2018 级高等代数 Ⅰ 期中考试试题

（考试时间 2018 年 11 月 22 日 14：00－15：30）

我郑重承诺：在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严。

承诺人签字：杨远航

学号 201820176б 姓名 杨远航

题号	一	二	三	四	五	六	总分
题分	20	30	10	15	10	15	
得分	19	25	8	10	15	10	87

得分	评卷人
19	[illegible]

一．判断题(每小题 5 分，共 20 分)判断下列命题是否正确,并说明理由.

1、齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=0, \\ 2x_1+2^2x_2+\cdots+2^nx_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ nx_1+n^2x_2+\cdots+n^nx_n=0. \end{cases}$ 只有零解；

正确.

系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1^2 & \cdots & 1^n \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{pmatrix} \Rightarrow n! \begin{pmatrix} 1 & 1^1 & \cdots & 1^{n-1} \\ 1 & 2^1 & \cdots & 2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n^1 & \cdots & n^{n-1} \end{pmatrix}$$

→范德蒙德

的行列式 $|A| = n! \prod_{1\le i<j\le n+1}(j-i) \neq 0$

故方程组只有零解

2、设 γ 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的一个解，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系，则 γ，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性无关；

正确.

由已知，设 V_0 为 $AX=\beta$ 的一个特解，则

存在 $K_1, K_2, \cdots, K_{n-r}$，使得

$V = V_0 + K_1\eta_1 + K_2\eta_2 + \cdots + K_{n-r}\eta_{n-r}$ ①

若 $V, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性相关，且由

已知，$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性无关，则存在 $a_1, \cdots, a_{n-r}$，

使得

$V = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \cdots + a_{n-r}\eta_{n-r}$ ②

由①②得 $V_0 = (-K_1+a_1)\eta_1 + (-K_2+a_2)\eta_2 + \cdots + (-K_{n-r}+a_{n-r})\eta_{n-r}$

故 V_0 为 $AX=0$ 的解，这与 V_0 为 $AX=\underset{\neq 0}{\beta}$ 的解矛盾. 故假设错误，结论正确

3、行列式等于零，则该行列式至少有两列对应成比例；

错误.

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $|A|=0$，但 A 的列向量

$\alpha_1=(1,0)$, $\alpha_2=(0,0)$, 不存在 k 使得 $\alpha_1=k\alpha_2$

$A=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&-1\\2&3&-2\end{vmatrix}=0$ $(r_3=r_1+r_2)$

但没有两列(行)成比例.

4、若矩阵 A 的所有 $r+1$ 级的子式全为零，则 A 的秩为 r。（　　）

错误.

令 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

令 $r=2$，则 A 的 3 级子式全为 0，但 $r(A)=1\neq r$

得分	评卷人
25	

二、填空与选择（每小题 5 分，共 30 分）

1、行列式 $\begin{vmatrix}0&a&0&0\\b&c&0&0\\0&0&d&e\\0&0&0&f\end{vmatrix}$ 的值等于 $-abdf$；

2、齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ ，$\alpha_i\in P^m$ 有无穷多解，那么其基础解系含有 ~~$n-m$~~ $\boxed{n-r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}$ 个解向量；

3、设 $\alpha\neq\beta$，则

$$\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha\beta&&&\\1&\alpha+\beta&\alpha\beta&&\\&1&\alpha+\beta&\alpha\beta&\\&&\ddots&\ddots&\ddots\\&&&1&\alpha+\beta\end{vmatrix}_{n\times n}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta};$$

4、设 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$，则 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=$ $(2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i})n!$；

$A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}=$ $(2-n)n!$.

5、已知 β_1、β_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解，α_1、α_2 是其导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系，k_1、k_2 为任意常数，则方程组 $Ax=b$ 的通解可表成[D].

A. $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　B. $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

C. $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　D. $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

6、设 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T,\ \alpha_2=(1,\ 2,\ 3)^T,\ \alpha_{13}=(1,\ 3,\ t)^T$，则当 $t=$ 5 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，当 $t=$ ~~[illegible]~~ $R\setminus\{5\}$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

得分	评卷人
8	[illegible]

三.（10 分）　计算行列式：n!

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix}2^n-2 & 2^{n-1}-2 & \cdots & 2^3-2 & 2\\ 3^n-3 & 3^{n-1}-3 & \cdots & 3^3-3 & 6\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n^n-n & n^{n-1}-n & \cdots & n^3-n & n^2-n\end{vmatrix}$$

$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1\le i<j\le n+1}(j-i)\quad (n\geq 2)$

~~$n=2$ 时, $D_1=2^2-2=2$~~

$\boxed{=(-1)^{(n-1)(n-2)/2}\cdot n!\,(n-1)!\cdots 2!}$

2

~~$n\geq 3$ 时,~~

加边得

$$D_{n-1}=D'_{n-1}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 2 & 2^n-2 & 2^{n-1}-2 & \cdots & 2^2-2\\ 3 & 3^n-3 & 3^{n-1}-3 & \cdots & 3^2-3\\ \cdots & & & & \\ n & n^n-n & n^{n-1}-n & \cdots & n^2-n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2^n & 2^{n-1} & \cdots & 2^2\\ 3 & 3^n & 3^{n-1} & \cdots & 3^2\\ \cdots & & & & \\ n & n^n & n^{n-1} & \cdots & n^2\end{vmatrix}$$

得分	评卷人
10	戌

四（15分）设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + (4+\mu)x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

已知 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是该方程组的一个解，试求

(1) 方程组的全部解，并用对应的齐次方程组的基础解系表示全部解

(2) 该方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解

(1) 代入已知解得

$$\begin{cases} 1-\lambda+\mu-1=0 \\ 2-1+1-2=0 \\ 3+(2+\lambda)(-1)+4+\mu-4=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda=\mu$

