eks22

December 3, 2023

[2]:
```python
from sympy import *
init_printing()
```

Opgave 3

Om funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er følgende givet: f er en lige funktion, f er 2π periodisk, og på intervallet $[0, \pi]$ er funktionen givet ved følgende forskrift:

$$f(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \quad \text{for } t \in [0, \pi]. \tag{2}$$

Det kan anvendes, at for et heltal n og en ikke heltallig reel parameter a er

$$\int_0^\pi \cos(at)\cos(nt)dt = \frac{a\sin(\pi a)\cos(n\pi)}{a^2 - n^2}.$$

1. Vis at f har Fourierrækken $-\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2-9)} \cos(nt)$.
2. Undersøg om f er kontinuert og om Fourierrækken for f er uniformt konvergent.
3. Har Fourierrækken for f en konvergent majorantrække?
4. Bestem summen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9}$. Vink: Indsæt en passende værdi for t i Fourierrækken for f.

[9]:
```python
n = Symbol('n',integer=True,positive=True)
x = Symbol('x')
f = (x+1)**2*exp(-x)
F = integrate(f,(x,1,oo))
F,F+f.subs(x,1)
```

[9]:

$$\left(\frac{10}{e}, \frac{14}{e}\right)$$

Opgave 3

Om funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er følgende givet: f er en lige funktion, f er 2π periodisk, og på intervallet $[0, \pi]$ er funktionen givet ved følgende forskrift:

$$f(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \quad \text{for } t \in [0, \pi]. \tag{2}$$

Det kan anvendes, at for et heltal n og en ikke heltallig reel parameter a er

$$\int_0^{\pi} \cos(at)\cos(nt)dt = \frac{a\sin(\pi a)\cos(n\pi)}{a^2 - n^2}.$$

1. Vis at f har Fourierrækken $-\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2-9)}\cos(nt)$.
2. Undersøg om f er kontinuert og om Fourierrækken for f er uniformt konvergent.
3. Har Fourierrækken for f en konvergent majorantrække?
4. Bestem summen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9}$. Vink: Indsæt en passende værdi for t i Fourierrækken for f.

Med sætning 4.38 fås at rækkerne er konvergente hvis og kun hvis hvert led er absolut mindre end det foregående. Først for rækken S. For denne række er b_n svarende til definition 4.37

$$b_n = \frac{\sqrt{n}}{n+3}$$

Denne talfølge undersøges med sammenligningskriteriet (sætning 4.20) som

$$\frac{\sqrt{n}}{n+3} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ aftager monotont, så rækken er konvergent. Hvorvidt den er absolut konvergent undersøges med ækvivalenskriteriet med $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}}{n+3}} = \frac{n+3}{n} \to 1 \text{ for n} \to \infty$$

Rækkerne er altså ækvivalente. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ er divergent, så det er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+3}$ også. Altså er S betinget konvergent.

T kan undersøges ved at omskrive den til en kvotientrække

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3\frac{3^n}{4^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Med sætning 5.2 er rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ konvergent. Altså er T absolut konvergent

Opgave 3

Om funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er følgende givet: f er en lige funktion, f er 2π periodisk, og på intervallet $[0, \pi]$ er funktionen givet ved følgende forskrift:

$$f(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \quad \text{for } t \in [0, \pi]. \tag{2}$$

Det kan anvendes, at for et heltal n og en ikke heltallig reel parameter a er

$$\int_0^{\pi} \cos(at)\cos(nt)dt = \frac{a\sin(\pi a)\cos(n\pi)}{a^2 - n^2}.$$

1. Vis at f har Fourierrækken $-\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2-9)} \cos(nt)$.
2. Undersøg om f er kontinuert og om Fourierrækken for f er uniformt konvergent.
3. Har Fourierrækken for f en konvergent majorantrække?
4. Bestem summen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9}$. Vink: Indsæt en passende værdi for t i Fourierrækken for f.

Den fuldstændige løsning til det homogene system findes med egenværdierne for systemmatricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Dennes egenværdier kan læt aflæses fra diagonalen da det er en trekantsmatrix til $\lambda = -1, -2$ egenvektorer findes også:

[12]:
```
A = Matrix([[-1,0],[-1,-2]])
A.eigenvects()
```

[12]:

$$\left[\left(-2, \ 1, \ \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right), \ \left(-1, \ 1, \ \left[\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$$

Altså har $\lambda_1 = -1$ en tilhørende egenvektor $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\lambda_2 = -2$ en tilhørende egenvektor $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Med sætning 1.15 kan den fuldstændige reelle løsning til det homogene system nu opskrives som

$$x_{hom}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Differentialligningen er asymptotisk stabil hvis og kun hvis Sætning 2.41 (Routh-Hurwitz' kriterium) er opfyldt. Karakterligningen til $\mathbf{A}$ undersøges

[16]:
```
A.charpoly()
```

[16]:

$$\text{PurePoly}\left(\lambda^2 + 3\lambda + 2, \lambda, domain = \mathbb{Z}\right)$$

Med korollar 2.42 er $a_1 > 0, \ a_2 > 0$ og derved er systemet asymptotisk stabilt.

