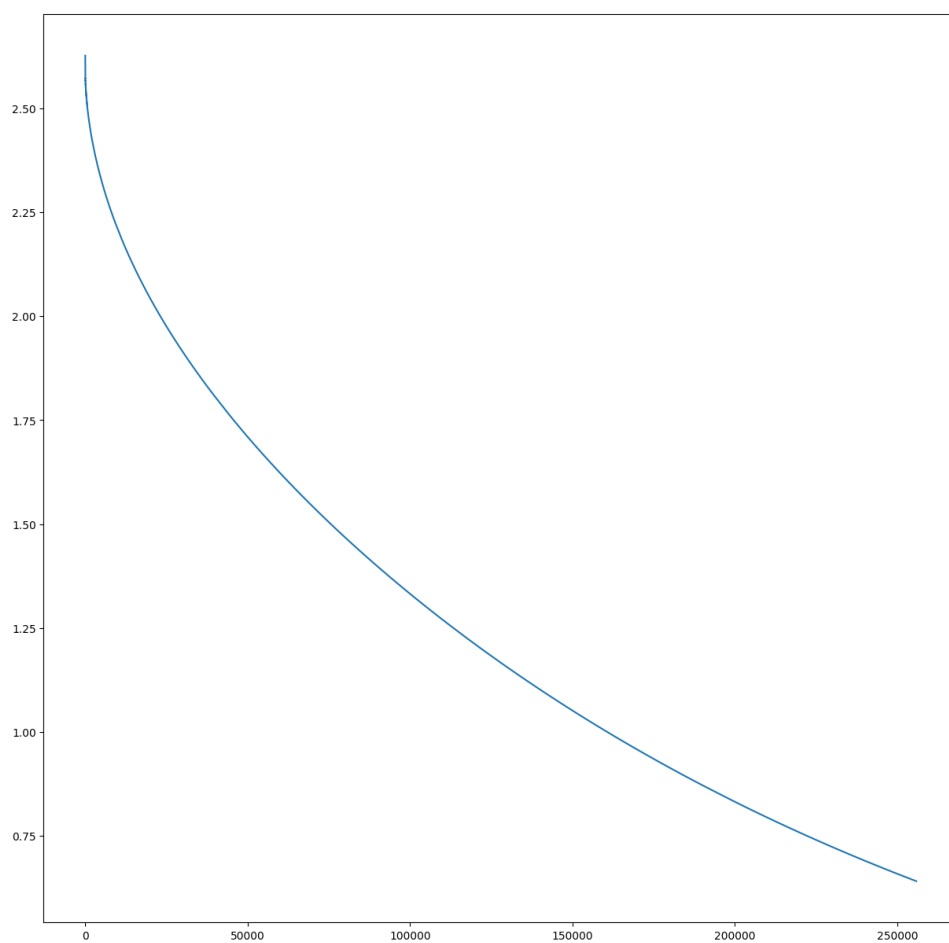


Рис 3. График модуля невязки

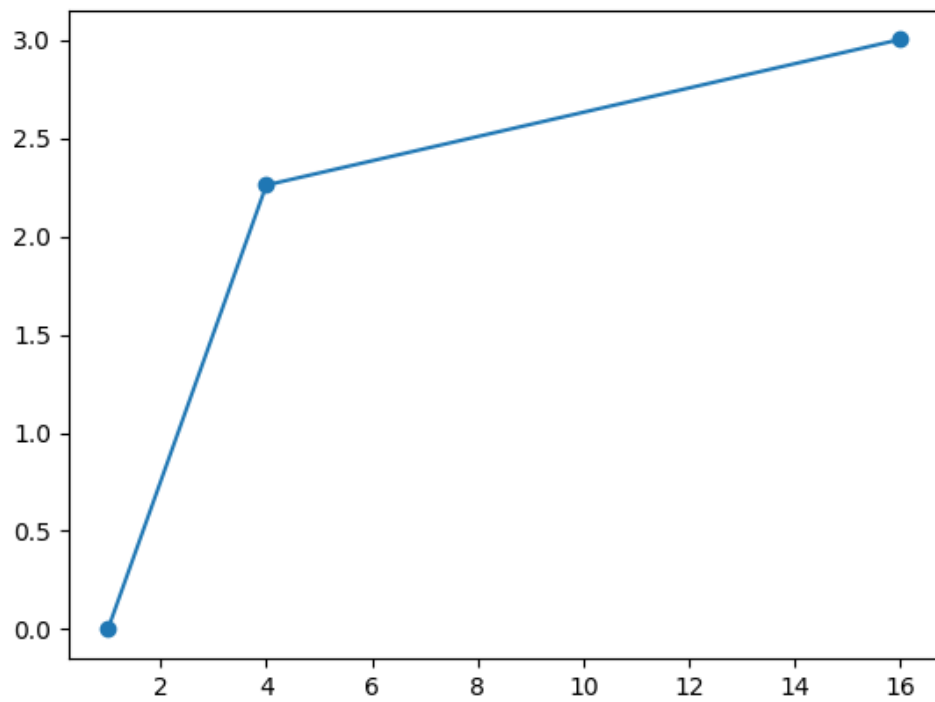


Рис 4. Зависимость ускорения по оси ординат и числа OpenMP-нитей по оси абсцисс для параметров M, N = 40.

