Finite Volume Method for Stokes problem

Từ Huy + Bảo Anh

Ngày 24 tháng 2 năm 2021

Stokes problem

Phương trình:

Xét miền $\Omega = [0,1]^2$, $\mathbf{u} = (u, v)$ và $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2$,
$\mathbf{f} = (f^{(1)}, f^{(2)}) \in \mathrm{L}^2(\Omega)^2$. Phương trình Stokes có dạng:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + \nabla_x p(x,y) = f^{(1)}(x,y) & \text{in } \Omega \\ -\Delta v(x,y) + \nabla_y p(x,y) = f^{(2)}(x,y) & \text{in } \Omega \\ \nabla_x u(x,y) + \nabla_y v(x,y) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

Điều kiện biên Dirichlet thuần nhất:

$$\begin{cases} u(x,y) = 0 & \forall (x,y) \in \partial\Omega \\ v(x,y) = 0 & \forall (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

Điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm:

$$\int_\Omega p \mathrm{d}x = 0 \tag{1.3}$$

Chia lưới

Miền $\Omega = [0,1]^2$, ta xét lưới với
$N_x + 1$ điểm $x_{i+\frac{1}{2}}$ với $i = 0, 1, 2, ..., N_x$ và
$N_y + 1$ điểm $y_{j+\frac{1}{2}}$ với $j = 0, 1, 2, ..., N_y$ sao cho:

$$0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < ... < x_{N_x - \frac{1}{2}} < x_{N_x + \frac{1}{2}} = 1$$
$$0 = y_{\frac{1}{2}} < y_{\frac{3}{2}} < ... < y_{N_y - \frac{1}{2}} < y_{N_y + \frac{1}{2}} = 1$$

Xét $\mathcal{T} = (T_{ij})$ là admissible mesh của $(0,1) \times (0,1)$ sao cho:

$$T_{ij} = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$$

Khi đó, T_{ij} được gọi là **control volume** của $\mathcal{T}$ và các điểm $x_{i+\frac{1}{2}}$, $y_{j+\frac{1}{2}}$ được gọi là **mesh points**.

Chia lưới

Chọn các điểm $(x_i)_{\overline{0,N_x+1}}$ và $(y_j)_{\overline{0,N_y+1}}$ sao cho:

$$x_0 = x_{\frac{1}{2}}, \quad x_i = \frac{1}{2}(x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}), \quad x_{N_x+1} = x_{N_x+\frac{1}{2}}$$
$$y_0 = y_{\frac{1}{2}}, \quad y_j = \frac{1}{2}(y_{j-\frac{1}{2}} + y_{j+\frac{1}{2}}), \quad y_{N_y+1} = y_{N_y+\frac{1}{2}}$$

Các điểm (x_i, y_j) là **control points** của (T_{ij}).
Đặt:

$$h_i = |x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}|, \quad k_j = |y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}| \quad \forall i \in \overline{1, N_x},\ j \in \overline{1, N_y}$$
$$h_{i+\frac{1}{2}} = |x_{i+1} - x_i|, \quad k_{j+\frac{1}{2}} = |y_{j+1} - y_j| \quad \forall i \in \overline{0, N_x},\ j \in \overline{0, N_y}$$

Khi đó, $|T_{ij}| = h_i k_j$,
h $= \max\{h_i, k_j\}$ là **mesh size**

The finite volume scheme có được bằng cách lấy tích phân trên từng **control volume** T_{ij},
Xét phương trình (1.1a)

$$-\Delta u + \nabla_x p = f^{(1)}$$

$$\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} -\Delta u \,\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} \nabla_x p \,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} f^{(1)} \,\mathrm{d}\Omega$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} -\Delta u \,\mathrm{d}\Omega = &-\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_{xx}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &-\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} u_{yy}(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Scheme

Ta biến đổi:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_{xx}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= -\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} u_x(x_{i+\frac{1}{2}},y)-u_x(x_{i-\frac{1}{2}},y)\,\mathrm{d}y\\
&= -\frac{k_j u_x(x_{i+\frac{1}{2}},y_j)}{|T_{ij}|}+\frac{k_j u_x(x_{i-\frac{1}{2}},y_j)}{|T_{ij}|}\\
&= -\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_i h_{i+\frac{1}{2}}}+\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_i h_{i-\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

