

# hjem7

November 1, 2023

## 1 01035 Matematik 2 Hjemopgave 7

Morten Hay Sørensen s223872

1. november 2023

```
[2]: #imports
from sympy import *
init_printing()
```

### 1.1 Opgave 1)

Der er givet følgende inhomogene lineære differentialligningssystem

```
[11]: #Definition af symboler
t = symbols('t', real=True)
x1,x2 = Function('x_1')(t),Function('x_2')(t)

#Definition af differentialligninger
deq1 = Eq(diff(x1,t),x2)
deq2 = Eq(diff(x2,t),-9*x1-6*x2+exp(I*t))

#Print af systemet
Eq(Matrix([deq1.lhs,deq2.lhs]),Matrix([deq1.rhs,deq2.rhs]))
```

$$[11]: \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -9x_1(t) - 6x_2(t) + e^{it} \end{bmatrix}$$

#### 1.1.1 Opgave 1.1)

Der skal findes den fuldstændige løsning til det tilsvarende homogene ligningssystem på formen  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Systemmatricen kan let aflæses fra det homogene system som  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$ . Det homogene system bliver da

```
[13]: #definition af matricer
x = Matrix([x1,x2])
A = Matrix([[0,1],[-9,-6]])

#Definition af det homogene system
```

```

dhom = Eq(diff(x,t),A*x)

#Print af det homogene system
dhom

```

[13]: 
$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -9x_1(t) - 6x_2(t) \end{bmatrix}$$

Der kan findes lineært uafhængige løsninger til systemet med sætning 2.11. Egenverdier og -vektorer for systemmatricen undersøges

[14]: `A.eigenvecs()`

[14]: 
$$\left[ \left( -3, 2, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right]$$

Der er altså en reel egenværdis  $\lambda = -3$  med algebrarisk multiplicitet  $p = 2$  og den tilhørende egenvektor  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$  med geometrisk multiplicitet  $p > q = 1$ . Med sætning 2.4 kan den første løsning opskrives som

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Den næste løsning er så jf. sætning 2.11

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{b}_1 e^{2t} + \mathbf{b}_2 t e^{2t}$$

Dette kan løses ved at differentiere  $x_2$  og indsætte det i differentialligningen.

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = 2\mathbf{b}_1 e^{2t} + \mathbf{b}_2 e^{2t} + 2\mathbf{b}_2 t e^{2t}$$

$\mathbf{x}_2$  er da en løsning til systemet for alle  $t \in \mathbb{R}$  når

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t), \quad t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$2\mathbf{b}_1 e^{2t} + \mathbf{b}_2 e^{2t} + 2\mathbf{b}_2 t e^{2t} = \mathbf{A}\mathbf{b}_1 e^{2t} + \mathbf{A}\mathbf{b}_2 t e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Systemet kan simplificeres ved at sætte  $t = 0 \Rightarrow$

$$2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{A}\mathbf{b}_1$$

Og  $t = 1 \Rightarrow$

$$\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{b}_2$$

Disse ligninger viser, at  $\mathbf{b}_2$  skal være en egenvektor tilhørende egenværdien  $\lambda = 2$ . Det medfører

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Denne ligning kan løses for  $\mathbf{b}_1$

[23]: 

```

b1 = Matrix([Symbol('b_11'), Symbol('b_12')])
b2 = Matrix([-1, 3])
eqb = Eq(b2, (A-2*eye(2))*b1)
solve(eqb)

```

[23]: 
$$\left\{ b_{11} : \frac{1}{5}, \quad b_{12} : -\frac{3}{5} \right\}$$

Der kan altså vælges en vektor  $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ . Nu kan løsningen  $\mathbf{x}_2(t)$  altså opskrives

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{b}_1 e^{2t} + \mathbf{b}_2 t e^{2t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} t e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Den fuldstændige reelle løsning til det homogene system kan nu findes som en linearkombination af de to løsninger  $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$  med reelle koefficienter jf. sætning 2.12. Den fuldstændige løsning til det homogene differentiaalligningssystem er da

$$\mathbf{x}_{\text{hom}}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} t e^{2t} \right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

### 1.1.2 Opgave 1.2)

Der skal nu findes en partikulær løsning til det inhomogene system. Påtrykningen på differentialligningen kan skrives som  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{it}$ . Da giver det mening at gætte på en partikulær løsning på formen  $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{v}_p e^{it}$ ,  $\mathbf{v}_p \in \mathbb{C}^2$ . Dermed bliver  $\dot{\mathbf{x}}_p(t) = i \mathbf{v}_p e^{it}$ . Det indsættes i differentialligningen

$$i \mathbf{v}_p e^{it} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{v}_p e^{it} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{it}$$

Dette løses for  $\mathbf{v}_p \in \mathbb{C}^2$

```
[27]: #vp derfineres symbolsk
vp = Matrix([Symbol('v_p1'), Symbol('v_p2')])

#Den overstående ligning derfineres
eqp = Eq(I*vp*exp(I*t), A*vp*exp(I*t)+Matrix([0, exp(I*t)]))

#Ligningen løses for elementerne i vp
vpsol = solve(eqp)[0]

#Løsningen printes
vpsol
```

$$[27]: \left\{ v_{p1} : \frac{2}{25} - \frac{3i}{50}, v_{p2} : \frac{3}{50} + \frac{2i}{25} \right\}$$

