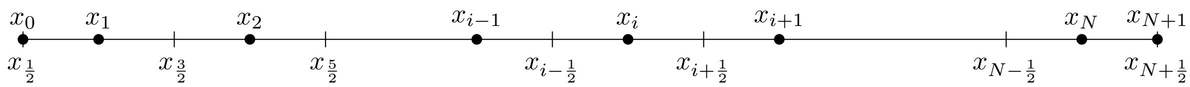
Họ và tên : Nguyễn Từ Huy.
MSSV: 1711127.
Finite Volume Method.
Assignment 3.

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ lồi và $f \in L^2(\Omega)$, ta xét phương trình:

$$\begin{cases} -\partial_t u(x,t) + \alpha.\partial_x u(x,t) = f(x,t) & \forall x \in \Omega,\ t > 0 & (1) \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \Omega & (2) \\ u(x,t) = g(x,t) & \forall x \in \partial\Omega,\ t > 0 & (3) \end{cases}$$



Ta chia miền Ω thành (N+1) điểm $\{x_{i+\frac{1}{2}}\}_{i=\overline{0,N}}$ sao cho: $0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \cdots < x_{N+\frac{1}{2}} = 1$.
Ta đặt $T_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right]$, $|T_i| = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, \quad \forall i = \overline{1,N}$.
$x_0 = 0,\ x_{N+1} = 1,\ x_i \in T_i,\ \forall i = \overline{1,N}$.
Đặt: $h_i^- = x_i - x_{i-1/2}$, $h_i^+ = x_{i+1/2} - x_i$
Và $h = \max_{i=\overline{1,N}} \{|T_i|\}$.
Ta gọi $(T_i)_{i=\overline{1,N}}$: là "control volume" và $(x_i)_{i=\overline{0,N+1}}$: là "control point".
Ta chia khoảng [0,T] thành N_k khoảng và xác định các điểm note $t_n = k.n$.
Khi đó u_i^n là những điểm rời rạc. Giá trị u_i^n là giá trị xấp xỉ của $u(x_i, t_n)$. Với u là nghiệm chính xác của bài toán.

Câu 1:
Nếu u $\in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$, tồn tại hằng số C $>$ 0 chỉ phụ thuộc vào u sao cho:

$$|\tau_i^n| = |K_i^n + R_{i-1/2}^n - R_{i+1/2}^n| \leq C(h^2 + kh) \qquad ,\forall i = \overline{2, N-1}$$

trong đó:

$$K_i^n = \int_{T_i} u_t(x, t_n) \mathrm{d}x - \frac{|T_i|(u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n))}{k}$$
$$R_{i-1/2}^n = u_x(x_{i-1/2}, t_n) \mathrm{d}x - \frac{u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{|D_{i-1/2}|}$$
$$R_{i+1/2}^n = u_x(x_{i+1/2}, t_n) \mathrm{d}x - \frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_i, t_n)}{|D_{i+1/2}|}$$

Trả lời 1:

- $\exists C_1 > 0 : |K_i^n| \leq C_1.(h^2 + kh)$
  Sử dụng khai triển Talor, tồn tại $(x_i, \eta_n) \in ((x_i, t_n), (x_i, t_{n+1}))$ sao cho:

$$u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n) + k.u_t(x_i, t_n) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(x_i, \eta_n)$$

$$\Rightarrow u_t(x_i, t_n) - \frac{(u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n))}{k} = -\frac{k}{2} u_{tt}(x_i, \eta_n)$$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
K_i^n &= \int_{T_i} u_t(x,t_n)\mathrm{d}x - \frac{|T_i|(u(x_i,t_{n+1}) - u(x_i,t_n))}{k} \\
&= \int_{T_i} u_t(x,t_n)\mathrm{d}x - \int_{T_i} \frac{(u(x_i,t_{n+1}) - u(x_i,t_n))}{k}\mathrm{d}x \\
&= \int_{T_i} u_t(x,t_n) - \frac{(u(x_i,t_{n+1}) - u(x_i,t_n))}{k}\mathrm{d}x \\
&= \int_{T_i} u_t(x,t_n) - u_t(x_i,t_n) + C.k \quad \mathrm{d}x \\
&= \int_{T_i} C.(h+k) \quad \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Khi đó, tồn tại hằng số C_1 sao cho

$$|K_i^n| \le |T_i|C_1.(h+k) \le C_1.(h^2 + kh)$$

- $\exists C_2 > 0 : |R_{i-1/2}^n| \le C_2 h^2$
  Sử dụng khai triển Talor, ta có:

$$
\begin{cases}
u(x_{i-1},t_n) &= u(x_{i-1/2},t_n) + (x_{i-1} - x_{i-1/2})u_x(x_{i-1/2},t_n) + \dfrac{(x_{i-1} - x_{i-1/2})^2}{2}u_{xx}(x_{i-1/2},t_n) + \mathcal{O}(h^3) \\
u(x_i,t_n) &= u(x_{i-1/2},t_n) + (x_i - x_{i-1/2})u_x(x_{i-1/2},t_n) + \dfrac{(x_i - x_{i-1/2})^2}{2}u_{xx}(x_{i-1/2},t_n) + \mathcal{O}(h^3)
\end{cases}
$$

