

# Disparador de Pelotas de Ping Pong

Mauricio Monroy, Diana Espadas, Nagore Polanco, Sergio Perea

Tecnológico de Monterrey Campus Santa Fe

20/10/2023

---

## Resumen

El proyecto consiste en crear un prototipo que cree un tiro parabólico partiendo de un resorte y analizar un gol de campo. Esto explicando detalladamente lo que se utiliza, así como los son la ley de hooke, tiro parabólico y condiciones del viento utilizando la teoría aprendida durante el bloque y poder ponerla en práctica.

## Palabras clave:

Resortes, Ley de Hooke, Tiro Parabólico, Viento, Vectores, Análisis, Proyectil, Trayectoria, Fuerzas, Dinámica, etc.

---

## Objetivo

El objetivo de este reto fue construir un sistema lanzador de pelotas de pin pon y realizar el análisis de un gol de campo bajo condiciones de viento en 3D.

perspectiva de fisica clásica, un dado objeto tendrá como propiedad intrínseca una masa (kg). Al final, en términos prácticos, es una medición de cuántas partículas está compuesto un objeto.

## Teoría

Antes de comenzar, se deben definir y explicar los fundamentos para ya después usarlos a discreción. Desde una

Ahora, explicando cinemática, el universo está en continuo movimiento, y esto involucra un cambio en la posición ( $\vec{s}$  para desplazamiento,  $\vec{r}$  para vector posición) en determinado tiempo. En fisica, se requiere

para el análisis saber cuantitativamente y con precisión, la magnitud de este cambio. Para ello, se utiliza la herramienta llamada cálculo diferencial, que para esos usos, es sobre el cambio puntual de una variable con respecto a otra. El cambio de la posición (metros) con respecto al tiempo (segundos) se define como velocidad ( $ms^{-1}$ ), y qué tanto cambia la velocidad con respecto al tiempo (la derivada de la velocidad con respecto al tiempo) es la aceleración ( $ms^{-2}$ ) de un objeto:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$$

Para pasar de un dato a otro, se puede utilizar el cálculo integral, para regresar de aceleración a velocidad, o de velocidad a posición.

$$\int a dt = v(t) + C$$

$$\int v dt = x(t) + C$$

Si un objeto tiene masa, y es acelerado (es decir, su velocidad no es

constante), ejerce una magnitud vectorial denominada como fuerza (Newtons). Esta fue establecida por Isaac Newton en su libro de dinámica, donde también estableció sus famosas leyes del movimiento: inercia, dinámica, y acción-reacción de interacciones entre objetos (Ferrovial-STEM, 2023).

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Existen ecuaciones que definen y predicen, bajo situaciones ideales en un sistema cerrado, el movimiento de un objeto. Para propósitos de este análisis, se simplifica a un movimiento en dos dimensiones, pero aún así se debe considerar que al haber ángulos y direcciones en los vectores aceleración, velocidad, fuerza, posición, etc, se deben descomponer las ecuaciones según sea el plano en el que actúan.

Para el plano x:

$$x = x_0 + \vec{v}_0 \cos(\theta)t, \text{ donde:}$$

- $x$  es el desplazamiento en x a calcular,  $\vec{r}_x$

- $x_0$ , la posición inicial  $\vec{r}_{x0}$
- $\vec{v}_0$ , la velocidad inicial
- $\theta$ , el ángulo con respecto a la horizontal
- $t$ , el tiempo transcurrido

Para tiro parabólico en situaciones ideales (ignorando resistencia de aire), la velocidad en x siempre será constante.

$$\vec{v}_x = \vec{v}_0 \cos(\theta)$$

Para el plano y:

$$y = y_0 + \vec{v}_0 \sin(\theta)t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\vec{v}_y = \vec{v}_0 \sin(\theta) + at$$

Ya que en tiro parabólico la aceleración que hace que el proyectil cayera es la gravedad<sup>1</sup>,

$$a = g = -9.81 \text{ms}^{-2}.$$

Ahora, regresando a lo denominado “fuerzas”, una fuerza es una interacción entre objetos.

La ley de Hooke se denomina como el estudio del comportamiento de objetos los cuales pueden ser deformados por una fuerza y volver a su forma original cuando ya no se ven sometidos bajo esa misma fuerza (objetos elásticos). Dentro de La ley de hooke se establece que la fuerza que estira un objeto elástico es directamente proporcional a la extensión de ese objeto (Khan Academy, 2022). Esto se expresaría de la siguiente manera:

$$F_r = -k\Delta L$$

El Módulo de Young, o el módulo de elasticidad longitudinal, establece que todos los metales son elásticos; estos tienen las capacidades de deformarse, ya sea agrandarse o comprimirse. En pocas palabras este módulo nos indica la rigidez de un material (Roda V. , 2022)<sup>1</sup>.

En todos los escenarios que mencionamos anteriormente, los resortes se ven sometidos ante distintas fuerzas a su alrededor como la fuerza fricción, la fuerza externa, la fuerza de restitución, su fuerza normal y su mismo peso. Según la tercera

---

<sup>1</sup> “El módulo de elasticidad indica la rigidez de un material: cuanto más rígido es un material mayor es su módulo de elasticidad” (Roda V, 2022).

ley de Newton, con toda acción siempre ocurre una reacción igual y contraria, por lo que sí es un escenario en dónde el resorte no se mueve y se mantiene en equilibrio, la suma de todas estas fuerzas debe de ser equivalente a 0; sin embargo, si tenemos una situación en dónde el resorte y su ambiente se están moviendo, se aplica la segunda ley de Newton o la ley fundamental de la dinámica, la cuál dicta que la fuerza neta aplicada sobre un objeto es proporcional a la aceleración que este adquiere en su trayectoria (Ferrovia-STEM, 2023).

