Họ và tên : Nguyễn Từ Huy.
MSSV: 1711127.
Bài kiểm tra giữa kì môn Phương pháp sai phân hữu hạn (Finite Difference Method).

Question :
Let $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ and f $\in L^2(\Omega)$.

$$-u_{xx} = f(x) \ \ in \ \Omega$$

subject to a Dirichlet boundary condition:

$$u(0) = 0, \ u(1) = 0$$

1. How to discretize the previous system equation by finite difference method with non-uniform mesh.
2. Prove the convergence of scheme.

Answer :
Xét bài toán trên miền Ω được chia thành N+1 điểm x_i (với $i = \overline{0, N}$) không đều nhau
Đặt:

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$
$$h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$$

Ta xấp xỉ giá trị hàm tại các điểm x_i

$$u_i \simeq u(x_i) \quad , \forall i = \overline{0, N}$$

Sử dụng biến đổi Taylor tại x_i ta có:
Khi đó:

$$u_{i+1} = u_i + u_i' h_i + \frac{1}{2} u_i'' h_i^2 + \frac{1}{6} u_i^{(3)} h_i^3 + O(h_i^4) \tag{1}$$
$$u_{i-1} = u_i - u_i' h_{i-1} + \frac{1}{2} u_i'' h_{i-1}^2 - \frac{1}{6} u_i^{(3)} h_{i-1}^3 + O(h_{i-1}^4) \tag{2}$$

Nhân phương trình (1) cho h_{i-1}, phương trình (2) cho h_i ta được:

$$u_{i+1} h_{i-1} = u_i h_{i-1} + u_i' h_i h_{i-1} + \frac{1}{2} u_i'' h_i^2 h_{i-1} + \frac{1}{6} u_i^{(3)} h_i^3 h_{i-1} + O(h_i^4) h_{i-1} \tag{1'}$$
$$u_{i-1} h_i = u_i h_i - u_i' h_{i-1} h_i + \frac{1}{2} u_i'' h_{i-1}^2 h_i - \frac{1}{6} u_i^{(3)} h_{i-1}^3 h_i + O(h_{i-1}^4) h_i \tag{2'}$$

Cộng (1') và (2') ta được:

$$u_{i+1} h_{i-1} + u_{i-1} h_i = u_i (h_i + h_{i-1}) + \frac{1}{2} u_i'' h_i h_{i-1} (h_i + h_{i-1}) + \frac{1}{6} u_i^{(3)} h_{i-1} h_i (h_i^2 - h_{i-1}^2) + O(h_{i-1} h_i (h_i^3 - h_{i-1}^3)).$$

Giả sử h = $max(h_i)$
Suy ra:

$$
\begin{aligned}
u_i^{''} &= 2 \times \frac{u_{i+1}h_{i-1} - u_i(h_i + h_{i-1}) + u_{i-1}h_i}{h_i h_{i-1}(h_i + h_{i-1})} - \frac{1}{6}\frac{u_i^{(3)} h_{i-1} h_i (h_i^2 - h_{i-1}^2)}{h_i h_{i-1}(h_i + h_{i-1})} + O(h^2). \\
u_i^{''} &= \frac{2}{h_i(h_i + h_{i-1})} u_{i+1} - \frac{2}{h_i h_{i-1}} u_i + \frac{2}{h_{i-1}(h_i + h_{i-1})} u_{i-1} - \frac{1}{6} u_i^{(3)} (h_i - h_{i-1}) + O(h^2) \qquad (*) \\
u_i^{''} &= \frac{2}{h_i(h_i + h_{i-1})} u_{i+1} - \frac{2}{h_i h_{i-1}} u_i + \frac{2}{h_{i-1}(h_i + h_{i-1})} u_{i-1} + O(h).
\end{aligned}
$$

