eksmisc

November 30, 2023

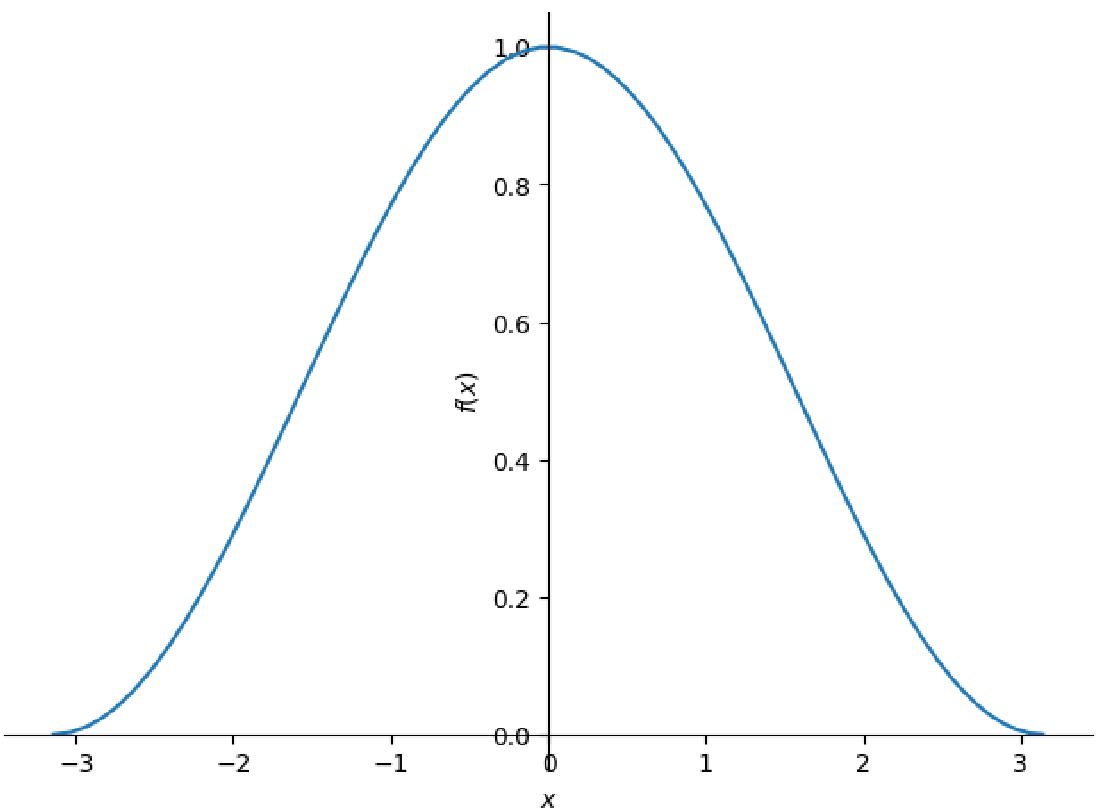
[1]:
```
from sympy import *
init_printing()
```

(ii) Antag at en løsning $y(t)$ til den tilsvarende homogene ligning $t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$ kan skrives som en potensrække:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,.$$

Bestem, ved indsættelse i den homogene ligning, en rekursionsformel for a_n.

[2]:
```
x = Symbol('x')
f = 1-sin(x/2)**2
plot(f, (x, -pi, pi))
```



[2]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f6ce9b89180>

[6]:
```
n = Symbol('n',positive=True,integer=True)
a0 = 2/pi*integrate(f, (x, 0, pi))
an = 2/pi*integrate(f*cos(n*x), (x, 0, pi))
a0,an.simplify()
```

[6]: $\left(1, \begin{cases} 0 & \text{for}\ n > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{otherwise} \end{cases}\right)$

(ii) Antag at en løsning $y(t)$ til den tilsvarende homogene ligning $t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$ kan skrives som en potensrække:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,.$$

Bestem, ved indsættelse i den homogene ligning, en rekursionsformel for a_n.

Ud fra karakterligningen kan der aflæses rødderne $\lambda = -1, \pm i$ alle med algebrarisk multiplicitet 1. Derved kan den fuldstændige løsning opskrives med sætning 1.15:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

(ii) Antag at en løsning $y(t)$ til den tilsvarende homogene ligning $t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$ kan skrives som en potensrække:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,.$$

Bestem, ved indsættelse i den homogene ligning, en rekursionsformel for a_n.

Overføringsfunktionen kan bestemmes som lærebogens ligning (1.23) i eksempel 1.24. Dog kan nævneren erstattes med venstresiden fra den givne karakterligning for det homogene system.

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)}, \quad s \neq -1, \pm i$$

(ii) Antag at en løsning $y(t)$ til den tilsvarende homogene ligning $t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$ kan skrives som en potensrække:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,.$$

Bestem, ved indsættelse i den homogene ligning, en rekursionsformel for a_n.