En otras palabras:

Si un sistema está en equilibrio,

$$\Sigma F = 0.$$

Si un sistema está en movimiento,

$$\Sigma F = ma.$$

De igual manera, todos estos objetos elásticos llegan a poseer velocidad, aceleración, entre otros. La velocidad de que puede dar un resorte puede aumentar o disminuir dependiendo de su ambiente, no

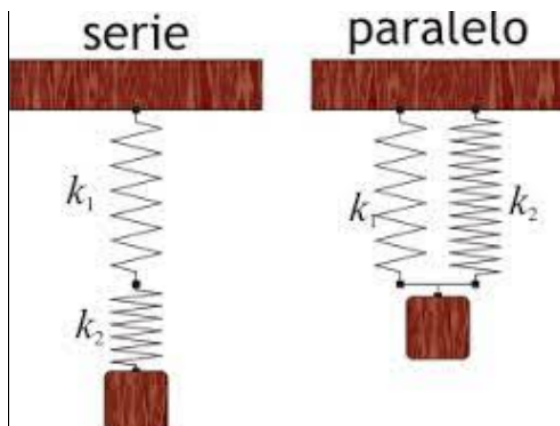
solamente de la cantidad de fuerza externa a la que este se vea sometido, pero depende principalmente de la constante de elasticidad que posea el resorte ( $k$ ).

El resorte puede llegar a dar un mayor impulso y por ende una mayor velocidad, si se llegan a poner dos o más resortes en forma paralela, ya que la constante de elasticidad aumentaría, y como esta tiene una relación directamente proporcional con la velocidad de salida, ésta aumentaría.

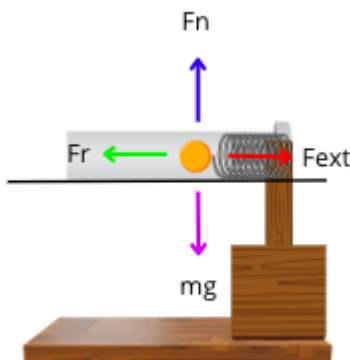
$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

O si lo que se desea es disminuir la velocidad, si se llega a posicionar dos resortes en serie, la constante de elasticidad no daría tanto impulso ya que se aplicaría la regla de, la cuál tiene que ver con la relación inversamente proporcional que tiene  $k$  con la longitud de la compresión del resorte  $\Delta L$ .

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$



Para el análisis de un disparador con resorte horizontal ( $\Sigma \vec{F}_y$  será despreciable, ya que la suma entre el peso y la fuerza normal es 0, haciendo que no haya aceleración ni fuerzas en ese eje):



$$\Sigma \vec{F}_y = -mg + N \rightarrow mg = N$$

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}$$

$$k\Delta x = m\vec{a}$$

$$k\Delta x = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Aplicando un cambio de variable, introduciendo el operador de derivada en identidad  $\frac{d\vec{x}}{dx} = 1$  y aprovechando la propiedad conmutativa del álgebra para con un cambio de variable obtener la derivada de la posición con respecto al tiempo (velocidad):

$$k\Delta x = m \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{d\vec{x}}{dx} = m \frac{d\vec{v}}{dx} \frac{d\vec{x}}{dt}; \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}$$

$$\frac{k\Delta x}{m} = \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dx}$$

Al  $\frac{d\vec{v}}{dx}$  estar refiriéndose a una

derivada de la velocidad con respecto a la posición, su operación inversa es la integral, entonces integrando (con límites yendo desde 0 hasta el valor final para evitar constantes, sabiendo que todo empieza desde su posición reposo) el lado contrario con respecto a  $d\vec{x}$ :

$$\int_0^{\Delta x} \frac{k\Delta x}{m} d\vec{x} = \int_0^{\vec{v}_f} \vec{v} d\vec{v}$$

$$\frac{k}{m} \int_0^{\Delta x} \Delta x d\vec{x} = \int_0^{\vec{v}_f} \vec{v} d\vec{v}$$

Aplicando la regla de integración

$$\int ax^n dx = a\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + C \text{ y el teorema}$$

fundamental del cálculo

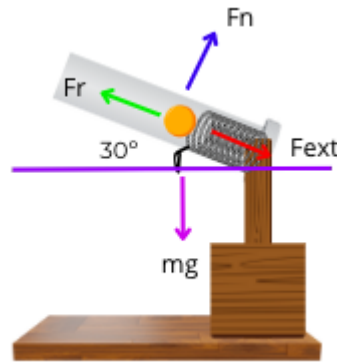
$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \text{ (y siendo}$$

$a$  igual a 0, es descartable ese término que se evaluaría a 0):

$$\frac{k}{m} \left( \frac{\Delta x^2}{2} \right) = \frac{\Delta v_f^2}{2}$$

De aquí se puede obtener distintas variaciones de la ecuación, ya sea para obtener el valor de  $k$ , la velocidad de salida del objeto del disparador, o la masa o el cambio a la longitud del resorte en determinado caso.

No obstante, esta es una versión muy simplista. Falta introducir que el disparador esté posicionado a un ángulo con respecto a la horizontal:



Esto resultaría en el siguiente ajuste:

$$\Sigma \vec{F}_x = m \vec{a}_x$$

$$k \Delta \vec{x} - m g \sin(\theta) = m \vec{a}_x$$

$$k \Delta \vec{x} - m g \sin(\theta) = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$k \Delta \vec{x} - m g \sin(\theta) = m \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{d\vec{x}}{dx} = m \frac{d\vec{v}}{dx} \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\frac{k \Delta \vec{x}}{m} - g \sin(\theta) = v \frac{d\vec{v}}{dx}$$

$$\int_0^{\Delta x} \frac{k \Delta \vec{x}}{m} - g \sin(\theta) d\vec{x} = \int_0^{\vec{v}_f} \vec{v} d\vec{v}$$

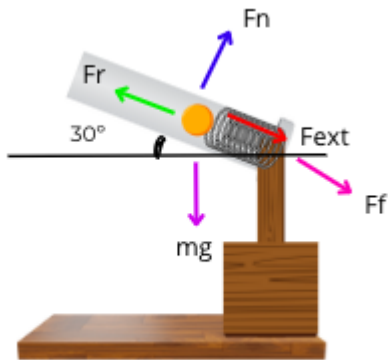
$$\frac{k}{m} \int_0^{\Delta x} \Delta \vec{x} d\vec{x} - \int_0^{\Delta x} g \sin(\theta) d\vec{x} = \int_0^{\vec{v}_f} \vec{v} d\vec{v}$$

$$\frac{k}{m} \left( \frac{\Delta x^2}{2} \right) - g \sin(\theta) \Delta \vec{x} = \frac{\Delta v_f^2}{2}$$

No obstante, en un contexto real, al haber imperfecciones en las superficies de los objetos, estas se van chocando al haber movimiento, a su vez dificultando el

mismo; a esto se le conoce como fuerza de fricción.

