Seminar Giải Tích

(Giải tích và Hình học)

PHẠM TRƯƠNG HOÀNG NHÂN

SEMINAR GIẢI TÍCH

Năm học 2017-2018, Thành phố Hồ Chí Minh

Giả metric và độ đo nhân đôi

Định nghĩa

Một giả metric trên một tập X là một hàm $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ thỏa các tính chất

(1) Với mọi $x, y \in X$, $\rho(x, y) \geqslant 0$, và $\rho(x, y) = 0$ nếu và chỉ nếu $x = y$.

(2) Với mọi $x, y \in X$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

(3) Có một hằng số $A_1 \geqslant 1$ để với mọi $x, y, z \in X$ chúng ta có

$$\rho(x, y) \leqslant A_1 [\rho(x, z) + \rho(z, y)] .$$

Trong đó, A_1 được gọi là hằng số bất đẳng thức tam giác cho giả metric ρ. Nếu nó có thể nhận $A_1 = 1$, thì ρ được gọi là một metric.

Giả metric và độ đo nhân đôi

Định nghĩa

Cho ρ_1 và ρ_2 là giả metric trên một tập X.

(1) ρ_1 được gọi là tương đương toàn cục với ρ_2 nếu có một hằng số $C > 0$ để với mọi $x, y \in X$ chúng ta có

$$C^{-1}\rho_2(x,y) \leqslant \rho_1(x,y) \leqslant C\rho_2(x,y).$$

(2) ρ_1 được gọi là tương đương địa phương với ρ_2 nếu có hằng số $C > 0$, $\delta_0 > 0$ để với mọi $x, y \in X$ với $\rho_1(x,y) < \delta_0$ chúng ta có

$$C^{-1}\rho_2(x,y) \leqslant \rho_1(x,y) \leqslant C\rho_2(x,y).$$

Giả metric và độ đo nhân đôi

Mệnh đề

Giả sử ρ là một giả metric trên một không gian X với hằng số bất đẳng thức tam giác A_1.

(i) Nếu $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ là những điểm trong X, thì

$$\rho(x_0, x_m) \leq A_1^m \sum_{j=1}^{m} \rho(x_{j-1}, x_j).$$

(ii) Lấy $x_1, x_2 \in X$ và $\delta_1 \geqslant \delta_2$. Thì

$$B_\rho(x_1; \delta_1) \cap B_\rho(x_2; \delta_2) \neq \emptyset \Rightarrow B_\rho(x_2; \delta_2) \subset B_\rho\left(x_1; 3A_1^2\delta_1\right).$$

Giả metric và độ đo nhân đôi

Mệnh đề

(iii) Giả sử $y \in B_\rho(y_0, \delta_0)$ và $x \notin B_\rho(y_0; \eta\delta_0)$. Thì nếu $\eta > A_1 \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2A_1}\rho(x,y) \le \rho(x,y_0) \le \left(\frac{\eta A_1}{\eta - A_1}\right)\rho(x,y).$$

Giả metric và độ đo nhân đôi

Định nghĩa

Cho X là một không gian Topo compact địa phương được trang bị với một giả metric ρ và một độ đo Borel chính quy dương μ. Thì (X, ρ, μ) là một không gian loại thuần nhất nếu các điều sau thỏa mãn

(1) Với mỗi $x \in X$, tập hợp những quả cầu $\{B_\rho(x;\delta) : \delta > 0\}$ là mở và do đó chúng là μ đo được, và chúng tạo thành một cơ sở cho lân cận mở của x.

(2) $\forall x \in X$ và $\delta > 0$, $0 \leq \mu(B_\rho(x;\delta)) < \infty$.

(3) Có một hằng số $A_2 > 0$ để $\forall x \in X$ và $\delta > 0$

$$\mu(B_\rho(x;2\delta)) \leq A_2 \mu(B_\rho(x;\delta)).$$

Hằng số A_2 được gọi là hằng số nhân đôi cho độ đo μ.

Giả metric và độ đo nhân đôi

Mệnh đề

Nếu (X, ρ, μ) là một không gian loại thuần nhất với hằng số nhân đôi A_2, có một hằng số τ để với $\lambda \geq 2$

$$\mu\left(B_\rho\left(x; \lambda\delta\right)\right) \leq \lambda^\tau \mu\left(B_\rho\left(x; \delta\right)\right).$$

Bổ đề phủ

Bổ đề

Cho $0 < \eta < 1$, lấy $x_1, \ldots, x_m \in B_\rho(x_0; \delta)$ và giả sử rằng $\rho(x_j, x_k) \geq \eta\delta \; \forall 1 \leq j \neq k \leq m$. Khi đó m bị chặn bởi một hằng số mà chỉ phụ thuộc vào A_1, A_2 và η.

Bổ đề phủ

Bổ đề

Cho $E \subset X$ là một tập và lấy $\mathcal{A}$ là một tập chỉ số. Giả sử với mỗi $\alpha \in \mathcal{A}$, tồn tại $x_\alpha \in X$ và $\delta_\alpha > 0$ để $E \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\rho(x_\alpha; \delta_\alpha)$. Cũng giả sử rằng một trong những điều kiện sau đây thỏa mãn

(a) Tập E bị chặn, với mỗi $\alpha \in \mathcal{A}$, điểm $x_\alpha \in E$.

(b) Không có hạn chế trên tập E hay điểm x_α, nhưng $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \delta_\alpha = M < \infty$.

Bổ đề phủ

Bổ đề

Khi đó tồn tại một họ con hữu hạn hay đếm được của những quả cầu,

$$\{B_1 = B_\rho(x_1; \delta_1), \ldots, B_k = B_\rho(x_k; \delta_k)\},$$

để

(1) Những quả cầu thì rời nhau: $B_j \cap B_k = \emptyset$ nếu $i \neq k$;

(2) Nếu $B_j^* = B_\rho(x_j; 3A_1^2\delta_j)$, thì $E \subset \bigcup_j B_j^*$;

(3) $\mu(E) \leq C \sum_j \mu(B_j)$.

Hằng số C chỉ phụ thuộc vào A_1 và A_2.