Hoàn toàn tương tự:

$$
-\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} u_{yy}(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k_j k_{j+\frac{1}{2}}}+\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k_j k_{j-\frac{1}{2}}}
$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} \nabla_x p \,\mathrm{d}\Omega &= \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} p_x(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} p(x_{i+\frac{1}{2}},y) - p(x_{i-\frac{1}{2}},y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{k_j p(x_{i+\frac{1}{2}},y_j)}{|T_{ij}|} - \frac{k_j p(x_{i-\frac{1}{2}},y_j)}{|T_{ij}|} \\
&= \frac{p_{i+1,j}+p_{i,j}}{2h_i} - \frac{p_{i,j}+p_{i-1,j}}{2h_i} \\
&= \frac{p_{i+1,j}-p_{i-1,j}}{2h_i}
\end{aligned}$$

Khi đó,

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + \nabla_x p &= f^{(1)} \\
\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} -\Delta u \,\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} \nabla_x p \,\mathrm{d}\Omega &= \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} f^{(1)} \,\mathrm{d}\Omega \\
-\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_i h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_i h_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k_j k_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k_j k_{j-\frac{1}{2}}} & \\
+\frac{p_{i+1,j}-p_{i-1,j}}{2h_i} &= f_{ij}^{(1)} \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

trong đó, $f_{ij}^{(1)} = \dfrac{1}{|T_{ij}|}\displaystyle\int_{T_{ij}} f^{(1)} \,\mathrm{d}\Omega$

Khai triển (2.1) ta được,

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{h_i h_{i+\frac{1}{2}}} u_{i+1,j} - \frac{1}{h_i h_{i-\frac{1}{2}}} u_{i-1,j} - \frac{1}{k_j k_{j+\frac{1}{2}}} u_{i,j+1} - \frac{1}{k_j k_{j-\frac{1}{2}}} u_{i,j-1} \\
+ \left(\frac{1}{h_i h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{h_i h_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{k_j k_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{k_j k_{j-\frac{1}{2}}} \right) u_{i,j} \\
+ \frac{1}{2h_i} p_{i+1,j} - \frac{1}{2h_i} p_{i-1,j} = f_{ij}^{(1)}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Scheme

Một cách hoàn toàn tương tự,

$$-\Delta v + \nabla_y p = f^{(2)}$$

$$\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} -\Delta v \; \mathrm{d}\Omega + \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} \nabla_y p \; \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} f^{(2)} \; \mathrm{d}\Omega$$

$$-\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_i h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_i h_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{k_j k_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{k_j k_{j-\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2k_j} = f_{ij}^{(2)} \tag{3.1}$$

trong đó, $f_{ij}^{(2)} = \dfrac{1}{|T_{ij}|}\displaystyle\int_{T_{ij}} f^{(2)} \; \mathrm{d}\Omega$

Khai triển (3.1) ta được,

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{h_i h_{i+\frac{1}{2}}} v_{i+1,j} - \frac{1}{h_i h_{i-\frac{1}{2}}} v_{i-1,j} - \frac{1}{k_j k_{j+\frac{1}{2}}} v_{i,j+1} - \frac{1}{k_j k_{j-\frac{1}{2}}} v_{i,j-1} \\
+ \left(\frac{1}{h_i h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{h_i h_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{k_j k_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{k_j k_{j-\frac{1}{2}}} \right) v_{i,j} \\
+ \frac{1}{2k_j} p_{i,j+1} - \frac{1}{2k_j} p_{i,j-1} = f_{ij}^{(2)}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Ta dễ dàng suy ra được,

$$
\begin{aligned}
\nabla_x u + \nabla_y v &= 0 \\
\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} \nabla_x u \; \mathrm{d}\Omega + \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} \nabla_y v \; \mathrm{d}\Omega &= 0 \\
\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_i} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2k_j} &= 0 \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Hơn nữa với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất:

$$
\begin{aligned}
u_{0,j} = u_{N_x+1,j} = 0, &\quad \forall j = \overline{0, N_y + 1} \\
u_{i,0} = u_{i,N_y+1} = 0, &\quad \forall i = \overline{0, N_x + 1}
\end{aligned}
$$

Scheme

Đặt:

$$a_i = \frac{1}{h_i h_{i-\frac{1}{2}}}, \quad b_i = \frac{1}{h_i h_{i+\frac{1}{2}}}$$
$$c_j = \frac{1}{k_j k_{j-\frac{1}{2}}}, \quad d_j = \frac{1}{k_j k_{j+\frac{1}{2}}}$$
$$eh_i = \frac{1}{2h_i}, \qquad ek_j = \frac{1}{2k_j}$$

