Họ và tên : Nguyễn Từ Huy.
MSSV: 1711127.
Finite Volume Method.
Assignment 2.

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ lồi và $f \in L^2(\Omega)$, ta xét phương trình:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y) & \forall (x,y) \in \Omega \quad (1) \\ u(x,y) = u_d(x,y) & \forall (x,y) \in \Gamma \quad (2) \end{cases}$$

Một số định nghĩa, tính chất khi sử phương pháp Finite Volume Method (FVM) cho bài toán (1) bằng lưới "*admissible*":

- Giả sử miền Ω được chia thành những elements "$(T_i)_{i=\overline{1,\mathrm{I}}}$".
- Với mỗi elements T_i, tương ứng điểm $x_i \in \mathring{T}_i$.
- Ta định nghĩa (i|k) là cạnh chung giữa elements T_i và T_k.
- Ở đây ta xét lưới "*admissible*", tức là vector $[x_i x_k]$ vuông góc với cạnh (i|k), với mọi cặp elements (T_i, T_k) kề nhau.
- Tại biên, những điểm x_i nằm ngay trên cạnh biên.
- Với $i \in [1, \mathrm{I}]$, ta đặt V(i) là tập những elements có cạnh kề với element T_i.
- Ta đặt E^{ext} là những cạnh trên biên, E^{int} là những cạnh bên trong lưới.
  Khi đó, $\mathrm{E} = (\mathrm{E}^{ext} \bigcup \mathrm{E}^{int})$ là tập tất cả các cạnh của lưới. Đặt N_E là số phần tử của E.
- Đặt l_{ik} là độ dài của cạnh i|k (lưu ý, $l_{ik} = l_{ki}$).
- n_{ik} là vector đơn vị vuông góc với cạnh i|k hướng từ T_i tới T_k (lưu ý, $n_{ik} = -n_{ki}$).
- $d_{ik} = d_{ki} = \|\overrightarrow{x_i x_k}\|$; và $d_{i,i|k} = d(x_i, i|k)$ là khoảng cách giữa điểm x_i và cạnh i|k

Bên cạnh đó ta cũng định nghĩa toán tử Divergence và Gradient.

- Toán tử Divergence:

$$\begin{aligned} d \quad : \qquad \mathbb{R}^{N_E} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{I}} \\ (u_{ik})_{ik \in E} &\longmapsto (du)_i = \frac{1}{|T_i|} \sum_{k \in V(i)} l_{ik} u_{ik} \end{aligned}$$

  Tích vô hướng $(.,.)_D$ xác định bởi:
  $\forall (a_{ik})_{ik \in E},\ (b_{ik})_{ik \in E}$

$$\begin{aligned} (a,b)_D &= \sum_{ik \in E} \frac{l_{ik} d_{ik}}{2} a_{ik} b_{ik} \\ \|u\|_{0,D}^2 &= (u,u)_D \\ |u|_{1,D}^2 &= \|g(u)\|_{0,D}^2 = (gu, gu)_D \end{aligned}$$

- Toán tử Gradient:

$$\begin{array}{rccl} g \quad : & \mathbb{R}^{\mathrm{I}+\mathrm{I}^{\Gamma}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N_E} \\ & (u_i)_{i\in \mathrm{I}} & \longmapsto & (gu)_{ik} = \dfrac{u_k - u_i}{d_{ik}} \end{array}$$

Tích vô hướng $(.,.)_T$ xác định bởi:
$\forall (a_i)_{i\in[1,\mathrm{I}]},\ (b_i)_{i\in[1,\mathrm{I}]}$

$$(a,b)_T = \sum_{i=1}^{\mathrm{I}} T_i a_i b_i$$
$$\|u\|_{0,T}^2 = (u,u)_T$$

- Toán tử Gamma:

$$\begin{array}{rccl} \gamma \quad : & \mathbb{R}^{\mathrm{I}+\mathrm{I}^{\Gamma}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathrm{I}^{\Gamma}} \\ & (u_i)_{i\in \mathrm{I}^{\Gamma}} & \longmapsto & (\gamma u)_{ik} = u_k \quad \text{với } x_k \in \Gamma \end{array}$$

Tích vô hướng $(.,.)_\Gamma$ xác định bởi:
$\forall (a_{ik})_{ik\in\Gamma},\ (b_{ik})_{ik\in\Gamma}$

$$(a,b)_\Gamma = \sum_{ik\in\Gamma} l_{ik} a_{ik} b_{ik}$$

(*) Biến đổi bài toán:
Lấy tích phân 2 vế phương trình (1) trên từng element T_i, ta được:

$$-\frac{1}{|T_i|}\int_{T_i} \Delta u(x,y)\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{|T_i|}\int_{T_i} f(x,y)\mathrm{d}\Omega \tag{3}$$