Bổ đề phủ

Định nghĩa

Xét $U \subset \mathbb{R}^n$ là một tập mở thực sự. Cho bất kỳ $x \in U$

$$d(x) = d_U(x) = \inf_{y \notin U} \rho(x, y) = \sup \{\delta > 0 | B_\rho(x; \delta) \subset U\},$$

Bổ đề phủ

Bổ đề Whitney

Cho $U \subsetneq X$ là một tập mở. Khi đó có một họ những quả cầu $\{B_j = B_\rho(x_j; \delta_j)\}$ với $\delta_j = \frac{1}{2} d(x_j)$ để nếu $B_j^* = B_\rho(x_j; 4\delta_j)$ và $B_j^\# = B_\rho\left(x_j; (12A_1^4)^{-1}\delta_j\right)$, thì

(1) Với mỗi j, $B_j \subset U$, và $B_j^* \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$.

(2) Những quả cầu $\left\{B_j^\#\right\}$ rời nhau.

(3) $B = \bigcup_j B_j$.

(4) $\sum_j \mu(B_j) \leq C\mu(U)$.

(5) Mỗi điểm của U thuộc hầu hết $M < \infty$ của những quả cầu $\{B_j\}$, với M chỉ phụ thuộc hằng số A_1 và A_2.

Toán tử tối đại Hardy-Littlewood

Định nghĩa

Lấy (X, ρ, μ) là một không gian loại thuần nhất. Lấy f là khả tích trên X. Với $x \in X$ đặt

$$\mathcal{M}[f](x) = \sup_{\delta>0} \sup_{B_\rho(y;\delta)} \frac{1}{\mu(B_\rho(y;\delta))} \int_{B_\rho(y;\delta)} |f(t)| \, d\mu(t),$$

sao cho $x \in B_\rho(y;\delta)$.

Toán tử tối đại Hardy-Littlewood

Định lý Hardy and Littlewood

Có một hằng số C chỉ phụ thuộc vào A_1 và A_2 để với $1 \leq p < \infty$, theo những phát biểu cụ thể như sau

(1) Nếu $f \in L^1(X, d\mu)$, thì

$$\mu\left(\{x \in X | \mathcal{M}[f](x) > \lambda\}\right) \leq C\lambda^{-1} \|f\|_{L^1}.$$

(2) Nếu $1 < p < \infty$ và nếu $f \in L^p(X, d\mu)$, khi đó

$$\|\mathcal{M}[f]\|_{L^p} \leq 2Cp(p-1)^{-1} \|f\|_{L^p}.$$

Phân rã Caldéron-Zygmund

Định lý Caldéron-Zygmund

Xét $f \in L^1(X, d\mu)$, và lấy $\alpha > 0$ thỏa mãn $\alpha\mu(X) > C\|f\|_{L^1}$ với C là hằng số từ **Định lý** (14) Hardy-Littlewood Tối đại. Khi đó tồn tại một dãy những quả cầu $\{B_j = B_\rho(x_j; \delta_j)\}$ và một phân rã

$$f = g + \sum_j b_j,$$

với những tính chất sau

(1) Hàm g và $\{b_j\}$ đều thuộc vào $L^1(X)$.

(2) $|f(x)| \leq A_2^2\alpha$ với hầu hết tất cả $x \in X$.

Phân rã Caldéron-Zygmund

Định lý Caldéron-Zygmund

(3) Hàm b_j có giá trong B_j. Hơn nữa

$$\int_X |b_j(x)|\, d\mu(x) \leq 2A_2^2 \alpha \mu(B_j),$$

và

$$\int_X b_j(x)\, d\mu(x) = 0.$$

(4)

$$\sum_j \mu(B_j) \leq C\alpha^{-1} \|f\|_{L^1},$$

với C chỉ phụ thuộc vào A_1 và A_2.

Những tính chất đối xứng của toán tử Laplace

Mệnh đề

(a) Toán tử Δ thì bất biến dưới phép tịnh tiến. Do đó với $y \in \mathbb{R}^n$ và $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ chúng ta định nghĩa $T_y[\varphi](x) = \varphi(x-y)$. Khi đó

$$\Delta[T_y[\varphi]] = T_y[\Delta[\varphi]].$$

(b) Toán tử Δ thì bất biến dưới phép quay. Lấy $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là một phép biến đổi trực giao tuyến tính, và đặt $R_O[\varphi](x) = \varphi(Ox)$. Khi đó

$$\Delta[R_O[\varphi]] = R_O[\Delta[\varphi]].$$

Những tính chất đối xứng của toán tử Laplace

Mệnh đề

(c) Định nghĩa phép vị tự Euclide bằng cách đặt $D_\lambda[\varphi](x) = \varphi\left(\lambda^{-1}x\right)$. Khi đó

$$\Delta[D_\lambda[\varphi]] = \lambda^{-2} D_\lambda[\Delta[\varphi]].$$

Thế vị Newton

Định nghĩa

Thế vị Newton N là hàm được cho bởi

$$N(x) = \begin{cases} \omega_2^{-1} \log(|x|), n = 2, \\ \omega_n^{-1}(2-n)^{-1}|x|^{2-n}, n > 2. \end{cases}$$

Ở đây

$$\omega_n = 2\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^{-1}$$

là độ đo mặt của mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$.

Thế vị Newton

Bổ đề

Tích chập với N là nghiệm cơ bản của Δ. Một cách chính xác, nếu $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, định nghĩa

$$\mathcal{N}[\varphi](x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y)\varphi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} N(y)\varphi(x-y)\,dy.$$

Khi đó $\mathcal{N}[\varphi] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, và

$$\varphi(x) = \mathcal{N}[\Delta[\varphi]](x),$$
$$\varphi(x) = \Delta[\mathcal{N}[\varphi]](x).$$

Vai trò của hình học Euclide

Bổ đề

Giả sử $n \geq 3$. Khi đó với mọi đa chỉ số α và β với $|\alpha| + |\beta| \geq 0$ có một hằng số $C_{\alpha,\beta} > 0$ để với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta N(x,y)\right| \leq C_{\alpha,\beta} \frac{d_E(x,y)^{2-|\alpha|-|\beta|}}{|\mathbb{B}_E(x, d_E(x,y))|} = C'_{\alpha,\beta} |x-y|^{-n+2-|\alpha|-|\beta|}.$$

Bất đẳng thức vẫn giữ nguyên khi $n = 2$ miễn là $|\alpha| - |\beta| > 0$.

Ước lượng Hardy-Littlewood-Sobolev

Định nghĩa một toán tử $\mathcal{K}$ bằng việc đặt

$$\mathcal{K}[f](x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y)\, dy,$$

khi tích phân hội tụ.

