hjemmeopgave 7

November 1, 2023

1 01035 Matematik 2 Hjemopgave 7

Morten Hay Sørensen s223872
1. november 2023

[2]:
```
#imports
from sympy import *
init_printing()
```

1.1 Opgave 1)

Der er givet følgende inhomogene lineære differentialligningssystem

[11]:
```
#Definition af symboler
t = symbols('t', real=True)
x1,x2 = Function('x_1')(t),Function('x_2')(t)

#Definition af differentialligninger
deq1 = Eq(diff(x1,t),x2)
deq2 = Eq(diff(x2,t),-9*x1-6*x2+exp(I*t))

#Print af systemet
Eq(Matrix([deq1.lhs,deq2.lhs]),Matrix([deq1.rhs,deq2.rhs]))
```

[11]:
$$\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}x_1(t)\\ \frac{d}{dt}x_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2(t)\\ -9x_1(t)-6x_2(t)+e^{it}\end{bmatrix}$$

1.1.1 Opgave 1.1)

Der skal findes den fuldstændige løsning til det tilsvarende homogene ligningssystem på formen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Systemmatricen kan let aflæses fra det homogene system som $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -9 & -6\end{bmatrix}$. Det homogene system bliver da

[13]:
```
#definition af matricer
x = Matrix([x1,x2])
A = Matrix([[0,1],[-9,-6]])

#Definition af det homogene system
```

```
dhom = Eq(diff(x,t),A*x)

#Print af det homogene system
dhom
```

[13]: $\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -9x_1(t) - 6x_2(t) \end{bmatrix}$

Der kan findes lineært uafhængige løsninger til systemet med sætning 2.11. Egenværdier og -vektorer for systemmatricen undersøges

[14]:
```
A.eigenvects()
```

[14]: $\left[\left(-3,\ 2,\ \left[\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$

Der er altså en reel egenværdi $\lambda = -3$ med algebrarisk mutiplicitet $p = 2$ og den tilhørende egenvektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ med geometrisk multiplicitet $p > q = 1$. Med sætning 2.4 kan den første løsning opskrives som

$\mathbf{x_1}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}$

Den næste løsning er så jf. sætning 2.11

$\mathbf{x_2}(t) = \mathbf{b_1}e^{2t} + \mathbf{b_2}te^{2t}$

Dette kan løses ved at differentiere x_2 og indsætte det i differentialligningen.

$\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{2}(t) = 2\mathbf{b_1}e^{2t} + \mathbf{b_2}e^{2t} + 2\mathbf{b_2}te^{2t}$

$\mathbf{x_2}$ er da en løsning til systemet for alle $t \in \mathbb{R}$ når

$\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{2}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x_2}(t), \quad t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$2\mathbf{b_1}e^{2t} + \mathbf{b_2}e^{2t} + 2\mathbf{b_2}te^{2t} = \mathbf{A}\mathbf{b_1}e^{2t} + \mathbf{A}\mathbf{b_2}te^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}$

Systemet kan simplificeres ved at sætte $t = 0 \Rightarrow$

$2\mathbf{b_1} + \mathbf{b_2} = \mathbf{A}\mathbf{b_1}$

Og $t = 1 \Rightarrow$

$\mathbf{A}\mathbf{b_2} = 2\mathbf{b_2}$

Disse ligninger viser, at $\mathbf{b_2}$ skal være en egenvektor tilhørende egenværdien $\lambda = 2$. Det medfører

$\mathbf{b_2} = \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\mathbf{b_2} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Denne ligning kan løses for $\mathbf{b_1}$

[23]:
```
b1 = Matrix([Symbol('b_11'),Symbol('b_12')])
b2 = Matrix([-1,3])
eqb = Eq(b2,(A-2*eye(2))*b1)
solve(eqb)
```

[23]: $\left\{ b_{11} : \frac{1}{5},\ b_{12} : -\frac{3}{5} \right\}$

Der kan altså vælges en vektor $\mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Nu kan løsningen $\mathbf{x_2}(t)$ altså opskrives

$\mathbf{x_2}(t) = \mathbf{b_1}e^{2t} + \mathbf{b_2}te^{2t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} te^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}$
Den fuldstændige reelle løsning til det homogene system kan nu findes som en linearkombination af de to løsninger $\mathbf{x_1}(t), \mathbf{x_2}(t)$ med reelle koefficienter jf. sætning 2.12. Den fuldstændige løsning til det homogene differentialligningssystem er da
$\mathbf{x_{hom}}(t) = c_1\mathbf{x_1}(t) + c_2\mathbf{x_2}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} te^{2t} \right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

1.1.2 Opgave 1.2)

Der skal nu findes en partikulær løsning til det inhomogene system. Påtrykningen på differentialligningen kan skrives som $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{it}$. Da giver det mening at gætte på en partikulær løsning på formen $\mathbf{x_p}(t) = \mathbf{v_p}e^{it}, \quad \mathbf{v_p} \in \mathbb{C}^2$. Dermed bliver $\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{p}(t) = i\mathbf{v_p}e^{it}$. Det indsættes i differentialligningen
$i\mathbf{v_p}e^{it} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{v_p}e^{it} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{it}$
Dette løses for $\mathbf{v_p} \in \mathbb{C}^2$