Áp dụng định lý Green cho vế trái phương trình (3), ta có:

$$-\frac{1}{|T_i|}\sum_{k\in V(i)} \int_{i|k} \nabla u(x,y).n_{ik}\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{|T_i|}\int_{T_i} f(x,y)\mathrm{d}\Omega \tag{4}$$

Với lưới "*admissible*", ta có thể xấp xỉ:

$$\nabla u.n_{ik} \approx \frac{u(x_k) - u(x_i)}{d_{ik}}$$

Mặt khác, ta đặt f_i là giá trị trung bình của f trên T_i, nghĩa là:

$$f_i = \frac{1}{|T_i|}\int_{T_i} f(x,y)\mathrm{d}\Omega$$

Khi đó, ta có thể viết lại (4):

$$-\frac{1}{|T_i|}\sum_{i|k\in E} \frac{l_{ik}}{d_{ik}}(u_k - u_i) = f_i \tag{5}$$

$$-\frac{1}{|T_i|}\sum_{i|k\in E} l_{ik}(gu)_{ik} = f_i \tag{6}$$

$$-(d(gu))_i = f_i \tag{7}$$

Câu 1:
Để xấp xỉ u tại biên, ta có 2 cách. Với $k \in [\mathrm{I}+1, \mathrm{I}^\Gamma]$

- Cách 1: $u_k = u(x_k)$ (với $x_k \in i|k$)
- Cách 2: $u_k = \dfrac{1}{l_{ik}} \displaystyle\int_{i|k} u(\sigma)\mathrm{d}\sigma$

Cách nào tốt hơn. Vì sao?

Nhận xét:

- Cách 1: Lấy giá trị u tại 1 điểm bất kì trên đường i|k.
- Cách 2: Lấy giá trị trung bình u trên đường i|k.

Đánh giá:

■ Ta thấy, cách 1 không tối ưu nếu hàm u thay đổi lớn trên đường i|k (giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm u trên đường i|k chênh lệch lớn). Khi đó, việc lấy giá trị bất kì trên đó sẽ khiến cho thuật toán kém chính xác.

■ Trong khi đó cách 2 lấy giá trị trung bình của hàm u trên đường i|k, nên cả khi hàm u thay đổi lớn trên đường i|k thì thuật toán chính xác hơn cách 1.

Câu 2:
Giả sử f và u_d dương trên miền Ω.
Chứng minh rằng:

$$u_i \geq 0 \qquad , \forall i \in [1, \mathrm{I}]$$

Giả sử $\exists i_1 \in [1, \mathrm{I}]$, sao cho: $u_{i_1} < 0$.
Đặt $u_j = \min\{u_i, \quad \forall i \in [1, \mathrm{I}]\}$.
Ta có, $u_j \leq u_{i_1} < 0$.
Mặt khác, tại x_j

$$-\frac{1}{|T_j|} \sum_{j|k \in E} \frac{l_{jk}}{d_{jk}} (u_k - u_j) = f_j$$

Vì $u_j = \min\{u_i, \quad \forall i \in [1, \mathrm{I}]\}$, và $u_d > 0$
Nên $(u_k - u_j) \geq 0 \quad \forall k \in [1, \mathrm{I} + \mathrm{I}^\Gamma]$.
Suy ra:

$$-\frac{1}{|T_j|} \sum_{j|k \in E} \frac{l_{jk}}{d_{jk}} (u_k - u_j) \leq 0 \qquad (+)$$

Mà:

$$-\frac{1}{|T_j|} \sum_{j|k \in E} \frac{l_{jk}}{d_{jk}} (u_k - u_j) = f_j \geq 0 \qquad (\text{-})$$

Từ (+) và (-), ta suy ra:

$$u_k = u_j \qquad \forall k \in V(j)$$

- Nếu tồn tại $k \in V(j) \bigcap [\mathrm{I}+1, \mathrm{I}+\mathrm{I}^\Gamma]$, ta có điều mâu thuẫn.
- Nếu $V(j) \bigcap [\mathrm{I}+1, \mathrm{I}+\mathrm{I}^\Gamma] = \varnothing$. Vì $u_k = u_j$ nên bằng cách khai triển tương tự ta cũng suy ra được

$$u_{k_1} = u_k \qquad \forall k_1 \in V(k)$$

  Ta cũng tiếp tục lý luận tương tự.

