

---

---

# Rapport: Stabilisation de suivi de trajectoires pour un véhicule de type voiture

---

---

*Étudiant :*  
Idriss CHELIKH

*Numéro étudiant :*  
3704957

*Professeur :*  
Pascal MORIN

Janvier 2021

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Partie théorique</b>	<b>2</b>
1.0.1	Question 1 . . . . .	2
1.0.2	Question 2 . . . . .	3
1.0.3	Question 3 . . . . .	3
1.0.4	Question 4 . . . . .	4
1.0.5	Question 5 . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Question 6 : Partie simulation</b>	<b>7</b>
2.0.1	Résultats de la simulation pour une commande au linéarisé tangent	8
2.0.2	Résultats de la simulation pour un retour de sortie par linéarisation exacte . . . . .	9

# Partie 1

## Partie théorique

### 1.0.1 Question 1

En considérant  $\tilde{x}$  la vecteur d'erreur défini par :

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tilde{p} = R(-\theta_r)(p - p_r), \quad \tilde{\theta} = \theta - \theta_r, \quad \tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_r$$

Il faut développer l'expression de la norme  $\|\tilde{x}\| = \sqrt{\tilde{p}^2 + \tilde{\theta}^2 + \tilde{\varphi}^2}$ . On développe donc  $\tilde{p}$  tel que :

$$\tilde{p} = R(-\theta_r)(p - p_r) \quad \text{avec} \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \implies R(-\theta_r) = \begin{pmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \iff \tilde{p} &= \begin{pmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 - p_{r,1} \\ p_2 - p_{r,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (p_2 - p_{r,2})\sin\theta_r + (p_1 - p_{r,1})\cos\theta_r \\ (p_2 - p_{r,2})\cos\theta_r - (p_1 - p_{r,1})\sin\theta_r \end{pmatrix} \\ \implies \tilde{p}^2 &= [(p_2 - p_{r,2})\sin\theta_r + (p_1 - p_{r,1})\cos\theta_r][(p_2 - p_{r,2})\sin\theta_r + (p_1 - p_{r,1})\cos\theta_r] \\ &\quad + [(p_2 - p_{r,2})\cos\theta_r - (p_1 - p_{r,1})\sin\theta_r][(p_2 - p_{r,2})\cos\theta_r - (p_1 - p_{r,1})\sin\theta_r] \\ &= (p_1 - p_{r,1})^2 + (p_2 - p_{r,2})^2 \\ \implies \|\tilde{x}\| &= \sqrt{(p_1 - p_{r,1})^2 + (p_2 - p_{r,2})^2 + \tilde{\theta}^2 + \tilde{\varphi}^2} \end{aligned}$$

Or, en sachant que  $x - x_r = \begin{pmatrix} p_1 - p_{r,1} \\ p_2 - p_{r,2} \\ \theta - \theta_r \\ \varphi - \varphi_r \end{pmatrix}$ , cela implique donc que

$$\|x - x_r\| = \sqrt{(p_1 - p_{r,1})^2 + (p_2 - p_{r,2})^2 + \tilde{\theta}^2 + \tilde{\varphi}^2} \quad (1.1)$$

Nous retrouvons donc l'égalité escomptée :  $\|\tilde{x}\| = \|x - x_r\|$

### 1.0.2 Question 2

Le modèle cinématique d'une voiture est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{p} = u_1 R(\theta) e_1 \\ \dot{\theta} = u_1 \frac{\tan \varphi}{L} \\ \dot{\varphi} = u_2 \end{cases} \quad \text{En sachant pour la trajectoire de référence que} \quad \begin{cases} \dot{p}_r = u_{r,1} R(\theta_r) e_1 \\ \dot{\theta}_r = u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L} \\ \dot{\varphi}_r = u_{r,2} = 0 \end{cases}$$

On a donc respectivement :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} = \frac{d}{dt}[R(-\theta_r)(p - p_r)] \\ \dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_r \\ \dot{\tilde{\varphi}} = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_r \end{cases} = \begin{cases} \dot{\tilde{p}} = \frac{d}{dt}[R(-\theta_r)(p - p_r)] \\ \dot{\tilde{\theta}} = u_1 \frac{\tan \varphi}{L} - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L} \\ \dot{\tilde{\varphi}} = u_2 - u_{r,2} = u_2 \end{cases}$$