~~系数矩阵~~ 齐次方程组

增广矩阵

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-2\lambda & 4-2\lambda & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2\lambda & 4-2\lambda & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

~~$\alpha_1=(1,0,0)$, $\alpha_2=(\lambda,1,0)$, $\alpha_3=(\lambda,1,2)$~~

~~为一组基础解系~~

~~记 α_0~~

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = +\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

即 令 $x_4 = 1$，得

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\lambda x_3 = -1 \\ x_2+x_3 = 0 \\ 2x_3 = -1 \end{cases}$$

于是一组基础解系为 $\eta_1 = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^T$

原方程组的特解记为 $\eta_0 = (1, -1, 1, -1)^T$

于是通解为 $\eta_0 + k\eta_1$，k 为任意数

(2) 通解写成

$(k-1, -k+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}, -k+1)^T$

$x_2 = x_3$ 时，$k=\frac{1}{2}$，此时解为

$(-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})^T$ ×

(2) $\lambda \neq \frac{1}{2}$ $(-1,0,0,1)$

$\lambda = \frac{1}{2}$ $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$

好像有问题

−5

$\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = 1 - 3x_3 - x_4 \end{cases}$$

$(x_3, x_4) = (1, 0)$　$\eta_1 = (\frac{1}{2}, -2, 1, 0)^T$

$(0, 1)$　$\eta_2 = (-1, 0, 0, 1)^T$

记 $\eta_0 = (1, -1, 1, -1)^T$

通解：$\eta_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$，$k_1, k_2$ 为任意数

得分	评卷人
15	

五（15 分） 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & x & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & x & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 2 & x & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$D_n = 2\begin{vmatrix} \frac{x}{2} & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & x & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & x & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

从n-1行开始，前一行减后一行，得

$$D_n = 2\begin{vmatrix} \frac{x}{2} & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1-\frac{x}{2} & x-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2-x & x-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2 \end{vmatrix}$$

~~按第1列展开~~

从n列开始，后一列加前一列，得

$$D_n = 2\begin{vmatrix} \frac{x}{2}+2(n-1) & 2(n-1) & 2(n-2) & \cdots & 2 \\ \frac{x}{2}-1 & x-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1-\frac{1}{2}r_2}{=} 2\begin{vmatrix} \frac{x}{2}+(n-1) & 2(n-1) & 2(n-2) & \cdots & 2 \\ 0 & x-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(\frac{x}{2}+n-1\right)(x-2)^{n-1}$$

装 订 线

得分	评卷人
10	[illegible]

六（10分） 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组线性无关的$n$维向量组,令

$\alpha=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n$（$\lambda_i$为实数，$i=1,2,\cdots,n$），

证明：$\alpha-\alpha_1,\alpha-\alpha_2,\cdots,\alpha-\alpha_n$的线性相关的充分必要条件是$\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n=1$.

证：~~设~~存在一组实数$k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得

$$k_1(\alpha-\alpha_1)+k_2(\alpha-\alpha_2)+\cdots+k_n(\alpha-\alpha_n)=0$$

代入α，展开整理得

$$[\lambda_1(k_1+k_2+\cdots+k_n)-k_1]\alpha_1+[\lambda_2(k_1+\cdots+k_n)-k_2]\alpha_2+\cdots+[\lambda_n(k_1+k_2+\cdots+k_n)-k_n]\alpha_n=0$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关得

$$\begin{cases}\lambda_1\cdot\sum_{i=1}^n k_i=k_1\\ \lambda_2\cdot\sum_{i=1}^n k_i=k_2\\ \cdots\cdots\\ \lambda_n\cdot\sum_{i=1}^n k_i=k_n\end{cases}\Rightarrow \left|\ \cancel{(\lambda_1-1)k_1+\lambda_1k_2}\right.$$

~~n个式子相加得~~:

$$\cancel{\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\lambda\ (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\cdot\sum_{i=1}^n k_i-\sum_{i=1}^n k_i}$$

① 若$(\alpha-\alpha_1),(\alpha-\alpha_2),\cdots,(\alpha-\alpha_n)$线性相关,

则$k_1,k_2,\cdots,k_n$不全为0，则齐次方程有组

$$\begin{cases}(\lambda_1-1)k_1+\lambda_1k_2+\cdots+\lambda_1k_n=0\\ \lambda_2k_1+(\lambda_2-1)k_2+\cdots+\lambda_2k_n=0\\ \cdots\cdots\\ \lambda_nk_1+\lambda_nk_2+\cdots+(\lambda_n-1)k_n=0\end{cases}\ (*)\text{有非零解}$$

故系数行列式$|A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda_1-1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1\\ \lambda_2&\lambda_2-1&\cdots&\lambda_2\\ \lambda_3&\lambda_3&\cdots&\lambda_3\\ \cdots&\cdots&\cdots&\\ \lambda_n&\lambda_n&\cdots&\lambda_n-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^n\lambda_i-1&0&0&0&\cdots&0\\ t_1&-1&0&0&\cdots&0\\ t_2&0&-1&0&\cdots&0\\ \cdots&&\cdots&\ddots&&\cdots\\ t_{n-1}&0&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}$$

故$|A|=\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i-1\right)(-1)^{n-1}=0$

$\Rightarrow\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$

② 若$\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$，则由①可知$|A|=0$，于是方程组(*)有非零解，故存在一组不全为0的$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1(\alpha-\alpha_1)+\cdots+k_n(\alpha-\alpha_n)=0$$

于是$\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_n$线性相关

综上，命题得证.