Scheme

Ma trận: Ta xác định:

$$A_j = \begin{pmatrix} s_{1,j} & -b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & s_{2,j} & -b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{N_x-1} & s_{N_x-1,j} & -b_{N_x-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{N_x} & s_{N_x,j} \end{pmatrix}$$

$$C_j = \begin{pmatrix} -c_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -c_j \end{pmatrix} \qquad D_j = \begin{pmatrix} -d_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -d_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -d_j \end{pmatrix}$$

Scheme

Matrix define $-\Delta$ operator:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & D_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & A_2 & D_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{N_y-1} & A_{N_y-1} & D_{N_y-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{N_y} & A_{N_y} \end{pmatrix}$$

$$E1_j = \begin{pmatrix} eh_1 & eh_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -eh_2 & 0 & eh_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -eh_{N_x-1} & 0 & eh_{N_x-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -eh_{N_x} & -eh_{N_x} \end{pmatrix}$$

Matrix define ∇_x operator:

$$B1 = \begin{pmatrix} E1_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E1_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E1_{N_y-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E1_{N_y} \end{pmatrix}$$

Scheme

$$E2_j = \begin{pmatrix} ek_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ek_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & ek_j \end{pmatrix}$$

Matrix define ∇_y operator:

$$B2 = \begin{pmatrix} E2_1 & E2_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -E2_2 & 0 & E2_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -E2_{N_y-1} & 0 & E2_{N_y-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -E2_{N_y} & -E2_{N_y} \end{pmatrix}$$

Scheme

Thuật toán xấp xỉ cho phương trình (1) là :

$$\begin{cases} A.u + B1.p & = F1 \\ A.v + B2.p & = F2 \\ B1.u + B2.v & = 0 \end{cases} \tag{5}$$

với

$$u = (u_{1,1}, u_{2,1}, \ldots, u_{N_x,1}, u_{1,2}, \ldots, u_{N_x,2}, \ldots, u_{1,N_y}, \ldots, u_{N_x,N_y})^T$$
$$v = (v_{1,1}, v_{2,1}, \ldots, v_{N_x,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{N_x,2}, \ldots, v_{1,N_y}, \ldots, v_{N_x,N_y})^T$$
$$p = (p_{1,1}, p_{2,1}, \ldots, p_{N_x,1}, p_{1,2}, \ldots, p_{N_x,2}, \ldots, p_{1,N_y}, \ldots, p_{N_x,N_y})^T$$
$$F1 = (f^{(1)}_{1,1}, f^{(1)}_{2,1}, \ldots, f^{(1)}_{N_x,1}, f^{(1)}_{1,2}, \ldots, f^{(1)}_{N_x,2}, \ldots, f^{(1)}_{1,N_y}, \ldots, f^{(1)}_{N_x,N_y})^T$$
$$F2 = (f^{(2)}_{1,1}, f^{(2)}_{2,1}, \ldots, f^{(2)}_{N_x,1}, f^{(2)}_{1,2}, \ldots, f^{(2)}_{N_x,2}, \ldots, f^{(2)}_{1,N_y}, \ldots, f^{(2)}_{N_x,N_y})^T$$

Scheme

Từ thuật toán xấp xỉ (5) ta suy ra:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & B1 \\ 0 & A & B2 \\ B1 & B2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F1 \\ F2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Scheme

Đặt

$$AA = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B1 \\ B2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} p \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} F1 \\ F2 \end{pmatrix}$$

Khi đó, phương trình (6) có thể viết lại dưới dạng:

$$\begin{pmatrix} AA & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Uzawa Iteration

Để giải phương trình (7)

$$\begin{pmatrix} AA & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

ta sử dụng thuật toán lặp Uzawa tìm x_1, x_2.
Đặt

$$\begin{aligned} S &= B^* A^{-1} B && (\textit{"Schur complement"}). \\ x_2 &= 1. && (\textit{"Initial guess"}). \\ r_2 &= B^* A^{-1} F - S x_2 && (\textit{"The residual"}) \\ p_2 &= r_2. && (\textit{"Search direction"}). \end{aligned}$$

