Họ và tên : Nguyễn Từ Huy.
MSSV: 1711127.
Bài kiểm tra cuối kì môn Phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method) cho bài toán phương trình đạo hàm riêng.

Question1 :
Cho miền $\Omega \subset \mathbb{R}$ và phương trình bên dưới:

$$\begin{cases} -u^{''}(x) + \alpha u(x) & = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ a_1 u'(0) + a_2 u(0) & = C_1, \\ b_1 u'(1) + b_2 u(1) & = C_2. \end{cases}$$

Trong đó $\alpha, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ và $a_1, b_1 \neq 0$, $C_1, C_2 = const$

Dựa vào phương trình và các dữ kiện trên, hãy thực hiện các yêu cầu sau đây

a. Chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và tính duy nhất của nghiệm phương trình trên.

b. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn để xây dựng một thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên.

c. Với miền Ω = [0,1], ta có phương trình sau đây:

$$\begin{cases} -u^{''}(x) + u(x) & = x + (1 + 4\pi^2)sin(2\pi x), \quad \forall x \in \Omega \\ u'(0) & = 1 + 2\pi, \\ u'(1) + u(1) & = 2 + 2\pi. \end{cases}$$

Nghiệm chính xác của phương trình trên là: $u(x) = x + sin(2\pi x)$.
Áp dụng thuật toán đã xây dựng ở câu b để tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên.

Lưu ý: dùng đa thức nội suy Lagrange bậc 2 để tính toán chi tiết từng tích phân, ma trận trong thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ, thực hành trên phần mềm MATLAB để tìm nghiệm xấp xỉ và so sánh đối chiếu với nghiệm chính xác của phương trình trên.

Answer1 :

a. Chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và tính duy nhất của nghiệm phương trình.
Ở đây ta giả sử $\Omega = [0, 1]$

$$\begin{cases} -u^{''}(x) + \alpha u(x) & = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ a_1 u'(0) + a_2 u(0) & = C_1, \\ b_1 u'(1) + b_2 u(1) & = C_2. \end{cases} \tag{1}$$

Sử dụng phép tính biến phân,
Nhân 2 vế phương trình cho v (với v $\in H^1(\Omega)$) rồi lấy tích phân trên toàn miền Ω ta được phương trình mới:

$$-\int_\Omega u^{''}.vd\Omega + \int_\Omega \alpha u.vd\Omega = \int_\Omega f.vd\Omega \qquad ,\forall v \in H^1(\Omega)$$

Sử dụng công thức tích phân từng phần cho vế trái ta được:

$$\begin{aligned} -u'.v|_0^1 + \int_\Omega (u'.v' + \alpha u.v)d\Omega &= \int_\Omega f.vd\Omega \qquad ,\forall v \in H^1(\Omega) \\ -u'(1).v(1) + u'(0).v(0) + \int_\Omega (u'.v' + \alpha u.v)d\Omega &= \int_\Omega f.vd\Omega \qquad ,\forall v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

Biến đổi điều kiện biên của bài toán. Ta có:

$$\begin{cases} a_1u'(0) + a_2u(0) &= C_1, \\ b_1u'(1) + b_2u(1) &= C_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(0) &= \dfrac{1}{a_1}(C_1 - a_2u(0)), \\ \\ u'(1) &= \dfrac{1}{b_1}(C_2 - b_2u(1)). \end{cases}$$

Thay vào phương trình ta được:

$$-\frac{1}{b_1}(C_2 - b_2u(1))v(1) + \frac{1}{a_1}(C_1 - a_2u(0))v(0) + \int_\Omega (u'.v' + \alpha u.v)d\Omega = \int_\Omega f.vd\Omega, \forall v \in H^1(\Omega)$$

$$\frac{b_2}{b_1}u(1)v(1) - \frac{a_2}{a_1}u(0)v(0) + \int_\Omega (u'.v' + \alpha u.v)d\Omega = \int_\Omega f.vd\Omega + \frac{C_2}{b_1}v(1) - \frac{C_1}{a_1}v(0), \forall v \in H^1(\Omega) \qquad (2)$$

(*) Chứng minh phương trình (2) tồn tại nghiệm và duy nhất.
Nhắc lại về định lý Lax-Milgram:
Lax – Milgram theorem :
Cho V là không gian Banach được trang bị chuẩn $\|.\|$.
Cho F : V $\to \mathbb{R}$ và a(.,.) : V×V $\to \mathbb{R}$.
Nếu F tuyến tính, bị chặn; a song tuyến tính, bị chặn và coercive.
Thì tồn tại duy nhất u $\in V$:

$$a(u,v) = F(v) \qquad ,\forall v \in V$$

Đặt

$$\begin{cases} a(u,v) = \dfrac{b_2}{b_1}u(1)v(1) - \dfrac{a_2}{a_1}u(0)v(0) + \displaystyle\int_\Omega (u'.v' + \alpha u.v)d\Omega \\ \\ F(v) = \dfrac{C_2}{b_1}v(1) - \dfrac{C_1}{a_1}v(0) + \displaystyle\int_\Omega f.vd\Omega \end{cases}$$

Ta lần lượt chứng minh:
▼ a song tuyến tính, bị chặn, coercive:
• a song tuyến tính:
Tuyến tính theo biến thứ nhất:

$$
\begin{aligned}
a(u+\gamma w, v) &= \frac{b_2}{b_1}(u+\alpha w)(1)v(1) - \frac{a_2}{a_1}(u+\alpha w)(0)v(0) + \int_\Omega ((u+\alpha w)'.v' + \alpha(u+\gamma w).v)d\Omega \\
&= \frac{b_2}{b_1}u(1)v(1) - \frac{a_2}{a_1}u(0)v(0) + \int_\Omega (u'.v' + \alpha u.v)d\Omega \\
&+ \gamma\left(\frac{b_2}{b_1}w(1)v(1) - \frac{a_2}{a_1}w(0)v(0) + \int_\Omega (w'.v' + \alpha w.v)d\Omega\right) \\
&= a(u,v) + \gamma.a(w,v).
\end{aligned}
$$

Tuyến tính theo biến thứ hai:

$$
\begin{aligned}
a(u, v+\beta t) &= \frac{b_2}{b_1}u(1)(v+\beta t)(1) - \frac{a_2}{a_1}u(0)(v+\beta t)(0) + \int_\Omega (u'.(v+\beta t)' + \alpha u.(v+\beta t))d\Omega \\
&= \frac{b_2}{b_1}u(1)v(1) - \frac{a_2}{a_1}u(0)v(0) + \int_\Omega (u'.v' + \alpha u.v)d\Omega \\
&+ \beta\left(\frac{b_2}{b_1}u(1)t(1) - \frac{a_2}{a_1}u(0)t(0) + \int_\Omega (u'.t' + \alpha u.t)d\Omega\right) \\
&= a(u,v) + \beta.a(u,t).
\end{aligned}
$$

• a bị chặn:

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\frac{b_2}{b_1}u(1)v(1) - \frac{a_2}{a_1}u(0)v(0) + \int_\Omega (u'.v' + \alpha u.v)d\Omega\right| \\
&\le \left|\frac{b_2}{b_1}u(1)v(1)\right| + \left|\frac{a_2}{a_1}u(0)v(0)\right| + \left|\int_\Omega (u'.v' + \alpha u.v)d\Omega\right|
\end{aligned}
$$

Ta có:

$$
u(1) = [x.u(x)]|_0^1 = \int_0^1 (x.u(x))'dx = \int_0^1 (u(x) + xu'(x))dx.
$$

Khi đó:

$$
|u(1)| \le \int_0^1 |u(x) + xu'(x)|\, dx \le \sqrt{\int_0^1 \left(1+x^2\right) dx}\sqrt{\int_0^1 \left(u^2 + u'^2\right) dx} \le \sqrt{2}\|u\|_{H^1}.
$$

Hoàn toàn tương tự ta có $|v(1)| \le \sqrt{2}\|v\|_{H^1}$.

$$
\begin{aligned}
|u(0)| = \left|\int_0^1 ((x-1).u(x))'dx\right| &\le \int_0^1 |u(x) + (x-1)u'(x)|\, dx \le \sqrt{\int_0^1 \left(1 + (1-x)^2\right) dx}\sqrt{\int_0^1 \left(u^2 + u'^2\right) dx} \\
&\le \sqrt{2}\|u\|_{H^1}.
\end{aligned}
$$

Và tương tự: $|v(0)| \leq \sqrt{2}\|v\|_{H^1}$.
Suy ra:

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \left|\frac{b_2}{b_1}u(1)v(1)\right| + \left|\frac{a_2}{a_1}u(0)v(0)\right| + \left|\int_\Omega (u'.v' + \alpha u.v)d\Omega\right| \\
&\leq 2\left|\frac{b_2}{b_1}\right| \|u\|_{H^1}.\|v\|_{H^1} + 2\left|\frac{a_2}{a_1}\right| \|u\|_{H^1}.\|v\|_{H^1} + max(|\alpha|,1)\sqrt{\int\limits_0^1 \left(u'^2 + u^2\right)dx}\sqrt{\int\limits_0^1 \left(v'^2 + v^2\right)dx} \\
&\leq \left(2\left|\frac{b_2}{b_1}\right| + 2\left|\frac{a_2}{a_1}\right| + max(|\alpha|,1)\right)\|u\|_{H^1}.\|v\|_{H^1}
\end{aligned}$$

• a coercive:
Sử dụng Trace Theorem ta có:

$$a(u,u) = \frac{b_2}{b_1}(u(1))^2 - \frac{a_2}{a_1}(u(0))^2 + \int_\Omega (u'^2 + \alpha u^2)d\Omega \geq \|u\|^2_{H_1} + min(1,\alpha)\|u\|^2_{H_1} \geq min(1,\alpha)\|u\|^2_{H_1}$$

▼ F tuyến tính, bị chặn:
• F tuyến tính:

$$\begin{aligned}
F(v+\alpha w) &= \frac{C_2}{b_1}(v+\alpha w)(1) - \frac{C_1}{a_1}(v+\alpha w)(0) + \int_\Omega f.(v+\alpha w)d\Omega \\
&= \left(\frac{C_2}{b_1}v(1) - \frac{C_1}{a_1}v(0) + \int_\Omega f.vd\Omega\right) + \alpha\left(\frac{C_2}{b_1}w(1) - \frac{C_1}{a_1}w0) + \int_\Omega f.wd\Omega\right) \\
&= F(v) + \alpha F(w).
\end{aligned}$$

• F bị chặn:

$$\begin{aligned}
|F(v)| &\leq \left|\frac{C_2}{b_1}v(1)\right| + \left|\frac{C_1}{a_1}v(0)\right| + \left|\int_\Omega f.vd\Omega\right| \\
&\leq \left|\frac{C_2}{b_1}\right|\sqrt{2}\|v\|_{H^1} + \left|\frac{C_1}{a_1}\right|\sqrt{2}\|v\|_{H^1} + \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&\leq \left(\sqrt{2}\left|\frac{C_2}{b_1}\right| + \sqrt{2}\left|\frac{C_1}{a_1}\right| + \|f\|_{L^2}\|\right)\|v\|_{H^1}
\end{aligned}$$

Vậy theo định lý Lax-Milgram: tồn tại duy nhất $u \in H^1(\Omega)$ sao cho:

$$a(u,v) = F(v) \qquad ,\forall v \in H^1(\Omega)$$

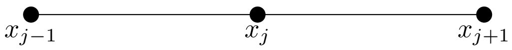
Hay nói cách khác tồn tại duy nhất $u \in H^1(\Omega)$ là nghiệm yếu của bài toán (1)

b. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn để xây dựng một thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên.