Từ đề bài, ta có:

$$-u_i^{''} = f(x_i) \quad , \forall i = \overline{1, N-1}$$

Sử dụng xấp xỉ ở trên ta có:

$$-\frac{2}{h_i(h_i + h_{i-1})} u_{i+1} + \frac{2}{h_i h_{i-1}} u_i - \frac{2}{h_{i-1}(h_i + h_{i-1})} u_{i-1} = f_i \quad , \forall i = \overline{1, N-1}$$

với $f_i = f(x_i) \quad , \forall i = \overline{1, N-1}$
Sử dụng điều kiện biên Dirichlet, ta cũng có:

$$u_0 = 0 \quad and \quad u_N = 0$$

Khi đó ta có hệ xấp xỉ tuyến tính sau:

$$
\begin{cases}
i = 0, u_0 & = 0 \\
i = 1, -\dfrac{2}{h_0(h_1 + h_0)} u_0 + \dfrac{2}{h_1 h_0} u_1 - \dfrac{2}{h_1(h_1 + h_0)} u_2 & = f_1 \\
i = 2, -\dfrac{2}{h_1(h_2 + h_1)} u_1 + \dfrac{2}{h_2 h_1} u_2 - \dfrac{2}{h_2(h_2 + h_1)} u_3 & = f_2 \\
\\
... \\
i = N-1, -\dfrac{2}{h_{N-2}(h_{N-1} + h_{N-2})} u_{N-2} + \dfrac{2}{h_{N-1} h_{N-2}} u_{N-1} - \dfrac{2}{h_{N-1}(h_{N-1} + h_{N-2})} u_N & = f_{N-1} \\
i = N, u_N & = 0
\end{cases}
$$

Ma trận dạng AU = F
Trong đó $A \in \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1}$ và $U, F \in \mathbb{R}^{N+1}$ xác định bởi:

$$
A = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{2}{h_0(h_1+h_0)} & \frac{2}{h_1 h_0} & -\frac{2}{h_1(h_1+h_0)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{2}{h_1(h_2+h_1)} & \frac{2}{h_2 h_1} & -\frac{2}{h_2(h_2+h_1)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{2}{h_{N-3}(h_{N-2}+h_{N-3})} & \frac{2}{h_{N-2}h_{N-3}} & \frac{2}{h_{N-2}(h_{N-2}+h} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{2}{h_{N-2}(h_{N-1}+h_{N-2})} & \frac{2}{h_{N-1}h_{N-2}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Đánh giá một chút về bậc hội tụ:
Từ phương trình (*)

$$u_i'' = \frac{2}{h_i(h_i+h_{i-1})}u_{i+1} - \frac{2}{h_ih_{i-1}}u_i + \frac{2}{h_{i-1}(h_i+h_{i-1})}u_{i-1} - \frac{1}{6}u_i^{(3)}(h_i - h_{i-1}) + O(h^2) \qquad (*)$$

Nếu lưới gần đều, tức là hiệu $h_i - h_{i-1} \approx 0$ tại hầu hết i.
Thì bậc hội tụ của bài toán sẽ là bậc 2.
Điều này có thể thấy qua bài tập 1b:
Đoạn $[0,1]$ được chia thành các điểm $x_i = 1 - cos(\frac{\pi i}{2N})$, khi lấy N lớn thì khoảng cách giữa các điểm gần như cách đều nhau nên bài toán này mặc dù chia theo lưới không đều nhưng vẫn hội tụ bậc 2.

Kế tiếp ta sẽ đánh giá "Stability", "Consistancy" để suy ra "Convergence".

•*Stability*
Để tiện theo dõi ta viết lại:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{h_i(h_i+h_{i-1})}u_{i+1} - \dfrac{2}{h_ih_{i-1}}u_i + \dfrac{2}{h_{i-1}(h_i+h_{i-1})}u_{i-1} = -f_i \quad ,\forall i = \overline{1, N-1} \\ u_0 = 0 \\ u_N = 0 \\ h_i = x_{i+1} - x_i \quad ,\forall i = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