Uzawa Iteration

Khi đó ta lập bước lặp. Với mỗi bước lặp:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= S * p_2. \\
\alpha &= rs/(p_2' * a_2) \\
x_2 &= x2 + \alpha * p_2 \\
r_1 &= r_1 - \alpha * a_2 \\
r_2 &= r_1' * r_1
\end{aligned}
$$

Nếu $\sqrt{r_2} < 10^{(-6)}$, thì dừng vòng lặp Cập nhập:

$$
\begin{aligned}
p_2 &= r1 + (r_2/r_s) * p_2 \\
rs &= r_2.
\end{aligned}
$$

Example

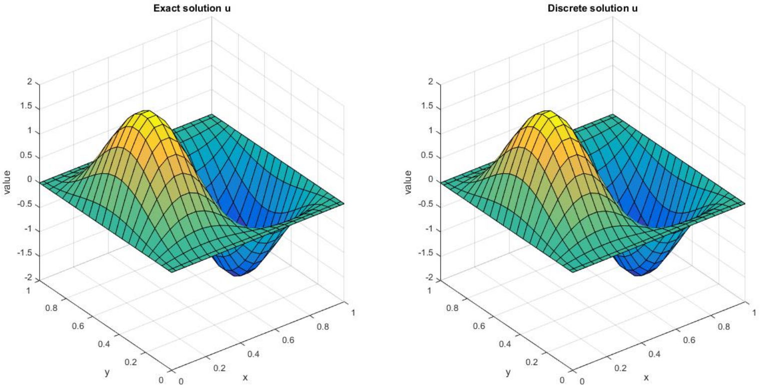
Examples

Xét bài toán có nghiệm:

$$u = (1 - cos(2\pi x))sin(2\pi y)$$
$$v = -(1 - cos(2\pi y))sin(2\pi x)$$
$$p = xy + x + y + x^3y^2 - \frac{4}{3}$$

Sử dụng thuật toán ở trên với Nx = Ny = 20.

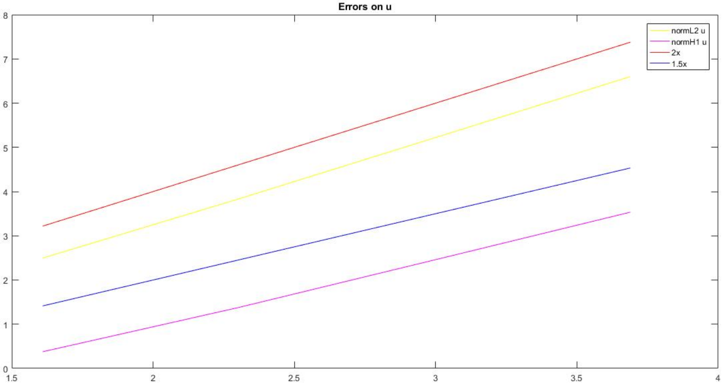
Example



Hình 1a: Nghiệm u chính xác (bên trái) và nghiệm xấp xỉ (bên phải).

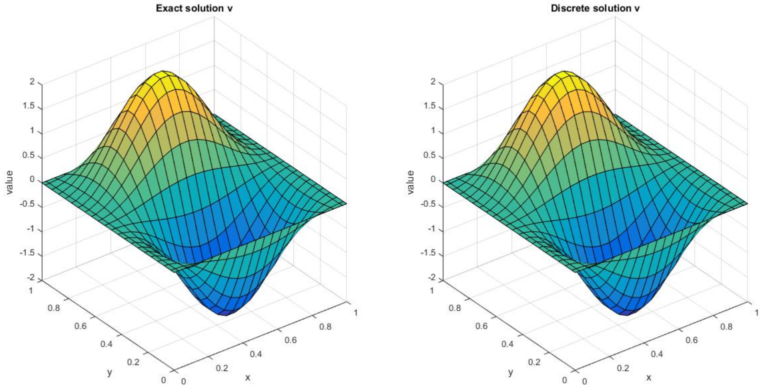
Example

Bậc hội tụ của u:



Hình 1b: Bậc hội tụ của nghiệm xấp xỉ. Trong L_2 là $\mathcal{O}(h^2)$ và trong H_1 là $\mathcal{O}(h^{3/2})$.

