Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчёт по заданию в рамках курса

“Суперкомпьютерное моделирование и технологии”

Численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области

Выполнил: Морозов М.Г.

608 группа

Вариант 6

Москва 2023

Введение

Требуется приближенно решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области. Задание необходимо выполнить на ПВС Московского университета IBM Polus.

Исследуемая область $D = |x| + |y| < 2,\ y < 1$

Математическая постановка задачи

В области $D \subset R^2$, ограниченной контуромγ, рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Функция $f(x, y) = 1$. Для выделения единственного решенияуравнение дополняется граничным условием Дирихле:

$$u(x, y) = 0,\ (x, y) \in \gamma$$

Требуется найти функциюu $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению в области D и краевомуусловию на ее границе.

Численный метод решения уравнения

Для решения был выбран предложенный метод наименьших невязок. Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций $w^{(k)} \in H,\ k = 1,\ 2,\ \ldots$, сходящуюся по норме пространства H к решению разностной схемы,т.е.

$$\left\| w - w^{(k)} \right\|_E \to 0,\ k \to \infty$$

Начальное приближение $w^{(0)}$ можно выбрать любым способом, например, равным нулю во всех точках расчетной сетки. Метод является одношаговым. Итерация $w^{(k+1)}$ вычисляется по итерации w^k согласно равенствам:

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)}$$

где невязка $r^k = Aw^{(k)} - B$, итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{\left(Ar^{(k)}, r^{(k)}\right)}{\left\|Ar^{(k)}\right\|_E^2}$$

В качестве условия остановки итерационного процесса следует использовать неравенство

$$\left\|w^{(k+1)} - w^{(k)}\right\|_E < \sigma$$

Где σ – положительное число, определяющее точность итерационного метода.

Краткое описание проделанной работы по созданию OpenMP-программы

Для реализации поставленной задачи была использована технология OpenMP.

При подсчете площадей пересечения данной в 6 варианте фигуры с областью Π_{ij} на каждом узле сетки $w_1 = \{x_i = A1 + ih_1,\ i = \overline{0, M}\}$, $w_2 = \{y_j = A_2 + jh_2,\ j = \overline{0, N}\}$

$$h_1 = (B_1 - A_1)/M,\ h_2 = (B_2 - A_2)/N$$

был использован Метод Монте-Карло для полуцелых узлов $x_{i\pm\frac{1}{2}} = x_i \pm 0.5h_1, y_{j\pm\frac{1}{2}} = y_j \pm 0.5h_2$.

Количество случайно-сгенерированных точек npoints = 1000.

Размер сетки: $\{A_1 = A_2 = -4.0,\ B_1 = B_2 = 4.0\}$ был увеличен, для корректного подсчета на сетке 160X160.

Для реализации распараллеливания использовались директивы:

#pragma omp parallel for для арифметических операций

#pragma omp parallel for reduction(+:res) для скалярного произведения

Результаты расчетов для разных размеров задачь и на разном числе процессов.

Число OpenMP-нитей	Число точек Сетки M×N	Время Решения (с)	Ускорение
2	80*80	169.702	1.98
4	80*80	122.639	2.74
8	80*80	91.922	3.65
16	80*80	68.688	4.89
2	160*160	1009.849	2.03
4	160*160	621.171	3.30
8	160*160	377.322	5.43
16	160*160	226.383	9.05

Ускорение считалось как отношение времени выполнения последовательной программы к времени выполнения программы на определённой конфигурации программы для заданного числа точек сетки M*N и числа нитей OpenMP.

Время выполнения последовательной программы для 80*80: 336.032 с.

Время выполнения последовательной программы для 160*160: 2049.994

Графики результатов для сетки размером 160*160.