Considerando factores de fricción, el desarrollo queda de la siguiente manera:



$$\Sigma \vec{F}_x = -m\vec{g}\sin(\theta) + k\Delta\vec{x} - \mu_k \vec{N} = m\vec{a}_x$$

Sabiendo que:

$$\Sigma \vec{F}_y = -m\vec{g}\cos(\theta) + \vec{N} = 0$$

$$\vec{N} = m\vec{g}\cos(\theta)$$

$$k\Delta\vec{x} - m\vec{g}\sin(\theta) - \vec{N}\mu_k\cos(\theta) = m\vec{a}_x$$

$$k\Delta\vec{x} - m\vec{g}\sin(\theta) - m\mu_k\cos(\theta) = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$k\Delta\vec{x} - m\vec{g}[\sin(\theta) + \mu_k\cos(\theta)] = m\frac{d\vec{v}}{dt}\frac{d\vec{x}}{d\vec{x}}$$

$$\frac{k\Delta\vec{x}}{m} - \vec{g}(\sin(\theta) + \mu_k\cos(\theta)) = \vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\vec{x}}$$

$$\int_0^{\Delta\vec{x}} \frac{k\Delta\vec{x}}{m} - \vec{g}(\sin(\theta) + \mu_k\cos(\theta))d\vec{x} = \int_0^{\vec{v}} \vec{v}d\vec{v}$$

$$\frac{k}{m} \int_0^{\Delta\vec{x}} \Delta\vec{x}d\vec{x} - \int_0^{\Delta\vec{x}} \vec{g}(\sin(\theta) + \mu_k\cos(\theta))d\vec{x} = \int_0^{\vec{v}}$$

$$\frac{k}{m} \left( \frac{\Delta\vec{x}^2}{2} \right) - \vec{g}(\sin(\theta) + \mu_k\cos(\theta))\Delta\vec{x} = \frac{\Delta\vec{v}_f^2}{2}$$

Esta es la ecuación resultante. Por ejemplo, despejando para la velocidad de salida de dado proyectil, o para el módulo de Young del resorte en estas condiciones:

$$\vec{v}_f = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta\vec{x}^2 - 2\vec{g}(\sin(\theta) + \mu_k\cos(\theta))\Delta\vec{x}}$$

$$k = m \left( \frac{\vec{v}_f^2 + 2\vec{g}(\sin(\theta) + \mu_k\cos(\theta))\Delta\vec{x}}{\Delta\vec{x}^2} \right)$$

Un tiro de gol de campo o de punto extra se ubica a 25 yardas o 22.86 metros de los postes (NFL, s.f).

El poste Y tiene una medida de 5.64 metros de ancho por 10.67 metros de altura, también es de suma importancia recalcar que el travesaño que marca si el gol es válido o no (por altura), se

encuentra a 3,05 metros del terreno de juego (DAZN, 2023)

Regresando a la matemática y física, las ecuaciones estándar para un tiro parabólico son las siguientes:

x:

$$x = x_0 + V_x t$$

y:

$$y = y_0 + V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$V_y = V_0 - gt$$

$$-2g(y_f - y_0) = V_f^2 - V_0^2$$

Ahora si tomamos en cuenta el viento dentro del escenario de la trayectoria del tiro, al igual que los planos 3D del movimiento, las ecuaciones cambiarían a las siguientes

*U (velocidad constante del tiempo):*

$$U = U_x i + U_y j + U_z k$$

*eje x:*

$$V_x = |V|\cos\theta\cos\phi$$

$$V_{xy} = |V|\cos\theta$$

$$x = x_0 + U_x t + V_0\cos\theta\sin\phi t$$

*eje y:*

$$y = y_0 + V_0\cos\theta\sin\phi t + \alpha U_y t$$

$$V_y = |V|\cos\theta\sin\phi$$

$$V_{xy} = |V|\cos\theta$$

*eje z:*

$$z = z_0 + V_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 + \alpha U_z t$$

$$V_z = |V|\sin\theta$$

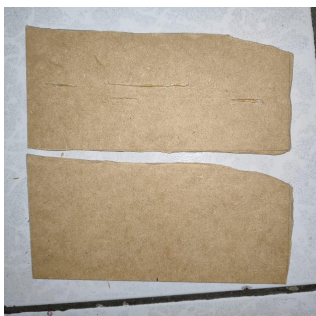
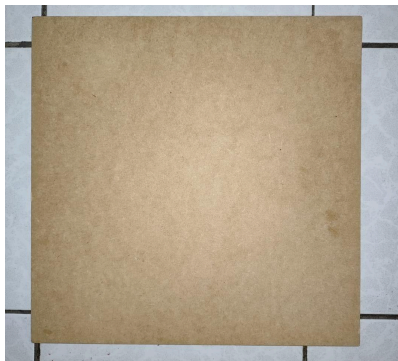
$u$  es la velocidad constante del viento,  $\phi$  es el ángulo horizontal de la trayectoria debido a que estamos tomando el movimiento en un plano 3D, de igual manera es un ángulo que podemos tomar para ajustar la desviación por la velocidad del viento, y finalmente  $\alpha$  es la constante de arrastre.