Định lý Hardy-Littlewood-Sobolev

Lấy $1 \leq p < \frac{n}{m}$. Nếu $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ thì tích phân $\mathcal{K}$ xác định như trên hội tụ với hầu hết mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Hơn nữa, nếu $p > 1$ và nếu

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0,$$

có một hằng số $C_{p,m}$ để với mỗi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ chúng ta có

$$\|\mathcal{K}[f]\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,m} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Ước lượng Lipschitz

Định lý

Xét $0 < \alpha < 1$, và xét $f \in \Lambda_\alpha$ có giá compact. Khi đó $\mathcal{N}[f]$ thì khả vi liên tục hai lần, và có một hằng số C không phụ thuộc vào f và giá của nó để

$$\sum_{j,k=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 [\mathcal{N}[f]]}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{\Lambda_\alpha} \leq C \|f\|_{\Lambda_\alpha}.$$

Ước lượng L^2

Bổ đề

Xét $\{K_j\}$ là những hàm thỏa những điều kiện từ điều kiện **(1)** đến điều kiện **(4)**, và với mỗi $j \in \mathbb{Z}$ đinh nghĩa một toán tử T_j bằng cách đặt

$$T_j[f](x) = K_j * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x-y) f(y)\, dy.$$

Có một hằng số C để với bất kỳ số nguyên N nào chúng ta có

$$\left\| \sum_{j=-N}^{N} T_j[f] \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ước lượng L^1

Định lý

Có một hằng số A không phụ thuộc vào N để nếu $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \left|\mathcal{K}^{[N]}[f](x) > \alpha\right|\right\}\right| \leq \frac{A}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Giới thiệu toán tử nhiệt

Giới thiệu toán tử nhiệt

Chúng ta giới thiệu những tọa độ $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n)$ trên $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$. Khi đó toán tử nhiệt là

$$(\partial_t - \Delta_x)[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Giới thiệu khoảng cách nhiệt

Giới thiệu khoảng cách nhiệt

Chúng cũng có thể giới thiệu một giả metric d_H trên $\mathbb{R}^{n+1}$ thì tương thích với họ những phép vị tự này. (Ở đây ký hiệu d_H thay cho một khoảng cách "nhiệt"). Đặt

$$d_H\left(\left(t,x\right),\left(s,y\right)\right)=\left[\left(t-s\right)^2+\left|x-y\right|^4\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Giới thiệu quả cầu nhiệt

Giới thiệu quả cầu nhiệt

Chúng ta hãy đặt

$$\mathbb{B}_H\left((x,t),\delta\right) = \left\{(s,y) \in \mathbb{R}^{n+1} | d_H\left((t,x),(s,y)\right) < \delta\right\}.$$

Khi đó thể tích của một quả cầu bán kính δ như thế là một hằng số thời gian δ^{n+2}.

Bài toán giá trị ban đầu và một nghiệm cơ bản

Chúng ta bắt đầu bằng việc xét bài toán giá trị ban đầu với toán tử nhiệt. Cho $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, chúng ta muốn tìm một hàm $F \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ sao cho

(1) $\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}(t,x) = 0$ với $t > 0$ và $x \in \mathbb{R}^n$.

(2) Nếu chúng ta đặt $F_t(x) = F(t,x)$, thì $\lim_{t \to 0} F_t = f$ hội tụ trong $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Bài toán giá trị ban đầu và một nghiệm cơ bản

Để thúc đẩy nghiệm, chúng ta thảo luận một cách thân mật như sau. Giả sử F là một nghiệm. Xét

$$\mathcal{F}_x[F](t,\xi) = \widehat{F}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\xi\cdot x} F(t,x)\,dx,$$

là biến đổi Fourier từng phần của F theo biến x. Khi đó nếu lấy tích phân từng phần và không có loại tích phân trên biên, phương trình đạo hàm riêng **(1)** sẽ trở thành phương trình vi phân thông thường

$$\frac{d\widehat{F}}{dt}(t,\xi) = -4\pi^2|\xi|^2\widehat{F}(t,\xi).$$

Điều này khiến ta nghĩ rằng $\widehat{F}(t,\xi) = C(\xi)\exp\left(-4\pi^2|\xi|^2 t\right)$, và nếu F thỏa mãn điều kiện đầu được cho trong **(2)**, thì chúng ta sẽ lấy $C(\xi) = \widehat{f}(\xi)$, hay

$$\widehat{F}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi)\,e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}.$$

Bài toán giá trị ban đầu và một nghiệm cơ bản

Lấy biến đổi Fourier ngược, chúng ta sẽ có được

$$F(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} H_t(x-y) f(y)\, dy,$$

với

$$H_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} e^{-4\pi|\xi|^2 t} d\xi = (4\pi t)^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

biến đổi Fourier ngược từng phần của $e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$. Công cụ không chính thức này được khẳng định bởi kết quả theo sau. Định nghĩa

$$H_0(t,x) = H_t(x) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & t > 0, \\ 0 & t \leq 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Bài toán giá trị ban đầu và một nghiệm cơ bản

Định lý

Xét $1 \leq p < \infty$, và xét $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Đặt

$$F(t,x) = H_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} f(y)\, dy.$$

Khi đó $F \in \mathcal{C}^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ và

(1) $\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}(t,x) = 0$ với $t > 0$ và $x \in \mathbb{R}^n$.

(2) $\lim_{t\to 0} \|H_t * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$.

(3) Nếu $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ thì $\lim_{t\to 0} \|H_t * \varphi - \varphi\|_{L^\infty(^n)} = 0$.