$x(t) = te^{-t}$ indsættes i differentialligningssystemet for at undersøge, om denne form giver en partikullær løsning. $x'(t)$ giver da

[21]:
```
t = Symbol('t')
v = Symbol('v')
Eq(diff(Function('x')(t),t),diff(t*exp(-t),t)*v)
```

[21]: $\frac{d}{dt}x(t) = v\left(-te^{-t} + e^{-t}\right)$

Ved indsættelse i systemet med $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ fås

$$\left(-te^{-t} + e^{-t}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} te^{-t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{-t} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hvis dette skal overholdes for alle $t \in \mathbb{R}$ skal koefficienter for hver orden af t være ens på begge sider:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hvis det skal være en løsning skal $v_1 = 1, v_2 = -1$ Dette indsættes i $v_1 + v_2 = 1 + (-1) = 0$ hvilket overholder ligningerne. Altså er der en partikulær løsning

$$x_p(t) = te^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Den fuldstændige løsning til systemet kan nu opskrives med sætning 1.20 som

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = c_1e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Opgave 3

Om funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er følgende givet: f er en lige funktion, f er 2π periodisk, og på intervallet $[0, \pi]$ er funktionen givet ved følgende forskrift:

$$f(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \quad \text{for } t \in [0, \pi]. \tag{2}$$

Det kan anvendes, at for et heltal n og en ikke heltallig reel parameter a er

$$\int_0^\pi \cos(at)\cos(nt)dt = \frac{a\sin(\pi a)\cos(n\pi)}{a^2 - n^2}.$$

1. Vis at f har Fourierrækken $-\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2-9)} \cos(nt)$.
2. Undersøg om f er kontinuert og om Fourierrækken for f er uniformt konvergent.
3. Har Fourierrækken for f en konvergent majorantrække?
4. Bestem summen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9}$. Vink: Indsæt en passende værdi for t i Fourierrækken for f.

f er en lige funktion. Derfor har den med sætning 6.6 de reelle Fourierkoefficienter

$$b_n = 0$$
$$a_n = \tfrac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(\tfrac{3}{2}t\right)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(\frac{3}{2}t\right) = \frac{2}{\pi}\frac{3}{2}\frac{\sin\left(\pi\frac{3}{2}\right)\cos(n\pi)}{\frac{9}{4} - n^2} = \frac{12}{\pi}\frac{-1\cos(n\pi)}{9 - 4n^2}$$

Med $\cos(nx) = (-1)^n$

$$a_n = \frac{12}{\pi}\frac{(-1)^n}{4n^2 - 9} = \frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2 - 9)}$$
$$a_0 = \frac{12(-1)^0}{\pi(4 \cdot 0^2 - 9)} = -\frac{4}{3\pi}$$

Fourierrækken opskrives med korollar 6.7 (i)

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) = -\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2 - 9)}\cos(nx)$$

Hvorvidt rækken er kontinuert skal undersøges. Da cosinus i sig selv er en kontinuert funktion, vil f kun kunne være kontinuert hvor den gentages. Da funktionen er lige, må $f(-t) = f(t) \Leftarrow f(0) = f(-0)$ så funktionen er kontinuert i $t = 0$. I $t = \pi$ hvor funktionen gentages må det ligeledes gælde, at $f(\pi) = f(-\pi) = f(-\pi + 2\pi)$. Funktionen er altså også kontinert i endepunkterne. f er altså kontinuert i alle $t \in \mathbb{R}$. Med korollar 6.17 (ii) er den derved også uniformt konvergent.

Der kan findes en majorantrække for f med definition 5.31. Her sættes $f_n(x) = \frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2-9)}\cos(nx)$. Da bliver

$$|f_n(x)| = \left|\frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2 - 9)}\cos(nx)\right| = \frac{12}{\pi}\left|\frac{\cos(nx)}{4n^2 - 9}\right| \le \frac{12}{\pi}\frac{1}{4n^2 - 9}, \text{ for } n \ge 2$$

Altså er der en Majorantrække for f givet ved

$$\frac{12}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4n^2-9}$$

Denne er ækvivalent med $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, da

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{4n^2-9}}=\frac{4n^2-9}{n^2}\to 4=C \text{ for } n\to\infty$$

Da $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ er konvergent, må majorantrækken også være konvergent.

Ved at sætte $t=\pi$ i fourierrækken for f fås

$$f(\pi)=-\frac{2}{3\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2-9)}\cos(nt)=-\frac{2}{3\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^n(-1)^n}{\pi(4n^2-9)}=-\frac{2}{3\pi}+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-9}$$

Derved må

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-9}=\pi\frac{f(\pi)+\frac{2}{3\pi}}{12}=\pi\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\frac{2}{3\pi}}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-9}=\pi\frac{\frac{2}{3\pi}}{12}=\frac{1}{18}$$