Il est nécessaire de développer l'expression  $\dot{\tilde{p}}$  telle que :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}} &= \frac{d}{dt}[R(-\theta_r)(p - p_r)] = \dot{R}(-\theta_r)(p - p_r) + R(-\theta_r)(\dot{p} - \dot{p}_r) \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_r \sin \theta_r & \dot{\theta}_r \cos \theta_r \\ -\dot{\theta}_r \cos \theta_r & -\dot{\theta}_r \sin \theta_r \end{pmatrix} (p - p_r) + \begin{pmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \cos \theta - u_{r,1} \cos \theta_r \\ u_1 \sin \theta - u_{r,1} \sin \theta_r \end{pmatrix} \\ &= -\dot{\theta}_r \begin{pmatrix} \sin \theta_r & -\cos \theta_r \\ \cos \theta_r & \sin \theta_r \end{pmatrix} (p - p_r) + \begin{pmatrix} u_1 \cos(\theta - \theta_r) - u_{r,1} \\ u_1 \sin(\theta - \theta_r) \end{pmatrix} \\ &= -\dot{\theta}_r \begin{pmatrix} \sin \theta_r & -\cos \theta_r \\ \cos \theta_r & \sin \theta_r \end{pmatrix} (p - p_r) + u_1 \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\theta}) \\ \sin(\tilde{\theta}) \end{pmatrix} - u_{r,1} e_1 \\ &= -\dot{\theta}_r S \tilde{p} + u_1 R(\tilde{\theta}) e_1 - u_{r,1} e_1 \end{aligned}$$

En reformulant la dernière ligne de développement de calcul en matriciel, nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}} &= -\dot{\theta}_r S \tilde{p} + u_1 R(\tilde{\theta}) e_1 - u_{r,1} e_1 \\ \dot{\tilde{\theta}} &= u_1 \frac{\tan \varphi}{L} - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L} \\ \dot{\tilde{\varphi}} &= u_2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

### 1.0.3 Question 3

Il faut exprimer  $\dot{\tilde{x}}$  calculé en question 2 sous la forme :  $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{u}, u_{r,1}, \varphi_r)$ . On pose  $\tilde{x}$  tel que :

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} j & k \\ l & m \\ n & o \end{pmatrix} \tilde{u} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} u_{r,1}$$

Par identification avec le système calculé en Q2 et la reformulation des variables de commande  $\tilde{u}$ , nous en déduisons la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_1 S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R(\tilde{\theta}) e_1 & 0 \\ \frac{\tan \varphi}{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - u_{r,1} \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (R(\tilde{\theta}) - I) e_1 \\ \frac{\tan \varphi}{L} - \frac{\tan \varphi_r}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u_{r,1} \\ \dot{\tilde{x}} &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_r S \tilde{x}_1 + R(\tilde{x}_2) e_1 \tilde{u}_1 + (R(\tilde{x}_2) - I) e_1 u_{r,1} \\ \frac{\tan \tilde{x}_3}{L} \tilde{u}_1 + \frac{\tan \tilde{x}_3 - \tan \varphi_r}{L} u_{r,1} \\ u_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 1.0.4 Question 4

Avec l'expression de  $\dot{\tilde{x}}$  calculée en question 3 telle que

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_r S\tilde{x}_1 + R(\tilde{x}_2)e_1\tilde{u}_1 + (R(\tilde{x}_2) - I)e_1u_{r,1} \\ \frac{\tan\tilde{x}_3}{L}\tilde{u}_1 + \frac{\tan\tilde{x}_3 - \tan\varphi_r}{L}u_{r,1} \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Il faut donc déterminer les points dans l'espace d'état tels que  $\dot{\tilde{x}} = 0$ . Et on cherche pour quelles valeurs de  $\tilde{x}, u_{r,1}$  et  $\tilde{u}$  cet égalité est vraie.