Bài toán giá trị ban đầu và một nghiệm cơ bản

Bổ đề

Phép nhân chập với H là một nghiệm cơ bản cho toán tử nhiệt trên $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Một cách chính xác, nếu $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$, định nghĩa

$$\mathcal{H}[\varphi](t,x) = \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} H(t-s, x-y)\,\varphi(s,y)\,dsdy.$$

Thì $\mathcal{H}[\varphi] \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ và

$$\begin{aligned}\varphi(t,x) &= \mathcal{H}\left[(\partial_t - \Delta_x)[\varphi]\right](t,x),\\ \varphi(t,x) &= (\partial_t - \Delta_x)\left[\mathcal{H}[\varphi]\right](t,x).\end{aligned}$$

Hội tụ Parabolic

Nếu chúng ta thay thế toán tử nhiệt bằng toán tử Laplace $-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$, chúng ta có thể đặt một bài toán giá trị ban đầu đồng dạng đã thảo luận trong mục trước. Bây giờ bài toán thực ra là tìm hàm điều hòa $u(t,x)$ trên $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ sao cho $\lim_{t\to 0} u(t,\cdot)$ là một hàm được mô tả bởi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Bài toán này được gọi là bài toán Dirichlet, và nếu nó bắt chước chứng minh của **Định lý** (32), điều đó có thể kiểm tra rằng nghiệm thì được cho bởi tích phân Poisson

$$u(t,x) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t}{|x-y|^2 + t^2} f(y)\, dy.$$

Hội tụ Parabolic

Ngoài hội tụ theo chuẩn, nó cũng là một kết quả cổ điển mà $u(t,y)$ hội tụ từng điểm về $f(x)$ với hầu hết các $x \in \mathbb{R}^n$ khi (y,t) nằm trong một miền gần không tiếp xúc với đỉnh tại x. Do đó với mỗi $\alpha > 0$ xét miền conic

$$C_\alpha(x) = \{(t,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n | \, |x-y| < \alpha t\}.$$

Kết quả là nếu $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, thì ngoại trừ x thuộc về một tập độ đo không, chúng ta có

$$\lim_{\substack{(t,y)\to(0,x) \\ (t,y)\in C_\alpha(x)}} u(t,y) = f(x).$$

Hội tụ Parabolic

Điều này được hiểu[1] rằng những kết quả này phụ thuộc vào việc ước lượng hàm tối đại tiếp tuyến không trong những loại của hàm tối đại Hardy-Littlewood

$$\sup_{(t,y)\in C_\alpha(x)} |u(t,y)| \leq A_\alpha \mathcal{M}[f](x).$$

Chúng ta có thể thấy rõ sự khác biệt giữa việc khảo sát không gian Euclide thông thường và không gian hình học dị hướng được liên kết toán tử nhiệt khi chúng ta học về hội tụ từng điểm khi $t \to 0$ của nghiệm $H_t * f$. Với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$ và mỗi $\alpha > 0$, xét một miền parabolic gần đúng

$$\Gamma_\alpha(x) = \left\{(t,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \middle| |y-x| < \alpha\sqrt{t}\right\}.$$

[1] Xem ví dụ, **[1]**, trang 197.

Hội tụ Parabolic

Phát biểu tương tự về hội tụ điểm của tích phân Poisson thì khi đó *Xét $1 \leq p \leq \infty$ và xét $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Khi đó có một tập $E \subset \mathbb{R}^n$ với độ đo Lebesgue bằng không để với mọi $x \notin E$ và tất cả $\alpha > 0$*

$$\lim_{\substack{(t,y) \to (0,x) \\ (t,y) \in \Gamma_\alpha(x)}} H_t * f(y) = f(x).$$

Kết quả này phụ thuộc vào ước lượng cho hàm parabolic tối đại sau đây.

Hội tụ Parabolic

Bổ đề

Với mỗi $\alpha > 0$ có một hằng số $C = C(n, \alpha) > 0$ chỉ phụ thuộc vào số chiều n và α để nếu $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và nếu $F(t, x) = H_t * f(x)$, thì

$$\sup_{(t,y)\in\Gamma_\alpha(x)} |F(t, y)| \le C(n, \alpha)\mathcal{M}[f](x).$$

Với

$$\Gamma_\alpha(x) = \left\{(t, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \middle| |y - x| < \alpha\sqrt{t}\right\},$$

và

$$H_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} e^{-4\pi|\xi|^2 t} d\xi = (4\pi t)^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Một nửa trên của không gian Siegal và biên của nó

Trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, mặt phẳng nửa trên $U = \{z = x + iy | y > 0\}$ là song chỉnh hình tương đương với đĩa mở đơn vị $\mathbb{D} = \{\omega \in \mathbb{C} | \, |\omega| < 1\}$ qua ánh xạ

$$z \to \omega = \frac{z - i}{z + i} \in \mathbb{D}, z \in U.$$

Trong $\mathbb{C}^{n+1}$, miền tương tự với U là không gian nửa trên Siegel

$$\mathcal{U}_{n+1} = \left\{ (z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} | \Im m \left[z_{n+1} \right] > \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right\},$$

nó là song ánh chỉnh hình với quả cầu đơn vị mở

$$\mathbb{B}_{n+1} = \left\{ (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} | \sum_{j=1}^{n+1} |\omega_j|^2 < 1 \right\},$$

Một nửa trên của không gian Siegal và biên của nó

qua ánh xạ $z \to \omega \in \mathcal{B}_{n+1}$ với $z \in \mathcal{U}_{n+1}$ được cho bởi

$$\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n) = \left(\frac{2z_1}{z_{n+1} + i}, \dots, \frac{2z_n}{z_{n+1} + i}, \frac{z_{n+1} - i}{z_{n+1} + i} \right).$$

Chúng ta có thể nhận ra biên của $\mathcal{U}_{n+1}$ với $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ qua ánh xạ được cho bởi

$$\left(z_1, \dots, z_n, t + i \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right) \leftrightarrow (z_1, \dots, z_n, , t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R},$$

trong đó

$$\left(z_1, \dots, z_n, t + i \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right) \in \partial \mathcal{U}_{n+1}.$$

Một nửa trên của không gian Siegal và biên của nó

Để tìm sự tương tự như nhiều biến, chúng ta tiếp tục như sau. Chúng ta viết những phần tử $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ khi $z = (z', z_{n+1})$ với $z' \in \mathbb{C}^n$ và $z_{n+1} \in \mathbb{C}$. Với mỗi $a = (a', a_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ xét ánh xạ affine

$$T_a(z) = T_{(a', a_{n+1})}(z', z_{n+1}) = \left(a' + z', a_{n+1} + z_{n+1} + 2i\left\langle z', a'\right\rangle\right),$$

với $\langle z', a'\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{a_j}$ là tích trong dạng Hermite trên $\mathbb{C}^n$. Chú ý rằng T_0 là ánh xạ đồng nhất, và họ những ánh xạ $\{T_z\}_{z \in \mathbb{C}^{n+1}}$ thì đóng dưới phép hợp thành và phép lấy ảnh ngược. Thật ra là

$$\begin{aligned} T_{(a', a_{n+1})} \circ T_{(b', b_{n+1})} &= T_{(a'+b', a_{n+1}+b_{n+1}+2i\langle b', a'\rangle)}, \\ \left(T_{(a', a_{n+1})}\right)^{-1} &= T_{(-a', -a_{n+1}-2i\langle a', a'\rangle)}. \end{aligned}$$

