《高等代数 I》

一、 判断题（每小题 5 分，共 20 分）判断下列命题是否成立，并简要说明理由。

1、若$n(n\geq 2)$阶行列式$D=0$，则 D 有两行元素成比例。

2、若α_1，α_2，α_3是某齐次线性方程组的基础解系，那么$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也是它的基础解系。

3、设 n 阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$,则线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,n-1}x_{n-1}=a_{1n} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,n-1}x_{n-1}=a_{2n} \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,n-1}x_{n-1}=a_{nn} \end{cases}$$

一定无解。

4、如果齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$只有零解，那么当 β 不是零向量时，非齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta$有唯一解.

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

5、行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}=$ ________.

6、 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是非齐次线性方程组的三个解，已知$\alpha_1=(2,3,4,5),\alpha_2+\alpha_3=(1,2,3,4)$，且该方程组的系数矩阵的秩为 3，则其解集可表示为______;

7、在五阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号为________；在六阶行列式中，$a_{32}a_{45}a_{64}a_{13}a_{51}a_{26}$这一项的符号为 _____;

8、 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 1 \end{pmatrix}$，则$A$中所有元素的代数余子式之和等于_____。

三．(15 分) 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

四（20 分）讨论a,b为何值时，方程组

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=1 \\ x+ay+abz=a \\ bx+a^2y+a^2bz=a^2b \end{cases}$$

有唯一解？有无穷多解？无解？当有解时求出其解集.

五．(10 分) 设$\alpha_1=(1,0,1,0),\alpha_2=(-1,2,1,1),\alpha_3=(1,2,3,1),\alpha_4=(1,4,5,2),\alpha_5=(1,6,7,3)$，求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组，并将每个向量都用极大线性无关组线性表出.

六、(15 分) 设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta$为 m+1 个向量，其中 $m>1$ 且

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m.$$

证明：$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_m$线性无关当且仅当$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关.