# GIẢI TÍCH PHẦN TỬ HỮU HẠN
# Bài tập cuối kỳ II năm học 2019-2020

Ông Thanh Hải

Ngày 8 tháng 8 năm 2020

∗ ***Deadline***: 31/08/2020.

**Bài tập 1:** Cho miền $\Omega \subset \mathbb{R}$ và phương trình như bên dưới đây

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ a_1 u'(0) + a_2 u(0) &= g_1(x), \\ b_1 u'(1) + b_2 u(1) &= g_2(x), \quad \text{với} \quad \alpha, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \quad \text{và} \quad a_1 \neq 0, b_1 \neq 0 \end{cases}$$

Dựa vào phương trình và các dữ kiện trên, hãy thực hiện các yêu cầu sau đây

a. Chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và tính duy nhất của nghiệm phương trình trên.

b. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn để xây dựng một thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên.

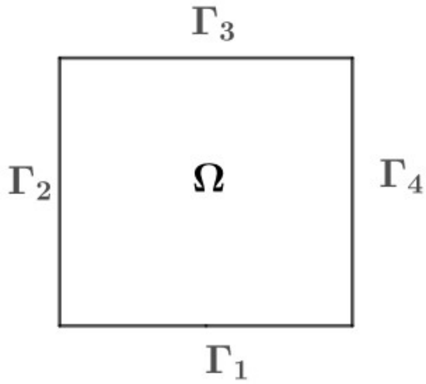
c. Với miền $\Omega = [0, 1]$, ta có phương trình sau đây

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) &= x + (1 + 4\pi^2)\sin(2\pi x), \quad x \in \Omega, \\ u'(0) &= 1 + 2\pi, \\ u'(1) + u(1) &= 2 + 2\pi. \end{cases}$$

Nghiệm chính xác của phương trình trên là $u(x) = x + \sin(2\pi x)$.

Áp dụng thuật toán đã xây dựng ở câu b để tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên. Lưu ý: dùng đa thức nội suy Lagrange bậc 2 để tính toán chi tiết từng tích phân, ma trận trong thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ, thực hành trên phần mềm MATLAB để tìm nghiệm xấp xỉ và so sánh đối chiếu với nghiệm chính xác của phương trình trên.

**Bài tập 2:** Cho miền $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ như hình vẽ dưới đây




***Bài tập 2.1:*** Với miền $\Omega$ cho như trên, xét phương trình

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + \alpha u(x,y) & = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) & = g_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_1, \\ u(x,y) & = g_2(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_3, \\ a_1 u(x,y) + a_2 \nabla u(x,y) \cdot \vec{n}_{\Gamma_2} & = h_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_2, \\ b_1 u(x,y) + b_2 \nabla u(x,y) \cdot \vec{n}_{\Gamma_4} & = h_2(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_4, \quad \text{với} \quad \alpha, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \quad \text{và} \quad a_2 \neq 0, b_2 \neq 0 \end{cases}$$

Dựa vào phương trình và các dữ kiện trên, hãy thực hiện các yêu cầu sau đây

a. Chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và tính duy nhất của nghiệm phương trình trên.

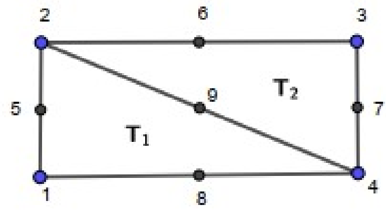
b. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn để xây dựng một thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên.

c. Với miền $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, ta có phương trình sau đây

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + u(x,y) & = (1+4\pi^2)(\sin(2\pi x) + \cos(2\pi x)) + \frac{x^2+y^2}{4} - 1, \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) & = \sin(2\pi x) + \frac{x^2}{4} + 1, \quad (x,y) \in \Gamma_1, \\ u(x,y) & = \sin(2\pi x) + \frac{x^2+1}{4} + 1, \quad (x,y) \in \Gamma_3, \\ u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & = \cos(2\pi y) + \frac{y^2}{4} + 2\pi, \quad (x,y) \in \Gamma_2, \\ u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & = \cos(2\pi y) + \frac{y^2+1}{4} + 2\pi + \frac{1}{2}, \quad (x,y) \in \Gamma_4 \end{cases}$$

Nghiệm chính xác của phương trình trên là $u(x) = \sin(2\pi x) + \cos(2\pi y) + \frac{x^2+y^2}{4}$.

Áp dụng thuật toán đã xây dựng ở câu b để tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên. Dùng **lưới tam giác và đa thức nội suy Lagrange bậc 2** như hình dưới đây để tính toán chi tiết từng tích phân, ma trận trong thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ, thực hành trên phần mềm MATLAB để tìm nghiệm xấp xỉ và so sánh đối chiếu với nghiệm chính xác của phương trình.




***Bài tập 2.2:*** Với miền $\Omega$ cho như trên, xét phương trình

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + \alpha u(x,y) & = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) & = g_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_1, \\ u(x,y) & = g_2(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_3, \\ \nabla u(x,y) \cdot \vec{n}_{\Gamma_2} & = h_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_2, \\ \nabla u(x,y) \cdot \vec{n}_{\Gamma_4} & = h_2(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_4 \end{cases}$$

Dựa vào phương trình và các dữ kiện trên, hãy thực hiện các yêu cầu sau đây

a. Chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và tính duy nhất của nghiệm phương trình trên.

b. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn để xây dựng một thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên.

c. Với miền $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, ta có phương trình sau đây

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + u(x,y) & = (1+4\pi^2)(\sin(2\pi x) + \cos(2\pi x)) + \frac{x^2+y^2}{4} - 1, \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) & = \sin(2\pi x) + \frac{x^2}{4} + 1, \quad (x,y) \in \Gamma_1, \\ u(x,y) & = \sin(2\pi x) + \frac{x^2+1}{4} + 1, \quad (x,y) \in \Gamma_3, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & = 2\pi, \quad (x,y) \in \Gamma_2, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & = 2\pi + \frac{1}{2}, \quad (x,y) \in \Gamma_4 \end{cases}$$

Nghiệm chính xác của phương trình trên là $u(x) = \sin(2\pi x) + \cos(2\pi y) + \frac{x^2+y^2}{4}$.

Áp dụng thuật toán đã xây dựng ở câu b để tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên. Dùng **lưới tứ giác và đa thức nội suy Lagrange bậc 2** như hình dưới đây để tính toán chi tiết từng tích phân, ma trận trong thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ, thực hành trên phần mềm MATLAB để tìm nghiệm xấp xỉ và so sánh đối chiếu với nghiệm chính xác của phương trình.