Một nửa trên của không gian Siegal và biên của nó

Theo sau đó nếu chúng ta đặt

$$\left(a', a_{n+1}\right) \cdot \left(b', b_{n+1}\right) = \left(a' + b', a_{n+1} + b_{n+1} + 2i\left\langle b', a'\right\rangle\right), \tag{4.1}$$

khi đó $\mathbb{C}^{n+1}$ trở thành một nhóm với tích này, và

$$T_{(a', a_{n+1})}\left(z', z_{n+1}\right) = \left(a', a_{n+1}\right) \cdot \left(z', z_{n+1}\right).$$

Tương tự của hàm độ cao $\Im m\left[z\right]$ trong một biến là hàm

$$\rho\left(z\right) = \rho\left(z', z_{n+1}\right) = \Im m\left[z_{n+1}\right] - \sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^2.$$

Một phép tính đơn giản chỉ ra rằng

$$\rho\left(\left(a', a_{n+1}\right) \cdot \left(b', b_{n+1}\right)\right) = \rho\left(z', z_{n+1}\right) + \rho\left(b', b_{n+1}\right). \tag{4.2}$$

Một nửa trên của không gian Siegal và biên của nó

$\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ với phép nhân này được gọi là nhóm Heisenberg n chiều. Điểm $(0, 0)$ là đơn vị, và $(-z, -t)$ là ảnh ngược của (z, t). Dễ dàng kiểm tra $(z, t) \cdot (w, s) = (w, s) \cdot (z, t)$ nếu và chỉ nếu $\Im m \left[\langle z, w \rangle\right] = 0$, vì thế nhóm thì không giao hoán. Đôi khi nó trở nên hữu ích để sử dụng những tọa độ thực trên $\mathbb{H}_n = \mathbb{C}_n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Do đó chúng ta viết $z_j = x_j + iy_j$, và viết $(z, t) = (x, y, t)$. Khi đó nhóm nhân Heisenberg được cho bởi

$$(x, y, t) \cdot (u, v, s) = (x + y, y + v, t + s + 2\left[\langle y, u \rangle - \langle x, v \rangle\right]),$$

với $\langle y, u \rangle$ và $\langle x, v \rangle$ thay cho tích trong Euclide thông thường trên $\mathbb{R}^n$.

Những phép tịnh tiến và vị tự trên $\mathbb{H}_n$

Định nghĩa $(2n+1)$ cụ thể với những toán tử đạo hàm riêng bậc nhất trên $\mathbb{H}_n$ như sau

$$\begin{cases} X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j \frac{\partial}{\partial t}, \\ Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2x_j \frac{\partial}{\partial t}. \end{cases}$$

Với $1 \leq j \leq n$, và

$$T = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} & L_{(u,v,s)} X_j [f] (x, y, t) = X_j [f] (x-u, y-v, t-s-2(\langle x, v\rangle - \langle y, u\rangle)) \\ & = \frac{\partial f}{\partial x_j} (x-u, y-v, t-s-2(\langle s, v\rangle - \langle y, u\rangle)) \\ & +2(y_j - v_j) \frac{\partial f}{\partial t} (x-u, y-v, t-s-2(\langle x, v\rangle - \langle y, u\rangle)). \end{aligned}$$

Những phép tịnh tiến và vị tự trên $\mathbb{H}_n$

Mặt khác,

$$L_{(u,v,s)}[f](x,y,t) = f(x-u, y-v, t-s-2(\langle x, v\rangle - \langle y, u\rangle)),$$

theo sau đó

Những phép tịnh tiến và vị tự trên $\mathbb{H}_n$

$$
\begin{aligned}
X_j L_{(u,v,s)}[f](x,y,t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x-u, y-v, t-s-2(\langle x,v\rangle - \langle y,u\rangle)) \\
&- 2v_j \frac{\partial f}{\partial t}(x-u, y-v, t-s-2(\langle x,v\rangle - \langle y,u\rangle)) \\
&+ 2y_j \frac{\partial f}{\partial t}(x-u, y-v, t-s-2(\langle x,v\rangle - \langle y,u\rangle)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x-u, y-v, t-s-2(\langle x,v\rangle - \langle y,u\rangle)) \\
&+ 2(y_j - v_j) \\
&\frac{\partial f}{\partial t}(x-u, y-v, t-s-2(\langle x,v\rangle - \langle y,u\rangle)) \\
&= L_{(u,v,s)} X_j [f](x,y,t).
\end{aligned}
$$

Những phép tịnh tiến và vị tự trên $\mathbb{H}_n$

Do đó X_j là một toán tử bất biến trái. Môt tính toán tương tự chỉ ra rằng Y_j và T cũng là bất biến trái[2].

[2] Nếu chúng ta định nghĩa phép tịnh tiến phải như sau

$$R_{(u,v,s)}[f](x,y,t) = f\left((x,y,t)\cdot(u,v,s)^{-1}\right)$$
$$= f\left(x-u, y-v, t-s+2\left(\langle x,v\rangle - \langle y,u\rangle\right)\right),$$

và bất biến tịnh tiến phải một cách cách tự nhiên, thì X_j và Y_j thì không là bất biến phải. Thay vào đó, những toán tử bất biến phải tương ứng là $\widetilde{X}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - 2y_j\frac{\partial}{\partial t}$, $\widetilde{Y}_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + 2x_j\frac{\partial}{\partial t}$, và $T = \frac{\partial}{\partial t}$.

Sub-Laplace và các tính chất hình học liên quan

Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$, những đạo hàm riêng bậc nhất $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ là những bất biến phép tịnh tiến (Euclide), và toán tử Laplace được thu bằng việc lấy tổng của những bình phương với mọi n của những toán tử này. Tương tự, bây giờ chúng ta xét một họ những toán tử bậc hai $\mathcal{L}_\alpha$ trên nhóm Heisenberg được cho bởi

Sub-Laplace và các tính chất hình học liên quan

$$
\begin{aligned}
L_\alpha &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j^2+Y_j^2\right)+i\alpha T \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+2y_j\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y_j}-2x_j\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right]+i\alpha\frac{\partial}{\partial t} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}+4y_j\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial t}-4x_j\frac{\partial^2}{\partial y_j\partial t}+4\left(x_j^2+y_j^2\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \\
&\quad + i\alpha\frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Khi $\alpha = 0$, thì $\mathcal{L}_0$ được gọi là Sub-Laplace.