Đặt $V = H^1(\Omega)$ Ở đây ta xét phương pháp Phần tử hữu hạn cho miền Ω (1 chiều), xấp xỉ bằng đa thức nội suy Lagrange bậc 2 để tìm một xấp xỉ cho nghiệm $u \in V$ thỏa bài toán (2) :

$$\frac{b_2}{b_1}u(1)v(1) - \frac{a_2}{a_1}u(0)v(0) + \int_\Omega (u'.v' + \alpha u.v)d\Omega = \int_\Omega f.vd\Omega + \frac{C_2}{b_1}v(1) - \frac{C_1}{a_1}v(0) \quad ,\forall v \in V \tag{2}$$

Để tiện trình bày ta kí hiệu Đa thức nội suy Lagrange bậc 2 là: $L_{2,i}$
Nhắc lại về hàm Lagrange bậc 2:
Giả sử trên đoạn $[x_{j-1}, x_{j+1}]$



Hàm Lagrange bậc 2 trên đoạn $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ có dạng :

$$L_{2,j}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})}, & x = x_j \\ \\ 0, & x \neq x_j \end{cases}$$

Ta đi rời rạc hóa các yếu tố của bài toán:
Miền Ω được chia ra các khoảng đều nhau thành:

Giả sử $x_{i+1} - x_i = h$ với mọi $i = \overline{1, n-1}$
Khi đó không gian V_h xác định bởi:

$$V_h = span_{i=\overline{0,2n}}\{L_{2,i}\}$$

Nếu $u_h \in V_h$ là một xấp xỉ cho nghiệm $u \in V$
Với $u_h \in V_h$, ta có thể viết u_h dưới dạng:

$$u_h = \sum_{i=0}^{2n} u_i L_{2,i}$$
$$\Rightarrow u'_h = \sum_{i=0}^{2n} u_i L'_{2,i}$$

Vậy bài toán trở thành:
Tìm $u_h \in V_h$ sao cho:

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \qquad , \forall v_h \in V_h.$$

Dựa vào công thức việc tìm u_h tương đương với việc đi tìm các $\{u_i\}_{i=\overline{0,2n}}$.
Xét $v_h = L_{2,j}$, bài toán trở thành tìm các $\{u_i\}_{i=\overline{0,2n}}$ sao cho

$$a\left(\sum_{i=0}^{2n} u_i L_{2,i}, L_{2,j}\right) = F(L_{2,j})$$

Trong đó:

$$a\left(\sum_{i=0}^{2n} u_i L_{2,i}, L_{2,j}\right) = \frac{b_2}{b_1} u_n L_{2,j}(y_{2n}) - \frac{a_2}{a_1} u_0 L_{2,j}(y_0) + \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n-1} u_i L'_{2,i}(y_i).L'_{2,j}(y_i) dy + \int_\Omega \alpha \sum_{i=1}^{2n-1} u_i L_{2,i}(y_i).L_{2,j}(y_i) dy$$

$$F(L_{2,j}) = \int_\Omega f.L_{2,j}(y_i) dy + \frac{C_2}{b_1} L_{2,j}(y_{2n}) - \frac{C_1}{a_1} L_{2,j}(y_0)$$

Ta được bài toán. tìm các $\{u_i\}_{i=\overline{1,n-1}}$ sao cho :

$$\begin{aligned}
\frac{b_2}{b_1}u_{2n}L_{2,j}(y_{2n}) - \frac{a_2}{a_1}u_0L_{2,j}(y_0) + \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n-1}u_iL'_{2,i}(y_i).L'_{2,j}(y_i)dy + \int\limits_{\Omega}\alpha\sum_{i=1}^{2n-1}u_iL_{2,i}(y_i).L_{2,j}(y_i)dy \\
= \int_{\Omega} f.L_{2,j}(y_i)dy + \frac{C_2}{b_1}L_{2,j}(y_{2n}) - \frac{C_1}{a_1}L_{2,j}(y_0) \\
u_{2n}\frac{b_2}{b_1}L_{2,j}(y_{2n}) - u_0\frac{a_2}{a_1}L_{2,j}(y_0) + \sum_{i=1}^{2n-1}u_i\int\limits_{\Omega}L'_{2,i}(y_i).L'_{2,j}(y_i)dy + \alpha\sum_{i=1}^{2n-1}u_i\int\limits_{\Omega}L_{2,i}(y_i).L_{2,j}(y_i)dy \\
= \int_{\Omega} f.L_{2,j}(y_i)dy + \frac{C_2}{b_1}L_{2,j}(y_{2n}) - \frac{C_1}{a_1}L_{2,j}(y_0) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Xét trong khoảng $[x_0, x_1]$
Ta thấy trong khoảng $[x_0, x_1]$ chỉ có $L_{2.0}, L_{2.1}, L_{2.2} \neq 0$
Với j = 0,

$$-u_0\frac{a_2}{a_1}L_{2,0} + u_1\int\limits_{x_0}^{x_1}L'_{2,1}.L'_{2,0}dy + u_2\int\limits_{x_0}^{x_1}L'_{2,2}.L'_{2,0}dy + u_1\alpha\int\limits_{x_0}^{x_1}L_{2,1}.L_{2,0}dy + u_2\alpha\int\limits_{x_0}^{x_1}L_{2,2}.L_{2,0}dy = -\frac{C_1}{a_1}L_{2,0}$$

$$-u_0\frac{a_2}{a_1}L_{2,0} + u_1\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(L'_{2,1}.L'_{2,0} + \alpha L_{2,1}.L_{2,0}\right)dy + u_2\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(L'_{2,1}.L'_{2,0} + \alpha L_{2,1}.L_{2,0}\right)dy = -\frac{C_1}{a_1}L_{2,0}$$

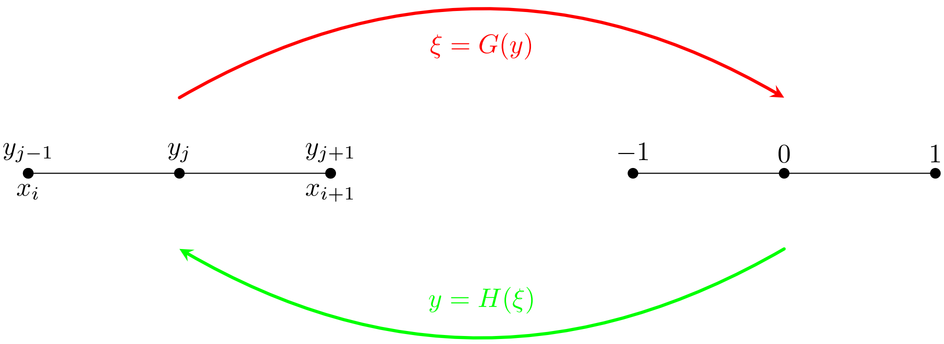
Với j = 1,

$$u_1\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(L'_{2,1}.L'_{2,1} + \alpha L_{2,1}.L_{2,1}\right)dy + u_2\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(L'_{2,1}.L'_{2,1} + \alpha L_{2,1}.L_{2,1}\right)dy = \int\limits_{x_0}^{x_1}f(x_1).L_{2,1}dy$$

Với j = 2,

$$u_1\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(L'_{2,1}.L'_{2,2} + \alpha L_{2,1}.L_{2,2}\right)dy + u_2\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(L'_{2,1}.L'_{2,2} + \alpha L_{2,1}.L_{2,2}\right)dy = \int\limits_{x_0}^{x_1}f(x_2).L_{2,2}dy$$

Để tiện cho việc tính toán tích phân trên miền Ω gồm các đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, ta xây dựng ánh xạ từ đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ qua đoạn [-1,1].
Khi đó có thể chuyển từ tích phân trên đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ về tích phân trên đoạn [-1,1]
• Xây dựng ánh xạ $x = H(\xi)$ từ đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ qua đoạn [-1,1]



• Xác định các hệ ánh xạ G(y) = ay + b và $H(\xi) = c\xi$ + d:
Xác định hệ số a,b bằng việc giải hệ

$$\begin{cases} -1 = G(y_{j-1}) = ay_{j-1} + b \\ 0 = G(y_j) = ay_j + b \\ 1 = G(y_{j+1}) = ay_{j+1} + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{y_{j+1} - y_{j-1}} \\ \\ b = \dfrac{y_{j+1} + y_{j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} \end{cases}$$

Vậy

$$\xi = G(y) = \frac{2}{y_{j+1} - y_{j-1}} y + \frac{y_{j+1} + y_{j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}}$$
$$\Rightarrow \quad d\xi = G'(\xi)dy = \frac{2}{y_{j+1} - y_{j-1}} dy = \frac{2}{x_{i+1} - x_i} dy = \frac{2}{h} dy$$

Tương tự cho ánh xạ H. Ta suy ra:

$$y = H(\xi) = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2} \xi + \frac{y_{j+1} + y_{j-1}}{2}$$
$$\Rightarrow \quad dy = H(\xi) d\xi = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2} d\xi = \frac{h}{2} d\xi$$

Và khi đó ta xác đinh được các hàm Lagrange bậc 2:

$$\begin{cases} L_{2,j-1}(y) = \overline{L}_{2,1}(G(y)) & = \dfrac{(y - y_j)(y - y_{j+1})}{(y_{j-1} - y_j)(y_{j-1} - y_{j+1})} \\ L_{2,j}(y) = \overline{L}_{2,2}(G(y)) & = \dfrac{(y - y_{j-1})(y - y_{j+1})}{(y_j - y_{j-1})(y_j - y_{j+1})} \\ L_{2,j+1}(y) = \overline{L}_{2,3}(G(y)) & = \dfrac{(y - y_{j-1})(y - y_j)}{(y_{j+1} - y_{j-1})(y_{j+1} - y_j)} \end{cases}$$

Tương tự có các hàm $\overline{L}_{2,i}$

$$\begin{cases} \overline{L}_{2,1}(\xi) = L_{2,j-1}(H(\xi)) & = \dfrac{\xi(\xi - 1)}{2} \\ \overline{L}_{2,2}(\xi) = L_{2,j}(H(\xi)) & = 1 - \xi^2 \\ \overline{L}_{2,3}(\xi) = L_{2,j+1}(H(\xi)) & = \dfrac{\xi(\xi + 1)}{2} \end{cases}$$

Hơn nữa:

$$\begin{cases} L_{2,j-1}(y) & = \overline{L}_{2,1}(G(y)) \\ L_{2,j}(y) & = \overline{L}_{2,2}(G(y)) \\ L_{2,j+1}(y) & = \overline{L}_{2,3}(G(y)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L'_{2,j-1}(y) & = \overline{L'}_{2,1}(G(y)) \dfrac{dG}{dy} = \left(\xi - \dfrac{1}{2}\right) \dfrac{2}{h} \\ L'_{2,j}(y) & = \overline{L'}_{2,2}(G(y)) \dfrac{dG}{dy} = (-2\xi) \dfrac{2}{h} \\ L'_{2,j+1}(y) & = \overline{L'}_{2,3}(G(y)) \dfrac{dG}{dy} = \left(\xi + \dfrac{1}{2}\right) \dfrac{2}{h} \end{cases}$$

Bây giờ việc tính toán tích phân trên đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ bất kì đều có thể đưa về tích phân trên đoạn [-1,1]. Điều này giúp dễ dàng hơn trong việc lập trình.
Quay lại với bài toán, trước đó ta đã tính toán thử trong khoảng $[x_0, x_1]$ và có được các kết quả.

Bây giờ biến đổi các tích phân đó từ khoảng $[x_0, x_1]$ về khoảng [-1,1]
Với j = 0,

$$-u_0\frac{a_2}{a_1}L_{2,0} + u_1\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(L'_{2,1}.L'_{2,0} + \alpha L_{2,1}.L_{2,0}\right)dy + u_2\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(L'_{2,1}.L'_{2,0} + \alpha L_{2,1}.L_{2,0}\right)dy = -\frac{C_1}{a_1}L_{2,0}$$

$$-u_0\frac{a_2}{a_1}\overline{L}_{2,1} + u_1\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{4}{h^2}.\overline{L'}_{2,2}.\overline{L'}_{2,1} + \alpha\overline{L}_{2,2}.\overline{L}_{2,1}\right)\frac{h}{2}d\xi + u_2\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{4}{h^2}.\overline{L'}_{2,2}.\overline{L'}_{2,1} + \alpha\overline{L}_{2,2}.\overline{L}_{2,1}\right)\frac{h}{2}d\xi = -\frac{C_1}{a_1}\overline{L}_{2,1}$$

Nếu đặt:

$$K_{i,j} = \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{4}{h^2}.\overline{L'}_{2,i}.\overline{L'}_{2,j} + \alpha\overline{L}_{2,i}.\overline{L}_{2,j}\right)\frac{h}{2}d\xi$$

Thì ta có thể ghi lại:

$$-u_0\frac{a_2}{a_1}\overline{L}_{2,1} + u_1.K_{21} + u_2.K_{21} = -\frac{C_1}{a_1}\overline{L}_{2,1}$$

Với j = 1,

$$u_1\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(L'_{2,1}.L'_{2,1} + \alpha L_{2,1}.L_{2,1}\right)dy + u_2\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(L'_{2,1}.L'_{2,1} + \alpha L_{2,1}.L_{2,1}\right)dy = \int\limits_{x_0}^{x_1}f(x_1).L_{2,1}dy$$

$$u_1\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{4}{h^2}.\overline{L'}_{2,2}.\overline{L'}_{2,2} + \alpha\overline{L}_{2,2}.\overline{L}_{2,2}\right)\frac{h}{2}d\xi + u_2\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{4}{h^2}\overline{L'}_{2,2}.\overline{L'}_{2,2} + \alpha\overline{L}_{2,2}\overline{L}_{2,2}\right)\frac{h}{2}d\xi = \int\limits_{-1}^{1}f(x_1).\overline{L}_{2,2}.\frac{h}{2}d\xi$$

$$u_1.K_{22} + u_2.K_{22} = \int\limits_{-1}^{1}f(x_1).\overline{L}_{2,2}.\frac{h}{2}d\xi$$

Với j = 2,

$$u_1\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(L'_{2,1}.L'_{2,2} + \alpha L_{2,1}.L_{2,2}\right)dy + u_2\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(L'_{2,1}.L'_{2,2} + \alpha L_{2,1}.L_{2,2}\right)dy = \int\limits_{x_0}^{x_1}f(x_2).L_{2,2}dy$$

$$u_1\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{4}{h^2}.\overline{L'}_{2,2}.\overline{L'}_{2,3} + \alpha\overline{L}_{2,2}.\overline{L}_{2,3}\right)\frac{h}{2}d\xi + u_2\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{4}{h^2}\overline{L'}_{2,2}.\overline{L'}_{2,3} + \alpha\overline{L}_{2,2}\overline{L}_{2,3}\right)\frac{h}{2}d\xi = \int\limits_{-1}^{1}f(x_2).\overline{L}_{2,3}.\frac{h}{2}d\xi$$

$$u_1.K_{23} + u_2.K_{23} = \int\limits_{-1}^{1}f(x_1).\overline{L}_{2,2}.\frac{h}{2}d\xi$$

Làm theo lần lượt ta sẽ đưa phương trình (3) trở thành dạng ma trận AU = F.
Trong đó: ma trận A là ma trận dộ cứng (stiffness matrix) có các thành phần địa phương là $K_{i,j}$; ma trận U xác định bởi: U=$(u_0, ..., u_{2n})$.
Để dễ dàng xác định các thành $K_{i,j}$ của ma trận A, ta dùng cầu phương Gauss cho 3 điểm trong 1 chiều.