Le système à l'équilibre devient :

$$\begin{pmatrix} -\dot{\theta}_r S\tilde{x}_1 + R(\tilde{x}_2)e_1\tilde{u}_1 + (R(\tilde{x}_2) - I)e_1u_{r,1} \\ \frac{\tan\tilde{x}_3}{L}\tilde{u}_1 + \frac{\tan\tilde{x}_3 - \tan\varphi_r}{L}u_{r,1} \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

On déduit que  $\tilde{x} = (0, 0, 0)$  avec  $\tilde{u}_1 = 0, \tilde{u}_2 = u_2 = 0, u_{r,1} = cte$ .

Un système d'état peut être synthétisé autour de ce point avec pour matrices d'état :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}_0, \tilde{u}_0) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\theta}_r & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}_r & 0 & -u_{r,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{u_{r,1}}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}_0, \tilde{u}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En regardant le rang de  $A$ , il apparaît que celui-ci est inférieur à 4, traduisant donc un système naturellement instable. Il est alors judicieux de vérifier la commandabilité de ce système au voisinage du point d'équilibre. Nous retrouvons par critère de rang de Kalman :

$$Rang(B, AB, A^2B) = 4$$

Le système d'état autour du point d'équilibre est donc commandable en appliquant une correction sur la consigne de commande de la forme  $\tilde{u} = K\tilde{x}$ .

Avec cette correction, le système d'état pour l'erreur s'écrit sous la forme :  $\dot{\tilde{x}} = (A + BK)\tilde{x}$   
On cherche maintenant la commande de la forme , on doit alors expliciter  $K$ , la matrice des gains de commande.

$K$  sera alors de la forme :

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Devant le nombre de gains importants, il est judicieux de rendre indépendant les dynamiques entre elles. Plus spécifiquement, en rendant la dynamique de  $\tilde{p}_1$  indépendante vis à vis du reste, nous en déduisons une annulation des gains tels que :  $k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$ .

La loi de commande sur  $\tilde{u}$  au linéarisé tangent avec correction est donc :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= -k_1\tilde{p}_1 \\ \tilde{u}_2 &= -k_6\tilde{p}_2 - k_7\tilde{\theta} - k_8\tilde{\varphi}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

Pour trouver  $K$  adéquat, nous calculons le polynôme caractéristique :

$$p(A + BK) = \det(A + BK - I\lambda)$$

Les gains garantissant la stabilité de commande imposent une partie réelle négative pour les valeurs propres trouvées  $\lambda_i$

### 1.0.5 Question 5

Afin de procéder à une commande par linéarisation exacte, un changement de variable d'état et de commande est donné tel que :  $\tilde{x} \implies \xi$ ,  $u = w$ , et avec :

$$\xi = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tan \tilde{\theta} \\ \frac{\tan(\tilde{\varphi} + \varphi_r)}{L(\cos \tilde{\theta})^3} \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} u_1 \cos \tilde{\theta} \\ u_2 \end{pmatrix}$$

a) Pour exprimer  $\dot{\xi}$ , on dérive  $\xi$  par rapport au temps avec  $\xi$  donné ci-dessus. Nous trouvons :

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{p}} \\ \frac{\dot{\tilde{\theta}}}{\cos^2 \tilde{\theta}} \\ \frac{\dot{\tilde{p}}}{L \cos^2(\tilde{\varphi} + \varphi_r) \cos^3 \tilde{\theta}} + \frac{3 \dot{\tilde{\theta}} \tan^2 \tilde{\theta} \tan(\tilde{\varphi} + \varphi_r)}{L \cos^4 \tilde{\theta}} \end{pmatrix}$$

Sachant les valeurs obtenues à la question 2 pour  $\dot{\tilde{p}}$ ,  $\dot{\tilde{\theta}}$  et  $\dot{\tilde{\varphi}}$ , ces expressions sont injectées dans l'expression de  $\dot{\xi}$  qui devient :