### Proceso de Construcción

Los materiales que se utilizaron para construir nuestro prototipo fueron los siguientes:

- 3 Tablas mdf 3mm 40cmx40cm
- 1 Tubo PVC
- 2 Resortes
- Cartón
- Alambre/Fierro
- Taladro
- Silicón
- Transportador
- Cortadora
- Segueta
- Cinta adhesiva





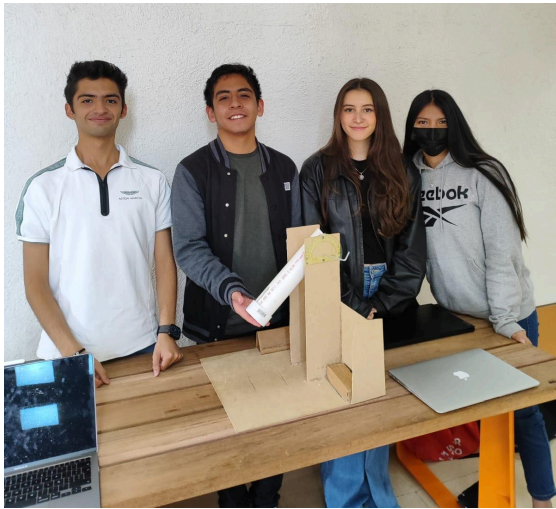
Para la construcción del prototipo se cortó un tubo de PVC para formar un tipo de lanzador, cortando el tubo a una medida de 29.5 cm de altura, así como cortar una ranura de 5.5 cm en ambos lados, esto para poder ingresar un fierro que actuará como disparador para poder comprimir los resortes unidos en paralelo, resortes que irán pegados a la base del tubo de pvc.

Asimismo se construyó una base que sostiene el lanzador, base que tiene una medida de 40 cm x 40 cm. Para la construcción de esta base se requirió cortar las siguientes piezas:

- 2 piezas de 10 cm x 40 cm.
- 2 piezas de 10 cm x 20.5 cm.
- 1 pieza de 40 cm x 20.5 cm

Con una base de 40 cm x 40 cm, usando las siguientes piezas se creó un soporte para el lanzador, cabe recalcar que el eje que sostiene el lanzador se encuentra a 35 cm de la base donde va plantada. El eje fue creado usando 2 fierros que asimismo marcan el ángulo de tiro puesto

que uno de estos es paralelo al ángulo en el que está direccionado el lanzador.



## Desarrollo Experimental

Para determinar la constante de elasticidad del resorte resultante (porque se colocaron dos en paralelo), se requirió de un proceso un poco más experimental.

Se utilizó en concepto un soporte universal (con pinza), un resorte de 7.8cm de longitud natural, y pesas de distintas masas con gancho. A partir de ellas, se pudo realizar combinaciones para alcanzar mayores magnitudes de masa. A continuación, la cinta métrica se colocó en su extremo marcado como 0 al nivel del hilo, y cada que se colgaba una masa del resorte, se tomaba su propia medición de

la longitud a consecuencia de la fuerza del peso ejercida por la masa sobre el resorte hacia abajo (y para obtener el cambio, a todas las mediciones se les restó el valor original, (0.078 m). El resto fue cuestión de un mayor análisis.

No se presentan las masas de 0.01kg, 0.02kg, y 0.05kg en los datos ya que ningún miembro del equipo percibió cambio en la longitud, es decir, la fuerza que ejercían sobre el resorte era negligible a comparación de la fuerza mínima requerida para causar un cambio.

m [kg]	$\Delta \vec{x} $ [m]
0.1	0.002
0.2	0.002
0.5	0.004
1	0.012
1.5	0.017
1.7	0.02

Al plantear esto mismo en un gráfico de dispersión, se invirtió la variable independiente en el eje horizontal, que debiese ser la masa, a la serie de datos

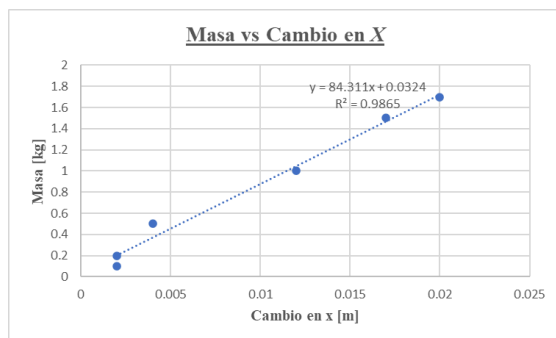
de la variable medida  $\vec{\Delta x}$ . Esto es porque, basado en el marco teórico, la fuerza elástica de un resorte está dada por  $k\vec{\Delta x}$ . Teniendo en cuenta que la medición se realizó cuando el sistema estaba estático, se podría decir que alcanzó un equilibrio dinámico donde las fuerzas se balancean. Es decir,

$$\vec{F}_R - m\vec{g} = 0 \Rightarrow \vec{F}_R = m\vec{g}$$

$$k\vec{\Delta x} = m\vec{g}$$

$$m = \frac{k}{g}\vec{\Delta x}$$

Esto parece una ecuación lineal, en forma  $y = mx + b$ , considerando y definiendo a la letra griega mu ( $\mu$ ) como equivalente a  $\frac{k}{g}$  y está pendiente de la gráfica resultante. El gráfico es el siguiente:



La función de mejor ajuste (con una  $R^2 = 0.9865$ , indicando un ajuste muy bueno, desviado por esos datos iniciales) está dada por la función (en términos de la forma simple de un lineal):

$$y = 84.311x + 0.0324$$

Cabe mencionar que las incertidumbres absolutas de cada dato medido ( $\pm \Delta(\Delta x) = 0.0005m$ ) y las que se asume que venían incluidas con las mediciones de masa ( $\pm \Delta m = 0.0005kg$ ) están incluidas en el gráfico, pero es apreciable que sus magnitudes en comparación con las mediciones no afectarían por un factor tan grande las mediciones, y se debe considerar que estos valores ya están siendo promediados, disminuyendo su incertidumbre y aumentando exactitud y precisión.