Der kan nu opskrives en  $v_p$

```
[34]: vp = Matrix([Symbol('v_p1'), Symbol('v_p2')])
vp = vp.subs(vpsol)
Eq(Matrix([Symbol('v_p1'), Symbol('v_p2')]), vp)
```

$$[34]: \begin{bmatrix} v_{p1} \\ v_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{25} - \frac{3i}{50} \\ \frac{3}{50} + \frac{2i}{25} \end{bmatrix}$$

$$\text{Da bliver den partikulære løsning } \mathbf{x}_p = \mathbf{v}_p e^{it} = \begin{bmatrix} \frac{2}{25} - \frac{3i}{50} \\ \frac{3}{50} + \frac{2i}{25} \end{bmatrix} e^{it}$$

### 1.1.3 Opgave 1.3)

Den fuldstændige løsning til det inhomogene differentiaalligningssystem. Med sætning 1.20 få at den fuldstændige løsning er summen af løsningen til det homogene system og en partikulær løsning  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{hom}}(t) + \mathbf{x}_p(t) \quad t \in \mathbb{R}$ .

Da begge disse er fundet, bliver den fuldstændige løsning

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} t e^{2t} \right) + \begin{bmatrix} \frac{2}{25} - \frac{3i}{50} \\ \frac{3}{50} + \frac{2i}{25} \end{bmatrix} e^{it}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

## 1.2 Opgave 2)

Der er givet funktionen  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ved

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} (3 \sin(2nt) - 2 \cos(nt))$$

### 1.2.1 Opgave 2.1)

Der skal findes et tal  $k > 0$ , så

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{n^{3/2}}$$

Er en majorantrække for  $f$ . Med definition 5.31 er rækken en majorantrække, når  $\frac{k}{n^{3/2}} \geq \frac{1}{n^{3/2}} (3 \sin(2nt) - 2 \cos(nt)) \Leftrightarrow k \geq (3 \sin(2nt) - 2 \cos(nt))$ . En mulig majorantrække (dog ikke den mindste) opnås ved at antage de maksimale værdier for sin og cos absolut. Derved bliver  $k = 5 \geq (3 \sin(2nt) - 2 \cos(nt))$

Da bliver majorantrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^{3/2}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} (3 \sin(2nt) - 2 \cos(nt)), \quad t \in \mathbb{R}$$

### 1.2.2 Opgave 2.2)

Det skal undersøges, om rækken er uniformt konvergent. Med sætning 5.33 er rækken uniformt konvergent, hvis majorantrækken er konvergent. Med Lemma 4.17 kan rækken omskrives til

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^{3/2}} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

Da der blot skal vises, hvorvidt rækken er konvergent, kan der ses bort fra konstanten 5. Dette kan gøres med integralkriteriet (Sætning 4.33). Hvis det uegentlige integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$$

er konvergent, så er majorantrækken også konvergent. Det uegentlige integral undersøges som

$$\int_1^t \frac{1}{x^{3/2}} dx = \frac{1}{-1/2} \left[ x^{-1/2} \right]_1^t = -2 \left( t^{-1/2} - 1 \right) \rightarrow 2, \text{ for } t \rightarrow \infty$$

Det uegentlige integral er altså konvergent. Derfor er majorantrækken også konvergent.

Da majorantrækken  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^{3/2}}$  til  $f(t)$  er konvergent. Er  $f(t)$  uniformt konvergent på hele  $t \in \mathbb{R}$  ifølge sætning 5.33

### 1.2.3 Opgave 2.3)

Det skal vurderes, om  $f$  er kontinuært. Da der er vist, at den er uniformt konvergent på de reelle tal. Derudover er alle funktionerne  $f_n$  også kontinuerte. Ifølge sætning 5.35 er sumfunktionen  $f$  så også kontinuert.

### 1.2.4 Opgave 2.4)

Der defineres en afsnitssum  $S_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{3/2}} (3 \sin(2nt) - 2 \cos(nt)), \quad N \in \mathbb{N}$$

Der skal bestemmes et  $N \in \mathbb{N}$  så der for alle  $t \in \mathbb{R}$  gælder, at

$$|f(t) - S_N(t)| \leq 2 \cdot 10^{-3}$$

Med korollar 4.35 (i) kan opskrives

$$\int_N^{\infty} f(x) dx \leq \int_N^{\infty} \frac{5}{x^{3/2}} dx \leq 2 \cdot 10^{-3}$$

Dette kan løses for  $N$  for rundes op for at få antallet af led, der skal medtages. Det uegentlige

integral giver

$$\int_N^t \frac{5}{x^{3/2}} dx = -10 \left( t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{N}} \right) \rightarrow \frac{10}{\sqrt{N}} \text{ for } t \rightarrow \infty$$

Dette indsættes i uligheden:

$$\frac{10}{\sqrt{N}} \leq 2 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow N \geq 25 \cdot 10^6$$

Dette viser altså, at der skal  $25 \cdot 10^6$  led til, før  $|f(t) - S_N(t)| \leq 2 \cdot 10^{-3}$