  - Nếu tồn tại $k_1 \in V(k) \bigcap [\mathrm{I}+1, \mathrm{I}+\mathrm{I}^\Gamma]$, ta có điều mâu thuẫn.
  - Nếu $V(k) \bigcap [\mathrm{I}+1, \mathrm{I}+\mathrm{I}^\Gamma] = \varnothing$.
    Ta lại đặt $u_{k_2} = u_{k_1}$ và tiếp tục khai triển như vậy

Vì miền Ω được chia thành hữu hạn element nên qua hữu hạn bước sẽ có điểm chạm giá biên $u_d = u_{k_n} = ... = u_k = u_j$, ta có điều mâu thuẫn.
Vậy với f, u_d dương thì $u_i \geq 0 \ \ , \forall i \in [1, \mathrm{I}]$

Câu 3:
Cho $(u_i)_{i=[1,\mathrm{I}+\mathrm{I}^\Gamma]}$ và $(v_{ik})_{ik \in E}$. Chứng minh rằng:

$$(dv, u)_T = -2(v, gu)_D + (v, \gamma u)_\Gamma$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
(dv, u)_T &= \sum_{i=1}^{I} \left(\sum_{k=1}^{I} l_{ik} v_{ik} + \sum_{k=I+1}^{I+I^\Gamma} l_{ik} v_{ik} \right) u_i \\
&= \sum_{ik \in E^{int}} (l_{ik} v_{ik} u_i + l_{ki} v_{ki} u_k) + \sum_{ik \in E^{ext}} l_{ik} v_{ik} u_i \\
&= \sum_{ik \in E^{int}} l_{ik} v_{ik} (u_i - u_k) + \sum_{ik \in E^{ext}} l_{ik} v_{ik} u_i \\
&= \sum_{ik \in E^{int}} l_{ik} v_{ik} (u_i - u_k) + \sum_{ik \in E^{ext}} l_{ik} v_{ik} (u_i - u_k) + \sum_{ik \in E^{ext}} l_{ik} v_{ik} u_i \\
&= \sum_{ik \in E} l_{ik} v_{ik} (u_i - u_k) + \sum_{ik \in E} l_{ik} v_{ik} (\gamma u)_{ik} \\
&= -2(v, gu)_D + (v, \gamma u)_\Gamma.
\end{aligned}$$

Câu 4:
Với bất kì $(w_i)_{i=[1,\mathrm{I}+\mathrm{I}^\Gamma]}$ sao cho $w_k = 0$ với mọi $k \in [\mathrm{I}+1, \mathrm{I}+\mathrm{I}^\Gamma]$. Chứng minh rằng:

$$2(gu, gw)_D = (f, w)_T$$

Theo (7), ta có:

$$-(d(gu))_i = f_i \qquad \forall i \in [1, \mathrm{I}]$$

Nhân 2 vế cho $|T_i| w_i$, và lấy tổng ta được:

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{I} |T_i| (d(gu))_i w_i &= \sum_{i=1}^{I} |T_i| f_i w_i \\
-(d(gu), w)_T &= (f, w)_T
\end{aligned}$$

Theo câu 3, ta có:

$$(dv, w)_T = -2(v, gu)_D + (v, \gamma w)_\Gamma$$

Thay $v_{ik} = (gu)_{ik}$, ta được:

$$2(gu, gw)_D - (gu, \gamma w)_\Gamma = (f, w)_T$$

Mặt khác, vì $w_k = 0$ với mọi $k \in [\mathrm{I}+1, \mathrm{I}+\mathrm{I}^\Gamma]$, nên $(\gamma u)_{ik} = 0$.
Vậy

$$2(gu, gw)_D = (f, w)_T$$

- Ta định nghĩa toán tử đạo hàm trung bình trên mỗi cạnh i|k.

$$(\delta u)_{ik} = \frac{1}{l_{ik}} \int_{i|k} \nabla u . n_{ik}(\sigma) \mathrm{d}\sigma \tag{8}$$

- Lưu ý: $(\delta u)_{ik} = -(\delta u)_{ki}$

Câu 5:
Với bất kì $(w_i)_{i=[1,\mathrm{I}+\mathrm{I}^\Gamma]}$ sao cho $w_k = 0$ với mọi $k \in [\mathrm{I}+1, \mathrm{I}+\mathrm{I}^\Gamma]$. Chứng minh rằng:

$$2(\delta u, gw)_D = (f, w)_T$$

Ta có:

$$-\frac{1}{|T_i|} \int\limits_{T_i} \Delta u(x, y) \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{|T_i|} \int\limits_{T_i} f(x, y) \mathrm{d}\Omega$$
$$-\frac{1}{|T_i|} \sum_{k \in V(i)} \int\limits_{i|k} \nabla u(x, y) . n_{ik}(\sigma) \mathrm{d}\sigma = f_i$$
$$-\frac{1}{|T_i|} \sum_{k \in V(i)} l_{ik} (\delta u)_{ik} = f_i$$
$$-(d(\delta u))_i = f_i$$

