Họ và tên : Nguyễn Từ Huy.
MSSV: 1711127.
Finite Volume Method.
REPORT

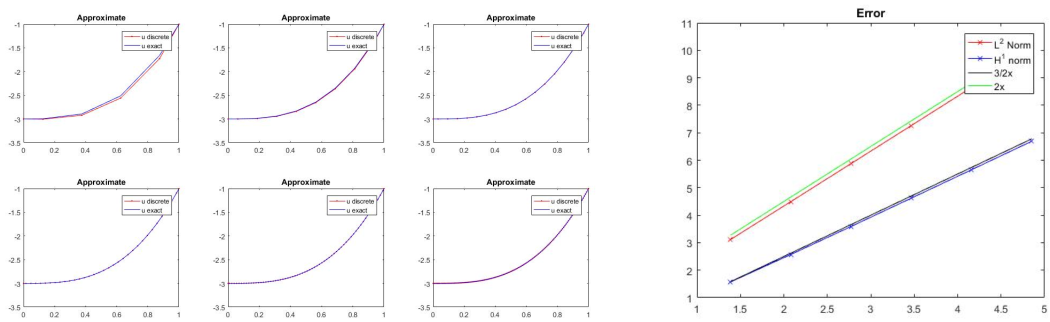
Câu 1:
Xét phương trình Poisson trên miền $\Omega = (0, 1)$:

$$\begin{cases} -u''(x) + 0.3u'(x) & = f(x) \qquad \forall x \in \Omega \\ u(0) & = a \\ u(1) & = b \end{cases} \tag{1}$$

Ta giải cho trường hợp:
$f(x) = (0.3 \times 6)x^2 - 12x$.
a = -3, b = -1.
Nghiệm chính xác $u(x) = 2x^3 - 3$

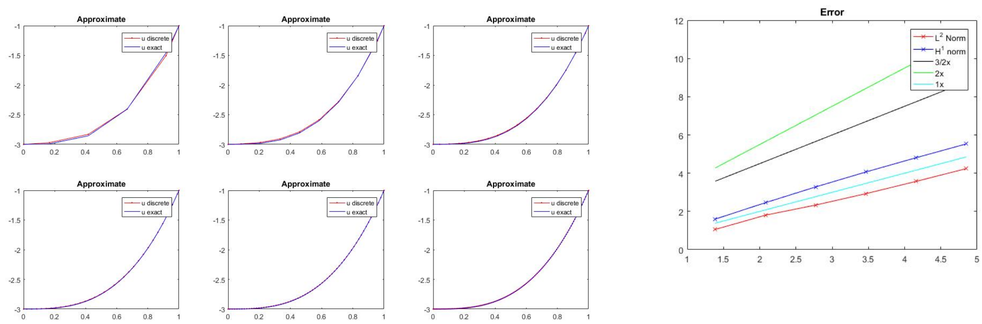
a) Nếu giải phương trình (1) bằng phương pháp thể tích phần tử hữu hạn (FVM) trên miền lưới đều và các điểm "*control point*" là trung điểm của các "*control volume*", nghĩa là $x_i = \frac{1}{2}.x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}.x_{i-\frac{1}{2}}$, thì sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ là:

- bậc $\mathcal{O}(h^2)$ theo chuẩn L^2.
- bậc $\mathcal{O}(h^{3/2})$ theo chuẩn H^1.



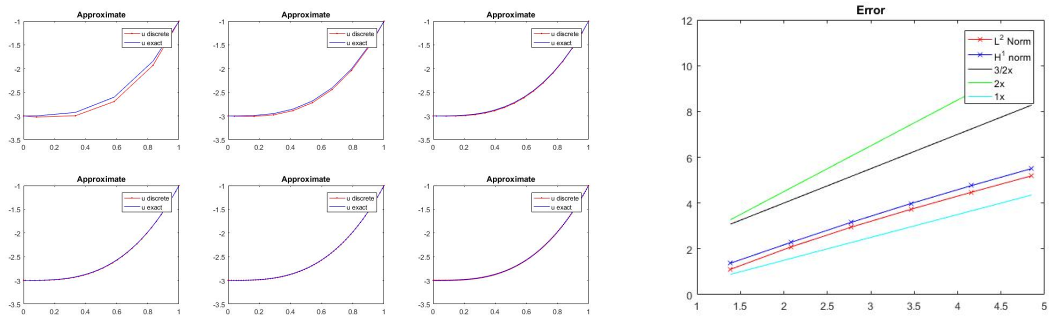
b) Nếu giải phương trình (1) bằng phương pháp thể tích phần tử hữu hạn (FVM) trên miền lưới đều và các điểm "*control point*" xác định bởi $x_i = \frac{2}{3}.x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}.x_{i-\frac{1}{2}}$, thì sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ là:

