

Xét phương trình Laplace trên miền $\Omega = (0, 1)^2$:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) &= f(x) & \forall (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) &= u_d(x, y) & \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

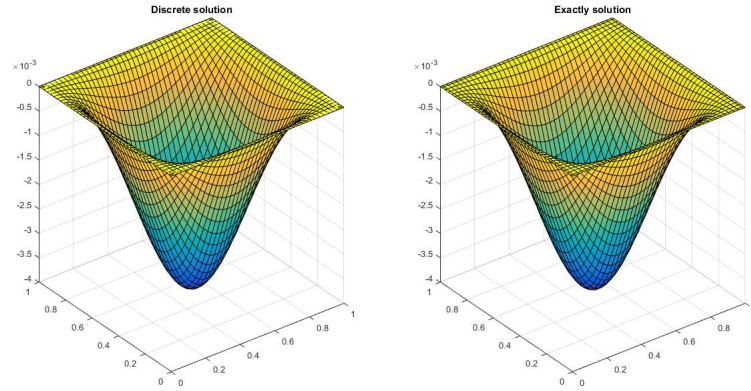
a) Xét bài toán 1:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) &= x^2(x-1)^2(12y^2-12y+2) + (12x^2-12x+2)y^2(y-1)^2 & \forall (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) &= 0 & \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

Nghiệm chính xác: $u(x, y) = (x(x-1)y(y-1))^2$.

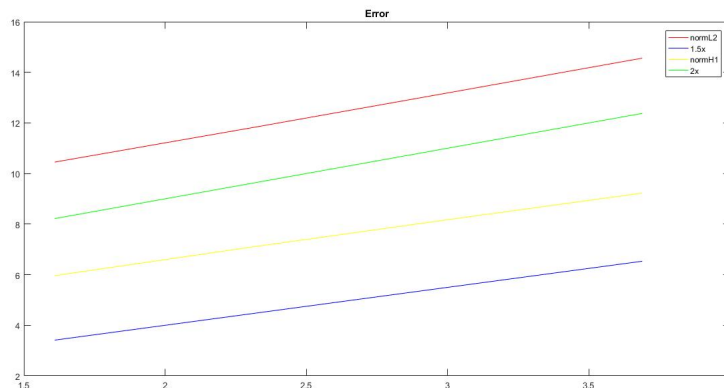
Nếu giải phương trình (2) bằng phương pháp thể tích phần tử hữu hạn (FVM) trên miền lưới đều và các điểm "control point" là trung điểm của các "control volume", nghĩa là $x_i = \frac{1}{2} \cdot x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot x_{i-\frac{1}{2}}$,

Nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác với $Nx = Ny = 80$.



Sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ là:

- bậc $\mathcal{O}(h^2)$ theo chuẩn L^2 .
- bậc $\mathcal{O}(h^{3/2})$ theo chuẩn H^1 .



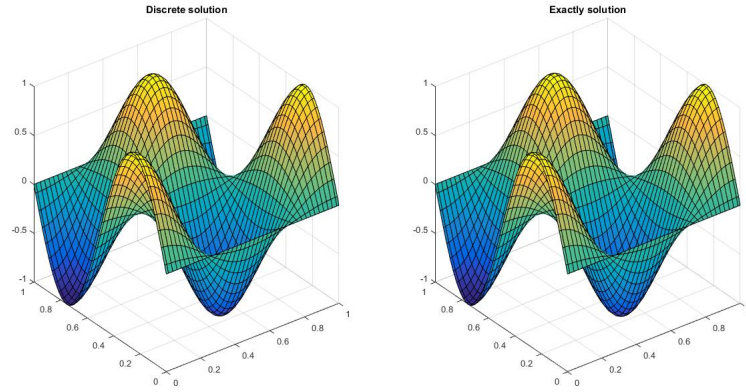
b) Xét bài toán 2:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) &= (2\pi)^2 \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) + (2\pi)^2 \sin(2\pi x) \cos(2\pi y); & \forall (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) &= 0 & \forall x = 0, x = 1. \\ u(x, y) &= \sin(2\pi x) & \forall y = 0, y = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Nghiệm chính xác: $u(x, y) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi y)$.

Nếu giải phương trình (3) bằng phương pháp thể tích phần tử hữu hạn (FVM) trên miền lưới đều và các điểm "control point" là trung điểm của các "control volume", nghĩa là $x_i = \frac{1}{2} \cdot x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot x_{i-\frac{1}{2}}$,

Nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác với $Nx = Ny = 80$.



Sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ là:

- bậc $\mathcal{O}(h^2)$ theo chuẩn L^2 .
- bậc $\mathcal{O}(h^{3/2})$ theo chuẩn H^1 .