Ahora, recordando que se decidió invertir la convención de la variable independiente en el eje x, ahora se verá por qué. Habiendo definido que la pendiente, nombrada  $\mu$ , ahora vale 84.311, y que

$\mu = \frac{k}{g}$ , despejando  $k$  y tomando el valor estándar a nivel del mar de la gravedad como  $9.81ms^{-2}$  se obtiene el valor de  $k$  para este resorte en particular:

$$\mu = \frac{k}{g} \Rightarrow k = \mu \vec{g} = 84.311(9.81)$$

$$k_{eq} = 827.0811 Nm^{-1}$$

Sabiendo el valor de la  $k$  resultante del sistema, para complementar el análisis, se puede obtener la  $k$  de cada resorte:

$$k_{eq} = k_1 + k_2; k_1 = k_2$$

$\therefore$

$$k_{eq} = 2k_1 \rightarrow k_1 = \frac{k_{eq}}{2}$$

$$k_1 = 413.5405 Nm^{-1}$$

Ahora, como cualquier buen experimento, se deben considerar los posibles errores experimentales de medición y propagación de incertidumbres. Evitando las operaciones de fracciones con incertidumbres absolutas y relativas, se permaneció con un análisis de los errores basados en desviaciones estándar y sus efectos en los cálculos subsecuentes, principalmente, en el valor

de  $k$  obtenido. Las siguientes fórmulas muestran el error (más menos) de la pendiente y la desviación estándar, simbolizada por la letra griega sigma  $\sigma$ .

$$\Delta\mu = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2}{n-2}}$$

Los cálculos a detalle se encuentran en el apéndice 1.

Es claro que para el cálculo de  $\Delta\mu$  se requiere el valor de sigma. En ambas ecuaciones la  $n$  simboliza la cantidad de datos que se tiene, que en este caso fueron 6 datos. De igual forma, en el cálculo de la desviación estándar, que al final sirve para identificar qué tan dispersos están los datos alrededor de la tendencia promedio, se realizó precisamente la diferencia entre el dato obtenido experimentalmente y el valor que según el mejor ajuste debió haber aparecido. Se suman todos esos valores, ya sean positivos o negativos, y en caso de que el total lo sea, se eleva al cuadrado (y luego tomando una especie de

promedio ponderado se divide entre  $n - 2$  y luego otra vez raíz cuadrada.

En fin, teniendo la desviación estándar, se substituyó en la ecuación del error en  $\mu$ , donde fue necesaria una diferencia de cuadrados en la parte del denominador. En resumen, los valores obtenidos son los siguientes:

$$\sigma = 0.35244$$

$$\Delta\mu = 7.97214$$

Considerando las propagaciones de incertidumbres al obtener un valor multiplicando por un dato sin incertidumbres, para calcular el error en  $k$  basta seguir el mismo planteamiento para obtener la  $k$  misma:

$$\Delta k = \Delta\mu \times \vec{g} = 7.97214 \times 9.81ms$$

$$\Delta k = 78.2066 Nm^{-1}$$

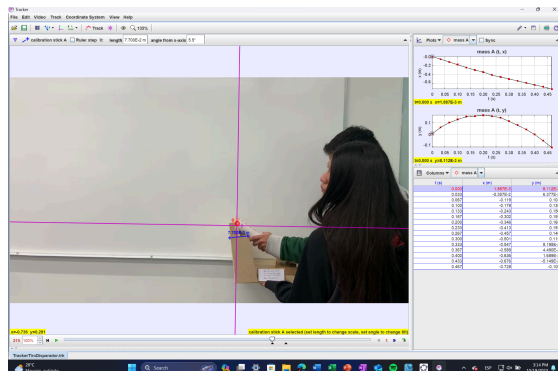
Esto quiere decir que, el valor del módulo de Young calculado de  $827.081 Nm^{-1}$  realmente conlleva una posible desviación de  $\pm 78.2066 Nm^{-1}$ .

Poniendo a prueba el prototipo del dispositivo de lanzamiento desarrollado a base de los dos muelles en paralelo, se

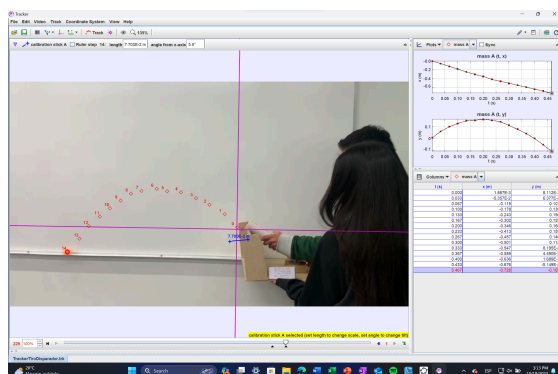
grabó un video de corta duración ejemplificando un disparo, donde se supone que se comprimió lo más posible el resorte para mimetizar las condiciones más cercanas a donde se alcanzaría la velocidad máxima de disparo. El disparador tenía un ángulo de  $32^\circ$  fijo, ya que en esa instancia el prototipo no era capaz de regular su inclinación. También es importante mencionar que el video se tuvo que grabar en un lugar con un fondo que tuviera la menor cantidad de irregularidades u objetos que pudiesen confundir al software (Tracker) al momento de identificar a la pequeña pelota de golf amarilla o naranja de ping pong con la que se contaba.

Para el funcionamiento correcto y preciso de Tracker, era necesario tomar una medida referencia cualquiera, y esta fue un pedazo del soporte del disparador (línea azul). Al importar el video a Tracker, configurar marco de referencia (líneas rosas) y cuadros de video relevantes, escala, y configurar el objeto a

rastrear (punto naranja), se obtuvo una pantalla como la siguiente:



El programa, considerando la escala, es capaz de estimar distancias en cualquier punto del cuadro. A partir de ello, analizando los cuadros subsecuentes se marca la trayectoria de la pequeña pelota.