Sub-Laplace và các tính chất hình học liên quan

Ngoại trừ $\alpha = \pm n, \pm(n+1), \ldots,$ toán tử $\mathbb{L}_\alpha$ có một nghiệm cơ bản K_α. Toán tử $\mathcal{L}_\alpha$ là một tổ hợp của những toán tử bất biến trái $\{X_j, Y_j, T\}$, và ta có thể hy vọng rằng toán tử $\mathcal{K}_\alpha$ là nghịch đảo của $\mathcal{L}_\alpha$ cũng có tính chất này. Nếu vậy, điều này có nghĩa là nếu

$$\mathcal{K}_\alpha[f](z,t) = \int_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}} K_\alpha((z,t),(w,s))\, f(w,s)\, dwds,$$

thì chúng ta có

Sub-Laplace và các tính chất hình học liên quan

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_\alpha[f](z,t) &= L_{(z,t)^{-1}}\mathcal{K}_\alpha[f](0,0) \\
&= \mathcal{K}_\alpha L_{(z,t)^{-1}}[f](0,0) \\
&= \int_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}} K_\alpha((0,0),(w,s))\, L_{(z,t)^{-1}}[f](ws)\, dwds \\
&= \int_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}} K_\alpha((0,0),(w,s))\, f((z,t),(w,s))\, dwds \\
&= \int_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}} K_\alpha\left((0,0),(z,t)^{-1}\cdot(w,s)\right) f(w,s)\, dwds \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} f(w,s)\, k_\alpha\left((w,s)^{-1}\cdot(z,t)\right) dwds \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} f(w,s)\, L_{(w,s)}[k_\alpha](z,t)\, dwds,
\end{aligned}
$$

Sub-Laplace và các tính chất hình học liên quan

với $k_\alpha(z,t) = K_\alpha\left((0,0),(z,t)^{-1}\right)$. Nhưng điều này thì chỉ đúng với phép nhân chập của f với hàm k_α trên nhóm Heisenberg $\mathbb{H}_n$.

Sub-Laplace và các tính chất hình học liên quan

Định lý Folland và Stein

Giả sử $\alpha \neq \pm n, \pm(n+1), \ldots$. Đặt

$$k_\alpha(z,t) = \frac{2^{n-2}}{\pi^{n+1}} \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) \left(|z|^2 - it\right)^{-\frac{n+\alpha}{2}} \left(|z|^2 + it\right)^{-\frac{n-\alpha}{2}}.$$

Khi đó $\mathcal{K}_\alpha[f] = f * k_\alpha$ là một nghiệm cơ bản cho $\mathcal{L}_\alpha$. Rõ ràng, nếu $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{H}_n)$, chúng ta có

$$\varphi(z,t) = \mathcal{K}_\alpha[\mathcal{L}_\alpha[\varphi]](z,t),$$
$$\varphi(z,t) = \mathcal{L}_\alpha[\mathcal{K}_\alpha[\varphi]](z,t).$$

Sub-Laplace và các tính chất hình học liên quan

Do vậy $K_0(x,y,t)$ có bậc thuần nhất là -2 tuân theo những phép vị tự $\{D_{\mathbb{H},\delta}\}$ và sự liên tục và không giản ước xa khỏi $(0,0,0)$, theo sau đó

$$K_0(x,y,t) \approx \|(x,y,t)\|_{\mathbb{H}}^{-2} \approx \|(x,y,t)\|_{\mathbb{H}}^{+2} \left|\mathbb{B}_{\mathbb{H}}\left(0; \|(x,y,t)\|_{\mathbb{H}}\right)\right|^{-1},$$

với ký hiệu $\approx$ nghĩa là tỉ số của hai vế bị chặn và bị chặn xa khác 0 bằng những hằng số không phụ thuộc vào (x,y,t). Do đó nếu chúng ta lấy khoảng cách từ điểm $(0,0,0)$ điểm điểm (x,y,t) thì

$$d_{\mathbb{H}}\left((x,y,t),(0,0,0)\right) = \|(x,y,t)\|_{\mathbb{H}} = \left(\left(x^2+y^2\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{4}},$$

chúng ta có

Sub-Laplace và các tính chất hình học liên quan

$$\begin{aligned} K\left((x,y,t),(0,0,0)\right) &= K_0\left(x,y,t\right) \\ &\approx d_{\mathbb{H}}((x,y,t),(0,0,0))^2 \\ &\quad \left|\mathbb{B}_{\mathbb{H}}\left(0; d_{\mathbb{H}}\left((x,y,t),(0,0,0)\right)\right)\right|^{-1}. \end{aligned}$$

Hơn nữa, $K\left((x,y,t),(u,v,s)\right) = K_0\left((u,v,s)^{-1}\cdot(x,y,t)\right)$. Điều này đề nghị chúng ta nên đặt

$$d_{\mathbb{H}}\left((x,y,t),(u,v,s)\right) = d_{\mathbb{H}}\left((u,v,s)^{-1}\cdot(x,y,t),(0,0,0)\right)$$

$$= \left(\left((x-u)^2+(y-v)^2\right)^2+\left(t-s-2\left(xv-yu\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{4}},$$

và những quả cầu tương ứng

$$\mathbb{B}_{\mathbb{H}}\left((x,y,t);\delta\right) = \left\{(u,v,s)\in\mathbb{R}^3 \middle| d_{\mathbb{H}}\left((x,y,t),(u,v,s)\right)<\delta\right\}.$$

Sub-Laplace và các tính chất hình học liên quan

Có thể chỉ ra rằng hàm $d_{\mathbb{H}}$ có những tính chất sau đây

(1) $d_{\mathbb{H}}\left(\left(x,y,t\right),\left(u,v,s\right)\right) \geq 0$ và $d_{\mathbb{H}}\left(\left(x,y,t\right),\left(u,v,s\right)\right) = 0$ nếu và chỉ nếu $\left(x,y,t\right) = \left(u,v,s\right)$.