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} w_1 - u_{r,1} + \dot{\theta}_r \xi_2 \\ \xi_3 w_1 - \dot{\theta}_r \xi_1 \\ w_1 \xi_2 - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{2 \cos^2 \tilde{\theta}} \\ \frac{w_2}{L \cos^3 \tilde{\theta}} + w_2 \xi_3^2 L \cos^3(\tilde{\theta}) + 3 u_1 \frac{\tan \varphi_r}{L} \xi_2 \xi_3 - 3 u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L} \xi_2 \xi_3 \end{pmatrix}$$

b) La linéarisation exacte de  $\xi_1$  se fait en posant  $v = w_1 - u_{r,1} + \dot{\theta}_r \xi_2$  puisque  $w_1$  est connu. En développant  $\dot{\theta}_r$ , il est possible de réécrire :

$$v = w_1 - u_{r,1} + u_{r,1} \frac{\tan(\varphi_r)}{L} \xi_2$$

Or on a  $v = -K_1 \tilde{p}_1 = -K_1 \xi_1$ . La commande  $w_1$  finale est donc :

$$w_1 = u_{r,1} - u_{r,1} \frac{\tan(\varphi_r)}{L} \xi_2 - K_1 \xi_1$$

c) En supposant  $\xi_1$  négligeable, cela implique que  $\dot{\xi}_1=0$ . Ainsi on a,

$$\dot{\xi}_2 = w_1 \xi_3 \text{ avec } w_1 = -u_{r,1} \left( \frac{\tan(\varphi_r)}{L} \xi_2 - 1 \right)$$

La 2ème dérivée de Lie de  $\xi_2$  est calculée et l'on obtient :

$$\ddot{\xi}_2 = \dot{w}_1 \xi_3 + w_1 \dot{\xi}_3 = -2u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L} w_1 \xi_3^2 + w_1 \left[ w_1 \xi_4 - \frac{u_{r,1}}{L} \tan(\varphi_r) \right]$$

Pour simplifier les équations, Nous considérons les 2 quantités suivantes :  $a = u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L}$  et  $b = \left( \frac{(\sqrt{1+\xi_3^2})^3}{L} + \frac{L\xi_4^2}{(\sqrt{1+\xi_3^2})^3} \right)$

En dérivant une 3ème fois il vient :

$$\ddot{\xi}_2 = -2aw_1\xi_3(-3a\xi_3^2 + 3w_1\xi_4 - \frac{5}{2}a) + 3w_1^2\left(\frac{w_1\xi_4}{1+\xi_3^2} - a\right)\xi_3\xi_4 + w_1^2bw_2 \quad (1.5)$$

Il apparaît alors que  $\xi_2$  est fonction de  $w_1$  et  $w_2$  après 3 dérivations successives. Ce nombre de dérivations vient confirmer que le degré relatif de  $y = \xi_2$  est de 3.

On peut donc poser la loi de commande linéaire telle que :

$$\ddot{\xi}_2 = K_{21}\xi_2 + K_{22}\dot{\xi}_2 + K_{23}\ddot{\xi}_2 \quad (1.6)$$

Soit :

$$\ddot{\xi}_2 = c + dw_2 \quad (1.7)$$

avec  $c$  et  $d$  à identifier depuis la première expression de  $\ddot{\xi}_2$  en 1.2 pour exprimer  $w_2$ . Ainsi la commande  $w_2$  est exprimé par :

$$w_2 = \frac{1}{d}(-c - K_{21}\xi_2 - K_{22}\dot{\xi}_2 - K_{23}\ddot{\xi}_2)$$

Le calcul des gains de commande est effectué de manière similaire à ceux de la commande du linéarisé tangent (étude de la partie réelle des valeurs propres du système linéarisé avec correcteur tel que  $\tilde{u} = K'\xi$ )

d) Connaissant le changement de variable  $\begin{cases} u_1 = \frac{w_1}{\cos(\tilde{\theta})} \\ u_2 = w_2 \end{cases}$ . Il est nécessaire d'avoir  $\cos(\tilde{\theta})$  non nul, ceci implique :  $\theta - \theta_r \neq \frac{\pi}{2}$ . D'un point de vue géométrique entre le robot et la trajectoire, la direction du robot ne doit pas être orthogonale à la trajectoire de référence.

e) Du point précédent, nous avons démontré que des configurations dans l'espace d'état ne permettaient pas une stabilité de commande. Le domaine de convergence de ce contrôleur ne garanti alors qu'une stabilité asymptotique locale autour du point d'équilibre calculé au point 4.