La herramienta brinda información, como se muestra a la derecha, sobre la posición en x y posición en y con respecto al tiempo. Esto, recordando que las ecuaciones de cinemática y tiro parabólico también se subseccionan en plano x y

plano y, permitirían con un poco de creatividad determinar la velocidad inicial en sus respectivos componentes, para así calcular la magnitud del vector en su conjunto.

Sabiendo que se habla de movimiento, se seleccionaron dos posiciones distintas representativas del movimiento arbitrariamente. En este caso particular, se escogió que el primero fuera, naturalmente, el par de coordenadas inicial  $(x_0, y_0)$ , y por practicidad, se escogió el punto marcado como 12 en el diagrama para que funja como  $(x_f, y_f)$ . De esta manera, se podrá analizar un cambio en donde, aproximadamente, la pelota haya trazado su parábola desde un punto de origen hasta cuando regresa a relativamente la misma altura al caer.

Entonces, en el tiempo  $0.00s$ :  $(x_0, y_0) =$

$$(1.887 \times 10^{-3}, 8.112 \times 10^{-3})$$

metros. En el tiempo  $0.4s$ :  $(x_f, y_f) =$

$$(-0.636, -1.689 \times 10^{-3})$$

metros.

Aplicando las fórmulas de cinemática:

- Plano  $x$  (para  $\vec{v}_{0x}$ ):

$$x_f = x_0 + \vec{v}_{0x} t$$

$$\frac{x_f - x_0}{t} = \frac{\Delta x}{t} = \vec{v}_{0x}$$

$$\vec{v}_{0x} = \frac{-0.636 - 1.887 \times 10^{-3}}{0.4}$$

$$\vec{v}_{0x} = -1.5947 \text{ ms}^{-1}$$

- Plano  $y$  (para  $\vec{v}_{0y}$ ):

$$y_f = y_0 + \vec{v}_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{y_f - y_0 + \frac{1}{2} g t^2}{t} = \vec{v}_{0y} = \frac{\Delta y + \frac{1}{2} g t^2}{t}$$

$$\vec{v}_{0y} = \frac{1.689 \times 10^{-3} - 8.112 \times 10^{-3} + \frac{9.81(0.4)^2}{2}}{0.4}$$

$$\vec{v}_{0y} = 1.94594 \text{ ms}^{-1}$$

- Obteniendo magnitud:

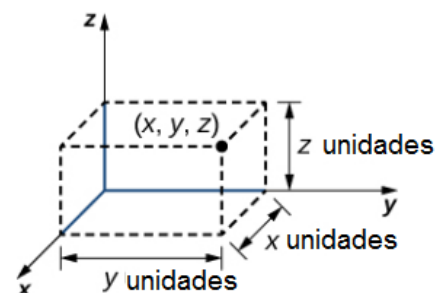
$$\vec{v}_E^2 = \vec{v}_{0x}^2 + \vec{v}_{0y}^2$$

$$\vec{v}_E = \sqrt{\vec{v}_{0x}^2 + \vec{v}_{0y}^2}$$

$$\vec{v}_E = 4.765 \text{ ms}^{-1}$$

Experimentalmente, la velocidad de salida del proyectil fue de  $2.5159 \text{ ms}^{-1}$ .

Ahora, pasando a una demostración tecnológica aplicada de estas ecuaciones a un contexto de un gol de campo, se utilizó el software de Geogebra Classic 5 en la interfaz gráfica tridimensional. Suena complejo, pero realmente era sencillo considerando que ya teníamos los datos y las ecuaciones. En principio, lo que se realizó fue configurar las ecuaciones para sus respectivos ejes como si fuesen funciones con respecto a la variable tiempo, no con respecto a  $x$ , la cual es convencionalmente la variable independiente colocada en software graficador (en Geogebra, el eje vertical es el  $z$ , siguiendo la regla de la mano derecha):



Para poder crear funciones, y no constantes en base a una variable fija como lo sería tiempo de otro modo, se configuró un deslizador, que en términos prácticos

solo permite cambiar el valor de una variable en determinado dominio de valores y en incrementos fijos. Las ecuaciones, considerando un sistema perfecto, quedarían del siguiente modo (donde  $a$  es un ángulo que el depende del “pateador” hipotético en la simulación, pero que también es un deslizador definido para un dominio de  $\{0^\circ, 90^\circ\}$ , ya que no hace sentido incorporar ángulos que harían que pateee hacia atrás o hacia abajo con respecto a la horizontal):

$$x: f(t) = v_0 \cos(a)t$$

$$y: g(t) = 0$$

$$z: h(t) = y_0 + v_0 \sin(a)t - \frac{1}{2}gt^2$$

En el plano  $y$  el valor de 0 es constante porque por el momento no hay movimiento con respecto a ese plano, y se posicionará en la simulación el poste de gol directamente sobre el eje, por lo que un tiro recto daría exactamente en el centro de la portería. Recopilando estas tres ecuaciones, para poder crear una única curva, se recurrió a un concepto llamado función paramétrica. Ya las habíamos

conocido antes. Las mismas  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $h(t)$  son por concepto paramétricas, ya que reciben y cambian en base a un solo parámetro que cambia, el tiempo. En este caso, la curva que se definió recibiría tres parámetros. Un valor para  $x$ , otro para  $y$ , y otro para  $z$ . Esto lo que hace es permitir que las tres funciones trabajen en conjunto para crear un sistema de coordenadas en 3 dimensiones con respecto al tiempo:

$$Pos(t) = (f_{(t)}, g_{(t)}, h_{(t)})$$

Para poder visualizar un punto que cambie su posición, simplemente se definió una variable de modo que:

$$e = Pos(t)$$

No obstante, esto es en un mundo ideal, donde no hay factores externos involucrados en el resultado o trayectoria del proyectil. Se debe considerar un factor muy importante que hasta el momento se ha ignorado y permitió poner el valor en  $g(t) = 0$ , movimiento del viento y cómo este ralentiza el movimiento.