Suy ra:

$$
\begin{aligned}
u(x_i,t_n) - u(x_{i-1},t_n) = (x_i - x_{i-1})u_x(x_{i-1/2},t_n) &+ \left[\frac{(x_i - x_{i-1/2})^2 - (x_{i-1} - x_{i-1/2})^2}{2}\right]u_{xx}(x_{i-1/2},t_n) \\
&+ \left[\frac{(x_i - x_{i-1/2})^3 - (x_{i-1} - x_{i-1/2})^3}{6}\right]u_{xxx}(x_{i-1/2},t_n) + \mathcal{O}(h^4) \\
\Rightarrow R_{i-1/2}^n = &-\frac{(x_i - x_{i-1/2})^2 - (x_{i-1/2} - x_{i-1})^2}{2(x_i - x_{i-1})}u_{xx}(x_{i-1/2},t_n) \\
&- \frac{(x_i - x_{i-1/2})^3 + (x_{i-1/2} - x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})}u_{xxx}(x_{i-1/2},t_n) + \mathcal{O}(h^3)
\end{aligned}
$$

Với $x_{i-1/2}$ là trung điểm của $[x_{i-1}, x_i]$. Ta có

$$|R_{i-1/2}^n| \le \frac{1}{3}h^2|u_{xxx}(x_{i-1/2},t_n)| \le C_2 h^2 \tag{2}$$

- $\exists C_3 > 0 : |R_{i+1/2}^n| \le C_3 h^2$
  Tương tự, sử dụng khai triển Talor, ta có:

$$
\begin{cases}
u(x_{i+1},t_n) &= u(x_{i+1/2},t_n) + (x_{i+1} - x_{i+1/2})u_x(x_{i+1/2},t_n) + \dfrac{(x_{i+1} - x_{i+1/2})^2}{2}u_{xx}(x_{i+1/2},t_n) + \mathcal{O}(h^3) \\
u(x_i,t_n) &= u(x_{i+1/2},t_n) + (x_i - x_{i+1/2})u_x(x_{i+1/2},t_n) + \dfrac{(x_i - x_{i+1/2})^2}{2}u_{xx}(x_{i+1/2},t_n) + \mathcal{O}(h^3)
\end{cases}
$$

Suy ra:

$$
\begin{aligned}
u(x_{i+1},t_n)-u(x_i,t_n) &= (x_{i+1}-x_i)u_x(x_{i+1/2},t_n)+\left[\frac{(x_{i+1}-x_{i+1/2})^2-(x_i-x_{i+1/2})^2}{2}\right]u_{xx}(x_{i+1/2},t_n)\\
&\quad+\left[\frac{(x_{i+1}-x_{i+1/2})^3-(x_i-x_{i+1/2})^3}{6}\right]u_{xxx}(x_{i+1/2},t_n)+\mathcal{O}(h^4)\\
\Rightarrow R^n_{i+1/2} &= -\frac{(x_{i+1}-x_{i+1/2})^2-(x_{i+1/2}-x_i)^2}{2(x_{i+1}-x_i)}u_{xx}(x_{i+1/2},t_n)\\
&\quad-\frac{(x_{i+1}-x_{i+1/2})^3+(x_{i+1/2}-x_i)^3}{6(x_{i+1}-x_i)}u_{xxx}(x_{i+1/2},t_n)+\mathcal{O}(h^3)
\end{aligned}
$$

Với $x_{i+1/2}$ là trung điểm của $[x_i,x_{i+1}]$. Ta có

$$|R^n_{i+1/2}|\leq\frac{1}{3}h^2|u_{xxx}(x_{i+1/2},t_n)|\leq C_3h^2 \tag{3}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra, $\forall i=\overline{2,N-1}$:

$$
\begin{aligned}
|\tau_i^n| &= |K_i^n+R^n_{i-1/2}-R^n_{i+1/2}|\\
&\leq |K_i^n|+|R^n_{i-1/2}|+|R^n_{i+1/2}|\\
&\leq C_1.(h^2+kh)+C_2h^2+C_3h^2\\
&\leq C(kh+h^2) \qquad\qquad \text{với C} = \max(C_1,C_2,C_3)
\end{aligned}
$$