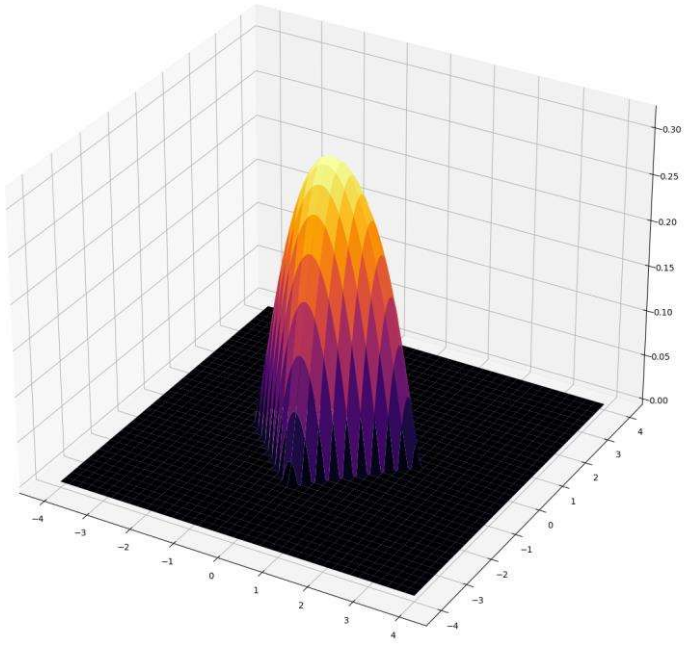

Рис 1. Полученное решение

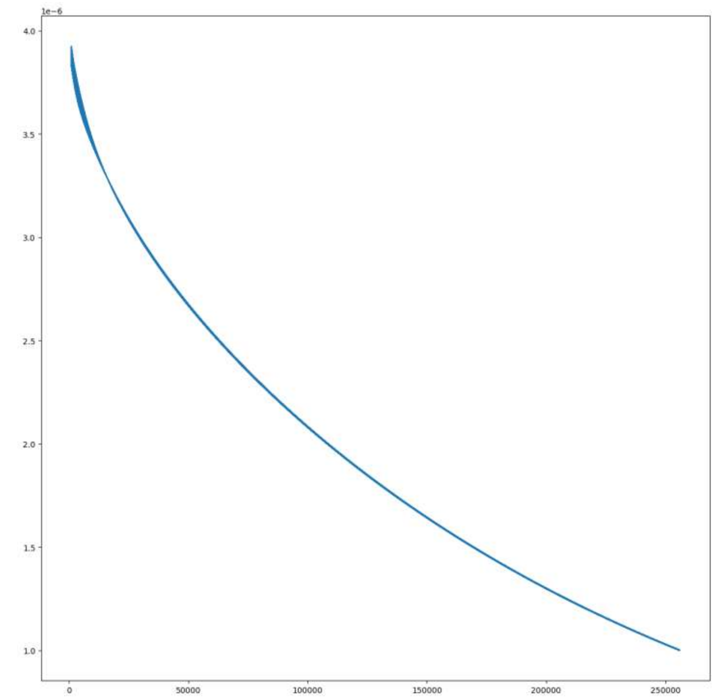

Рис 2. Макс. Отклонение от решения

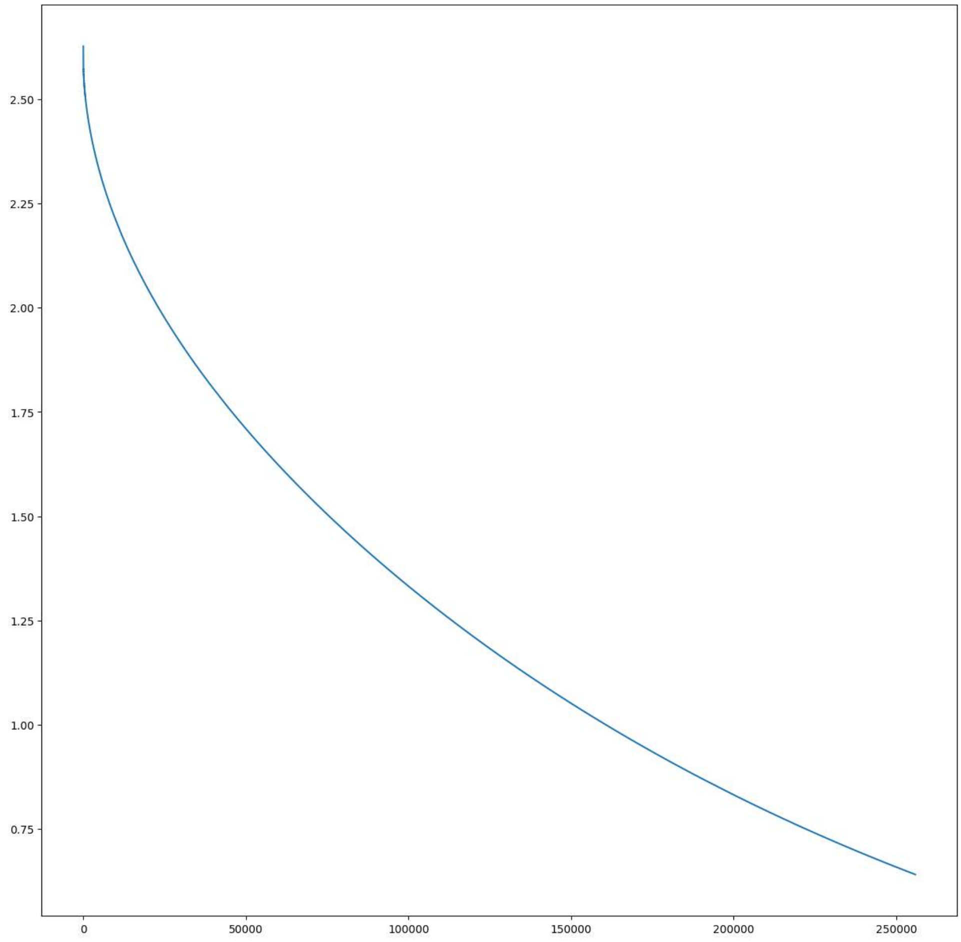

Рис 3. График модуля невязки

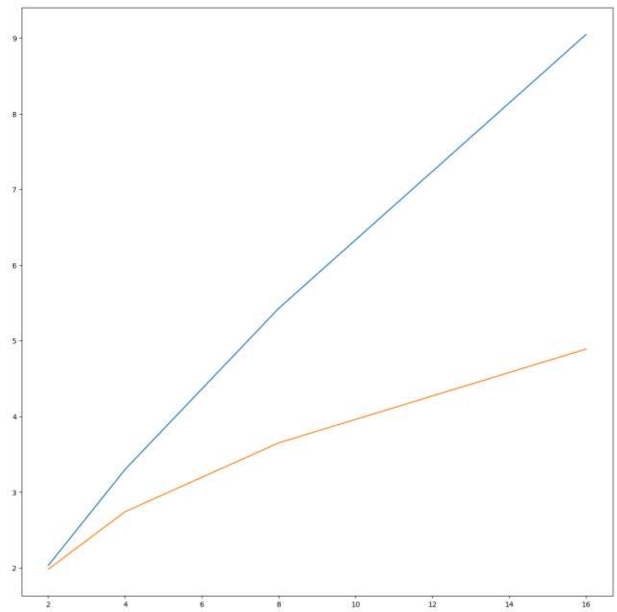

Рис 4. Зависимость ускорения по оси ординат и числа OpenMP-нитей по оси абсцисс для параметров M, N = 80(желтый) и M, N (синий) = 160.