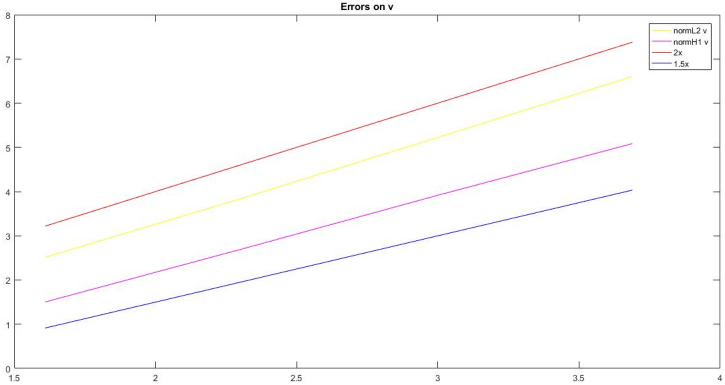
Example



Hình 1c: Nghiệm v chính xác (bên trái) và nghiệm xấp xỉ (bên phải).

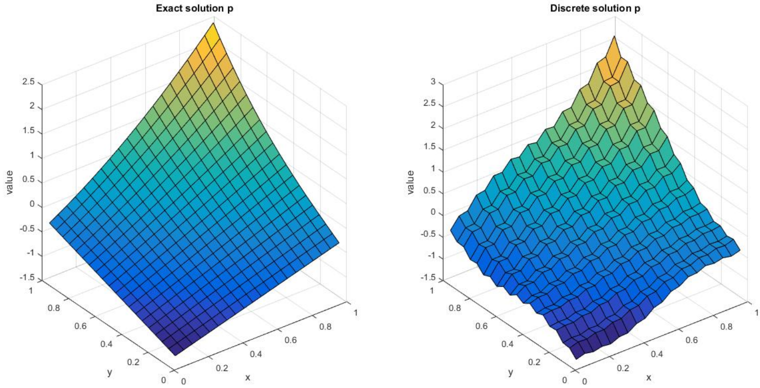
Example

Bậc hội tụ của v:



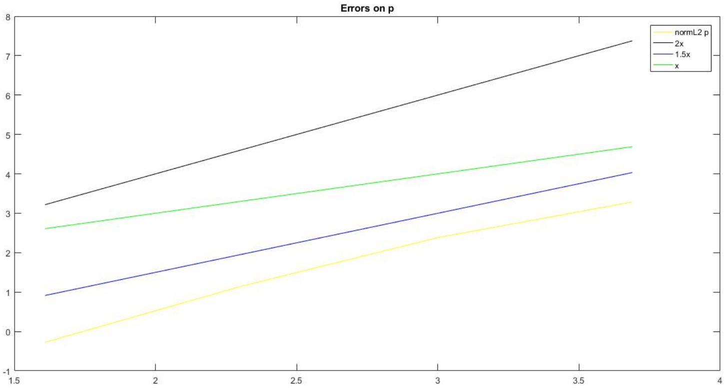
Hình 1d: Bậc hội tụ của nghiệm xấp xỉ. Trong L_2 là $\mathcal{O}(h^2)$ và trong H_1 là $\mathcal{O}(h^{3/2})$.

Example



Hình 1e: Nghiệm p chính xác (bên trái) và nghiệm xấp xỉ (bên phải).

Bậc hội tụ của p:



Hình 1f: Bậc hội tụ là $\mathcal{O}(h^{3/2})$.

Example

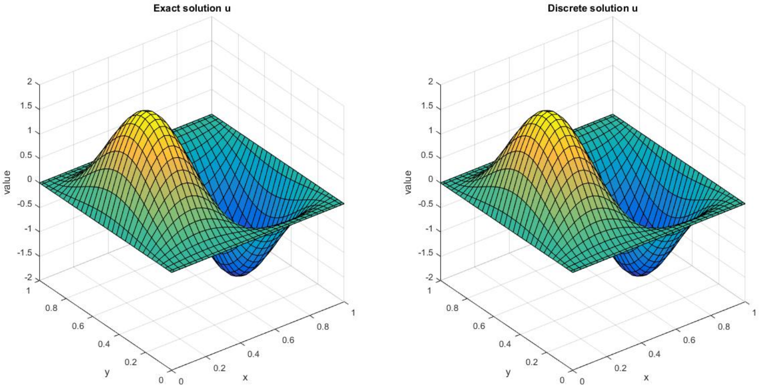
Examples

Xét bài toán 2 có:

$$
\begin{aligned}
u &= -cos(2\pi x)sin(2\pi y) + sin(2\pi y)\\
v &= cos(2\pi y)sin(2\pi x) - sin(2\pi x)\\
p &= -2\pi(cos(2\pi x) - cos(2\pi y))
\end{aligned}
$$

Sử dụng thuật toán ở trên với Nx $=$ Ny $= 30$.