Det stationære svar kan findes ved at sætte $u(t) = \mathrm{Re}(e^{2it})$. Da kan det stationære svar findes med sætning 1.25 og 1.27 som

$$y(t) = \mathrm{Re}(H(2i)e^{2it})$$

$$y(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{(-4+1)(2i+1)}\right)$$

$$y(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{15}(-1+2i)(\cos(2t) + i\sin(2t))\right)$$

$$y(t) = -\frac{1}{15}\cos(2t) - \frac{2}{15}\sin(2t)$$

(ii) Antag at en løsning $y(t)$ til den tilsvarende homogene ligning $t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$ kan skrives som en potensrække:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,.$$

Bestem, ved indsættelse i den homogene ligning, en rekursionsformel for a_n.

Der skal gættes på en løsningsform. Da ce^{-t} er en løsning til den homogene ligning, kan denne form ikke bruges. Derfor gættes på en løsning på formen $y(t) = cte^{-t}$ Dette indsættes i differentialligningen.

[8]:
```
#Symboler defineres
c = Symbol('c')
t = Symbol('t',real=True)

#Løsningsgættet defineres
y = c*t*exp(-t)

#Den inhomogene diffentialligning opskrives
deq = Eq(y.diff(t,3)+y.diff(t,2)+y.diff(t)+y,exp(-t))

#Den udskrives
deq
```

[8]: $c\,(3-t)\,e^{-t} + c\,(t-2)\,e^{-t} + ce^{-t} = e^{-t}$

Udtrykket kan reduceres ved at sættes e^{-t} ud for en parantes og koefficienterne kan reduceres ned til

[9]:
```
deq.simplify()
```

[9]: $e^{-t} = 2ce^{-t}$

Af dette kan det let aflæses, at $c = \frac{1}{2}$ og den partikulære løsning bliver så $y(t) = \frac{1}{2}te^{-t}$

(ii) Antag at en løsning $y(t)$ til den tilsvarende homogene ligning $t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$ kan skrives som en potensrække:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,.$$

Bestem, ved indsættelse i den homogene ligning, en rekursionsformel for a_n.

Den fuldsætndige løsning findes med sætning 1.20 samt superpositionsprincippet sætning 1.23. Løsningen til den homogene ligning blev fundet til

$$y_{hom}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

En partikulær løsning er med superpositionsprincippet summen af den stationære løsning fra delopgave (iii) samt den partikulære løsning fra delopgave (iv)

$$y_0 = \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{15}\cos(2t) - \frac{2}{15}\sin(2t)$$

Den fuldstændige relle løsning er så

$$y(t) = y_{hom}(t) + y_0(t)$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t) + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{15}\cos(2t) - \frac{2}{15}\sin(2t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

(ii) Antag at en løsning $y(t)$ til den tilsvarende homogene ligning $t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$ kan skrives som en potensrække:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,.$$

Bestem, ved indsættelse i den homogene ligning, en rekursionsformel for a_n.

Funktionen defineres of plottes herunder

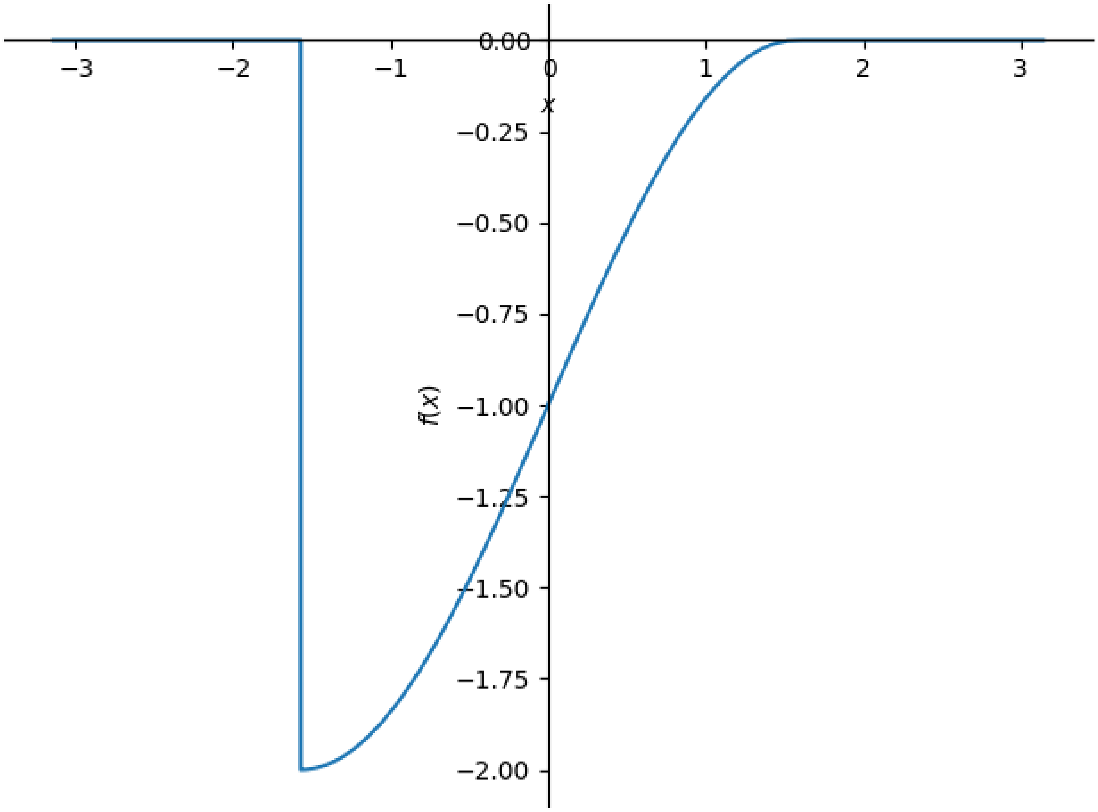
[22]:
```
#Symbol defineres
x = Symbol('x')

#Function defineres og udskrives
f = Piecewise((sin(x)-1,(x>=-pi/2) & (x<=pi/2)),(0,True))
Eq(Function('f')(x),f)
```