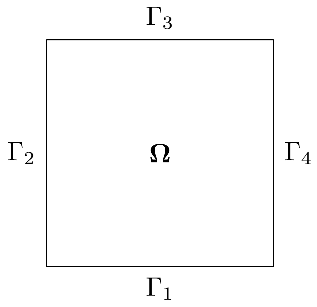
- Nhắc lại về phương pháp cầu phương Gauss 3 điểm:

$$\int_{-1}^{1} g(\xi)d\xi \approx \frac{5}{9}g\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) + \frac{8}{9}g\left(0\right) + \frac{5}{9}g\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$$

Qua đó ta dễ dàng tính được các $K_{i,j}$, qua đó tìm được ma trận A.

Question2.1 :

Cho miền Ω như hình vẽ dưới:



Với miền Ω như trên, xét phương trình:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + \alpha u(x,y) & = f(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) & = g_1(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_1, \\ u(x,y) & = g_2(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_3, \\ a_1 u(x,y) + a_2 \nabla u(x,y).\vec{n}_{\Gamma_2} & = h_1(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_2, \\ b_1 u(x,y) + b_2 \nabla u(x,y).\vec{n}_{\Gamma_4} & = h_2(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_4, \end{cases}$$

Trong đó $\alpha, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ và $a_1, b_1 \neq 0$

Dựa vào phương trình và các dữ kiện trên, hãy thực hiện các yêu cầu sau đây

a. Chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và tính duy nhất của nghiệm phương trình trên.

b. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn để xây dựng một thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên.

c. Với miền Ω = [0,1] $\times$ [0,1], ta có phương trình sau đây:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + \alpha u(x,y) & = (1+4\pi^2)(sin(2\pi x) + cos(2\pi y)) + \frac{x^2+y^2}{4} - 1, \quad \forall (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) & = sin(2\pi x) + \frac{x^2}{4} + 1, \quad \forall (x,y) \in \Gamma_1, \\ u(x,y) & = sin(2\pi x) + \frac{x^2+1}{4} + 1, \quad \forall (x,y) \in \Gamma_3, \\ u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x} & = cos(2\pi y) + \frac{y^2}{4} + 2\pi, \quad \forall (x,y) \in \Gamma_2, \\ u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x} & = cos(2\pi y) + \frac{y^2+1}{4} + 2\pi + \frac{1}{2}, \quad \forall (x,y) \in \Gamma_4, \end{cases}$$

Nghiệm chính xác của phương trình trên là: $u(x,y) = sin(2\pi x) + cos(2\pi y) + \frac{x^2+y^2}{4}$.

Áp dụng thuật toán đã xây dựng ở câu b để tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên.

Lưu ý: Dùng lưới tam giác và đa thức nội suy Lagrange bậc 2 để tính toán chi tiết từng tích phân, ma trận trong thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ, thực hành trên phần mềm MATLAB để tìm nghiệm xấp xỉ và so sánh đối chiếu với nghiệm chính xác của phương trình.

Answer2.1 :

Bài làm:

a. Chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và tính duy nhất của nghiệm phương trình.

Ở đây ta giả sử $\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + \alpha u(x,y) &= f(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) &= g_1(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_1, \\ u(x,y) &= g_2(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_3, \\ a_1 u(x,y) + a_2 \nabla u(x,y).\vec{n}_{\Gamma_2} &= h_1(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_2, \\ b_1 u(x,y) + b_2 \nabla u(x,y).\vec{n}_{\Gamma_4} &= h_2(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_4, \quad \text{trong đó } \alpha, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \text{ và } a_1, b_1 \neq 0 \end{cases}$$

Nhân 2 vế phương trình cho φ (với $\varphi \in H^1(\Omega)$) rồi lấy tích phân trên toàn miền Ω ta được phương trình mới:

$$-\int\limits_{\Omega} \varphi \Delta u d\Omega + \int\limits_{\Omega} \alpha u \varphi d\Omega = \int\limits_{\Omega} f \varphi d\Omega \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

Sử dụng định lý Green I ta được:

$$-\int\limits_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int\limits_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + \alpha u \varphi) d\Omega = \int\limits_{\Omega} f \varphi d\Omega \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

Với

$$\int\limits_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int\limits_{\Gamma_1} \varphi \frac{\partial g_1}{\partial n} dS + \int\limits_{\Gamma_3} \varphi \frac{\partial g_2}{\partial n} dS + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi \frac{h_1 - a_1 u}{a_2} dS + \int\limits_{\Gamma_4} \varphi \frac{h_2 - b_1 u}{b_2} dS$$

Thay vào phương trình ta được với $\forall \varphi \in H^1(\Omega)$

$$-\int\limits_{\Gamma_1} \varphi \frac{\partial g_1}{\partial n} dS - \int\limits_{\Gamma_3} \varphi \frac{\partial g_2}{\partial n} dS - \int\limits_{\Gamma_2} \varphi \frac{h_1 - a_1 u}{a_2} dS - \int\limits_{\Gamma_4} \varphi \frac{h_2 - b_1 u}{b_2} dS + \int\limits_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + \alpha u \varphi) d\Omega = \int\limits_{\Omega} f \varphi d\Omega,$$

$$\frac{a_1}{a_2} \int\limits_{\Gamma_2} \varphi u dS + \frac{b_1}{b_2} \int\limits_{\Gamma_4} \varphi u dS + \int\limits_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + \alpha u \varphi) d\Omega = \int\limits_{\Omega} f \varphi dS \tag{3}$$

($\star$) Chứng minh phương trình (3) tồn tại nghiệm và duy nhất.

Nhắc lại về định lý **Lax – Milgram theorem** :

Cho V là không gian Banach được trang bị chuẩn $\|.\|$.

Cho F : V $\to \mathbb{R}$ và a(.,.) : V×V $\to \mathbb{R}$.Nếu F tuyến tính, bị chặn; a song tuyến tính, bị chặn và coercive. Thì tồn tại duy nhất u $\in V$:

$$a(u,v) = F(v) \qquad , \forall v \in V$$

Đặt

$$a(u,\varphi) = \frac{a_1}{a_2} \int\limits_{\Gamma_2} \varphi u dS + \frac{b_1}{b_2} \int\limits_{\Gamma_4} \varphi u dS + \int\limits_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + \alpha u \varphi) d\Omega$$

$$F(\varphi) = \int\limits_{\Omega} f \varphi d\Omega + \int\limits_{\Gamma_1} \varphi \frac{\partial g_1}{\partial n} dS + \int\limits_{\Gamma_3} \varphi \frac{\partial g_2}{\partial n} dS + \frac{1}{a_2} \int\limits_{\Gamma_2} \varphi h_1 dS + \frac{1}{b_2} \int\limits_{\Gamma_4} \varphi h_2 dS$$

Ta lần lượt chứng minh:

1. **a song tuyến tính, bị chặn, coercive:**

   – a song tuyến tính:
   Với $\beta, \gamma \in \mathbb{R}, \varphi \in H^1(\Omega)$
   Tuyến tính theo biến thứ nhất:

$$\begin{aligned}a(\beta u + \gamma v, \varphi) =& \frac{a_1}{a_2}\int\limits_{\Gamma_2} \varphi(\beta u + \gamma v)dS + \frac{b_1}{b_2}\int\limits_{\Gamma_4} \varphi(\beta u + \gamma v)dS \\ &+ \int\limits_{\Omega} \left(\nabla(\beta u + \gamma v)\nabla\varphi + \alpha(\beta u + \gamma v)\varphi\right) d\Omega \\ =& \beta a(u, \varphi) + \gamma a(v, \varphi)\end{aligned}$$

   Ta có:

$$a(\varphi, u) = \frac{a_1}{a_2}\int\limits_{\Gamma_2} u\varphi dS + \frac{b_1}{b_2}\int\limits_{\Gamma_4} u\varphi dS + \int\limits_{\Omega} (\nabla\varphi\nabla u + \alpha\varphi u)d\Omega = a(u, \varphi)$$

   $\Rightarrow$ a đối xứng, do đó a tuyến tính theo biến thứ hai.
   $\Rightarrow$ a song tuyến tính.

   – a bị chặn:

$$\begin{aligned}|a(u, \varphi)| \leq& \left|\frac{a_1}{a_2}\right| \int\limits_{\Gamma_2} |\varphi u|dS + \left|\frac{b_1}{b_2}\right| \int\limits_{\Gamma_4} |\varphi u|dS + \int\limits_{\Omega} |\nabla u\nabla\varphi + \alpha u\varphi|d\Omega \\ \leq& \left|\frac{a_1}{a_2}\right| \sqrt{\int\limits_{\Gamma_2} u^2dS \int\limits_{\Gamma_2} \varphi^2dS} + \left|\frac{b_1}{b_2}\right| \sqrt{\int\limits_{\Gamma_4} u^2dS \int\limits_{\Gamma_4} \varphi^2dS} \\ &+ \max\{1, \alpha\} \sqrt{\int\limits_{\Omega} \left((\nabla u)^2 + u^2\right) d\Omega \int\limits_{\Omega} \left((\nabla\varphi)^2 + \varphi^2\right) d\Omega} \\ \leq& \left(\left|\frac{a_1}{a_2}\right| + \left|\frac{b_1}{b_2}\right| + \max\{1, \alpha\}\right) \|u\|_{H^1}\|\varphi\|_{H^1}\end{aligned}$$

   – a coercive:

$$a(u, u) = \frac{a_1}{a_2}\int\limits_{\Gamma_2} u^2dS + \frac{b_1}{b_2}\int\limits_{\Gamma_4} u^2dS + \int\limits_{\Omega} \left((\nabla u)^2 + \alpha u^2\right) d\Omega$$

   Sử dụng định lý Trace (Trace theorem) ta có:

$$a(u, u) \geq \|u\|^2_{H_1} + min(1, \alpha)\|u\|^2_{H_1} \geq min(1, \alpha)\|u\|^2_{H_1} d\Omega$$

2. **F tuyến tính, bị chặn:**

   – F tuyến tính:
   Với $a, b \in \mathbb{R}, \varphi \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}F(a\varphi + b\gamma) =& \int\limits_{\Omega} f(a\varphi + b\gamma)d\Omega + \int\limits_{\Gamma_1} (a\varphi + b\gamma)\frac{\partial g_1}{\partial n}dS + \int\limits_{\Gamma_3} (a\varphi + b\gamma)\frac{\partial g_2}{\partial n}dS \\ &+ \frac{1}{a_2}\int\limits_{\Gamma_2} (a\varphi + b\gamma)h_1dS + \frac{1}{b_2}\int\limits_{\Gamma_4} (a\varphi + b\gamma)h_2dS \\ =& aF(\varphi) + bF(\gamma)\end{aligned}$$

   $\Rightarrow$ F tuyến tính.

– F bị chặn:

$$|F(\varphi)| \leq \int\limits_{\Omega} |f\varphi| d\Omega + \int\limits_{\Gamma_1} \left|\varphi \frac{\partial g_1}{\partial n}\right| dS + \int\limits_{\Gamma_3} \left|\varphi \frac{\partial g_2}{\partial n}\right| dS + \left|\frac{1}{a_2}\right| \int\limits_{\Gamma_2} |\varphi h_1| dS + \left|\frac{1}{b_2}\right| \int\limits_{\Gamma_4} |\varphi h_2| dS$$
$$\leq \|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2} \left\|\frac{\partial g_1}{\partial n}\right\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2} \left\|\frac{\partial g_2}{\partial n}\right\|_{L^2} + \left|\frac{1}{a_2}\right| \|\varphi\|_{L^2}\|h_1\|_{L^2} + \left|\frac{1}{b_2}\right| \|\varphi\|_{L^2}\|h_2\|_{L^2}$$
$$\leq \left(\|f\|_{L^2} + \left\|\frac{\partial g_1}{\partial n}\right\|_{L^2} + \left\|\frac{\partial g_2}{\partial n}\right\|_{L^2} + \left|\frac{1}{a_2}\right| \|h_1\|_{L^2} + \left|\frac{1}{b_2}\right| \|h_2\|_{L^2}\right) \|\varphi\|_{H^1}$$

$\Rightarrow$ F bị chặn.