### Question 6 : Partie simulation

Les lois de commandes synthétisées précédemment sont appliquées sur un modèle d'un véhicule de type tricycle (très proche d'une voiture) sous MATLAB/SIMULINK. Pour chaque commande étudiée, l'angle de référence  $\varphi_r$  est supposé nul. Les lois de commandes sont implémentées dans le script `control.m` fourni qui était à compléter.

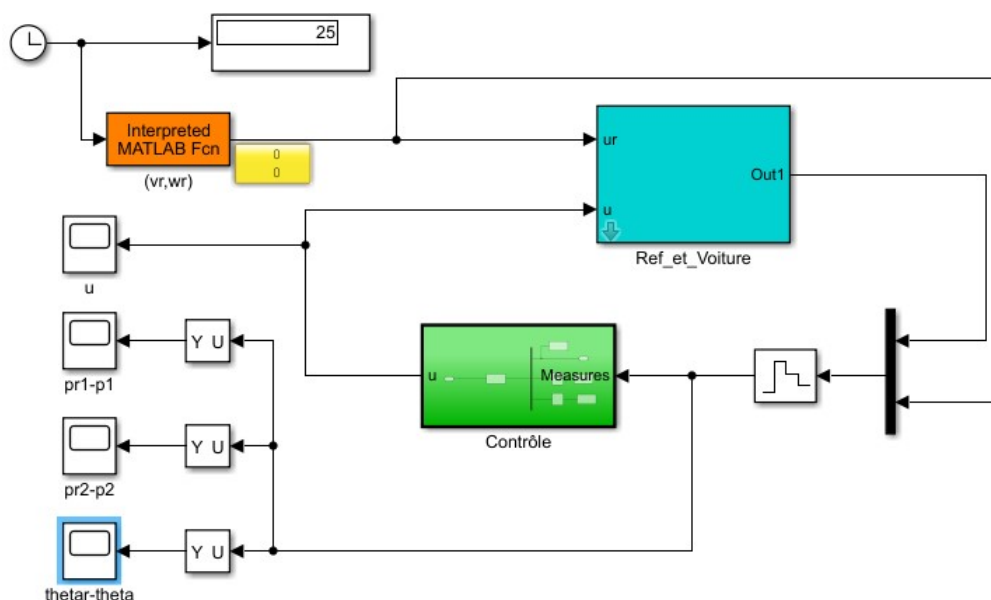


FIGURE 2.1 – Modèle SIMULINK utilisé pour la simulation



### 2.0.1 Résultats de la simulation pour une commande au linéarisé tangent

Pour le calcul de la loi de commande linéaire au linéarisé tangent autour du point d'équilibre, nous obtenons l'évolution suivante pour  $\tilde{u}$  :