Recordando lo mencionado anteriormente, la trayectoria de un tiro parabólico cambia si tomamos en cuenta que es un movimiento tridimensional y uno el cuál de igual manera es afectado por el viento, por lo que las ecuaciones deben de ser sometidas ante ciertos ajustes, lo que nos llevó a tener las siguientes ecuaciones:

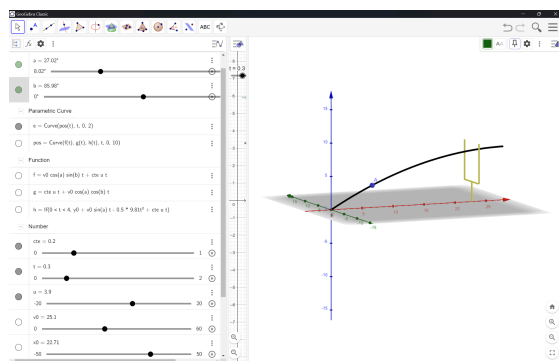
$$f(t) = v_0 \cos(a) \sin(b)t + cte(ut)$$

$$g(t) = cte(ut) + v_0 \cos(a) \cos(b)t$$





$$h(t) = y_0 + v_0 \sin(a)t - \frac{gt^2}{2} + cte(ut)$$

Para modelar el poste de gol de campo, bastó con puntos y segmentos de recta con longitud ya conocida por investigación sobre las medidas del poste.

Juntando todo lo anterior, el simulador queda así:



Angle	<p>a = 27.02° 8.02° 90°</p> <p>b = 85.98° 0° 180°</p>
Parametric Curve	<p>e = Curve(pos(t), t, 0, 2) = pos(t), (0 ≤ t ≤ 2)</p> <p>pos = Curve(f(t), g(t), h(t), t, 0, 10)  <math display="block">\left. \begin{aligned} x &amp;= 25.1 \cos(27.02^\circ) \sin(85.98^\circ) t + 0.2 \cdot 3.9 t \\ y &amp;= 0.2 \cdot 3.9 t + 25.1 \cos(27.02^\circ) \cos(85.98^\circ) t \\ z &amp;= \text{If}(0 &lt; t &lt; 4, 25.1 \sin(27.02^\circ) t - 0.5 \cdot 9.81 t^2 + 0.2 \cdot 3.9 t) \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 10</math> </p>
Function	<p>f(t) = v0 cos(a) sin(b) t + cte u t = 25.1 cos(27.02°) sin(85.98°) t + 0.2 · 3.9 t</p> <p>g(t) = cte u t + v0 cos(a) cos(b) t = 0.2 · 3.9 t + 25.1 cos(27.02°) cos(85.98°) t</p> <p>h(t) = If(0 &lt; t &lt; 4, y0 + v0 sin(a) t - 0.5 · 9.81 t² + cte u t) = 25.1 sin(27.02°) t - 0.5 · 9.81 t² + 0.2 · 3.9 t, (0 &lt; t &lt; 4)</p>
Number	<p>cte = 0.2 0 1</p> <p>t = 0.3 0 2</p> <p>u = 3.9 -20 20</p> <p>v0 = 25.1 0 60</p> <p>x0 = 22.71 -50 50</p> <p>y0 = 0 0 5</p>
Point	<p>A = (f(t), g(t), h(t)) = (6.93, 0.7, 3.21)</p> <p>B = (x0, 0, 3) = (22.71, 0, 3)</p> <p>C = (x0, 0, 0) = (22.71, 0, 0)</p> <p>D = (x0, 2.775, 3) = (22.71, 2.78, 3)</p> <p>E = (x0, -2.775, 3) = (22.71, -2.78, 3)</p> <p>F = (x0, 2.775, 9) = (22.71, 2.78, 9)</p> <p>G = (x0, -2.775, 9) = (22.71, -2.78, 9)</p>

Segment		
	i = Segment(B, C)	⋮
	= 3	
	j = Segment(D, E)	⋮
	= 5.55	
	k = Segment(D, F)	⋮
	= 6	
	l = Segment(G, E)	⋮
	= 6	

En el ejemplo de la simulación, el valor dado a la velocidad del viento es de  $3.9ms^{-1}$  (arbitrariamente), y a la constante de arrastre se le asignó un valor de 0.2 (arbitrario, pero representaría un arrastre bajo, el cual es influenciado por densidad de aire, clima, altura sobre nivel del mar, etc.). Esto es asumiendo que la velocidad del viento es constante, por cierto. Para compensar esta desviación, se introdujo un segundo ángulo en el plano x y z llamado b en la simulación, pero en la teoría se llamó Phi. Esto introduciría un componente nuevo a ese plano, requiriendo que se modifican y se introdujera esos términos en cada plano.

### Análisis de resultados obtenidos

Sabiendo el valor de k teórico, y la velocidad de salida experimental, se puede

probar qué tan acertada era dicha predicción en el modelo con la velocidad de salida teórica para un disparador con fricción y posicionado en ángulo con la fórmula obtenida previamente en el marco teórico (el coeficiente  $\mu_k$ , fue investigado en internet)<sup>2</sup>:

$$v_f = \sqrt{\frac{k}{m} \Delta x^2 - 2g[\sin(\theta) + \mu_k \cos(\theta)] \Delta x}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{827.081Nm^{-1}}{0.0027kg} (0.0038)^2 - 2(9.81)[\sin(32^\circ) + 0.07\cos(32^\circ)](0.0038m)}$$

$$v_f = 2.08296ms^{-1}$$

Para confirmar qué tan cercano a lo hipotético estuvo el resultado experimental, se puede usar la siguiente fórmula para errores porcentuales:

$$\epsilon_{\%} = \frac{|\vec{v}_{0\text{ Teórica}} - \vec{v}_{0\text{ Experimental}}|}{\vec{v}_{0\text{ Teórica}}} (100)$$

$$\epsilon_{\%} = \frac{|2.08296 - 2.5159|}{2.08296} (100)$$

$$\epsilon_{\%} = 20.785\%$$

Es decir, el resultado experimental estuvo desviado 20.785% del valor teórico esperado. Esto puede ser porque las condiciones experimentales no fueron las

de la teoría. Por ejemplo, puede haber habido irregularidades y errores en el cálculo del módulo de Young, o el coeficiente de fricción cinético entre el PVC y la pelota de plástico puede estar incorrecto.

