中国人民大学

2016-2017 第一学期“高等数学”期末考试题 A 卷

一．计算下列各题(共有 5 个题，每题 6 分, 共 30 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$　　#

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{3-e^x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{\sin x}\ln\frac{3-e^x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}\ln\frac{3-e^x}{2}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}$

其中，$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}\cdot\ln\dfrac{3-e^x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sin x}\cdot\dfrac{1-e^x}{2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^x}{2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-e^x}{2\cos x}=-\dfrac{1}{2}$　　#

3. 已知函数 $f(x)$在$(1,+\infty)$内可导,且有$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f((x+h)^2)-f(x^2+h)}{h}=x^2$，$x\in(1,+\infty)$,求$d[f(\dfrac{1}{x})]$.

解：

$$\lim_{h\to0}\frac{f((x+h)^2)-f(x^2+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{f((x+h)^2)-f(x^2)}{h}-\frac{f(x^2+h)-f(x^2)}{h}\right)=\left(f(x^2)\right)'-f'(x^2)=f'(x^2)\cdot2x-f'(x^2)$$

$$\Rightarrow\quad f'(x^2)(2x-1)=x^2\quad\Rightarrow\quad f'(x^2)=\frac{x^2}{2x-1},\qquad f'(u)=\frac{u}{2\sqrt{u}-1}$$

$$d[f(\frac{1}{x})]=f'(\frac{1}{x})\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'dx=\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\frac{1}{x}}-1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2\sqrt{x}-x}\cdot\frac{-1}{x^2}dx=\frac{1}{x^2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}dx\qquad\#$$

4. 设ℓ是曲线 $y=x-\dfrac{1}{x}$的一条斜率为 2 的切线，求切点坐标

解： $y'=1+\dfrac{1}{x^2}$

令 $y'=2$, 即 $1+\dfrac{1}{x^2}=2 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2}=1 \Rightarrow x=1$ 或 $-1 \Rightarrow$ 切点坐标 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ #

5. 已知曲线 $y=f(x)$经过$(1,1)$点,且曲线上任意点$(x,f(x))$处切线的斜率为 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$,

求此曲线的方程 .

解：已知 $f'(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{x}+C$

又已知 $f(1)=1 \Rightarrow C=\dfrac{5}{3} \Rightarrow$ 曲线方程为 $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{3}$ #

二. 计算下列各题(共有 6 个小题，每题 6 分, 共 36 分)

6. 设 $y=\dfrac{x\sin x}{\sin x+\cos x}$，求$y'$.

解：

$$y'=\frac{(x\sin x)'(\sin x+\cos x)-x\sin x(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$=\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x+\cos x)-x\sin x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{\sin^2 x+\sin x\cos x+x}{(\sin x+\cos x)^2} \quad \#$$

7. 设 $y=y(x)$是由方程 $y^2+2\ln y-x^4=0$ 确定的函数,求$y'\big|_{(1,1)}$.

解:方程两边求导:

$$2y\cdot y'+2\frac{y'}{y}-4x^3=0 \quad \text{或} \quad 2(y+\frac{1}{y})\cdot y'=4x^3 \Rightarrow y'=\frac{2x^3y}{y^2+1}\ ,\ y'\big|_{(1,1)}=1 \quad \#$$

8. 设 $x=x(y)$是 $y=\ln x+e^x$ 的反函数，求$\dfrac{dx}{dy}$和$\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

解:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{\frac{1}{x}+e^x}=\frac{x}{1+xe^x}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{x}{1+xe^x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+xe^x}\right)\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{1-x^2e^x}{(1+xe^x)^2}\cdot\frac{x}{1+xe^x}=\frac{x-x^3e^x}{(1+xe^x)^3}\qquad \#$$

9. 求不定积分 $\int\frac{x\sin\sqrt{2x^2-2}}{\sqrt{2x^2-2}}dx$.

解:

$$原式=\int\frac{\sin\sqrt{2x^2-2}}{2\cdot2\sqrt{2x^2-2}}d(2x^2-2)=\frac{1}{2}\int\sin\sqrt{2x^2-2}\,d\sqrt{2x^2-2}=-\frac{1}{2}\cos\sqrt{2x^2-2}+C\qquad \#$$

10. 求不定积分 $\int\ln(1+\sqrt{\frac{1-x}{x}}\ )dx$.

解: 原式 $=\int\ln(1+\sqrt{\frac{1-x}{x}}\ )dx$　　　　令 $\sqrt{\frac{1-x}{x}}=u\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{1+u^2}$

$$=\int\ln(1+u\ )\ d\left(\frac{1}{1+u^2}\right)=\ln(1+u\ )\cdot\frac{1}{1+u^2}-\int\frac{1}{1+u^2}\ d\ln(1+u\ )=\frac{\ln(1+u)}{1+u^2}-\int\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{1}{1+u}du$$

$$=\frac{\ln(1+u)}{1+u^2}-\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1-u}{1+u^2}\right)du=\frac{\ln(1+u)}{1+u^2}-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1+u^2}-\frac{u}{1+u^2}\right)du$$

$$=\frac{\ln(1+u)}{1+u^2}-\frac{1}{2}\ln(1+u)-\frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{4}\ln(1+u^2)+C$$

$$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1-x}{x}})-\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{\frac{1-x}{x}})-\frac{1}{2}\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}-\frac{1}{4}\ln x+C\qquad \#$$

