中国人民大学 2019-2020 学年第二学期

高等代数 II 期末试题

得分	评卷人

题号	一	二	三	合计
题分	28	42	30	100
得分				

一．填空与选择（共 28 分，每小题 4 分）

1，若 $(x^2+mx+1)\,|\,(x^4+px^2+q)$，则 m,p,q 应满足条件____________________.

2，若 V 为 n 维线性空间，则 V 上零变换的核空间是______，V 上零变换的值域是______.

3，已知 n 阶方阵 A,B，则 A 相似于 B 是指____________________________________，

A 合同于 B 是指______________________________________，

A 等价于 B 是指____。

4，$\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(2,0,1),\alpha_3=(1,1,1),\beta_1=(1,2,-1),\beta_2=(2,2,-1),\beta_3=(2,-1,-1)$ 是

线性空间 R^3 的两组基，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为__________________.

5, 设 $\alpha=(a_1,a_2),\ \beta=(b_1,b_2)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的任意两个向量，则下列定义的函数是 $\mathbf{R}^2$ 的内积的是 __________.

A, $(\alpha,\beta)=a_1b_2+a_2b_1$；　B, $(\alpha,\beta)=(a_1+a_2)b_1+(a_1+2a_2)b_2$

C, $(\alpha,\beta)=a_1b_1-a_2b_2$；　D, $(\alpha,\beta)=a_1{}^2+b_2{}^2$

6, 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则线性方程组 $AX=\beta$ 的最小二乘解唯一的充分必要条件是________________.

7, 若 2 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 1\end{pmatrix}$ 的两个特征值的积为 2, 那么这两个特征值的平方和是______.

得分	评卷人

二．计算题（共 42 分）

1.(10 分)：已知在欧氏空间 $\boldsymbol{R}^4$ 中，

$$\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 1,-1,\ 1)^T,\ \boldsymbol{\beta}=(1,\ -1,1,\ 1)^T,$$

$$\boldsymbol{\gamma}=(1,0,1,\ 1)^T,$$

又有 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

（1），计算向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的长度及夹角；

（2），计算 $\boldsymbol{W}^{\perp}$，并给出 $\boldsymbol{W}^{\perp}$ 的一组标准正交基；

2（10 分），已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$

(1)求矩阵 A 的特征值和特征向量；

(2)求一正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角阵，并求出该对角阵. 其中 Q^T 为 Q 的转置.

3（10 分）令 F 是有理数域，求 $F[x]$ 的多项式

$$f(x)=x^4-2x^3-4x^2+4x-3,g(x)=2x^3-5x^2-4x+3$$

的最大公因式。

.

4（12 分），已知 $P[x]_3$ 的线性变换为

$$\sigma(a+bx+cx^2)=(4a+6b)+(-3a-5b)x+(-3a-6b+c)x^2$$

（1） 求 σ 在 $P[x]_3$ 的基 $1,x,x^2$ 下的矩阵 A；

（2） 求 $P[x]_3$ 的一组基，使得 σ 在这组基下的矩阵是对角矩阵.

得分	评卷人

三．证明题（每小题 10 分，共 30 分）

1. 设 W_1, W_2 都是数域 P 上的向量空间 V 的有限维子空间，求证：

（1）W_1+W_2 也是有限维的；

（2）$\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\bigcap W_2)$.

2，设 3 维线性空间 V 的线性变换 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$，

求证：$W=L(-\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_3)$ 是 σ 的不变子空间.

3. 已知欧氏空间 V，对于任意的向量 $\alpha\in V$ 及取定单位向量 $\alpha_0\in V$，定义变换 $\sigma(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\alpha_0)$.（注：单位向量即长度为 1 的向量，$(\alpha,\alpha_0)$ 指 α 与 α_0 的内积.）

求证：（1）σ 是线性变换；

（2）σ 既是正交变换又是对称变换；

（3）α_0 是 σ 的一个特征向量，并求其对应的特征值.