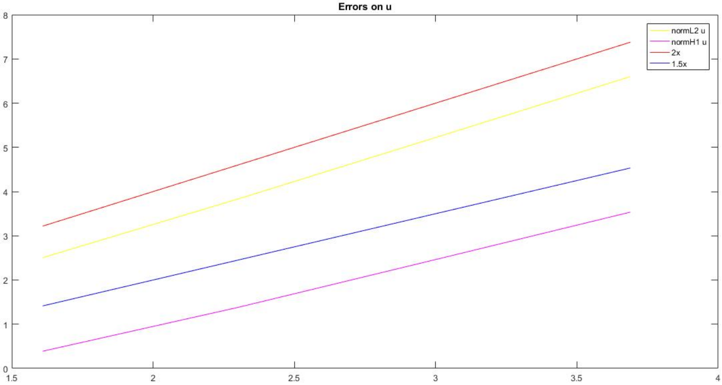
Example



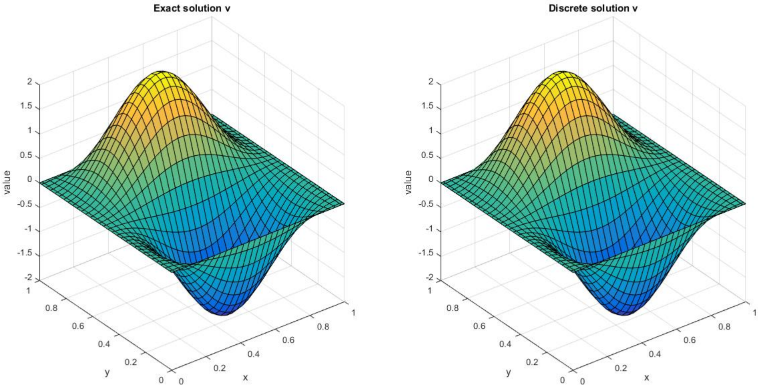
Hình 2a: Nghiệm u chính xác (bên trái) và nghiệm xấp xỉ (bên phải).

Example

Bậc hội tụ của u:



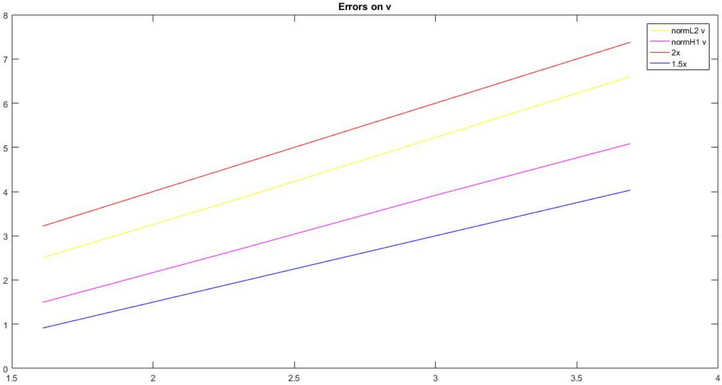
Hình 2b: Bậc hội tụ của nghiệm xấp xỉ. Trong L_2 là $\mathcal{O}(h^2)$ và trong H_1 là $\mathcal{O}(h^{3/2})$.



Hình 2c: Nghiệm v chính xác (bên trái) và nghiệm xấp xỉ (bên phải).

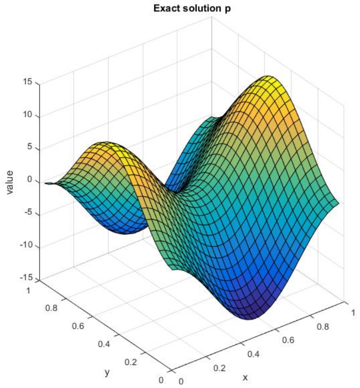
Example

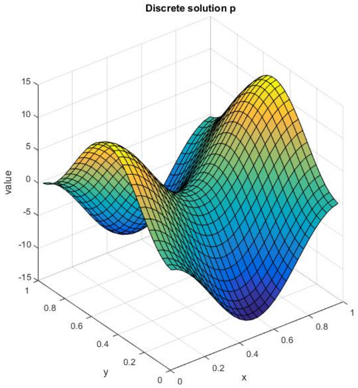
Bậc hội tụ của v:



Hình 2d: Bậc hội tụ của nghiệm xấp xỉ. Trong L_2 là $\mathcal{O}(h^2)$ và trong H_1 là $\mathcal{O}(h^{3/2})$.