Ta có nhận xét:
$\sum_{i=0}^{N-1} h_i = x_N - x_0 = b - a = 1$
Biến đổi phương trình đầu tiên:

$$\begin{aligned} \frac{2}{h_i(h_i+h_{i-1})}u_{i+1} - \frac{2}{h_ih_{i-1}}u_i + \frac{2}{h_{i-1}(h_i+h_{i-1})}u_{i-1} &= -f_i \quad ,\forall i = \overline{1, N-1} \\ \frac{2}{h_i}u_{i+1} - \frac{2(h_i+h_{i-1})}{h_ih_{i-1}}u_i + \frac{2}{h_{i-1}}u_{i-1} &= -f_i(h_i+h_{i-1}) \quad ,\forall i = \overline{1, N-1} \\ \frac{1}{h_i}(u_{i+1}-u_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(u_i - u_{i-1}) &= -f_i\frac{(h_i+h_{i-1})}{2} \quad ,\forall i = \overline{1, N-1} \end{aligned}$$

Nhân 2 vế phương trình với u_i rồi lấy tổng từ 1 tới N-1 ta được:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1}\left[\frac{(u_{i+1}-u_i)u_i}{h_i} - \frac{(u_i-u_{i-1})u_i}{h_{i-1}}\right] &= -\sum_{i=1}^{N-1}\left[f_iu_i\frac{(h_i+h_{i-1})}{2}\right] \\ \sum_{i=1}^{N-1}\left[\frac{(u_{i+1}-u_i)u_i}{h_i}\right] - \sum_{i=1}^{N-1}\left[\frac{(u_i-u_{i-1})u_i}{h_{i-1}}\right] &= -\sum_{i=1}^{N-1}\left[f_iu_i\frac{(h_i+h_{i-1})}{2}\right] \\ \sum_{i=1}^{N-1}\left[\frac{(u_{i+1}-u_i)u_i}{h_i}\right] - \sum_{i=0}^{N-2}\left[\frac{(u_{i+1}-u_i)u_{i+1}}{h_i}\right] &= -\sum_{i=1}^{N-1}\left[f_iu_i\frac{(h_i+h_{i-1})}{2}\right] \end{aligned}$$

Vì $u_0 = 0$ và $u_N = 0$ nên:

$$\sum_{i=0}^{N-1}\left[\frac{(u_{i+1}-u_i)u_i}{h_i}\right]-\sum_{i=0}^{N-1}\left[\frac{(u_{i+1}-u_i)u_{i+1}}{h_i}\right]=-\sum_{i=1}^{N-1}\left[f_iu_i\frac{(h_i+h_{i-1})}{2}\right]$$
$$\sum_{i=0}^{N-1}\left[\frac{(u_{i+1}-u_i)u_i}{h_i}-\frac{(u_{i+1}-u_i)u_{i+1}}{h_i}\right]=-\sum_{i=1}^{N-1}\left[f_iu_i\frac{(h_i+h_{i-1})}{2}\right]$$
$$\sum_{i=0}^{N-1}\left[\frac{(u_{i+1}-u_i)^2}{h_i}\right]=\sum_{i=1}^{N-1}\left[f_iu_i\frac{(h_i+h_{i-1})}{2}\right] \qquad (**)$$

Ta định nghĩa chuẩn rời rạc $L^2_{h_i}$

$$\|u\|^2_{2,h_i}=\sum_{i=1}^{N-1}\left[u_i^2\frac{(h_i+h_{i-1})}{2}\right]$$

Ta định nghĩa chuẩn rời rạc $H^1_{h_i}$

$$|||u|||^2_{1,h_i}=\sum_{i=0}^{N-1}\left[\frac{(u_{i+1}-u_i)^2}{h_i}\right]$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta được:

$$\sum_{i=1}^{N-1}\left[f_iu_i\frac{(h_i+h_{i-1})}{2}\right]\le\left[\sum_{i=1}^{N-1}f_i^2\frac{(h_i+h_{i-1})}{2}\right]^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{N-1}u_i^2\frac{(h_i+h_{i-1})}{2}\right]^{1/2}=\|f\|_{2,h_i}\|u\|_{2,h_i}$$