11. 已知$f(x)$的一个原函数是 $\dfrac{\sin x}{x}$ ，求不定积分 $\int x^2 f(3x)dx$

解：由已知$\Rightarrow f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'$

$\int x^2 f(3x)dx$ 令$3x=u \Rightarrow x=\dfrac{1}{3}u$ ，$dx=\dfrac{1}{3}du$

$$=\int\left(\frac{u}{3}\right)^2 f(u)\cdot\frac{1}{3}du=\frac{1}{27}\int u^2 f(u)du$$

$$=\frac{1}{27}\int u^2\left(\frac{\sin u}{u}\right)'du=\frac{1}{27}\int u^2 d\left(\frac{\sin u}{u}\right)$$

$$=\frac{1}{27}\left(u^2\cdot\frac{\sin u}{u}-2\int\sin u du\right)=\frac{1}{27}\left(u\sin u+2\cos u\right)+C=\frac{1}{27}\left[3x\sin(3x)+2\mathrm{co}(3x)\right]+C$$ #

三. 综合题（共有 4 个题，共 34 分）

12.（本题 8 分）

设$e<a<b<e^2$，证明不等式：$(\ln b)^2-(\ln a)^2>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$

分析：只要证明，当$e<a<b<e^2$时，有 $(\ln b)^2-\dfrac{4}{e^2}b>(\ln a)^2-\dfrac{4}{e^2}a$

证明：令 $f(x)=(\ln x)^2-\dfrac{4}{e^2}x$ ，$x\in(0,+\infty)$ (只要研究函数$f'(x)$在(e,e^2)内的单调性)

在 $(0,+\infty)$ 内，有 $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{4}{e^2}$ $f''(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}\Rightarrow$ 令 $f''(x)=0\Rightarrow x=e$

	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$	e^2
$f''(x)$	+	0	−	
$f'(x)$	↗	$\dfrac{2}{e}-\dfrac{4}{e^2}$	↘	0

$\Rightarrow$ 在(e,e^2) 内$f'(x)>0\Rightarrow$ 在(e,e^2) 内$f(x)$↗

当 $e<a<b<e^2$ 时有 $f(a)<f(b)$ 即 $(\ln a)^2-\dfrac{4}{e^2}a<(\ln b)^2-\dfrac{4}{e^2}b$

13.（本题 8 分）

设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，且$f(1)=4$

证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得 $\pi(1+\xi^2)=f(\xi)+(1+\xi^2)\arctan\xi\cdot f'(\xi)$

证明：$\pi(1+\xi^2)=f(\xi)+(1+\xi^2)\arctan\xi\cdot f'(\xi)$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{1+\xi^2}f(\xi)+\arctan\xi\cdot f'(\xi)=\left[\arctan x\cdot f(x)\right]'_{x=\xi}=\pi\qquad \xi\in(0,1)$$

令 $F(x)=\arctan x\cdot f(x)$，则$\begin{cases}F(x)\text{在闭区间}[0,1]\text{上连续}\\ F(x)\text{在开区间}(0,1)\text{内可导}\\ F(0)=0,\ F(1)=\dfrac{\pi}{4}\cdot 4=\pi\end{cases}\xrightarrow{\text{拉格朗日中值定理}}$ $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=F(1)-F(0)=\pi$

即 $\dfrac{1}{1+\xi^2}f(\xi)+\arctan\xi\cdot f'(\xi)=\pi$ #

14.（本题 8 分）

某厂生产某产品Q吨时的总成本为 $C(Q)=8+2Q^{\frac{3}{2}}$(万元)，问当产量Q为多少时，产品的平均成本最低？

解：产量为Q 吨时的平均成本 $A(Q)=\dfrac{C(Q)}{Q}=\dfrac{8}{Q}+2Q^{\frac{1}{2}}\qquad Q\in(0,+\infty)$

$$A'(Q)=-\frac{8}{Q^2}+\frac{1}{\sqrt{Q}}=\frac{\left(\sqrt{Q}\right)^3-8}{Q^2}\ ,\qquad A''(Q)=\frac{16}{Q^3}-\frac{1}{2\sqrt{Q^3}}$$

$\begin{cases}\text{驻点}Q=4\text{，且是唯一的可能极值点}\\ A''(4)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{3}{16}>0\end{cases}\Rightarrow$ 平均成本$A(Q)$在$Q=4$时有极小值，也是最小值，$A(4)=6$(万元)

答：当产量$Q=4$吨时，平均成本达到最小，为6万元 #

15.（本题 10 分）

确定函数 $y=\dfrac{(x-2)^2}{2x}$ 的定义域，单调区间、凹凸区间、极值和拐点坐标，以及渐近线，并作出该函数的草图.

解：

(1) 定义域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

(2) $y'=\dfrac{x^2-4}{2x^2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$ $\qquad y''=\dfrac{4}{x^3}$

令 $y'=0 \Rightarrow x=\pm 2$ (驻点), 无 y' 或 y'' 不存在的点.

(3)

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	不存在	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	不存在	$+$	$+$	$+$
y		极大值 -4		不存在		极小值 0	

(4) 渐近线

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x)=\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{(x-2)^2}{2x}=\pm\infty \Rightarrow \text{当}x\to 0^{\pm}\text{时,有垂直渐近线 } x=1\text{和}x=-1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-2)^2}{2x}=\pm\infty \Rightarrow \text{无水平渐近线}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-2)^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\triangleq a\\ &\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4-4x}{2x}=-2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{无水平渐近线}$$

(5)重要点 $(2,0)$, $(1,\dfrac{1}{2})$, $(-2,4)$, $(-1,-\dfrac{9}{2})$