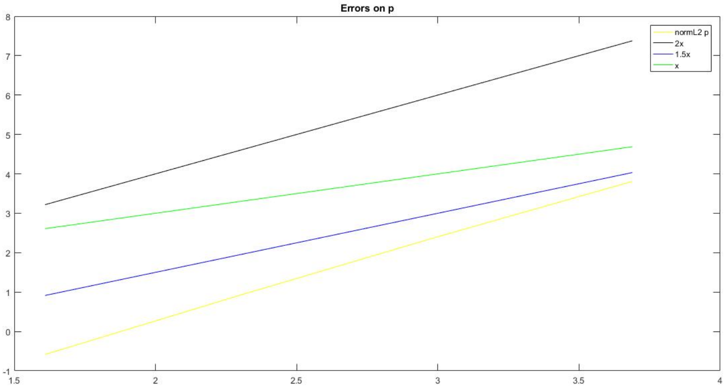
Example





Hình 2e: Nghiệm p chính xác (bên trái) và nghiệm xấp xỉ (bên phải).

Bậc hội tụ của p:



Hình 2f: Bậc hội tụ là $\mathcal{O}(h^2)$ khi Nx,Ny lớn.

Example

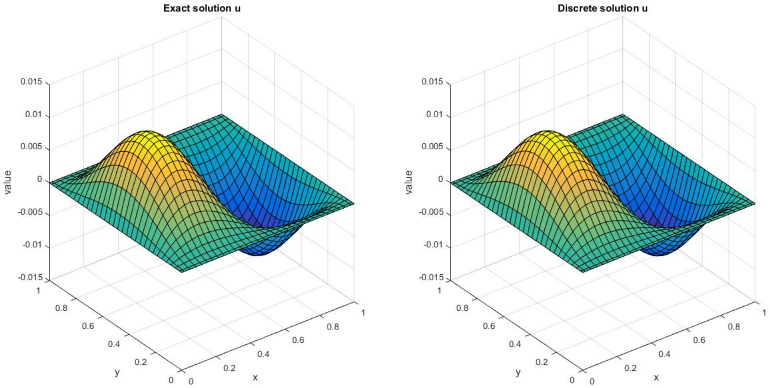
Examples

Xét bài toán 3 có:

$$u = x^2(x-1)^2(4y^3 - 6y^2 + 2y)$$
$$v = -y^2(y-1)^2(4x^3 - 6x^2 + 2x)$$
$$p = (x^2 + y^2 - \frac{2}{3})$$

Sử dụng thuật toán ở trên với Nx = Ny = 30.

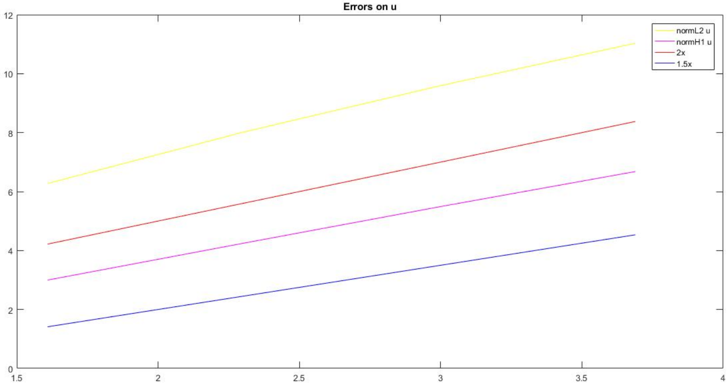
Example



Hình 3a: Nghiệm u chính xác (bên trái) và nghiệm xấp xỉ (bên phải).