Mặt khác, tồn tại hằng số C dương sao cho:

$$\|u\|^2_{2,h_i}\le C|||u|||^2_{1,h_i}$$

Thật vậy,
Với $u_0=0$

$$u_i=\sum_{i'=0}^{i}\left[\frac{(u_{i'+1}-u'_i)}{h'_i}h'_i\right]$$

Suy ra,

$$u_i^2\le\sum_{i'=0}^{i}h'_i\sum_{i'=0}^{i}\left[\frac{(u_{i'+1}-u'_i)^2}{h'_i}\right]\le(x_N-x_0)\sum_{i'=0}^{N-1}\left[\frac{(u_{i'+1}-u'_i)^2}{h'_i}\right]=1.|||u|||^2_{1,h_i}=|||u|||^2_{1,h_i}$$

Do đó

$$\|u\|^2_{2,h_i}=\sum_{i=1}^{N-1}\left[u_i^2\frac{(h_i+h_{i-1})}{2}\right]\le\sum_{i=1}^{N-1}\left[|||u|||^2_{1,h_i}\frac{(h_i+h_{i-1})}{2}\right]\le|||u|||^2_{1,h_i}\sum_{i=1}^{N-1}\left[\frac{(h_i+h_{i-1})}{2}\right]\le|||u|||^2_{1,h_i}$$

Vì:

$$\sum_{i=1}^{N-1}\left[\frac{(h_i+h_{i-1})}{2}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{N-1}h_i+\sum_{i=1}^{N-1}h_{i-1}}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1}h_i+\sum_{i=0}^{N-2}h_i}{2} = \frac{x_{N-1}-x_1+x_{N-2}-x_0}{2} \le x_N - x0 = 1$$

Sử dụng điều đã chứng minh ta suy ra được:

$$|||u|||_{1,h_i} \le \|f\|_{2,h_i}$$

•*Consistancy*

Trước tiên ta định nghĩa các toán tử:

$$L(\hat{u})(x_i) = -\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}(x_i)$$
$$L_{h_i}(\hat{u})(x_i) = -\left[\frac{2}{h_i(h_i+h_{i-1})}\hat{u}(x_{i+1}) - \frac{2}{h_ih_{i-1}}\hat{u}(x_i) + \frac{2}{h_{i-1}(h_i+h_{i-1})}\hat{u}(x_{i-1})\right]$$

Sử dụng giả thuyết cảu bài toán:

$$L(\hat{u})(x_i) = -\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}(x_i) = f(x_i)$$

Ta có:

$$\tau_i = L_{h_i}(\hat{u})(x_i) - f(x_i) = L_{h_i}(\hat{u})(x_i) - L(\hat{u})(x_i) = -\left[\frac{2}{h_i(h_i+h_{i-1})}\hat{u}(x_{i+1}) - \frac{2}{h_ih_{i-1}}\hat{u}(x_i) + \frac{2}{h_{i-1}(h_i+h_{i-1})}\hat{u}(x_i$$

Sử dụng khai triển Taylor, tồn tại $\eta_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ sao cho:

$$-\left[\frac{2}{h_i(h_i+h_{i-1})}\hat{u}(x_{i+1}) - \frac{2}{h_ih_{i-1}}\hat{u}(x_i) + \frac{2}{h_{i-1}(h_i+h_{i-1})}\hat{u}(x_{i-1})\right] + \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}(x_i) = -\frac{h_i-h_{i-1}}{6}\frac{\partial^3\hat{u}}{\partial x^3}(\eta_i)$$

Suy ra:

$$\tau_i = -\frac{h_i-h_{i-1}}{6}\frac{\partial^3\hat{u}}{\partial x^3}(\eta_i) = -\frac{h_i-h_{i-1}}{6}\frac{\partial f}{\partial x}(\eta_i)$$

Suy ra:

$$\|\tau\|_{2,h_i} \le \left\|\frac{h_i-h_{i-1}}{6}\right\|_{2,h_i}\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(\eta_i)\right\|_{2,h_i}$$

•*Convergence*

Từ những chứng minh trên ta suy ra:

$$|||\hat{u}-u|||^2_{1,h_i} \le \|\tau\|_{2,h_i} \le \left\|\frac{h_i-h_{i-1}}{6}\right\|_{2,h_i}\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(\eta_i)\right\|_{2,h_i}$$

Vậy khi những h_i tiến dần về 0 thì nghiệm chính xác $\hat{u}$ cũng tiến về nghiệm xấp xỉ u