- bậc $\mathcal{O}(h)$ theo chuẩn L^2.
- bậc $\mathcal{O}(h)$ theo chuẩn H^1.



c) Nếu giải phương trình (1) bằng phương pháp thể tích phần tử hữu hạn (FVM) trên miền lưới đều và các điểm "*control point*" xác định bởi $x_i = \frac{1}{3}.x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}.x_{i-\frac{1}{2}}$,
thì sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ là:

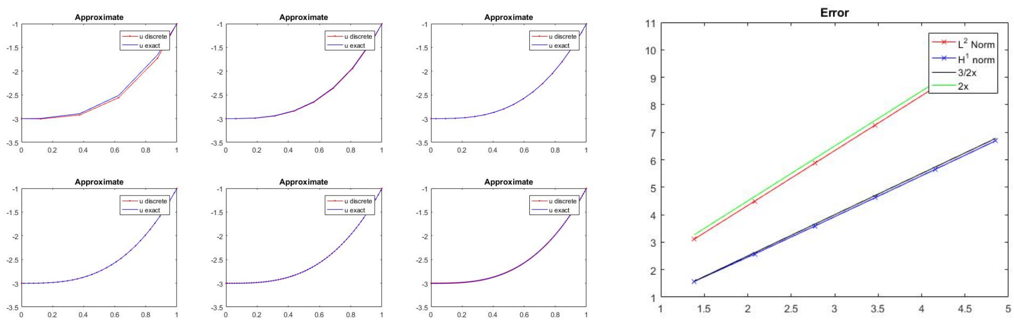
- bậc $\mathcal{O}(h)$ theo chuẩn L^2.
- bậc $\mathcal{O}(h)$ theo chuẩn H^1.



d) Các cách xấp xỉ giá trị của f trên T_i. Ở đây ta xét sử dụng FVM giải phương trình (1) trên miền lưới đều và các điểm "*control point*" là trung điểm của các "*control volume*", nghĩa là $x_i = \frac{1}{2}.x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}.x_{i-\frac{1}{2}}$

- Cách 1: Trepozoidal rule

$$f_i \approx \frac{f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i-\frac{1}{2}})}{2}$$

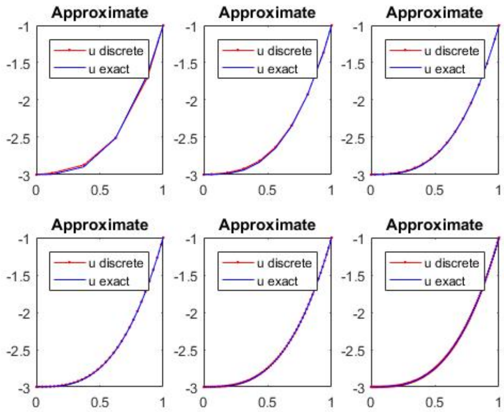


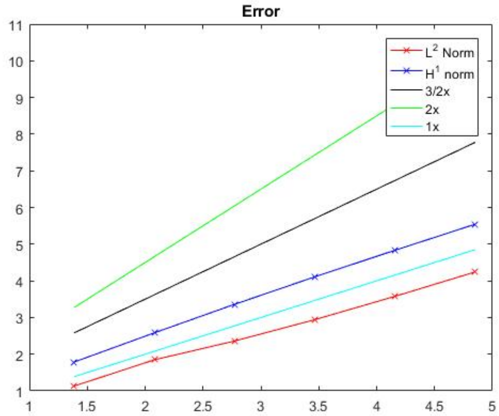
Sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ là:

- bậc $\mathcal{O}(h^2)$ theo chuẩn L^2.
- bậc $\mathcal{O}(h^{3/2})$ theo chuẩn H^1.