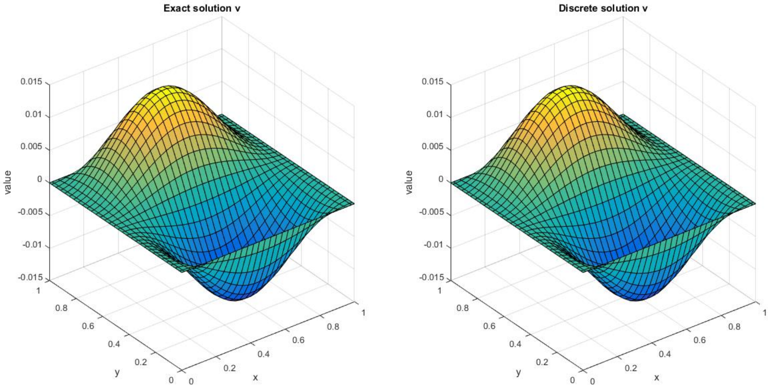
Example

Bậc hội tụ của u:



Hình 3b: Bậc hội tụ của nghiệm xấp xỉ. Trong L_2 là $\mathcal{O}(h^2)$ và trong H_1 là $\mathcal{O}(h^{3/2})$.

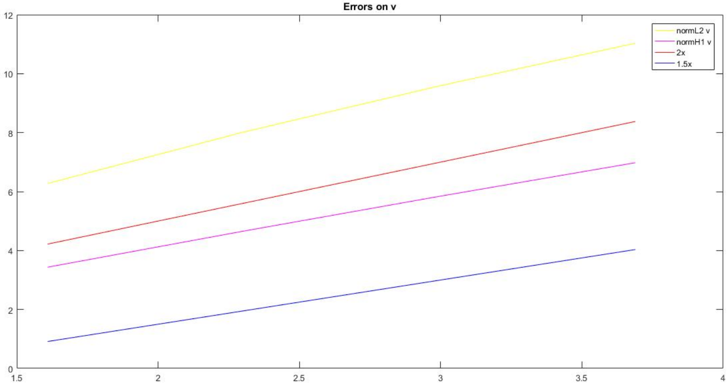
Example



Hình 3c: Nghiệm v chính xác (bên trái) và nghiệm xấp xỉ (bên phải).

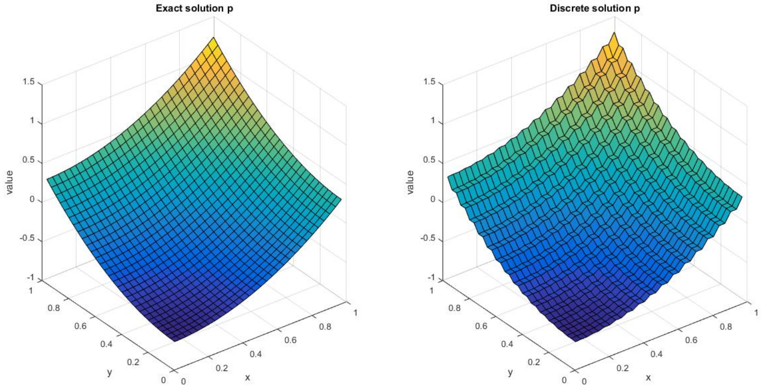
Example

Bậc hội tụ của v:



Hình 3d: Bậc hội tụ của nghiệm xấp xỉ. Trong L_2 là $\mathcal{O}(h^2)$ và trong H_1 là $\mathcal{O}(h^{3/2})$.

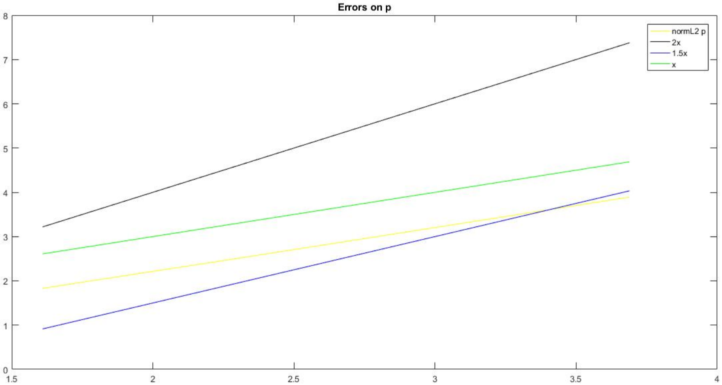
Example



Hình 3e: Nghiệm p chính xác (bên trái) và nghiệm xấp xỉ (bên phải).

Example

Bậc hội tụ của p:



Hình 3f: Bậc hội tụ là $\mathcal{O}(h)$.