Câu 2:
Nếu u $\in\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$, tồn tại hằng số C $>$ 0 chỉ phụ thuộc vào u sao cho:

$$|\tau_i^{n+1}|=|S_i^{n+1}+R^{n+1}_{i-1/2}-R^{n+1}_{i+1/2}|\leq C(h^2+kh)\qquad,\forall i=\overline{2,N-1}$$

trong đó:

$$
\begin{aligned}
S_i^{n+1} &= \int_{T_i}u_t(x,t_{n+1})\mathrm{d}x-\frac{|T_i|(u(x_i,t_{n+1})-u(x_i,t_n))}{k}\\
R^{n+1}_{i-1/2} &= u_x(x_{i-1/2},t_{n+1})\mathrm{d}x-\frac{u(x_i,t_{n+1})-u(x_{i-1},t_{n+1})}{|D_{i-1/2}|}\\
Rn+1_{i+1/2} &= u_x(x_{i+1/2},t_{n+1})\mathrm{d}x-\frac{u(x_{i+1},t_{n+1})-u(x_i,t_{n+1})}{|D_{i+1/2}|}
\end{aligned}
$$

Trả lời 2: Hoàn toàn tương tự như câu 1.

- $\exists C_1>0:|S_i^{n+1}|\leq C_1.(h^2+kh)$
  Sử dụng khai triển Talor, tồn tại $(x_i,\eta_n)\in((x_i,t_n),(x_i,t_{n+1}))$ sao cho:

$$u(x_i,t_n)=u(x_i,t_{n+1})-k.u_t(x_i,t_{n+1})+\frac{k^2}{2}u_{tt}(x_i,\eta_n)$$

$$\Rightarrow u_t(x_i,t_{n+1})-\frac{(u(x_i,t_{n+1})-u(x_i,t_n))}{k}=\frac{k}{2}u_{tt}(x_i,\eta_n)$$

Hoàn toàn tương tự suy ra:

$$\begin{aligned} S_i^{n+1} &= \int_{T_i} u_t(x, t_{n+1}) - \frac{(u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_))}{k} \mathrm{d}x \\ &= \int_{T_i} u_t(x, t_{n+1}) - u_t(x_i, t_{n+1}) + C.k \quad \mathrm{d}x \\ &= \int_{T_i} C.(h+k) \quad \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Khi đó, tồn tại hằng số C_1 sao cho

$$|S_i^{n+1}| \leq |T_i| C_1.(h+k) \leq C_1.(h^2 + kh)$$

- $\exists C_2 > 0 : |R_{i-1/2}^{n+1}| \leq C_2 h^2$
  Sử dụng khai triển Talor, ta có:

$$\begin{cases} u(x_{i-1}, t_{n+1}) &= u(x_{i-1/2}, t_{n+1}) + (x_{i-1} - x_{i-1/2}) u_x(x_{i-1/2}, t_{n+1}) + \dfrac{(x_{i-1} - x_{i-1/2})^2}{2} u_{xx}(x_{i-1/2}, t_{n+1}) + \mathcal{O}(\\ u(x_i, t_{n+1}) &= u(x_{i-1/2}, t_{n+1}) + (x_i - x_{i-1/2}) u_x(x_{i-1/2}, t_{n+1}) + \dfrac{(x_i - x_{i-1/2})^2}{2} u_{xx}(x_{i-1/2}, t_{n+1}) + \mathcal{O}(h^3) \end{cases}$$

  Suy ra:

$$\begin{aligned} u(x_i, t_{n+1}) - u(x_{i-1}, t_{n+1}) = (x_i - x_{i-1}) u_x(x_{i-1/2}, t_{n+1}) + \left[\frac{(x_i - x_{i-1/2})^2 - (x_{i-1} - x_{i-1/2})^2}{2} \right] u_{xx}(x_{i-1/2}, t_{n+} \\ + \left[\frac{(x_i - x_{i-1/2})^3 - (x_{i-1} - x_{i-1/2})^3}{6} \right] u_{xxx}(x_{i-1/2}, t_{n+1}) + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

  Với $x_{i-1/2}$ là trung điểm của $[x_{i-1}, x_i]$. Ta có

$$|R_{i-1/2}^{n+1}| \leq \frac{1}{3} h^2 |u_{xxx}(x_{i-1/2}, t_{n+1})| \leq C_2 h^2 \tag{2}$$