- Cách 2:

$$f_i \approx \frac{1}{3} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{2}{3} f(x_{i-\frac{1}{2}})$$

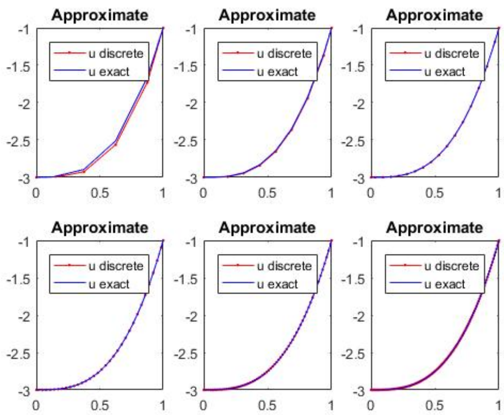


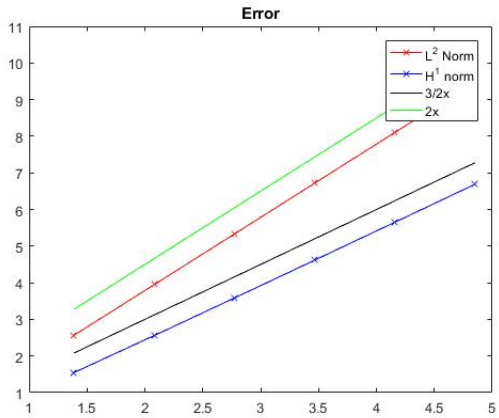


Sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ là:
  - bậc $\mathcal{O}(h)$ theo chuẩn L^2.
  - bậc $\mathcal{O}(h)$ theo chuẩn H^1.

- Cách 3: Midpoint rule

$$f_i \approx f\left(\frac{x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}}}{2}\right)$$

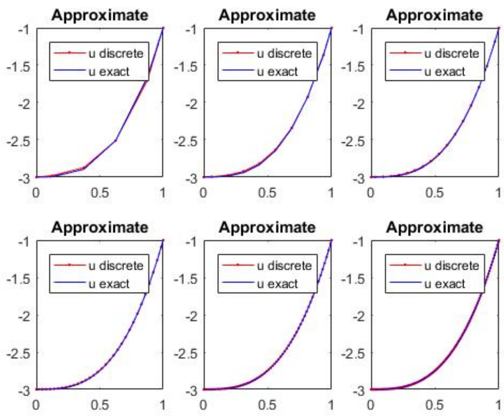


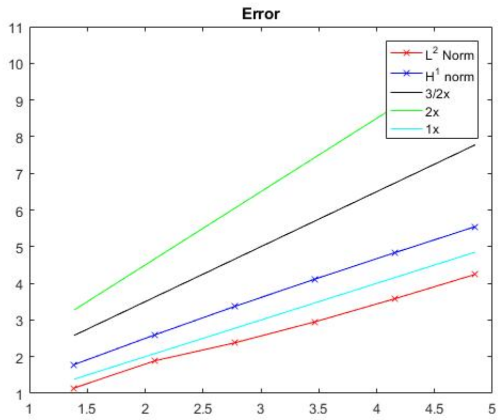


Sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ là:
  - bậc $\mathcal{O}(h^2)$ theo chuẩn L^2.
  - bậc $\mathcal{O}(h^{3/2})$ theo chuẩn H^1.

- Cách 4:

$$f_i \approx f\left(\frac{1}{3} x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} x_{i-\frac{1}{2}}\right)$$





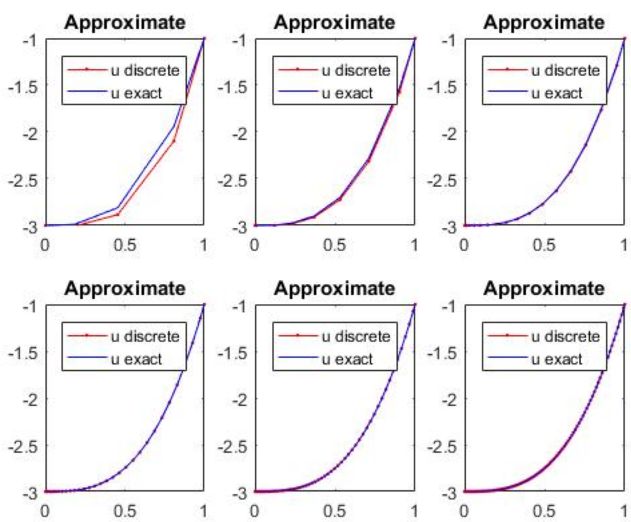
Sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ là:

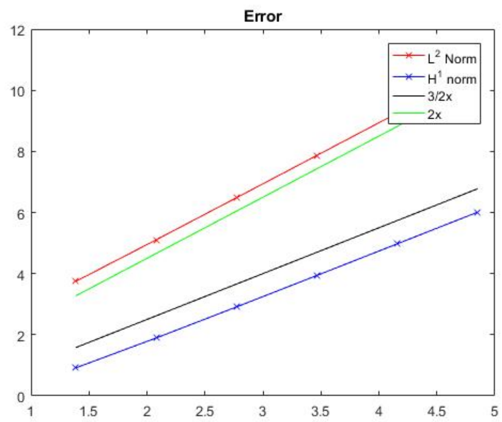
- bậc $\mathcal{O}(h)$ theo chuẩn L^2.
- bậc $\mathcal{O}(h)$ theo chuẩn H^1.

Ta thấy ở cách 1 và 3 đưa đến xấp xỉ tốt hơn cho thuật toán.

e) Nếu giải phương trình (1) bằng phương pháp thể tích phần tử hữu hạn (FVM) trên miền lưới không đều $x_{i+\frac{1}{2}} = b - cos\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{(i-1)}{N}\right)$ (với b là giá trị biên phải); và các điểm "*control point*" xác định bởi $x_i = \frac{1}{2}.x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}.x_{i-\frac{1}{2}}$, thì sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ là:

- bậc $\mathcal{O}(h^2)$ theo chuẩn L^2.
- bậc $\mathcal{O}(h^{3/2})$ theo chuẩn H^1.



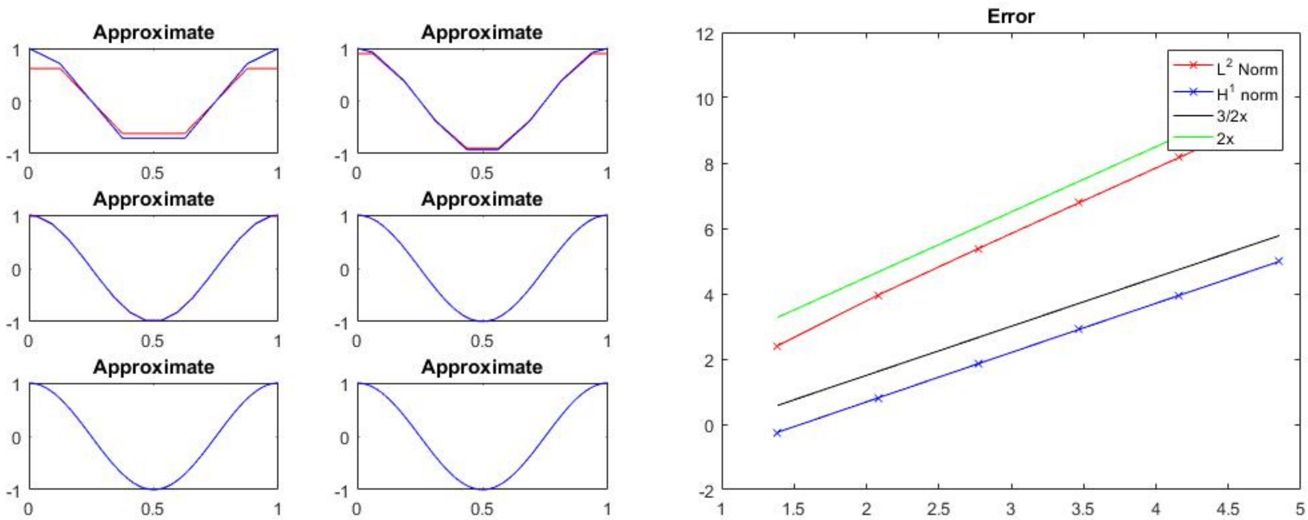


Câu 2:
Xét phương trình Poisson trên miền $\Omega = (0, 1)$:

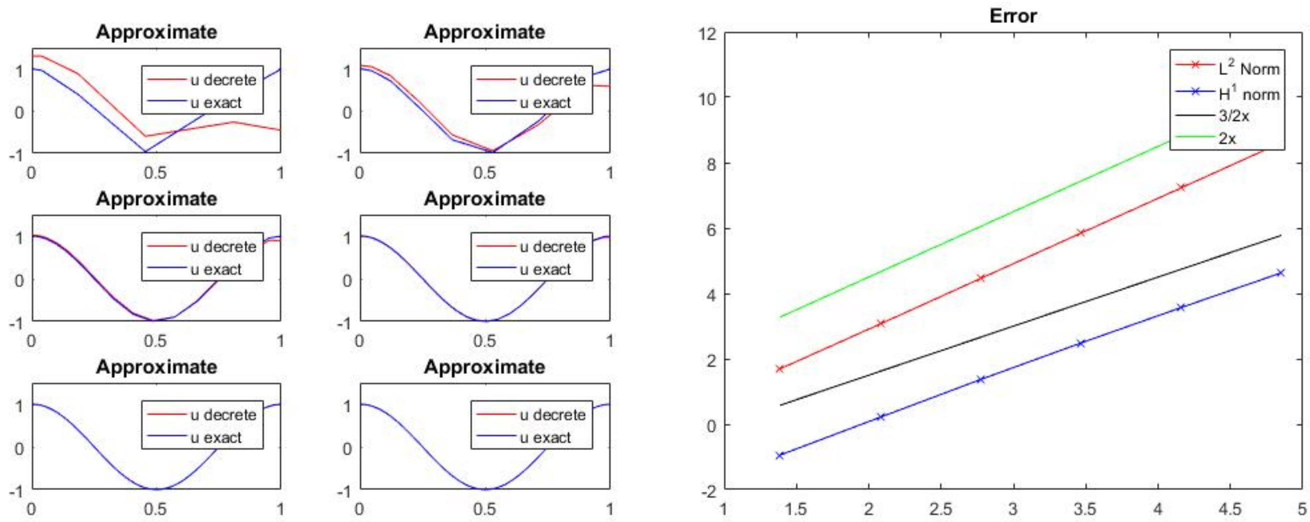
$$\begin{cases} -u''(x) &= f(x) \qquad \forall x \in \Omega \\ u'(0) &= 0 \\ u'(1) &= 0 \end{cases} \tag{2}$$

với điều kiện $\int_0^1 f(x) = 0$ và $\int_0^1 u(x) = 0$
Ta giải cho trường hợp $f(x) = (2\pi)^2 * cos(2\pi x)$.
Nghiệm chính xác $u(x) = cos(2\pi x)$

1. Nếu giải phương trình (2) bằng phương pháp thể tích phần tử hữu hạn (FVM) trên miền lưới đều và các điểm "*control point*" là trung điểm của các "*control volume*", nghĩa là $x_i = \frac{1}{2}.x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}.x_{i-\frac{1}{2}}$, thì sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ là:
   - bậc $\mathcal{O}(h^2)$ theo chuẩn L^2.
   - bậc $\mathcal{O}(h^{3/2})$ theo chuẩn H^1.



2. Nếu giải phương trình (2) bằng phương pháp thể tích phần tử hữu hạn (FVM) trên miền lưới không đều $x_{i+\frac{1}{2}} = b - cos\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{(i-1)}{N}\right)$ (với b là giá trị biên phải); và các điểm "*control point*" xác định bởi $x_i = \frac{1}{2}.x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}.x_{i-\frac{1}{2}}$, thì sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ là:
   - bậc $\mathcal{O}(h^2)$ theo chuẩn L^2.
   - bậc $\mathcal{O}(h^{3/2})$ theo chuẩn H^1.


Approximate
u decrete
u exact
Error
L2 Norm
H1 norm
3/2x
2x