Vậy theo định lý Lax-Milgram: tồn tại duy nhất $u \in H^1(\Omega)$ sao cho:

$$a(u, \varphi) = F(\varphi) \qquad , \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

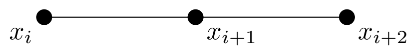
Hay nói cách khác tồn tại duy nhất $u \in H^1(\Omega)$ là nghiệm yếu của bài toán (2.1)

b. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn để xây dựng một thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên.

Đặt $V = H^1(\Omega)$ Ở đây ta xét phương pháp Phần tử hữu hạn cho miền Ω (2 chiều), xấp xỉ bằng đa thức nội suy Lagrange bậc 2 để tìm một xấp xỉ cho nghiệm $u \in V$ thỏa bài toán (3) :

$$\frac{a_1}{a_2} \int\limits_{\Gamma_2} \varphi u dS + \frac{b_1}{b_2} \int\limits_{\Gamma_4} \varphi u dS + \int\limits_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + \alpha u \varphi) d\Omega$$
$$= \int\limits_{\Omega} f\varphi d\Omega + \int\limits_{\Gamma_1} \varphi \frac{\partial g_1}{\partial n} dS + \int\limits_{\Gamma_3} \varphi \frac{\partial g_2}{\partial n} dS + \frac{1}{a_2} \int\limits_{\Gamma_2} \varphi h_1 dS + \frac{1}{b_2} \int\limits_{\Gamma_4} \varphi h_2 dS \qquad (3)$$

Để tiện trình bày ta kí hiệu Đa thức nội suy Lagrange bậc 2 là: $L_{2,i}$
Xây dựng Lagrange bậc 2 trên đoạn $[x_i, x_{i+2}]$



Hàm Lagrange $L_{2,i}(x)$ trên đoạn $[x_i, x_{i+2}]$ có dạng

$$L_{2,i}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})}, & x = x_i \\ 0, & x \neq x_i \end{cases}$$

Ta đi rời rạc hóa các yếu tố của bài toán:
Miền Ω được chia ra các khoảng đều nhau thành:

$$V_h = \underset{i=\overline{0,n}}{span}\{L_{2,i}\}$$

Nếu $u_h \in V_h$ là một xấp xỉ cho nghiệm $u \in V$. Với $u_h \in V_h$, ta có thể viết u_h dưới dạng:

$$u_h = \sum_{j=0}^{n} u_j L_{2,j} \Rightarrow \nabla u_h = \sum_{j=0}^{n} u_j \nabla L_{2,j}$$

Vậy bài toán trở thành Bài toán tìm $u_h \in V_h$ sao cho

$$a(u_h, \varphi_h) = F(\varphi_h) \qquad , \forall \varphi_h \in V_h.$$

Dựa vào công thức việc tìm u_h tương đương với việc đi tìm các $\{u_j\}_{j=\overline{0,n}}$.
Xét $\varphi_h = L_{2,i}$, bài toán trở thành tìm các $\{u_j\}_{j=\overline{0,n}}$ sao cho

$$a\left(\sum_{j=0}^{n} u_j L_{2,j}, L_{2,i}\right) = F(L_{2,i})$$

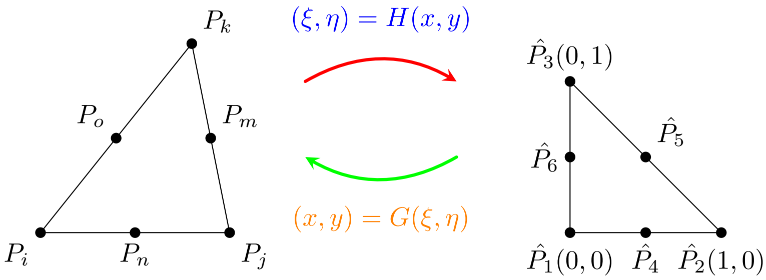
Trong đó:

$$\begin{aligned}
a\left(\sum_{j=0}^{n} u_j L_{2,j}, L_{2,i}\right) =& \frac{a_1}{a_2}\int_{\Gamma_2}\sum_{j=0}^{n} u_j L_{2,j} L_{2,i} dS + \frac{b_1}{b_2}\int_{\Gamma_4}\sum_{j=0}^{n} u_j L_{2,j} L_{2,i} dS \\
&+ \int_{\Omega}(\sum_{j=0}^{n} u_j \nabla L_{2,j}\nabla L_{2,i} + \alpha\sum_{j=0}^{n} u_j L_{2,j} L_{2,i}) d\Omega \\
F(L_{2,i}) =& \int_{\Omega} f L_{2,i} d\Omega + \int_{\Gamma_1} L_{2,i}\frac{\partial g_1}{\partial n} dS + \int_{\Gamma_3} L_{2,i}\frac{\partial g_2}{\partial n} dS + \frac{1}{a_2}\int_{\Gamma_2} L_{2,i} h_1 dS + \frac{1}{b_2}\int_{\Gamma_4} L_{2,i} h_2 dS
\end{aligned}$$

Ta được bài toán: tìm các $\{u_j\}_{j=\overline{0,n}}$ sao cho :

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1}{a_2}\int_{\Gamma_2}\sum_{j=0}^{n} u_j L_{2,j} L_{2,i} dS + \frac{b_1}{b_2}\int_{\Gamma_4}\sum_{j=0}^{n} u_j L_{2,j} L_{2,i} dS + \int_{\Omega}\left(\sum_{j=0}^{n} u_j \nabla L_{2,j}\nabla L_{2,i} + \alpha\sum_{j=0}^{n} u_j L_{2,j} L_{2,i}\right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} f L_{2,i} d\Omega + \int_{\Gamma_1} L_{2,i}\frac{\partial g_1}{\partial n} dS + \int_{\Gamma_3} L_{2,i}\frac{\partial g_2}{\partial n} dS + \frac{1}{a_2}\int_{\Gamma_2} L_{2,i} h_1 dS + \frac{1}{b_2}\int_{\Gamma_4} L_{2,i} h_2 dS \\
&\frac{a_1}{a_2}\sum_{j=0}^{n} u_j \int_{\Gamma_2} L_{2,j} L_{2,i} dS + \frac{b_1}{b_2}\sum_{j=0}^{n} u_j \int_{\Gamma_4} L_{2,j} L_{2,i} dS + \sum_{j=0}^{n} u_j \int_{\Omega} \nabla L_{2,j}\nabla L_{2,i} d\Omega + \alpha\sum_{j=0}^{n} u_j \int_{\Omega} L_{2,j} L_{2,i} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} f L_{2,i} d\Omega + \int_{\Gamma_1} L_{2,i}\frac{\partial g_1}{\partial n} dS + \int_{\Gamma_3} L_{2,i}\frac{\partial g_2}{\partial n} dS + \frac{1}{a_2}\int_{\Gamma_2} L_{2,i} h_1 dS + \frac{1}{b_2}\int_{\Gamma_4} L_{2,i} h_2 dS
\end{aligned}$$

Để tính được tích phân trên một tam giác bất kì, ta xây dựng 1 phép biến đổi từ amứ giác bất kì về tam giác chuẩn.



- **Hàm Lagrange bậc 2:**

  $\hat{L}_{2,i}(\xi,\eta) = a_1\xi^2 + a_2\eta^2 + a_3\xi\eta + a_4\xi + a_5\eta + a_6$ với $\hat{L}_{2,i}(\hat{P}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

  Lấy $\hat{P}_4, \hat{P}_5, \hat{P}_6$ lần lượt là trung điểm của $\hat{P}_1\hat{P}_2, \hat{P}_2\hat{P}_3, \hat{P}_3\hat{P}_1$.

  Hàm Lagrange $\hat{L}_{2,i}(\xi,\eta)$ có dạng

$$\begin{aligned} L_{2,i}(x,y) &= \hat{L}_{2,1}(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta), \\ L_{2,j}(x,y) &= \hat{L}_{2,2}(\xi,\eta) = \xi(2\xi-1), \\ L_{2,k}(x,y) &= \hat{L}_{2,3}(\xi,\eta) = \eta(2\eta-1), \\ L_{2,m}(x,y) &= \hat{L}_{2,4}(\xi,\eta) = 4\xi(1-\xi-\eta), \\ L_{2,n}(x,y) &= \hat{L}_{2,5}(\xi,\eta) = 4\xi\eta, \\ L_{2,o}(x,y) &= \hat{L}_{2,6}(\xi,\eta) = 4\eta(1-\xi-\eta). \end{aligned}$$

- **Phép biến đổi trên tam giác:**

  1, Tìm ánh xạ H xác định bởi

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} H_1(x,y) \\ H_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2 \end{pmatrix}$$

  Ta có

$$\begin{cases} a_1x_i + b_1y_i + c_1 = 0 \\ a_1x_j + b_1y_j + c_1 = 1 \\ a_1x_k + b_1y_k + c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{y_k - y_i}{(x_j-x_i)(y_k-y_i) - (x_k-x_i)(y_j-y_i)}, \\ b_1 = \dfrac{x_i - x_k}{(x_j-x_i)(y_k-y_i) - (x_k-x_i)(y_j-y_i)}, \\ c_1 = \dfrac{x_ky_i - x_iy_k}{(x_j-x_i)(y_k-y_i) - (x_k-x_i)(y_j-y_i)}. \end{cases}$$

  Suy ra, ta được

$$H_1(x,y) = \frac{(y_k-y_i)x + (x_i-x_k)y + x_ky_i - x_iy_k}{(x_j-x_i)(y_k-y_i) - (x_k-x_i)(y_j-y_i)}$$

  Tương tự trên, ta tính được $H_2(x,y)$

$$H_2(x,y) = \frac{(y_j-y_i)x + (x_i-x_j)y + x_jy_i - x_iy_j}{(x_k-x_i)(y_j-y_i) - (x_j-x_i)(y_k-y_i)}$$

  2, Tìm ánh xạ G xác định bởi

$$G(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} G_1(\xi,\eta) \\ G_2(\xi,\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1 \\ \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2 \end{pmatrix}$$

  Ta có

$$\begin{cases} \alpha_1.0 + \beta.0 + \gamma_1 = x_i \\ \alpha_1.1 + \beta.0 + \gamma_1 = x_j \\ \alpha_1.0 + \beta.1 + \gamma_1 = x_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x_j - x_i \\ \beta_1 = x_k - x_i \\ \gamma_1 = x_i \end{cases}$$

  Suy ra

$$G_1(\xi,\eta) = (x_j-x_i)\xi + (x_k-x_i)\eta + x_i$$

  Tương tự trên, ta tính được $G_2(\xi,\eta)$

$$G_2(\xi,\eta) = (y_j-y_i)\xi + (y_k-y_i)\eta + y_i$$

- **Đổi cận tính tích phân:**

  Ta có: $(x, y) = G(\xi, \eta) \Leftrightarrow dxdy = \det(J_G)d\xi d\eta$.

  Ma trận Jacobi của G xác định bằng

$$J_G(\xi,\eta) = \left(\frac{\partial(G_1,G_2)}{\partial(\xi,\eta)}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial \xi} & \dfrac{\partial G_1}{\partial \eta} \\ \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial \xi} & \dfrac{\partial G_2}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{pmatrix}$$

  Ta có $L_{2,i}(x,y) = \hat{L}_{2,1}(G(x,y))$. Ta đạo hàm hai vế chúng ta được $\nabla L_{2,i}(x,y) = J_H.\nabla\hat{L}_{2,1}(G(x,y))$ trong đó $J_H = (J_G)^{-1}$ do H là ánh xạ ngược của G. Do đó $\nabla L_{2,i}(x,y) = (J_G)^{-1}.\nabla\hat{L}_{2,1}(H(x,y))$.