(2) $d_{\mathbb{H}}\left(\left(x,y,t\right),\left(u,v,s\right)\right) = d_{\mathbb{H}}\left(\left(u,v,s\right),\left(x,y,t\right)\right)$.

(3) Có một hằng số $C \geq 1$ để nếu $\left(x_j,y_j,t_j\right) \in \mathbb{R}^3$ với $1 \leq j \leq 3$ thì

$$\begin{aligned} & d_{\mathbb{H}}\left(\left(x_1,y_1,t_1\right),\left(x_3,y_3,t_3\right)\right) \\ & \leq C\left[d_{\mathbb{H}}\left(\left(x_1,y_1,t_1\right),\left(x_2,y_2,t_2\right)\right) + d_{\mathbb{H}}\left(\left(x_2,y_2,t_2\right),\left(x_3,y_3,t_3\right)\right)\right]. \end{aligned}$$

Chú ý rằng quả cầu $\mathbb{B}_{\mathbb{H}}\left(0;\delta\right)$ thì so sánh được với tập hợp

Sub-Laplace và các tính chất hình học liên quan

$$\left\{(u,v,s)\,|\,|u|<\delta,|v|<\delta,|s|<\delta^2\right\},$$

và do đó có cùng dị hướng tự nhiên như quả cầu $\mathbb{B}_{\mathbb{H}}(0;\delta)$ chúng ta đã dùng cho phương trình nhiệt. Tuy nhiên, quả cầu $\mathbb{B}_{\mathbb{H}((x,y,t);\delta)}$ là phép tịnh tiến Heisenberg của quả cầu tại gốc, không phải phép tịnh tiến Euclide, để điểm (x,y,t). Do đó ngoài dị hướng, quả cầu $\mathbb{B}_{\mathbb{H}}((x,y,t);\delta)$ cũng có một sự thay đổi. Quả cầu thì so sánh được với tập hợp

$$\left\{(u,v,s)\,|\,|u-x|<\delta,|v-y|<\delta,|s-t+2(xv-yu)|<\delta^2\right\},$$

và đo đó có kích cỡ δ theo hướng u và v, và kích cỡ δ^2 dọc theo mặt phẳng $s=t-2(vx-uy)$.

Sub-Laplace và các tính chất hình học liên quan

Chúng ta cũng có những ước lượng cho nghiệm cơ bản K theo dạng hình học. Chúng ta hãy viết $p = (x, y, t)$ và $q = (u, v, s)$. Khi đó

$$K(p, q) \approx d_{\mathbb{H}}(p, q)^2 \left|\mathbb{B}_{\mathbb{H}}(p; d_{\mathbb{H}}(p, q))\right|^{-1}, \tag{4.3}$$

Sub-Laplace và các tính chất hình học liên quan

Xét $P^{\alpha}(X, Y)$ là một đa thức không giao hoán bậc α trong những toán tử X và Y, chúng ta cho phép nó ảnh hưởng đến những biến $p = (x, y, t)$ hay $q = (u, v, s)$. Khi đó có một hằng số C_{α} để

$$|P^{\alpha}(X, Y) K(p, q)| \leq C_{\alpha} d_{\mathbb{H}}(p, q)^{2-\alpha} |\mathbb{B}_{\mathbb{H}}(p; d_{\mathbb{H}}(p, q))|^{-1}. \quad (4.4)$$

Chúng ta không có chỉ rõ ra lợi ích của phép lấy vi phân liên quan đến T. Tuy nhiên một điểm mấu chốt là T có thể được viết dưới dạng của X và Y. Chúng ta có

$$XY - YX = -4T, \quad (4.5)$$

Sub-Laplace và các tính chất hình học liên quan

và vì thế sự tác động của T thì khác với những đơn thức bậc hai X và T. Do đó chúng ta có thể xây dựng công thức một phát biểu tổng quát về sự khả vi từ (4.4) và (4.5). Xét $P^{\alpha,\beta}(X,Y,T)$ là một đa thức không giao hoán với bậc α theo X và Y, và bậc β theo T. Những toán tử này có thể tác động đến những biến hoặc $p=(x,y,t)$ hoặc $q=(u,v,s)$. Khi đó có một hằng số $C_{\alpha,\beta}$ để

$$\left|P^{\alpha,\beta}(X,Y)K(p,q)\right| \leq C_{\alpha,\beta}d_{\mathbb{H}}(p,q)^{2-\alpha-2\beta}\left|\mathbb{B}_{\mathbb{H}}\left(p;d_{\mathbb{H}}(p,q)\right)\right|^{-1}. \tag{4.6}$$

Do đó $d_{\mathbb{H}}$ rất giống một metric, nhưng thỏa mãn được dạng yếu của bất đẳng thức tam giác được cho trong **(3)**. Điều này đủ cho nhiều mục đích, và cuối cùng chúng ta sẽ thấy rằng có một metric thật sự sao cho metric những quả cầu thì tường đương với những quả cầu được định nghĩa bởi $d_{\mathbb{H}}$.

Không gian $H^2(\mathbb{H}_n)$ và toán tử chiếu Szegö

Bây giờ chúng ta định nghĩa tương tự với không gian Bergman-Szegö cổ điển $H^2(\mathbb{D})$ trong đĩa đơn vị. Xét những toán tử đạo hàm riêng phức n bậc nhất trên $\mathbb{H}^n$ được cho bởi

$$\overline{Z}_j = \frac{1}{2}[X_j + iY_j] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right] - i(x_j + iy_j)\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - iz_j\frac{\partial}{\partial t},$$

với $1 \leq j \leq n$, bây giờ ở đây chúng ta viết $z_j = x_j + iy_j$, $\bar{z}_j = x_j - iy_j$, và

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right],$$
$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right].$$

Không gian $H^2(\mathbb{H}_n)$ và toán tử chiếu Szegö

Nếu $f \in L^2(\mathbb{H}_n)$, chúng ta nói $\overline{Z}_j[f] = 0$ nếu những phương trình này giữ trong phương phân bố; nghĩa là với mọi $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{H}_n)$ chúng ta có

$$\int_{\mathbb{H}_n} f(z,t)\overline{Z_j[f](z,t)}dzdt = 0.$$

Chúng ta gọi

$$H^2(\mathbb{H}_n) = \left\{f \in L^2(\mathbb{H}_n) \,|\, \overline{Z}_j[f] = 0, 1 \le j \le n\right\} \tag{4.7}$$

là không gian Bergman-Szegö. Theo định nghĩa này $H^2(\mathbb{H}_n)$ là một không gian con đóng của $L^2(\mathbb{H}_n)$. Tương tự có thể kiểm tra rằng nếu chúng ta đặt

$$f_\alpha(z,t) = \left(1 + |z|^2 + it\right)^{-\alpha} = \left(1 + \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 + it\right)^{-\alpha},$$