## Conclusión

En conclusión, considerando todos los resultados y el análisis realizado, y ahora comprendiendo mejor movimiento parabólico en un sistema tridimensional, el objetivo del reto se cumplió. Claro, existen márgenes de error en los cálculos de la constante elástica y la velocidad de salida gracias al sistema de resortes en paralelo sobrepuestos, pero es natural al desarrollar experimentos simplificando variables. El más grande es el de la velocidad, siendo la desviación casi un quinto del valor teórico, pero se justifica considerando que el valor de  $k$  también arrastra una incertidumbre y una desviación en su valor.

Hablando del prototipo en sí, es funcional disparando la pelota a una

velocidad de  $2.5\text{ms}^{-1}$ . Esto es casi como hablar de un proyectil que se mueve a 9 kilómetros por hora. De igual forma, considerando que es un prototipo, se debe hablar de mejoras. Primero que nada, sería ideal usar materiales cortados con precisión con la cortadora láser, pegamentos más lisos con el silicón caliente, y cortes más limpios del tubo de PVC. Así mismo, para lograr una mayor estabilidad del tubo al disparar, podría implementarse un soporte ajustable según el grado de inclinación en la base para que el tubo se recargue, porque por ahora, al jalar el gatillo, es más que probable que se desvíe un poco el ángulo al que se había puesto previamente, desajustando las predicciones del resultado real. Por otro lado, hablando de mejoras, la toma de mediciones pudo haber sido mejor. Ejemplificando esto, es la estabilidad del video utilizado en Tracker, colocando el dispositivo de grabación en una superficie fija, o los posibles errores visuales al medir la elongación del resorte con las

distintas masas con la contribución de distintas perspectivas para así promediar los distintos desajustes y acercarse al valor verdadero.

No obstante, considerando el estado del prototipo, y viendo el pequeño margen de error que se obtuvo comparando velocidad teórica contra la experimental, no estuvo tan desacertado. Esto apunta a que se logró llevar a cabo bien la parte experimental, y el uso de la simulación fue un gran complemento al entendimiento de la dinámica, aplicación y manipulación, de las fórmulas vistas en el aula a dos contextos reales: movimiento en un ambiente no-ideal (velocidad de viento) y sistemas de fuerza que resultan en movimiento.

## Referencias

Ferrovial-STEM (2023). Leyes de Newton.

<https://www.ferrovial.com/es/stem/leyes-de-newton/#:~:text=Segunda%20Ley%20de%20Newton%20o%20ley%20fundamental%20de%20la%20din%C3%A1mica&text=Esta%20ley%20plantea%20que%20la%20aplicación%20de%20una%20fuerza%20para%20moverlo>

Khan Academy (2022). ¿Qué es la Ley Hooke?

<https://es.khanacademy.org/science/physics/work-and-energy/hookes-law/a/what-is-hookes-law>

Roda V. (2022). Módulo de elasticidad.

[http://www.mecapedia.uji.es/pages/modulo\\_de\\_elasticidad.html#:~:text=El%20m%C3%B3dulo%20de%20elasticidad%20indicado%20es%20su%20m%C3%B3dulo%20de%20elasticidad](http://www.mecapedia.uji.es/pages/modulo_de_elasticidad.html#:~:text=El%20m%C3%B3dulo%20de%20elasticidad%20indicado%20es%20su%20m%C3%B3dulo%20de%20elasticidad).

UAEH (s.f). *Presentación de Power Point*. [Diapositivas de PowerPoint]

[https://www.uaeh.edu.mx/docencia/P\\_Pres](https://www.uaeh.edu.mx/docencia/P_Pres)

[entaciones/prepa4/fisica/Tiro%20Parabólico.pdf](#)

Chuvieco, F. (2023, 8 septiembre).

Qué es la zona de anotación o end zone en la NFL y cuánto mide. DAZN.

<https://www.dazn.com/es-ES/news/f%C3%BAtbol-americano/que-es-la-zona-de-anotación-o-end-zone-en-la-nfl-y-cuanto-mide/509p45gqt6pulpyetv77gx5y1>

NFL. (s. f.). Jugadas de anotación.

Operaciones de fútbol americano de la NFL. Recuperado 20 de octubre de 2023, de

<https://operations.nfl.com/es/las-reglas/videos-explicativos-de-las-reglas-de-la-nfl/jugadas-de-anotación/>

Ortiz, R & Chile, M. (2022). Factor de fricción para tuberías de PVC y PE para riego. Recuperado 20 de octubre de 2023 de

[https://www.researchgate.net/publication/362850552\\_FACTOR\\_DE\\_FRICCION\\_PARA\\_TUBERIAS\\_DE\\_PVC\\_Y\\_PE\\_PARA\\_RIEGO](https://www.researchgate.net/publication/362850552_FACTOR_DE_FRICCION_PARA_TUBERIAS_DE_PVC_Y_PE_PARA_RIEGO)

## Apéndice 1: Excel para cálculos de error

en k

m (kg)	dxprom	xy	x^2
0.1	0.002	0.0002	4E-08
0.2	0.002	0.0004	1.6E-07
0.5	0.004	0.002	4E-06
1	0.012	0.012	0.00014
1.5	0.017	0.0255	0.00065
1.7	0.02	0.034	0.00116
Sumas		0.0741	0.00195