  Trong đó $\nabla\hat{L}_{2,i}(H(x,y))$ được xác định bởi

$$\nabla\hat{L}_{2,1}(H(x,y)) = \begin{pmatrix} 4\xi + 4\eta - 3 \\ 4\xi + 4\eta - 3 \end{pmatrix}$$
$$\nabla\hat{L}_{2,2}(H(x,y)) = \begin{pmatrix} 4\xi - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\nabla\hat{L}_{2,3}(H(x,y)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\eta - 1 \end{pmatrix}$$
$$\nabla\hat{L}_{2,4}(H(x,y)) = \begin{pmatrix} -8\xi - 4\eta + 4 \\ -4\xi \end{pmatrix}$$
$$\nabla\hat{L}_{2,5}(H(x,y)) = \begin{pmatrix} 4\eta \\ 4\xi \end{pmatrix}$$
$$\nabla\hat{L}_{2,6}(H(x,y)) = \begin{pmatrix} -4\eta \\ -8\eta - 4\xi + 4 \end{pmatrix}$$

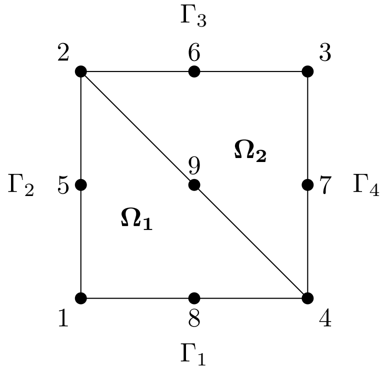
  Khi đó ta tính được:

$$\begin{aligned}\int\limits_{P_i,P_j,P_k} \nabla L_{2,i}.\nabla L_{2,k} dxdy &= \int\limits_{\hat{P}_1,\hat{P}_2,\hat{P}_3} \left(J_H.\nabla\hat{L}_{2,1}\right).\left(J_H.\nabla\hat{L}_{2,3}\right)|\det(J_G)|d\xi d\eta \\ &= \int\limits_{\hat{P}_1,\hat{P}_2,\hat{P}_3} \left[(J_G)^{-1}.\nabla\hat{L}_{2,1}\right].\left[(J_G)^{-1}.\nabla\hat{L}_{2,3}\right]|\det(J_G)|d\xi d\eta\end{aligned}$$

  Chúng ta dùng phương pháp 3 điểm cầu phương tính được tích phân như sau

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\xi,\eta)d\xi d\eta &\approx \int_{-1}^{1}\left[\frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},\eta\right) + \frac{8}{9}g(0,\eta) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}},\eta\right)\right]d\eta \\ &= \frac{25}{81}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{40}{81}g\left(0,-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{25}{81}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}},-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \\ &+ \frac{40}{81}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},0\right) + \frac{64}{81}g(0,0) + \frac{40}{81}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}},0\right) \\ &+ \frac{25}{81}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{40}{81}g\left(0,\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{25}{81}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\end{aligned}$$

- **Quay lại với bài toán:** Với miền Ω như hình vẽ sau:



$$
\begin{aligned}
&\frac{a_1}{a_2}\sum_{j=0}^{n}u_j\int\limits_{\Gamma_2}L_{2,j}L_{2,i}dS+\frac{b_1}{b_2}\sum_{j=0}^{n}u_j\int\limits_{\Gamma_4}L_{2,j}L_{2,i}dS+\sum_{j=0}^{n}u_j\int\limits_{\Omega}\nabla L_{2,j}\nabla L_{2,i}d\Omega+\alpha\sum_{j=0}^{n}u_j\int\limits_{\Omega}L_{2,j}L_{2,i}d\Omega\\
&=\int\limits_{\Omega}fL_{2,i}d\Omega+\int\limits_{\Gamma_1}L_{2,i}\frac{\partial g_1}{\partial n}dS+\int\limits_{\Gamma_3}L_{2,i}\frac{\partial g_2}{\partial n}dS+\frac{1}{a_2}\int\limits_{\Gamma_2}L_{2,i}h_1dS+\frac{1}{b_2}\int\limits_{\Gamma_4}L_{2,i}h_2dS\\
&\Leftrightarrow\frac{a_1}{a_2}\sum_{j\in\{1,2,5\}}u_j\int\limits_{\Gamma_2}L_{2,j}L_{2,i}dS+\frac{b_1}{b_2}\sum_{j\in\{3,4,7\}}u_j\int\limits_{\Gamma_4}L_{2,j}L_{2,i}dS\\
&\qquad\qquad+\sum_{j=1}^{9}u_j\int\limits_{\Omega}\nabla L_{2,j}\nabla L_{2,i}d\Omega+\alpha\sum_{j=1}^{9}u_j\int\limits_{\Omega}L_{2,j}L_{2,i}d\Omega\\
&=\int\limits_{\Omega}fL_{2,i}d\Omega+\int\limits_{\Gamma_1}L_{2,i}\frac{\partial g_1}{\partial n}dS+\int\limits_{\Gamma_3}L_{2,i}\frac{\partial g_2}{\partial n}dS+\frac{1}{a_2}\int\limits_{\Gamma_2}L_{2,i}h_1dS+\frac{1}{b_2}\int\limits_{\Gamma_4}L_{2,i}h_2dS
\end{aligned}
$$

★ Xét tam giác Ω_1, ta có $L_{2,1}, L_{2,2}, L_{2,4}, L_{2,5}, L_{2,8}, L_{2,9}\neq 0$. Đặt $I=\{1,2,4,5,8,9\}$

1. Khi $i=1$ thì

$$
\begin{aligned}
a(u_h,L_{2,1})=&\frac{a_1}{a_2}\sum_{j\in\{1,2,5\}}u_j\int\limits_{\Gamma_2}L_{2,j}L_{2,1}dS+\frac{b_1}{b_2}\sum_{j\in\{4\}}u_j\int\limits_{\Gamma_4}L_{2,j}L_{2,1}dS\\
&+\sum_{j\in I}u_j\int\limits_{\Omega}\nabla L_{2,j}\nabla L_{2,1}d\Omega+\alpha\sum_{j\in I}u_j\int\limits_{\Omega}L_{2,j}L_{2,1}d\Omega
\end{aligned}
$$

Suy ra giá trị của các phần tử trong ma trận độ cứng A có dạng:

– Với $j\in\{1,2,4,5\}$

$$A_{1,1}=\frac{a_1}{a_2}\int\limits_{\Gamma_2}L_{2,1}L_{2,1}dS+\int\limits_{\Omega_1}\nabla L_{2,1}\nabla L_{2,1}d\Omega+\alpha\int\limits_{\Omega_1}L_{2,1}L_{2,1}d\Omega$$

$$A_{1,2}=\frac{a_1}{a_2}\int\limits_{\Gamma_2}L_{2,2}L_{2,1}dS+\int\limits_{\Omega_1}\nabla L_{2,2}\nabla L_{2,1}d\Omega+\alpha\int\limits_{\Omega_1}L_{2,2}L_{2,1}d\Omega$$

$$A_{1,4}=\frac{a_1}{a_2}\int\limits_{\Gamma_2}L_{2,4}L_{2,1}dS+\int\limits_{\Omega_1}\nabla L_{2,4}\nabla L_{2,1}d\Omega+\alpha\int\limits_{\Omega_1}L_{2,4}L_{2,1}d\Omega$$

$$A_{1,4}=\frac{b_1}{b_2}\int\limits_{\Gamma_4}L_{2,4}L_{2,1}dS+\int\limits_{\Omega_1}\nabla L_{2,4}\nabla L_{2,1}d\Omega+\alpha\int\limits_{\Omega_1}L_{2,4}L_{2,1}d\Omega$$

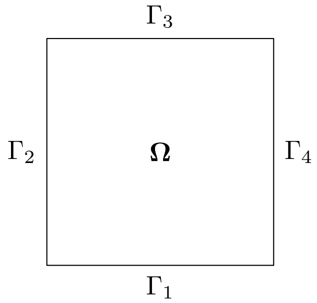
– Với $j \notin \{1, 2, 4, 5\}$

$$A_{1,j} = \int\limits_{\Omega_1} \nabla L_{2,j} \nabla L_{2,1} d\Omega + \alpha \int\limits_{\Omega_1} L_{2,j} L_{2,1} d\Omega$$

2. Khi $i = 4$ thì

$$a(u_h, L_{2,4}) = \frac{a_1}{a_2} \sum_{j \in \{1,2,5\}} u_j \int\limits_{\Gamma_2} L_{2,j} L_{2,4} dS + \frac{b_1}{b_2} \sum_{j \in \{4\}} u_j \int\limits_{\Gamma_4} L_{2,j} L_{2,4} dS$$
$$+ \sum_{j \in I} u_j \int\limits_{\Omega} \nabla L_{2,j} \nabla L_{2,4} d\Omega + \alpha \sum_{j \in I} u_j \int\limits_{\Omega} L_{2,j} L_{2,4} d\Omega$$

Question2.2 :
Cho miền Ω như hình vẽ dưới:



Với miền Ω như trên, xét phương trình:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + \alpha u(x,y) & = f(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) & = g_1(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_1, \\ u(x,y) & = g_2(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_3, \\ a_1 u(x,y) + a_2 \nabla u(x,y).\vec{n}_{\Gamma_2} & = h_1(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_2, \\ b_1 u(x,y) + b_2 \nabla u(x,y).\vec{n}_{\Gamma_4} & = h_2(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_4, \end{cases}$$

Trong đó $\alpha, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ và $a_1, b_1 \neq 0$

Dựa vào phương trình và các dữ kiện trên, hãy thực hiện các yêu cầu sau đây

a. Chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và tính duy nhất của nghiệm phương trình trên.

b. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn để xây dựng một thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên.

c. Với miền Ω = [0,1] $\times$ [0,1], ta có phương trình sau đây:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + \alpha u(x,y) & = (1+4\pi^2)(sin(2\pi x) + cos(2\pi y)) + \frac{x^2+y^2}{4} - 1, \quad \forall (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) & = sin(2\pi x) + \frac{x^2}{4} + 1, \quad \forall (x,y) \in \Gamma_1, \\ u(x,y) & = sin(2\pi x) + \frac{x^2+1}{4} + 1, \quad \forall (x,y) \in \Gamma_3, \\ \frac{\partial u}{\partial x} & = 2\pi, \quad \forall (x,y) \in \Gamma_2, \\ \frac{\partial u}{\partial x} & = 2\pi + \frac{1}{2}, \quad \forall (x,y) \in \Gamma_4, \end{cases}$$

Nghiệm chính xác của phương trình trên là: $u(x,y) = sin(2\pi x) + cos(2\pi y) + \frac{x^2+y^2}{4}$.
Áp dụng thuật toán đã xây dựng ở câu b để tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên.

Lưu ý: Dùng lưới tứ giác và đa thức nội suy Lagrange bậc 2 để tính toán chi tiết từng tích phân, ma trận trong thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ, thực hành trên phần mềm MATLAB để tìm nghiệm xấp xỉ và so sánh đối chiếu với nghiệm chính xác của phương trình.

Bài làm:

a. Chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và tính duy nhất của nghiệm phương trình.

Ở đây ta giả sử $\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + \alpha u(x,y) & = f(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) & = g_1(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_1, \\ u(x,y) & = g_2(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_3, \\ \nabla u(x,y).\vec{n}_{\Gamma_2} & = h_1(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_2, \\ \nabla u(x,y).\vec{n}_{\Gamma_4} & = h_2(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Gamma_4. \end{cases}$$

Sử dụng phép tính biến phân, ta nhân 2 vế phương trình cho ϕ (với $\varphi \in H^1(\Omega)$) rồi lấy tích phân trên toàn miền Ω ta được phương trình mới:

$$-\int_\Omega \varphi \Delta u d\Omega + \int_\Omega \alpha u \varphi d\Omega = \int_\Omega f \varphi d\Omega \qquad , \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

Sử dụng định lý Green I ta được:

$$-\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + \alpha u \varphi) d\Omega = \int_\Omega f \varphi d\Omega \qquad , \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

Có

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\Gamma_1} \varphi \frac{\partial g_1}{\partial n} dS + \int_{\Gamma_3} \varphi \frac{\partial g_2}{\partial n} dS + \int_{\Gamma_2} h_1 \varphi dS + \int_{\Gamma_4} h_2 \varphi dS$$

Thay vào phương trình ta được với $\forall \varphi \in H^1(\Omega)$

$$-\int_{\Gamma_1} \varphi \frac{\partial g_1}{\partial n} dS - \int_{\Gamma_3} \varphi \frac{\partial g_2}{\partial n} dS - \int_{\Gamma_2} h_1 \varphi dS - \int_{\Gamma_4} h_2 \varphi dS + \int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + \alpha u \varphi) d\Omega = \int_\Omega f \varphi d\Omega,$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + \alpha u \varphi) d\Omega = \int_\Omega f \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_1} \varphi \frac{\partial g_1}{\partial n} dS + \int_{\Gamma_3} \varphi \frac{\partial g_2}{\partial n} dS + \frac{1}{a_2} \int_{\Gamma_2} \varphi h_1 dS + \frac{1}{b_2} \int_{\Gamma_4} \varphi h_2 dS \qquad (4)$$

($\star$) Chứng minh phương trình (4) tồn tại nghiệm và duy nhất.
Nhắc lại về định lý **Lax – Milgram theorem** :