Nhân 2 vế cho $|T_i| w_i$, và lấy tổng ta được:

$$-\sum_{i=1}^{I} |T_i| (d(\delta u))_i w_i = \sum_{i=1}^{I} |T_i| f_i w_i$$
$$-(d(\delta u), w)_T = (f, w)_T$$

Theo câu (3), suy ra:

$$2(\delta u, gw)_D - (\delta u, \gamma w)_\Gamma = (f, w)_T$$

Mặt khác, vì $w_k = 0$ với mọi $k \in [\mathrm{I}+1, \mathrm{I}+\mathrm{I}^\Gamma]$, nên $(\gamma u)_{ik} = 0$.
Vậy

$$2(\delta u, gw)_D = (f, w)_T$$

Câu 6:
Chứng minh rằng tồn tại hằng số C>0 (phụ thuộc vào u).

$$\left|\frac{1}{l_{ik}}\int_{l_{ik}}(\nabla u(\sigma)-\nabla u(x_{ik})).n_{ik}(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right|\leq Cl_{ik}$$

$$\left|\frac{1}{d_{ik}}\int_{[x_i,x_k]}(\nabla u(\sigma)-\nabla u(x_{ik})).n_{ik}(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right|\leq Cd_{ik}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{l_{ik}}\int_{l_{ik}}(\nabla u(\sigma)-\nabla u(x_{ik})).n_{ik}(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right| &\leq \frac{1}{l_{ik}}\int_{l_{ik}}|\Delta u(\varphi).(\sigma-x_{ik}).n_{ik}(\sigma)|\mathrm{d}\sigma\\ &\leq |\Delta u(\varphi)|\frac{1}{l_{ik}}l_{ik}.\int_{l_{ik}}\mathrm{d}\sigma\\ &\leq C.\int_{l_{ik}}\mathrm{d}\sigma\\ &\leq Cl_{ik}\end{aligned}$$

Tương tự:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{d_{ik}}\int_{[x_i,x_k]}(\nabla u(\sigma)-\nabla u(x_{ik})).n_{ik}(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right| &\leq \frac{1}{d_{ik}}\int_{[x_i,x_k]}|\Delta u(\varphi).(\sigma-x_{ik}).n_{ik}(\sigma)|\mathrm{d}\sigma\\ &\leq |\Delta u(\varphi)|\frac{1}{d_{ik}}d_{ik}.\int_{[x_i,x_k]}\mathrm{d}\sigma\\ &\leq C.\int_{[x_i,x_k]}\mathrm{d}\sigma\\ &\leq Cd_{ik}\end{aligned}$$

Câu 7:
Giả sử với $(w_i)_{i\in[1,I+I^\Gamma]}$, với $w_k=0$ với mọi $k\in[I+1,I+I^\Gamma]$ tồn tại hằng số $C_1>0$ sao cho:

$$\|w\|_{0,T}\leq C_1|w|_{1,D}\qquad \text{(Poincare inequality)}$$

Chứng minh rằng tồn tại hằng số C_2 sao cho:

$$|u|_{1,D}\leq C_2\|f\|_{0,T}$$

với u thỏa phương trình (1),(2) và $u_d=0$

Theo câu 4, ta có:
Với bất kì $(w_i)_{i=[1,\mathrm{I}+\mathrm{I}^\Gamma]}$ sao cho $w_k=0$ với mọi $k\in[\mathrm{I}+1,\mathrm{I}+\mathrm{I}^\Gamma]$. Chứng minh rằng:

$$2(gu,gw)_D=(f,w)_T\qquad (*)$$

Với u thỏa phương trình (1),(2) và $u_d=0$, thay w = u vào phương trình (*), ta được:

$$2(gu,gu)_D=(f,u)_T$$

$$2|u|_{1,D}^2=\sum_{i=1}^{\mathrm{I}}|T_i|f_iu_i$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$|u|_{1,D}^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\mathrm{I}} |T_i| f_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\mathrm{I}} |T_i| u_i^2 \right)^{1/2} = \|f\|_{0,T}.\|u\|_{0,T}$$

Theo giả thuyết, tồn tại hằng số C_1 sao cho: $\|u\|_{0,T} \leq C_1 |u|_{1,D}$.
Suy ra:

$$\begin{aligned} |u|_{1,D}^2 &\leq \|f\|_{0,T}.\|u\|_{0,T} \\ &\leq \|f\|_{0,T}.C_1 |u|_{1,D} \end{aligned}$$

Do đó:

$$|u|_{1,D} \leq C_2 \|f\|_{0,T}$$