[27]:
```
#vp derfineres symbolsk
vp = Matrix([Symbol('v_p1'),Symbol('v_p2')])

#Den overstående ligning derfineres
eqp = Eq(I*vp*exp(I*t), A*vp*exp(I*t)+Matrix([0,exp(I*t)]))

#Ligningen løses for elemtenterne i vp
vpsol = solve(eqp)[0]

#Løsningen printes
vpsol
```

[27]: $\left\{v_{p1} : \frac{2}{25} - \frac{3i}{50}, \ v_{p2} : \frac{3}{50} + \frac{2i}{25}\right\}$

Der kan nu opskrives en v_p

[34]:
```
vp = Matrix([Symbol('v_p1'),Symbol('v_p2')])
vp = vp.subs(vpsol)
Eq(Matrix([Symbol('v_p1'),Symbol('v_p2')]),vp)
```

[34]: $\begin{bmatrix} v_{p1} \\ v_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{25} - \frac{3i}{50} \\ \frac{3}{50} + \frac{2i}{25} \end{bmatrix}$

Da bliver den partikulære løsning $\mathbf{x_p} = \mathbf{v_p}e^{it} = \begin{bmatrix} \frac{2}{25} - \frac{3i}{50} \\ \frac{3}{50} + \frac{2i}{25} \end{bmatrix} e^{it}$

1.1.3 Opgave 1.3)

Den fuldstændige løsning til det inhomogene differentialligningssystem. Med sætning 1.20 få at den fuldstændige løsning er summen af løsningen til det homogene system og en partikulær løsning
$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x_{hom}}(t) + \mathbf{x_p}(t) \quad t \in \mathbb{R}$.

Da begge disse er fundet, bliver den fuldstændige løsning
$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} te^{2t} \right) + \begin{bmatrix} \frac{2}{25} - \frac{3i}{50} \\ \frac{3}{50} + \frac{2i}{25} \end{bmatrix} e^{it}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

1.2 Opgave 2)

Der er givet funktionen $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved
$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}(3\sin(2nt) - 2\cos(nt))$

1.2.1 Opgave 2.1)

Der skal findes et tal $k > 0$, så
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{n^{3/2}}$
Er en majorantrække for f. Med definition 5.31 er rækken en majorantrække, når $\frac{k}{n^{3/2}} \geq \frac{1}{n^{3/2}}(3\sin(2nt) - 2\cos(nt)) \Leftrightarrow k \geq (3\sin(2nt) - 2\cos(nt))$ En mulig majorantrække (dog ikke den mindste) opnås ved at antage de maksimale værdier for sin og cos absolut. Derved bliver
$k = 5 \geq (3\sin(2nt) - 2\cos(nt))$
Da bliver majorantrækken
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^{3/2}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}(3\sin(2nt) - 2\cos(nt)), \quad t \in \mathbb{R}$

1.2.2 Opgave 2.2)

Det skal undersøges, om rækken er uniformt konvergent. Med sætning 5.33 er rækken uniformt konvergent, hvis majorantrækken er konvergent. Med Lemma 4.17 kan rækken omskrives til
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^{3/2}} = 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$
Da der blot skal vises, hvorvidt rækken er konvergent, kan der ses bort fra konstanten 5. Dette kan gøres med integralkriteriet (Sætning 4.33). Hvis det uegentlige integral
$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$
er konvergent, så er majorantrækken også konvergent. Det uegentlige integral undersøges som
$\int_1^{t} \frac{1}{x^{3/2}} dx = \frac{1}{-1/2} \left[x^{-\frac{1}{2}} \right]_1^t = -2\left(t^{-\frac{1}{2}} - 1\right) \to 2, for\ t \to \infty$
Det uegentlige integral er altså konvergent. Derfor er majorantrækken også konvergent.
Da majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^{3/2}}$ til $f(t)$ er konvergent. Er $f(t)$ uniformt konvergent på hele $t \in \mathbb{R}$ ifølge sætning 5.33

1.2.3 Opgave 2.3)

Det skal vurderes, om f er kontinuært. Da der er vist, at den er uniformt konvergent på de reelle tal. Derudover er alle funktionerne f_n også kontinuerte. Ifølge sætning 5.35 er sumfunktionen f så også kontinuert.

1.2.4 Opgave 2.4)

Der defineres en afsnitssum $S_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{3/2}}(3\sin(2nt) - 2\cos(nt)), \quad N \in \mathbb{N}$
Der skal bestemmes et $N \in \mathbb{N}$ så der for alle $t \in \mathbb{R}$ gælder, at
$|f(t) - S_N(t)| \leq 2 \cdot 10^{-3}$
Med korollar 4.35 (i) kan opskrives
$\int_N^{\infty} f(x)dx \leq \int_N^{\infty} \frac{5}{x^{3/2}} dx \leq 2 \cdot 10^{-3}$
Dette kan løses for N for rundes op for at få antallet af led, der skal medtages. Det uegentlige

integral giver
$\int_N^t \frac{5}{x^{3/2}} dx = -10\left(t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{N}}\right) \to \frac{10}{\sqrt{N}}\ for\ t \to \infty$
Dette indsættes i uligheden:
$\frac{10}{\sqrt{N}} \leq 2 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow N \geq 25 \cdot 10^6$

Dette viser altså, at der skal $25 \cdot 10^6$ led til, før $|f(t) - S_N(t)| \leq 2 \cdot 10^{-3}$