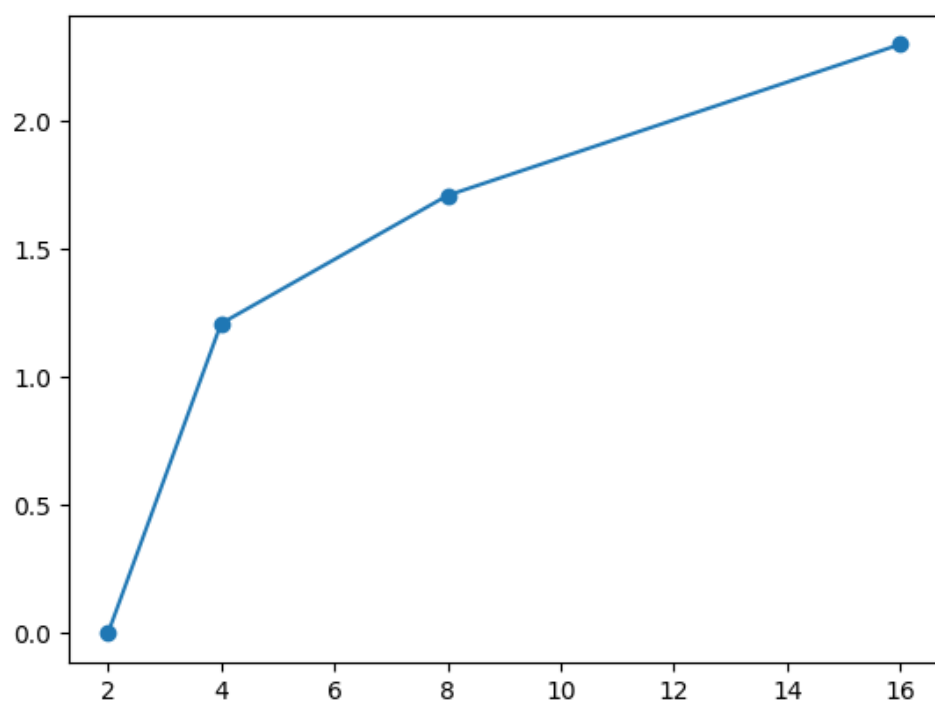


Рис 5. Зависимость ускорения по оси ординат и числа OpenMP-нитей по оси абсцисс для параметров M, N = 80.

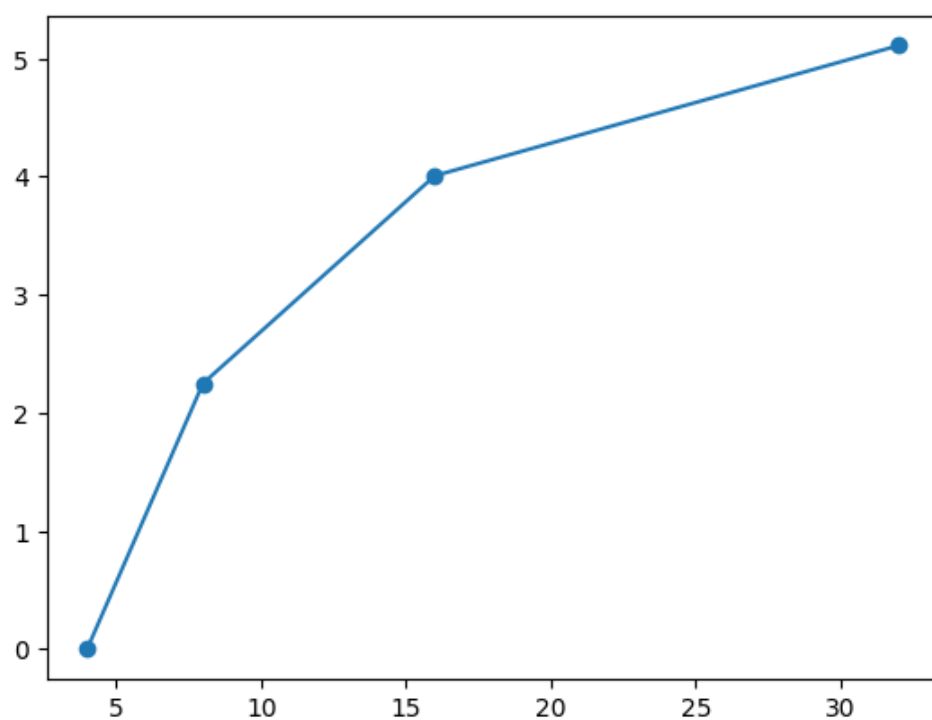


Рис 6. Зависимость ускорения по оси ординат и числа OpenMP-нитей по оси абсцисс для параметров $M, N = 160$.