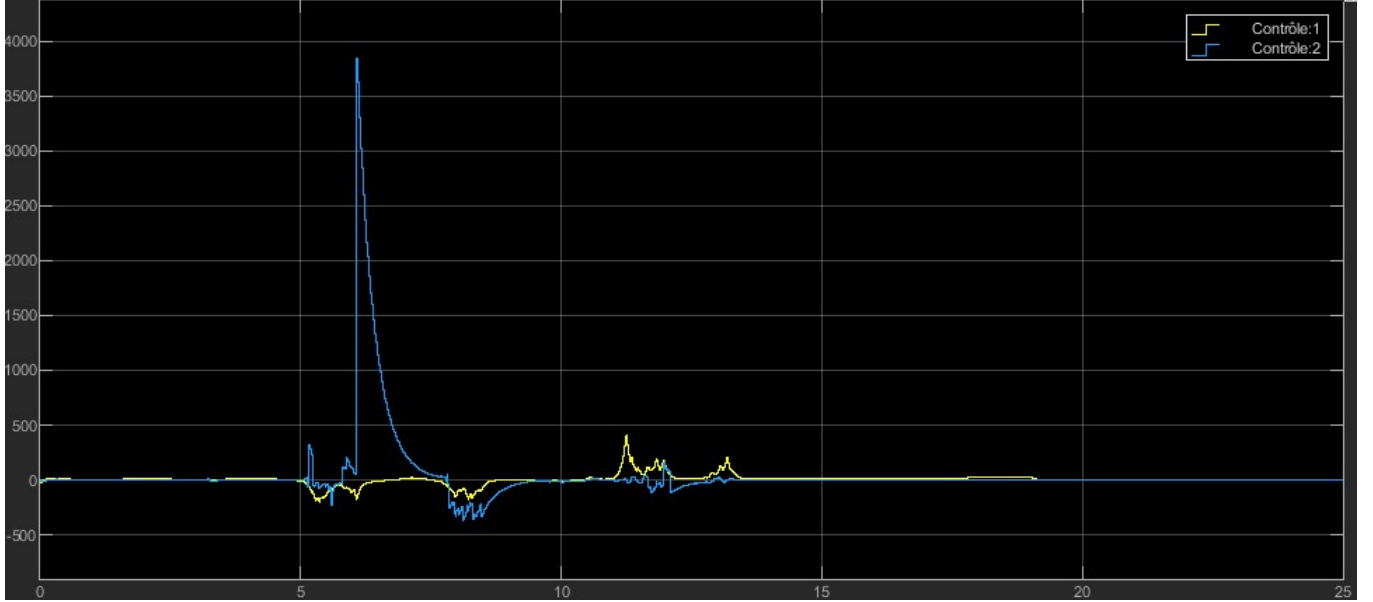


FIGURE 2.2 – évolution de  $u$  en fonction du temps avec le calcul du linéarisé tangent

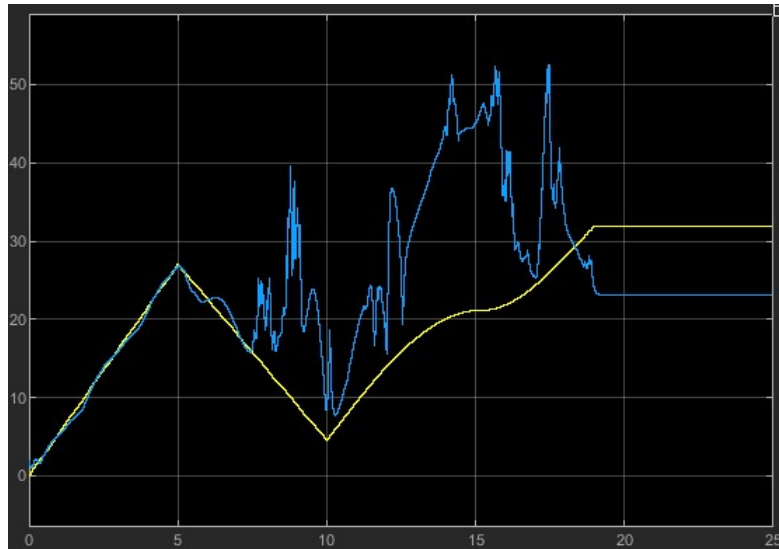


FIGURE 2.3 – évolution de  $p_1$ (bleu) et  $p_{r,1}$ (jaune) dans le temps

Sur la figure 2.3, il apparaît alors que la loi synthétisée autour du point d'équilibre a un bon comportement aux 5 premières secondes de la simulation (trajectoire en sinus dans la même direction que le robot et à vitesse constante). La commande ne suit plus la consigne après cette séquence. Ceci peut être dû à une sortie du voisinage au point d'équilibre pour le calcul d'angle  $\hat{\theta}$ . Sa valeur étant maximale pour des directions opposées entre le robot et la trajectoire, la stabilité n'est plus assurée dans ce domaine d'état.

## 2.0.2 Résultats de la simulation pour un retour de sortie par linéarisation exacte

Pour l'application de la loi de commande de retour de sortie par linéarisation exacte, nous obtenons l'évolution suivante pour  $\tilde{u}$  :