Cho V là không gian Banach được trang bị chuẩn $\|.\|$.
Cho F : V $\to \mathbb{R}$ và a(.,.) : V×V $\to \mathbb{R}$.
Nếu F tuyến tính, bị chặn; a song tuyến tính, bị chặn và coercive. Thì tồn tại duy nhất u $\in V$:

$$a(u,v) = F(v) \qquad , \forall v \in V$$

Đặt

$$a(u,\varphi) = \int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + \alpha u \varphi) d\Omega$$

$$F(\varphi) = \int_\Omega f \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_1} \varphi \frac{\partial g_1}{\partial n} dS + \int_{\Gamma_3} \varphi \frac{\partial g_2}{\partial n} dS + \frac{1}{a_2} \int_{\Gamma_2} \varphi h_1 dS + \frac{1}{b_2} \int_{\Gamma_4} \varphi h_2 dS$$

Ta lần lượt chứng minh:

1. **a song tuyến tính, bị chặn, coercive:**

- a song tuyến tính:
  Với $\beta, \gamma \in \mathbb{R}, \varphi \in H^1(\Omega)$
  Tuyến tính theo biến thứ nhất:

$$\begin{aligned} a(\beta u + \gamma v, \varphi) = &\int_\Omega \left(\nabla(\beta u + \gamma v)\nabla\varphi + \alpha(\beta u + \gamma v)\varphi\right) d\Omega \\ =& \beta a(u, \varphi) + \gamma a(v, \varphi) \end{aligned}$$

  Ta có:

$$a(\varphi, u) = \int_\Omega (\nabla\varphi\nabla u + \alpha\varphi u) d\Omega = a(u, \varphi)$$

  $\Rightarrow$ a đối xứng, do đó a tuyến tính theo biến thứ hai.
  $\Rightarrow$ a song tuyến tính.
- a bị chặn:

$$\begin{aligned} |a(u, \varphi)| \leq & \int_\Omega |\nabla u\nabla\varphi + \alpha u\varphi| d\Omega \\ & \leq \max\{1, \alpha\}\sqrt{\int_\Omega \left((\nabla u)^2 + u^2\right) d\Omega \int_\Omega \left((\nabla\varphi)^2 + \varphi^2\right) d\Omega} \\ & \leq \max\{1, \alpha\}\|u\|_{H^1}\|\varphi\|_{H^1} \end{aligned}$$

- a coercive:

$$a(u, u) = \int_\Omega \left((\nabla u)^2 + \alpha u^2\right) d\Omega \geq \min\{1, \alpha\}\|u\|_{H^1}^2$$

  $\Rightarrow$ a coercive.

2. **F tuyến tính, bị chặn:**

- F tuyến tính:
  Với $a, b \in \mathbb{R}, \varphi \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} F(a\varphi + b\gamma) = &\int_\Omega f(a\varphi + b\gamma) d\Omega + \int_{\Gamma_1} (a\varphi + b\gamma)\frac{\partial g_1}{\partial n} dS + \int_{\Gamma_3} (a\varphi + b\gamma)\frac{\partial g_2}{\partial n} dS \\ &+ \frac{1}{a_2}\int_{\Gamma_2} (a\varphi + b\gamma)h_1 dS + \frac{1}{b_2}\int_{\Gamma_4} (a\varphi + b\gamma)h_2 dS \\ &= aF(\varphi) + bF(\gamma) \end{aligned}$$

  $\Rightarrow$ F tuyến tính.

− F bị chặn:

$$
\begin{aligned}
|F(\varphi)| &\le \int\limits_{\Omega} |f\varphi| d\Omega + \int\limits_{\Gamma_1} \left|\varphi \frac{\partial g_1}{\partial n}\right| dS + \int\limits_{\Gamma_3} \left|\varphi \frac{\partial g_2}{\partial n}\right| dS + \left|\frac{1}{a_2}\right| \int\limits_{\Gamma_2} |\varphi h_1| dS + \left|\frac{1}{b_2}\right| \int\limits_{\Gamma_4} |\varphi h_2| dS \\
&\le \|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2}\left\|\frac{\partial g_1}{\partial n}\right\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2}\left\|\frac{\partial g_2}{\partial n}\right\|_{L^2} \\
&+ \left|\frac{1}{a_2}\right| \|\varphi\|_{L^2}\|h_1\|_{L^2} + \left|\frac{1}{b_2}\right| \|\varphi\|_{L^2}\|h_2\|_{L^2} \\
&\le \left(\|f\|_{L^2} + \left\|\frac{\partial g_1}{\partial n}\right\|_{L^2} + \left\|\frac{\partial g_2}{\partial n}\right\|_{L^2} + \left|\frac{1}{a_2}\right| \|h_1\|_{L^2} + \left|\frac{1}{b_2}\right| \|h_2\|_{L^2} \right) \|\varphi\|_{H^1}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ F bị chặn.

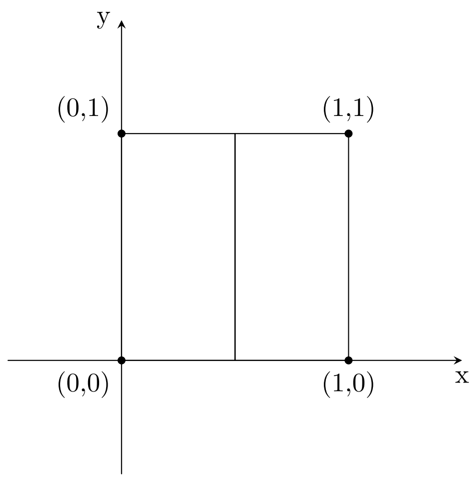
Vậy theo định lý Lax-Milgram: tồn tại duy nhất $u \in H^1(\Omega)$ sao cho

$$a(u,\varphi) = F(\varphi) \qquad ,\forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

Hay nói cách khác tồn tại duy nhất $u \in H^1(\Omega)$ là nghiệm yếu của bài toán (2.2).

b. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn để xây dựng một thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình trên.

Giả sử miền $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ của bài toán được chia như hình vẽ:



Ở đây ta xét phương pháp Phần tử hữu hạn cho miền 2 chiều, xấp xỉ bằng đa thức nội suy Lagrange bậc 2
Để tiện theo dõi ta kí hiệu Đa thức nội suy Lagrange bậc 2 là: $L_{2,i}$
Ta rời rạc hóa các yếu tố của bài toán
Đặt:

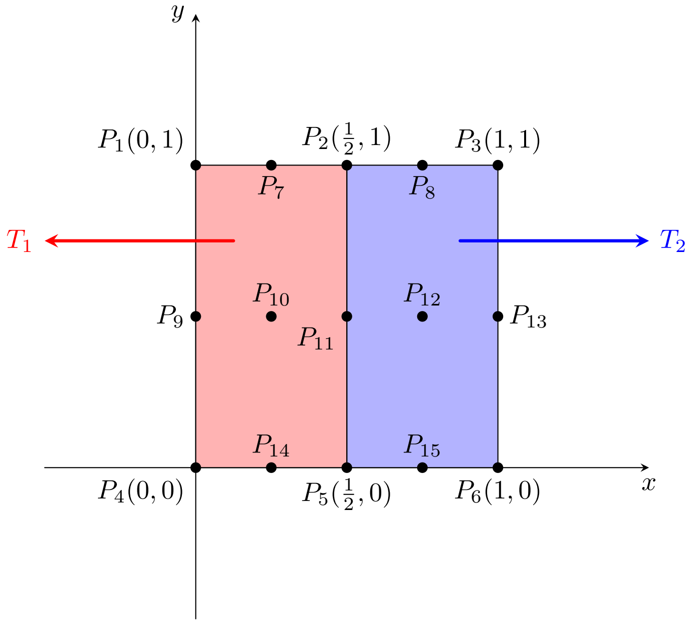
$$V_h = span_{i=\overline{1,N}}\{L_{2,i}\}$$

trong đó: N là số phần tử nút, bằng tổng của số đỉnh của lưới và số cạnh.

$u_h = (u_1, ..., u_N)$ chính là một xấp xỉ của nghiệm yếu u.
Với $u_h \in V_h$, nên u_h có thể viết lại dưới dạng

$$u_h = \sum_{j=1}^{N} u_j.L_{2,j}(x,y)$$

Chia miền $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ được xác định bằng các tứ giác và các đỉnh như hình vẽ:



Ta có thể viết bài toán xấp xỉ số của nghiệm yếu dưới dạng dạng:
Tìm $u_h \in V_h$ thỏa:

$$(-\nabla u_h.v_h)|_{\partial\Omega} + \int_\Omega \nabla u_h.\nabla v_h d\Omega = \int_\Omega f.v_h d\Omega \quad ,\forall v_h \in V_h \tag{2}$$

Ta đặt I(u) $= \{i : u_i \in \partial\Omega\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,13,14,15\}$
Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow \sum_{j\in I}(-\nabla u_j.v_h) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{T\in T_h} u_j \int_T \nabla L_{2,j}.\nabla v_h d\Omega = \sum_{T\in T_h}\int_T f.v_h d\Omega \qquad ,\forall v_h \in V_h$$

Với mọi $v_h \in V_h = span\{L_{2,i}\}$, ta chọn $v_h = L_{2,i}$

$$(3) \Rightarrow \sum_{j\in I}(-\nabla u_j.L_{2,i}) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{T\in T_h} u_j \int_T \nabla L_{2,j}.\nabla L_{2,i} d\Omega = \sum_{T\in T_h}\int_T f.L_{2,i} d\Omega$$

Đặt

$$A_{ij} = \sum_{T\in T_h}\int_T \nabla L_{2,j}.\nabla L_{2,i} d\Omega$$
$$b_i = \sum_{j\in I}(-\nabla u_j.L_{2,i})$$
$$c_i = \sum_{T\in T_h}\int_T f.L_{2,i} d\Omega$$

Suy ra ta có phương trình: b + A.u = c
Để tính được các hệ số A_{ij}, b_i, c_i, ta cần xác định:
- tích phân trên các tứ giác T_h
- $L_{2,j}, \nabla L_{2,j}$

Để tính được tích phân trên tứ giác bất kì:
Trước hết, ta xây dựng 1 phép biến đổi từ tứ giác (bất kì) về tứ giác chuẩn.

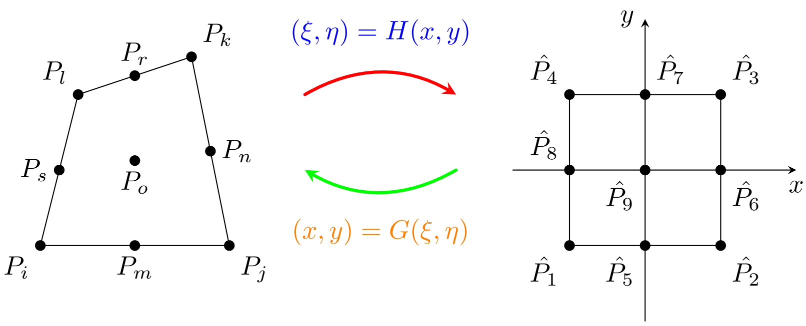
Từ tứ giác T với các đỉnh:

$P_i = (x_i, y_i)$,
$P_j = (x_j, y_j)$,
$P_k = (x_k, y_k)$,
$P_l = (x_l, y_l)$,
$P_m = (x_m, y_m)$,
$P_n = (x_n, y_n)$,
$P_r = (x_r, y_r)$,
$P_s = (x_s, y_s)$,
$P_o = (x_o, y_o)$.

Sang tứ giác chuẩn $\overline{T}$ với :

$\hat{P}_1 = (-1, -1)$,
$\hat{P}_2 = (1, -1)$,
$\hat{P}_3 = (1, 1)$,
$\hat{P}_4 = (-1, 1)$,
$\hat{P}_5 = (0, -1)$,
$\hat{P}_6 = (1, 0)$,
$\hat{P}_7 = (0, 1)$,
$\hat{P}_8 = (-1, 0)$,
$\hat{P}_9 = (0, 0)$.

Ta có thể hình dung qua hình minh họa dưới đây:



Tiếp theo ta xác định cụ thể thành phần của các ánh xạ H và G :
Giả sử ánh xạ G có dạng:

$$G(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} a_1\xi + b_1\eta + c_1\xi\eta + d_1 \\ a_2\xi + b_2\eta + c_2\xi\eta + d_2 \end{pmatrix}$$

Các hệ số $(a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2)$ của ánh xạ G có thể tìm thông qua hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} P_i = G(\hat{P}_1) \\ P_j = G(\hat{P}_2) \\ P_k = G(\hat{P}_3) \\ P_l = G(\hat{P}_4) \\ P_m = G(\hat{P}_5) \\ P_n = G(\hat{P}_6) \\ P_r = G(\hat{P}_7) \\ P_s = G(\hat{P}_8) \\ P_o = G(\hat{P}_9) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{4}(-x_i + x_j + x_k - x_l) \\ b_1 = \frac{1}{4}(-x_i - x_j + x_k + x_l) \\ c_1 = \frac{1}{4}(x_i - x_j + x_k - x_l) \\ d_1 = \frac{1}{4}(x_i + x_j + x_k + x_l) \\ a_2 = \frac{1}{4}(-y_i + y_j + y_k - y_l) \\ b_2 = \frac{1}{4}(-y_i - y_j + y_k + y_l) \\ c_2 = \frac{1}{4}(y_i - y_j + y_k - y_l) \\ d_2 = \frac{1}{4}(y_i + y_j + y_k + y_l) \end{cases} \quad (\star)$$

Hệ số của ánh xạ H có thể xác định bằng các tương tự.
Tuy nhiên H là ánh xạ ngược của G, nên việc tính toán tường minh ánh xạ H không mang nhiều ý nghĩa.
Ta có với: (x,y) = $G(\xi, \eta) \Leftrightarrow dxdy = det(J_G)d\xi d\eta$
Do đó để hoàn thành việc biến đổ thì một điều không thể thiếu chính là ma trận Jacobi.