Không gian $H^2(\mathbb{H}_n)$ và toán tử chiếu Szegö

thì $f_\alpha \in H^2(\mathbb{H}_n)$ với mọi $\alpha > n+1$. Do đó không gian $H^2(\mathbb{H}_n)$ thì khác không, và thực ra là vô hạn chiều. Toán tử chiếu Szegö $\mathcal{S} : L^2(\mathbb{H}_n) \to H^2(\mathbb{H}_n)$ là toán tử chiếu trực giao của $L^2(\mathbb{H}_n)$ lên $H^2(\mathbb{H}_n)$. Mục tiêu của chúng ta trong chương này là để mô tả $\mathcal{S}$ như một toán tử tích phân kỳ dị.

Không gian $H^2(\mathbb{H}_n)$ và toán tử chiếu Szegö

Với $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$, định nghĩa biến đổi Fourier riêng phần $\mathcal{F}$ theo biến t bằng cách đặt

$$\mathcal{F}[\varphi](z,\tau) = \widehat{\varphi}(z,\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i t\tau}\varphi(z,t)\,dt.$$

Khi đó hàm ngược là

$$\varphi(z,\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{\varphi}](z,\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{+2\pi i t\tau}\varphi(z,t)\,d\tau.$$

Những ánh xạ biến đổi Fourier từng phần là từ không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$ lên chính nó, và đơn ánh. Theo công thức Plancherel nó mở rộng lên một một phép đẳng cự của $L^2(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$. Sử dụng biến đổi Fourier từng phần, chúng ta chỉ ra rằng không gian $H^2(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$ có thể được đồng nhất với những không gian có trọng của những hàm chỉnh hình.

Không gian $H^2(\mathbb{H}_n)$ và toán tử chiếu Szegö

Chúng ta hãy đặt $\lambda(z,\tau) = e^{2\tau|z|^2} dz d\tau$, và định nghĩa toán tử

$$M[\psi](z,\tau) = e^{-\tau|z|^2}\psi(z,\tau).$$

Khi đó $M\mathcal{F} : L^2(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}; d\lambda)$ là một phép đẳng cự. Chúng ta đặt

$$B^2 = M\mathcal{F}\left[H^2(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n)\right].$$

Không gian $H^2(\mathbb{H}_n)$ và toán tử chiếu Szegö

Mệnh đề

Một hàm g đo được trên $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ thuộc vào B^2 nếu và chỉ nếu

(1) $\int_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}} |g(z,\tau)|^2 e^{2\tau|z|^2} dz d\tau = \|g\|^2 < +\infty$.

(2) Với hầu hết mọi $\tau \in \mathbb{R}$, hàm $z \to g(z,\tau)$ là một hàm nguyên chỉnh hình trên $\mathbb{C}^n$.

Không gian có trọng của những hàm nguyên

Với mỗi $\tau \in \mathbb{R}$, Xét $L^2_\tau(\mathbb{C}^n) = L^2_\tau$ ký hiệu không gian (những lớp tương đương) của những hàm đo được $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sao cho

$$\|g\|_\tau^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |g(z)|\, e^{-2\tau|z|^2} dm(z) < +\infty.$$

Xét L^2_τ là một không gian Hilbert, và chúng ta xét không gian con

$$B^2_\tau(\mathbb{C}^n) = B^2_\tau = \{g \in L^2_\tau(\mathbb{C}^n) \,|\, g \text{ là hàm chỉnh hình}\}.$$

Không gian có trọng của những hàm nguyên

Sử dụng ý nghĩa tính chất giá trị của những hàm chỉnh hình, theo đó với bất kỳ $z \in \mathbb{C}^n$ và bất kỳ $g \in B_\tau^2$ chúng ta có

$$|g(z)| \leq \frac{2n}{\omega_n} \int_{|z-w|<1} |g(w)|\, dm(w) \leq \frac{2n}{\omega_{2n}} \left[\int_{|z-w|<1} e^{2\tau|w|^2} dm(w) \right]^{\frac{1}{2}} \|g$$

Theo đó B_τ^2 là một không gian con đóng của L_τ^2.

Không gian có trọng của những hàm nguyên

Mệnh đề

Nếu $\tau \leq 0$, không gian $B_\tau^2 = (0)$. Nếu $\tau > 0$,

(1) Mỗi đơn thức $z^\alpha \in B_\tau^2$, $\|z^\alpha\|_\tau^2 = \pi^n \alpha!(2\tau)^{-|\alpha|-n}$, và $\langle z^\alpha, z^\beta \rangle_\tau = 0$ nếu $\alpha \neq \beta$. Nếu

$$c_\alpha^2 = \left(\pi^n \alpha!(2\tau)^{-|\alpha|-n}\right)^{-1},$$
$$\varphi_\alpha(z) = c_\alpha z^\alpha,$$

thì $\{\varphi_\alpha\}$ là một dãy trực chuẩn trong B_α^2.

Không gian có trọng của những hàm nguyên

Mệnh đề

(2) Nếu $g \in B_\tau^2$, thì với mỗi $z \in \mathbb{C}^n$

$$g(z) = \sum_\alpha \langle g, \varphi_\alpha \rangle \varphi_\alpha(z),$$

với chuỗi hội tụ đều về những tập con compact của $\mathbb{C}^n$ và chuỗi $\sum_\alpha \langle g, \varphi_\alpha \rangle \varphi_\alpha$ hội tụ về g trong không gian Hilbert B_α^2.

Không gian có trọng của những hàm nguyên

Bổ đề

Xét $P_\tau : L^2_\tau \to B^2_\tau$ là toán tử chiếu trực giao. Với $h \in L^2_\tau$,

$$P_\tau [h](z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \tau^n \int_{\mathbb{C}^n} h(w)\, e^{2\tau\langle z,w\rangle - 2\tau|w|^2} dm(w).$$

Tài liệu tham khảo

beamericonarticle **Elias M. Stein**.*Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton Mathematical Series; 30. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.