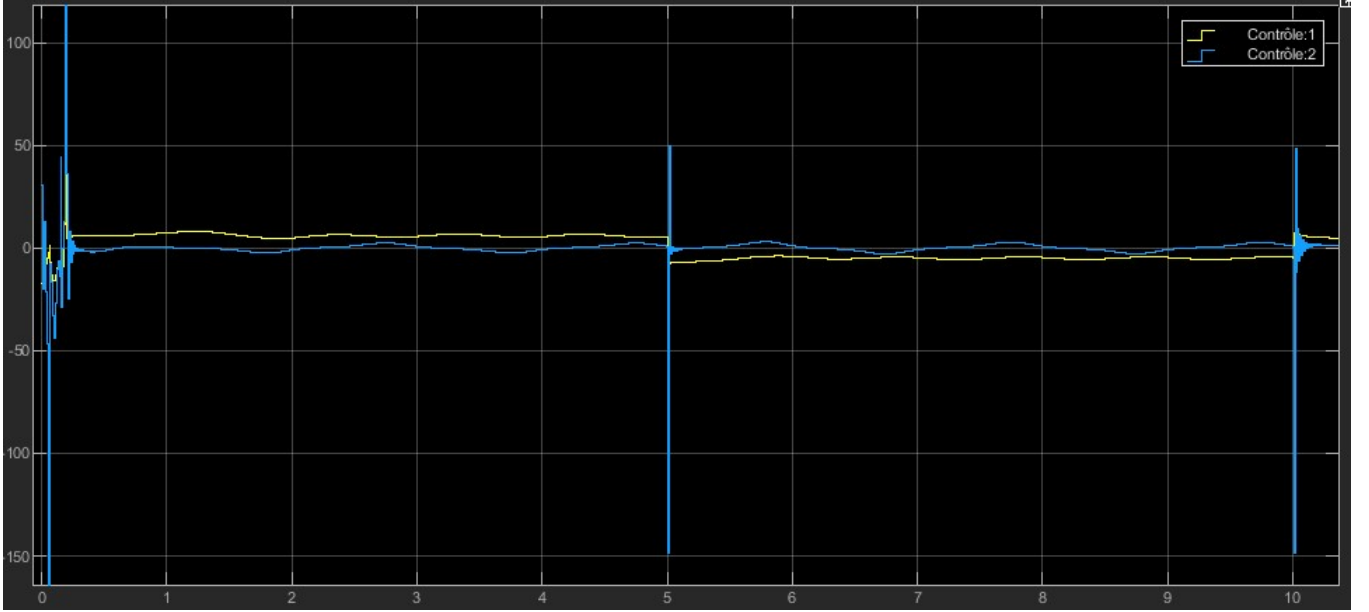


FIGURE 2.4 – évolution de  $u$  en fonction du temps par linéarisation exacte en retour de sortie

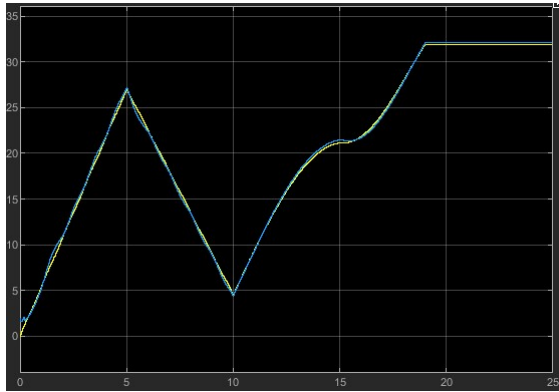


FIGURE 2.5 – évolution de  $p_1$ (bleu) et  $p_{r,1}$ (jaune) pour la linéarisation exact

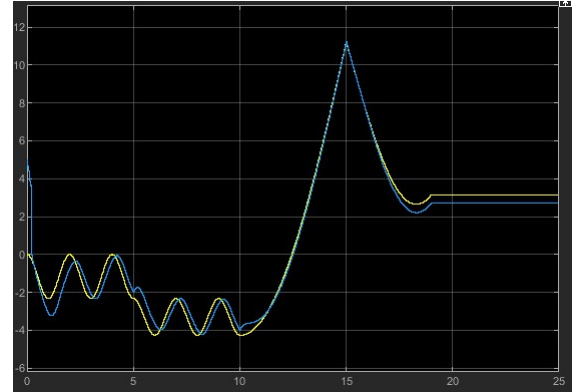


FIGURE 2.6 – évolution de  $p_2$ (bleu) et  $p_{r,2}$ (jaune) pour la linéarisation exacte

Comme visible sur les figures 2.5 et 2.6, le comportement du système avec cette loi de commande est nettement plus satisfaisant que pour la loi au linéarisé tangent.  $\tilde{u}$  est convergent sur une grande partie de la simulation et des trajectoires étudiées. Il est à noter des changements brusques pour  $\tilde{u}_2$ . Cette variable de commande étant responsable de la commande pour  $\varphi$ , sa valeur change brusquement du fait du changement brusque de trajectoire. Ce comportement peut être sujet d'instabilités pour des trajectoires plus "exotiques".