[22]:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) - 1 & \text{for } x \geq -\frac{\pi}{2} \wedge x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

[23]:
```
#Funktionen plottes. Bemærk at den er diskontinuert
plot(f,(x,-pi,pi))
```



[23]:
```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f6cccbfe290>
```

(ii) Antag at en løsning $y(t)$ til den tilsvarende homogene ligning $t\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$ kan skrives som en potensrække:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,.$$

Bestem, ved indsættelse i den homogene ligning, en rekursionsformel for a_n.

Summen af fourerrækken kan findes i alle punkter med Fouriers sætning (sætning 6.16), for punkterne, der ikke ligger på en diskontinuitet er summen blot funktionesværdien i punktet. Dette gælder for punkterne

$$f_{kontinurt} \begin{cases} f(-\pi) = 0 \\ f(0) = -1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ f(\pi) = 0 \end{cases}$$

I det diskontinuærte punkt $x = -\frac{\pi}{2}$ er summen middelværdien af grænseværdierne i punktet fra højre hhv. venstre. Altså er det

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{0-2}{2} = -1$$

Nu er summen af fourierrækken fundet i alle de ønskede punkter

(ii) Antag at en løsning $y(t)$ til den tilsvarende homogene ligning $t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$ kan skrives som en potensrække:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,.$$

Bestem, ved indsættelse i den homogene ligning, en rekursionsformel for a_n.

Funktionen er hverken lige eller ulige. Derfor skal fourierkoefficienter findes med definition 6.1

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx$$

[26]:
```
n = Symbol('n',positive=True,integer=True)
a0 = (1/pi*integrate(f,(x,-pi,pi))).simplify()
an = (1/pi*integrate(f*cos(n*x),(x,-pi,pi))).simplify()
bn = (1/pi*integrate(f*sin(n*x),(x,-pi,pi))).simplify()
a0,an,bn
```

[26]:

$$\left(-1, \begin{cases} -\frac{2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} & \text{for } n > 1 \\ -\frac{2}{\pi} & \text{otherwise} \end{cases}, \begin{cases} -\frac{2n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi(n^2-1)} & \text{for } n > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{otherwise} \end{cases}\right)$$

(ii) Antag at en løsning $y(t)$ til den tilsvarende homogene ligning $t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$ kan skrives som en potensrække:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,.$$

Bestem, ved indsættelse i den homogene ligning, en rekursionsformel for a_n.

Da påvirkningen er et andengradspolynomie og venstresiden indeholder et ikkedifferentieret led, vil et passende gæt være et andengradspolinomie på formen $at^2 + bt$ (Det kan let ses, at der aldrig kan være et konstantled med den givne ligning)

[29]:
```
a,b = symbols('a b')
t = Symbol('t',real=True)
y = a*t**2+b*t
deq = Eq(t*diff(y,t,2)+y,t**2)
```

```
deq
```

[29]: $at^2 + 2at + bt = t^2$

Dette kan omskrives til det lineære ligningssystem

$$a = 1$$
$$2a + b = 0$$

Og derved

$$a = 1$$
$$b = -2$$

Hvilket giver den partikulre løsning

$$y_0 = at^2 - 2t$$

(ii) Antag at en løsning $y(t)$ til den tilsvarende homogene ligning $t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$ kan skrives som en potensrække:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,.$$

Bestem, ved indsættelse i den homogene ligning, en rekursionsformel for a_n.

Rækken differentieres med sætning 5.17 og indsættes i differentialligningen

$$t\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

Der skal bestemmes en rekursionsformel for a_n

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} n(n+1)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} n(n+1) + a_n)t^n = 0$$

Med identitetssætningen for potensrækker (korollar 5.21) er dette opfyldt hvis og kun hvis

$$a_0 = 0$$

$$a_{n+1} n(n+1) + a_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

Som er en rekursionsformen for $a_n,\ n > 0$. Videre er a_1 en arbitrær konstant

```
[ ]:
```