Ma trận Jacobi của G xác định bằng

$$J_G(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial(G_1, G_2)}{\partial(\xi, \eta)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \xi} & \frac{\partial G_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial G_2}{\partial \xi} & \frac{\partial G_2}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + c_1\eta & b_1 + c_1\xi \\ a_2 + c_2\eta & b_2 + c_2\xi \end{pmatrix}$$

Với G (với các hệ số) đã xác định ở trên ta dễ dàng tính được

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_1}{\partial \xi} = \dfrac{1}{4}(x_i(\eta-1) - x_j(\eta-1) + x_k(\eta+1) - x_l(\eta+1)) \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial \eta} = \dfrac{1}{4}(x_i(\xi-1) - x_j(\xi+1) + x_k(\xi+1) - x_l(\xi-1)) \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial \xi} = \dfrac{1}{4}(y_i(\eta-1) - y_j(\eta-1) + y_k(\eta+1) - y_l(\eta+1)) \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial \eta} = \dfrac{1}{4}(y_i(\xi-1) - y_j(\xi+1) + y_k(\xi+1) - y_l(\xi-1)) \end{cases}$$

Với đa thức nội suy Lagrange bậc 2, ta có:

$$L_{2,i}(x,y) = \overline{L}_{2,1}(H(x,y))$$

Bằng cách thay các tọa độ vào, ta dễ dàng tính ra được các $L_{2,i} cnli$

$$\begin{cases} L_{2,i}(x,y) = \overline{L}_{2,1}(H(x,y)) = \dfrac{1}{4}(\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta - \xi\eta^2 + \xi\eta) \\ L_{2,j}(x,y) = \overline{L}_{2,2}(H(x,y)) = \dfrac{1}{4}(\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta + \xi\eta^2 - \xi\eta) \\ L_{2,k}(x,y) = \overline{L}_{2,3}(H(x,y)) = \dfrac{1}{4}(\xi^2\eta^2 + \xi^2\eta + \xi\eta^2 + \xi\eta) \\ L_{2,l}(x,y) = \overline{L}_{2,4}(H(x,y)) = \dfrac{1}{4}(\xi^2\eta^2 + \xi^2\eta - \xi\eta^2 - \xi\eta) \\ L_{2,m}(x,y) = \overline{L}_{2,5}(H(x,y)) = \dfrac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2\eta^2 + \xi^2\eta - \eta) \\ L_{2,n}(x,y) = \overline{L}_{2,6}(H(x,y)) = \dfrac{1}{2}(\xi^2 - \xi^2\eta^2 - \xi\eta^2 + \xi) \\ L_{2,r}(x,y) = \overline{L}_{2,7}(H(x,y)) = \dfrac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2\eta^2 - \xi^2\eta + \eta) \\ L_{2,s}(x,y) = \overline{L}_{2,8}(H(x,y)) = \dfrac{1}{2}(\xi^2 - \xi^2\eta^2 + \xi\eta^2 - \xi) \\ L_{2,o}(x,y) = \overline{L}_{2,9}(H(x,y)) = (-\xi^2 - \eta^2 + \xi^2\eta^2 + 1) \end{cases}$$

Ta có:$L_{2,i}(x,y) = \overline{L}_{2,1}(H(x,y))$
Đạo hàm 2 vế ta suy ra được: $\nabla L_{2,i}(x,y) = J_H.\nabla\overline{L}_{2,1}(H(x,y))$
Mà H là ánh xạ ngược của G nên $J_H = (J_G)^{-1}$
$\Rightarrow \nabla L_{2,i}(x,y) = (J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,1}(H(x,y))$
Trong đó các $\nabla\overline{L}_{2,i}(H(x,y))$ xác định bởi:

$$\nabla\overline{L}_{2,1}(H(x,y)) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2.\xi\eta^2 - 2.\xi\eta - \eta^2 + \eta \\ 2.\xi^2\eta - 2.\xi\eta - \xi^2 + \xi \end{pmatrix}$$

$$\nabla\overline{L}_{2,2}(H(x,y)) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2.\xi\eta^2 - 2.\xi\eta + \eta^2 - \eta \\ 2.\xi^2\eta + 2.\xi\eta - \xi^2 - \xi \end{pmatrix}$$

$$\nabla\overline{L}_{2,3}(H(x,y)) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2.\xi\eta^2 + 2.\xi\eta + \eta^2 + \eta \\ 2.\xi^2\eta + 2.\xi\eta + \xi^2 + \xi \end{pmatrix}$$

$$\nabla\overline{L}_{2,4}(H(x,y)) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2.\xi\eta^2 + 2.\xi\eta - \eta^2 - \eta \\ 2.\xi^2\eta - 2.\xi\eta + \xi^2 - \xi \end{pmatrix}$$

$$\nabla \overline{L}_{2,5}(H(x,y)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2.\xi\eta^2 + 2.\xi\eta \\ 2.\eta - 2.\xi^2\eta + \xi^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \overline{L}_{2,6}(H(x,y)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2.\xi - 2.\xi\eta^2 - \eta^2 + 1 \\ -2.\xi^2\eta - 2\xi\eta \end{pmatrix}$$

$$\nabla \overline{L}_{2,7}(H(x,y)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2.\xi\eta^2 - 2.\xi\eta \\ 2.\eta - 2.\xi^2\eta - \xi^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \overline{L}_{2,8}(H(x,y)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2.\xi - 2.\xi\eta^2 + \eta^2 - 1 \\ -2.\xi^2\eta + 2\xi\eta \end{pmatrix}$$

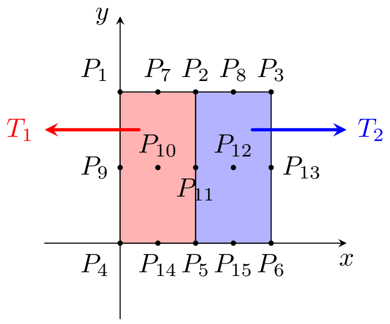
$$\nabla \overline{L}_{2,9}(H(x,y)) = \begin{pmatrix} -2.\xi + 2.\xi\eta^2 \\ -2.\eta + 2.\xi^2\eta \end{pmatrix}$$

Quay lại với bài toán của chúng ta:
Tìm $u_h \in V_h$ thỏa:

$$\sum_{j\in I}(-\nabla u_j.v_h) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{T\in T_h} u_j \int_T \nabla L_{2,j}.\nabla v_h d\Omega = \sum_{T\in T_h}\int_T f.v_h d\Omega \qquad ,\forall v_h \in V_h$$

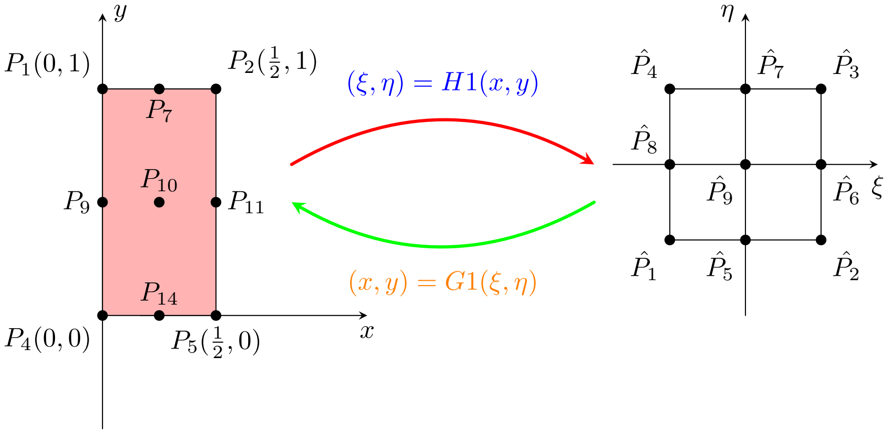
$I(u) = \{i : u_i \in \partial\Omega\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,13,14,15\}$

Miền $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ được chia như hình vẽ dưới đây:



Với $T_h = \{T_1, T_2\}$. Xét lần lượt trên từng tứ giác:
Trên T_1: $T_1 = \{1,2,4,5,7,9,10,11,14\}$
Nghĩa là $\forall(x,y) \in T_1$

$$\begin{cases} L_{2,i}(x,y) & \neq 0,\ \forall i \in \{1,2,4,5,7,9,10,11,14\} \\ L_{2,i}(x,y) & = 0,\ otherwise \end{cases}$$



Làm lần lượt như các bước đã xây dựng cho phép biến đổi từ tứ giác bất kì sang tứ giác chuẩn
Vì đã xây dựng trước đó cho trường hợp tổng quát.
Phương trình $(\star)$ xác định các hệ số cho ánh xạ.
Thế tọa độ cho trường hợp cụ thể vào phương trình $(\star)$ ta xác định được hệ số của G1:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ b_1 = 0 \\ c_1 = 0 \\ d_1 = \frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = \frac{1}{2} \\ c_2 = 0 \\ d_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó ánh xạ G1 xác định bởi:

$$G1(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}.\xi + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}.\eta + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

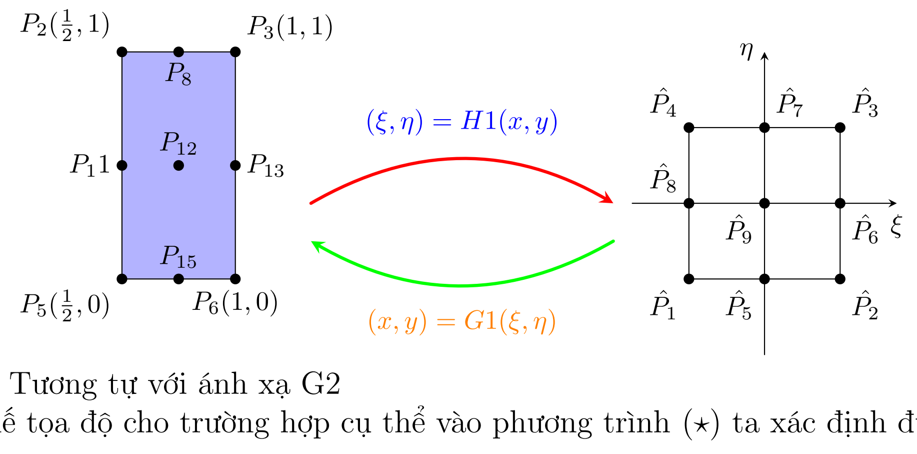
Khi đó dễ dàng xác định ma trận Jacobi:

$$J_{G1}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (J_{G1})^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(J_{G1}(\xi,\eta)) = \frac{1}{8}$$

Trên T_2:
Ta có: $T_2 = \{2,3,5,6,8,11,12,13,15\}$
Nghĩa là $\forall(x,y) \in T_2$

$$\begin{cases} L_{2,i} & \neq 0, \forall i \in \{2,3,5,6,8,11,12,13,15\} \\ L_{2,i} & = 0, \ otherwise \end{cases}$$



Tương tự với ánh xạ G2
Thế tọa độ cho trường hợp cụ thể vào phương trình $(\star)$ ta xác định được hệ số của G2:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ b_1 = 0 \\ c_1 = 0 \\ d_1 = \frac{3}{4} \end{cases} \begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = \frac{1}{2} \\ c_2 = 0 \\ d_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó ánh xạ G2 xác định bởi:

$$G2(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}.\xi + \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}.\eta + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Từ đó xác định ma trận Jacobi của G2:

$$J_{G2}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (J_{G2})^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ and \ det(J_{G2}(\xi,\eta)) = \frac{1}{8} \ and$$

Và

Vì $J_{G1} = J_{G2}$ nên đặt chung thành J_G và $|J_G(\xi,\eta)| = \frac{1}{8}$

$$(J_G)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta có: $A_{i,j} = \sum\limits_{T \in T_h} \int\limits_T \nabla L_{2,j}.\nabla L_{2,i} d\Omega$

Xét với i=1:

$$\begin{aligned} A_{1,j} &= \int_T \nabla L_{2,j}.\nabla L_{2,1} d\Omega \\ &= \int_{T_1} \nabla L_{2,j}.\nabla L_{2,1} d\Omega + \int_{T_2} \nabla L_{2,j}.\nabla L_{2,1} d\Omega \\ &= \int_{T_1} \nabla L_{2,j}.\nabla L_{2,1} d\Omega \end{aligned}$$

Dùng phép biến đổi đã xây dựng ở trên ta có:

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \int_{T_1} \nabla L_{2,1}.\nabla L_{2,1} dxdy \\ &= \int_{\overline{T}} (J_G)^{-1}.\nabla \overline{L}_{2,4}.(J_G)^{-1}.\nabla \overline{L}_{2,4}.|J_G| d\xi\eta \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự cho các điểm khác

$A_{1,2} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}.\nabla \overline{L}_{2,3}.(J_G)^{-1}.\nabla \overline{L}_{2,4}.|J_G| d\xi\eta$

$A_{1,3} = 0$

$A_{1,4} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}.\nabla \overline{L}_{2,1}.(J_G)^{-1}.\nabla \overline{L}_{2,4}.|J_G| d\xi\eta$ $A_{1,5} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}\nabla.\overline{L}_{2,2}.(J_G)^{-1}.\nabla \overline{L}_{2,4}.|J_G| d\xi\eta$

$A_{1,6} = 0$

$A_{1,7} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}\nabla.\overline{L}_{2,7}.(J_G)^{-1}.\nabla \overline{L}_{2,4}.|J_G| d\xi\eta$

$A_{1,8} = 0$

$A_{1,9} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}\nabla.\overline{L}_{2,8}.(J_G)^{-1}.\nabla \overline{L}_{2,4}.|J_G| d\xi\eta$

$A_{1,10} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}\nabla.\overline{L}_{2,9}.(J_G)^{-1}.\nabla \overline{L}_{2,4}.|J_G| d\xi\eta$

$A_{1,11} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}\nabla.\overline{L}_{2,6}.(J_G)^{-1}.\nabla \overline{L}_{2,4}.|J_G| d\xi\eta$

$A_{1,12} = 0$

$A_{1,13} = 0$

$A_{1,14} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}\nabla.\overline{L}_{2,5}.(J_G)^{-1}.\nabla \overline{L}_{2,4}.|J_G| d\xi\eta$

$A_{1,15} = 0$

Nếu đặt:

$$K_{ij} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1} \nabla . \overline{L}_{2,i} . (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,j} . |J_G| d\xi\eta$$

Ta có thể viết A lại dưới dạng:
$A(1,:) = (K_{44}; K_{34}; 0; K_{14}; K_{24}; 0; K_{74}; 0; K_{84}; K_{94}; K_{64}; 0; 0; K_{54}; 0)$

Ta sẽ làm thêm với 1 trường hợp tổng quát hơn khi i=2.

$$\begin{aligned} A_{2,j} &= \int\limits_{T} \nabla L_{2,j} . \nabla L_{2,2} d\Omega \\ &= \int\limits_{T_1} \nabla L_{2,j} . \nabla L_{2,2} d\Omega + \int_{T_2} \nabla L_{2,j} . \nabla L_{2,2} d\Omega \end{aligned}$$

Dùng phép biến đổi đã xây dựng ở trên ta có:

$$A_{2,1} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,4} . (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,3} . |J_G| d\xi\eta$$

$$\begin{aligned} A_{2,2} &= \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,3} . (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,3} . |J_G| d\xi\eta \\ &+ \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,4} . (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,4} . |J_G| d\xi\eta \end{aligned}$$

$$A_{2,3} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,3} . (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,4} . |J_G| d\xi\eta$$

$$A_{2,4} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,1} . (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,3} . |J_G| d\xi\eta$$

$$\begin{aligned} A_{2,5} &= \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,2} . (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,3} . |J_G| d\xi\eta \\ &+ \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,1} . (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,4} . |J_G| d\xi\eta \end{aligned}$$

$$A_{2,6} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,2} . (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,4} . |J_G| d\xi\eta$$

$$A_{2,7} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,7} . (J_G)^{-1} . \nabla \overline{L}_{2,3} . |J_G| d\xi\eta$$

$$A_{2,8} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,7}.(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,4}.|J_G| d\xi\eta$$

$$A_{2,9} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}\nabla.\overline{L}_{2,8}.(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,3}.|J_G| d\xi\eta$$

$$A_{2,10} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}\nabla.\overline{L}_{2,9}.(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,3}.|J_G| d\xi\eta$$

$$A_{2,11} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,6}.(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,3}.|J_G| d\xi\eta + \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,8}.(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,4}.|J_G| d\xi\eta$$

$$A_{2,12} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,9}.(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,4}.|J_G| d\xi\eta$$

$$A_{2,13} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,6}.(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,4}.|J_G| d\xi\eta$$

$$A_{2,14} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}\nabla.\overline{L}_{2,5}.(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,3}.|J_G| d\xi\eta$$

$$A_{2,15} = \int\limits_{\overline{T}} (J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,5}.(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,4}.|J_G| d\xi\eta$$

Như vậy ma trận A có thể viết lại như sau:
$A(15, 15) =$

Ta có:

$$b_i = \sum_{j\in I}(-\nabla u_j.L_{2,i}) = L_{2,i}.\sum_{j\in I}(-\nabla u_j)$$
$$j \in I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15\}$$

Đặt

$$M = \sum_{j\in I}(-\nabla u_j) = \sum_{j\in I}(-\nabla g(x_j))$$
$$= (g'(x_1) + g'(x_2) + g'(x_3) + g'(x_4) + g'(x_5) + g'(x_6) + g'(x_7) + g'(x_8) + g'(x_9) + g'(x_{13}) + g'(x_{14}) + g'(x_{15}))$$

Suy ra b có dạng:

$$b = \begin{pmatrix} L_{2,1} \\ L_{2,2} \\ \vdots \\ L_{2,15} \end{pmatrix}.M$$

Ta được: $\begin{cases} (1)\omega_1+\omega_2+\omega_3=2\\ (2)x_1\omega_1+x_2\omega_2+x_3\omega_3=0\\ (3){x_1}^2\omega_1+{x_2}^2\omega_2+{x_3}^2\omega_3=2/3\\ (4){x_1}^3\omega_1+{x_2}^3\omega_2+{x_3}^3\omega_3=0\\ (5){x_1}^4\omega_1+{x_2}^4\omega_2+{x_3}^4\omega_3=2/5\\ (6){x_1}^5\omega_1+{x_2}^5\omega_2+{x_3}^5\omega_3=0 \end{cases}$

$(2) \Rightarrow \omega_3x_3 = -\omega_1x_1 - \omega_2x_2$

Thay vào (4) ta được

$\omega_1{x_1}^3 + \omega_2{x_2}^3 - (\omega_1x_1+\omega_2x_2){x_3}^3 = 0$

$\Leftrightarrow \omega_1x_1({x_1}^2-{x_3}^2) + \omega_2x_2({x_2}^2-{x_3}^2) = 0$ (7)

Tương tự đối với (4) và (6) ta có:

$\omega_1{x_1}^3({x_1}^2-{x_3}^2) + \omega_2{x_2}^3({x_2}^2-{x_3}^2) = 0$ (8)

Thay (7) vào (8) ta có:

$\omega_1{x_1}^3({x_1}^2-{x_3}^2) - \omega_1x_1{x_2}^2({x_1}^2-{x_3}^2) = 0$

$\Leftrightarrow \omega_1x_1({x_1}^2-{x_2}^2)({x_1}^2-{x_3}^2) = 0$

- Khi $\omega_1 = 0$ ta không tìm được $x_1 \Rightarrow$ loại.
- Khi $x_1 = 0$ ta có: $(2) \Rightarrow \omega_3x_3 = -\omega_2x_2$

  $\begin{cases} \omega_2x_2({x_2}^2-{x_3}^2)=0\\ \omega_2x_2(x_2-x_3)=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=-x_3\\ \omega_2=\omega_3 \end{cases}$

  Thay vào (5) ta được $\omega_2x_2({x_2}^3-{x_3}^3) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{3}({x_2}^2+x_2x_3+{x_3}^2) = \frac{2}{5}$

  $\Leftrightarrow {x_2}^2 = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x_2 = -x_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$

  Thay vào (10) ta được $\omega_2{x_2}^2 + \omega_2{x_2}^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \omega_2 = \omega_3 = \frac{5}{9}$

  Thay vào (1) ta được $\omega_1 = \frac{8}{9}$

Vậy ta được $\begin{cases} \omega_1=\dfrac{8}{9}, \omega_2=\omega_3=\dfrac{5}{9}\\ x_1=0, x_2=-\sqrt{\dfrac{3}{5}}, x_3=\sqrt{\dfrac{3}{5}} \end{cases}$

- Khi $x_1 = x_3$ thay vào (7) ta có $\omega_2x_2({x_2}^2-{x_3}^2) = 0$

  - $\omega_2 = 0$ ta không tìm được x_2
  - $x_2 = 0$ lập luận như trường hợp $x_1 = 0$
  - $x_2 = -x_3$ ta có $\begin{cases} \omega_1+\omega_2+\omega_3=2\\ \omega_1-\omega_2+\omega_3=0\\ \omega_1+\omega_2+\omega_3=\dfrac{2}{3{x_1}^2}\\ \omega_1+\omega_2+\omega_3=\dfrac{2}{5{x_1}^4} \end{cases}$ (vô lý, loại).
  - $x_1 = x_2 = x_3$ thay vào (2) có $\omega_1+\omega_2+\omega_3 = 0$ (mâu thuẫn với (1),loại).

Vậy công thức tích phân bằng phương pháp 3 điểm cầu phương là:

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Và

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\xi,\eta)d\xi d\eta &\approx \int_{-1}^{1}\left[\frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},\eta\right) + \frac{8}{9}g(0,\eta) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}},\eta\right)\right]d\eta \\ &\approx \frac{25}{81}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{64}{81}g(0,0) + \frac{25}{81}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\end{aligned}$$

Ta sẽ tính thử với K_{44}:

$$\begin{aligned}K_{44} &= \int_{\overline{T}} (J_G)^{-1}\nabla.\overline{L}_{2,4}.(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,4}.|J_G|d\xi\eta \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (J_G)^{-1}\nabla.\overline{L}_{2,4}.(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,4}.|J_G|d\xi d\eta \\ &\approx \frac{25}{81}(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,4}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},-\sqrt{\frac{3}{5}}\right).(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,4}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},-\sqrt{\frac{3}{5}}\right).|J_G| \\ &+ \frac{64}{81}(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,4}\left(0,0\right).(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,4}\left(0,0\right).|J_G| \\ &+ \frac{25}{81}(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,4}\left(\sqrt{\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right).(J_G)^{-1}.\nabla\overline{L}_{2,4}\left(\sqrt{\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right).|J_G|\end{aligned}$$

Ta có:

$$\nabla\overline{L}_{2,4}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\dfrac{15-\sqrt{15}}{25}\\ \dfrac{-15-\sqrt{15}}{25}\end{pmatrix}$$

$$\nabla\overline{L}_{2,4}\left(0,0\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\nabla\overline{L}_{2,4}\left(\sqrt{\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\dfrac{15+\sqrt{15}}{25}\\ \dfrac{-15\sqrt{15}}{25}\end{pmatrix}$$

Thay các giá trị trên vào ta được:

$$\begin{aligned}K_{44} &\approx \frac{25}{81}\left[\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}.\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\dfrac{15-\sqrt{15}}{25}\\ \dfrac{-15-\sqrt{15}}{25}\end{pmatrix}\right].\left[\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}.\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\dfrac{15-\sqrt{15}}{25}\\ \dfrac{-15-\sqrt{15}}{25}\end{pmatrix}\right].\frac{1}{8} \\ &+ \frac{25}{81}\left[\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}.\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\dfrac{15+\sqrt{15}}{25}\\ \dfrac{-15+\sqrt{15}}{25}\end{pmatrix}\right].\left[\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}.\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\dfrac{15+\sqrt{15}}{25}\\ \dfrac{-15+\sqrt{15}}{25}\end{pmatrix}\right].\frac{1}{8}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{25}{81}\left(\frac{15-\sqrt{15}}{25},\frac{-15-\sqrt{15}}{50}\right).\left(\frac{15-\sqrt{15}}{25},\frac{-15-\sqrt{15}}{50}\right).\frac{1}{8}\\
&+\frac{25}{81}\left(\frac{15+\sqrt{15}}{25},\frac{-15+\sqrt{15}}{50}\right).\left(\frac{15+\sqrt{15}}{25},\frac{-15+\sqrt{15}}{50}\right).\frac{1}{8}\\
=&\frac{25}{81}\left[\frac{(15-\sqrt{15})^2}{625}+\frac{(-15-\sqrt{15})^2}{50}\right].\frac{1}{8}\\
&+\frac{25}{81}\left[\frac{(15+\sqrt{15})^2}{625}+\frac{(-15+\sqrt{15})^2}{50}\right].\frac{1}{8}\\
=&\frac{25}{648}\left[\frac{240}{625}+\frac{240}{2500}\right]=\frac{1}{54}
\end{aligned}
$$

Vậy $K_{44}=\dfrac{1}{54}$

Tương tự với cách tính K_{44} ta tìm được giá trị của các phần tử K_{ij}. Từ đó ta có ma trận A hoàn chỉnh.