Enfin, il est observé une divergence de  $\tilde{u}_2$  à la fin de la simulation lorsque le robot est immobilisé devant la cible immobile comme visible ci-dessous :

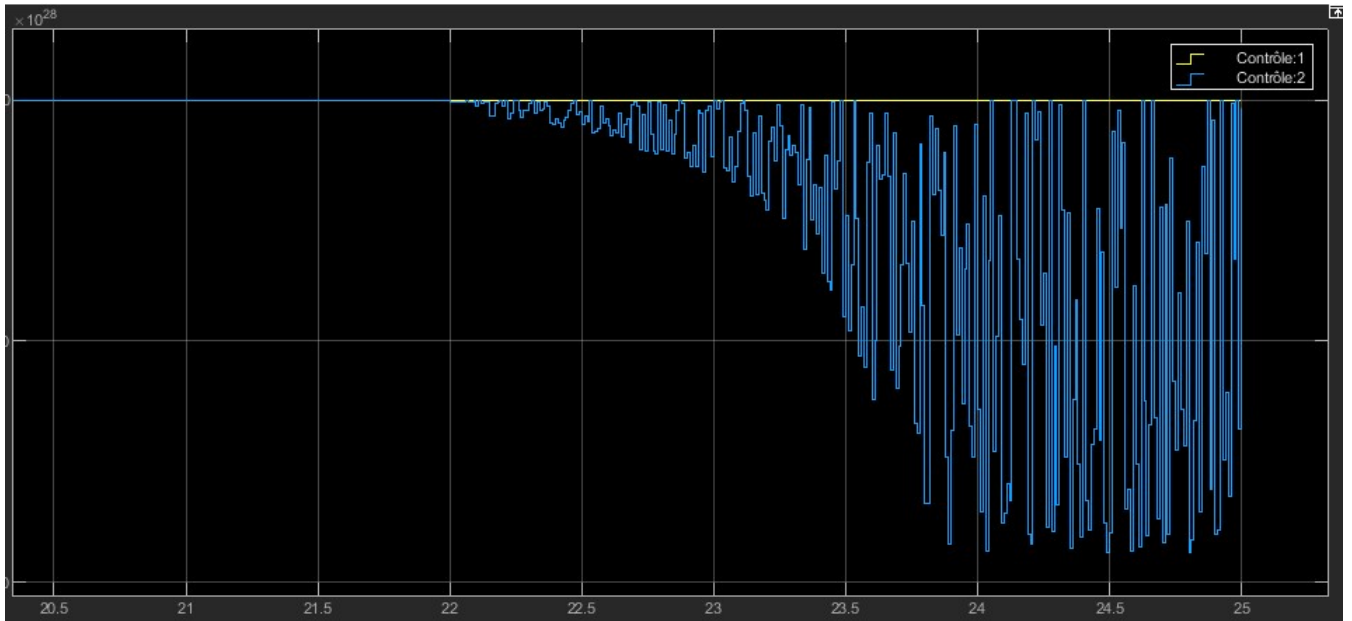


FIGURE 2.7 – Saturation de  $w_2$  à la fin de la simulation

Ceci peut être induit lors de la commande de  $w_2$ . En effet, cette commande est assimilable à un asservissement PID sur  $\dot{\xi}_2$  avec le retour de sortie par linéarisation exacte. La correction intégrale avec le gain  $k_{21}$  peut être sujette à une saturation du fait de la présence d'une erreur statique moindre. Ce phénomène peut être atténué en bornant la valeur de  $\varphi$  (on ajoute des butées mécaniques sur la roue de direction) ou en plaçant un saturateur sur  $\tilde{u}_2$ .