- $\exists C_3 > 0 : |R_{i+1/2}^{n}| \leq C_3 h^2$
  Tương tự, sử dụng khai triển Talor, ta cũng suy ra được: Với $x_{i+1/2}$ là trung điểm của $[x_i, x_{i+1}]$. Ta có

$$|R_{i+1/2}^{n+1}| \leq \frac{1}{3} h^2 |u_{xxx}(x_{i+1/2}, t_{n+1})| \leq C_3 h^2 \tag{3}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra, $\forall i = \overline{2, N-1}$:

$$\begin{aligned} |\tau_i^{n+1}| &= |S_i^{n+1} + R_{i-1/2}^{n+1} - R_{i+1/2}^{n+1}| \\ &\leq |S_i^{n+1}| + |R_{i-1/2}^{n+1}| + |R_{i+1/2}^{n+1}| \\ &\leq C_1.(h^2 + kh) + C_2 h^2 + C_3 h^2 \\ &\leq C(kh + h^2) \qquad\qquad \text{với C} = \max(C_1, C_2, C_3) \end{aligned}$$

Câu 3:
Nếu u $\in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$, tồn tại hằng số C > 0 chỉ phụ thuộc vào u sao cho:

$$|\tau_i^{n+1/2}| = |K_i^n + S_i^{n+1} + \frac{R_{i-1/2}^n - R_{i+1/2}^n}{2} + \frac{R_{i-1/2}^{n+1} - R_{i+1/2}^{n+1}}{2}| \leq C(h^2 + k^2 h) \qquad ,\forall i = \overline{2, N-1}$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
K_i^n &= \int_{T_i} u_t(x, t_n)\mathrm{d}x - \frac{|T_i|(u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n))}{k} \\
S_i^{n+1} &= \int_{T_i} u_t(x, t_{n+1})\mathrm{d}x - \frac{|T_i|(u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n))}{k} \\
R_{i-1/2}^{n+1} &= u_x(x_{i-1/2}, t_{n+1})\mathrm{d}x - \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_{i-1}, t_{n+1})}{|D_{i-1/2}|} \\
R_{i+1/2}^{n+1} &= u_x(x_{i+1/2}, t_{n+1})\mathrm{d}x - \frac{u(x_{i+1}, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n+1})}{|D_{i+1/2}|}
\end{aligned}$$

Trả lời 3: Hoàn toàn tương tự như câu 1 và câu 2.

- Sử dụng khai triển Talor, tồn tại $(x_i, \eta_n) \in ((x_i, t_n), (x_i, t_{n+1/2}))$ sao cho:

$$u(x_i, t_n) = u(x_i, t_{n+1/2}) - k.u_t(x_i, t_{n+1/2}) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x_i, \eta_n)$$

$$\Rightarrow u_t(x_i, t_{n+1/2}) - \frac{(u(x_i, t_{n+1/2}) - u(x_i, t_n))}{k} = -\frac{k}{2}u_{tt}(x_i, t_{n+1/2}) + \frac{k^2}{6}u_{ttt}(x_i, \eta_n)$$

  Tương tự sử dụng khai triển Talor, tồn tại $(x_i, \xi_n) \in ((x_i, t_{n+1/2}), (x_i, t_{n+1}))$ sao cho:

$$u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_{n+1/2}) + k.u_t(x_i, t_{n+1/2}) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x_i, \xi_n)$$

$$\Rightarrow u_t(x_i, t_{n+1/2}) - \frac{(u(x_i, t_{n+1/2}) - u(x_i, t_n))}{k} = \frac{k}{2}u_{tt}(x_i, t_{n+1/2}) + \frac{k^2}{6}u_{ttt}(x_i, \xi_n)$$

  Hoàn toàn tương tự suy ra:

$$\begin{aligned}
K_i^n + S_i^{n+1} &= \int_{T_i} u_t(x, t_{n+1/2}) - u_t(x_i, t_{n+1/2}) + C.k^2 \ \ \mathrm{d}x \\
&= \int_{T_i} C.(h + k^2) \ \ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

  Khi đó, tồn tại hằng số C_1 sao cho

$$|K_i^n| + |S_i^{n+1}| \leq |T_i| C_1.(h + k^2) \leq C_1.(h^2 + k^2 h)$$

- Ta thấy:

$$\begin{aligned}
u_t(x_j, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \\
\text{Và} \quad u(x_j, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2}[u(x_j, t^{n+1}) + u(x_j, t^{n+1})] + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \\
\text{Suy ra} \quad u_{xx}(x_j, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2}[u_{xx}(x_j, t^{n+1}) + u_{xx}(x_j, t^{n+1})] + \mathcal{O}((\Delta t)^2)
\end{aligned}$$

Do đó suy ra:

$$|\frac{R^n_{i-1/2} - R^n_{i+1/2}}{2} + \frac{R^{n+1}_{i-1/2} - R^{n+1}_{i+1/2}}{2}| \leq Ch^2 + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

Vậy suy ra:

$$\begin{aligned} |\tau_i^{n+1/2}| &\leq C_1.(h^2 + k^2 h) + C_2 h^2 + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \\ &\leq C(k^2 h + h^2) \qquad\qquad \text{với C} = \max(C_1, C_2) \end{aligned}$$