算法分析与设计期中试题

（2021—2022 学年第二学期，高瓴人工智能学院 2020 级本科生）

（时间：2022 年 4 月 21 日下午 2：00—4：30, 地点: 一教 1602 教室）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	总分
题分	5	5	5	5	5	5	10	15	15	15	10	5	100
得分													

一.（5 分，单选题）基于比较的排序算法，最优时间复杂度为

A. $\Theta(\mathrm{n}\log n)$　B. $\Theta(\mathrm{n})$　C. $\Theta(n^2)$　D. $\Theta(\mathrm{n}\log\log n)$

二.（5 分，单选题）$\mathrm{T(n)} = 16\mathrm{T}(\frac{n}{4}) + 10^{10}\mathrm{n}$的解为

A. $\Theta(\mathrm{n}\log n)$　B. $\Theta(\mathrm{n})$　C. $\Theta(n^2)$　D. $\Theta(\mathrm{n}\log\log n)$

三.（5 分，单选题）以下排序算法中，不稳定的是

A. 计数排序算法　　B. 快速排序算法

C. 基数排序算法　　D. 冒泡排序算法

四.（5 分，单选题）以下关于哈希的说法，正确的是

A. 链表哈希（Chaining-Hash）的最坏情况时间复杂度为$O(\log n / \log\log n)$

B. 随着装载因子$\alpha = n/m$趋于 1，线性探查（Linear Probing）的期望查询时间会大于链表哈希的期望查询时间

C. 假设哈希函数为全域哈希（Universal Hashing），则链表哈希可以用球与盒子模型来分析

D. 完全随机哈希函数（Truly Random Hash Function）可以在 O(1)时间计算

五.（5 分，**多选题**）以下说法，正确的有哪几个？

A. 堆排序的时间复杂度为$\mathrm{O}(n^2)$

B. 快速排序的最坏情况时间复杂度为$\mathrm{o}(n^2)$

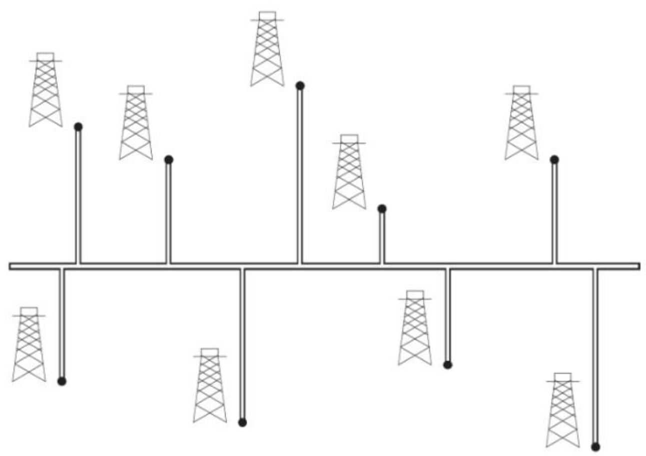
C. Strassen 矩阵乘法的时间复杂度为$\Omega(n^2)$

D. 两个 n 位大整数乘法的分治算法的时间复杂度为$\omega(n\log n)$

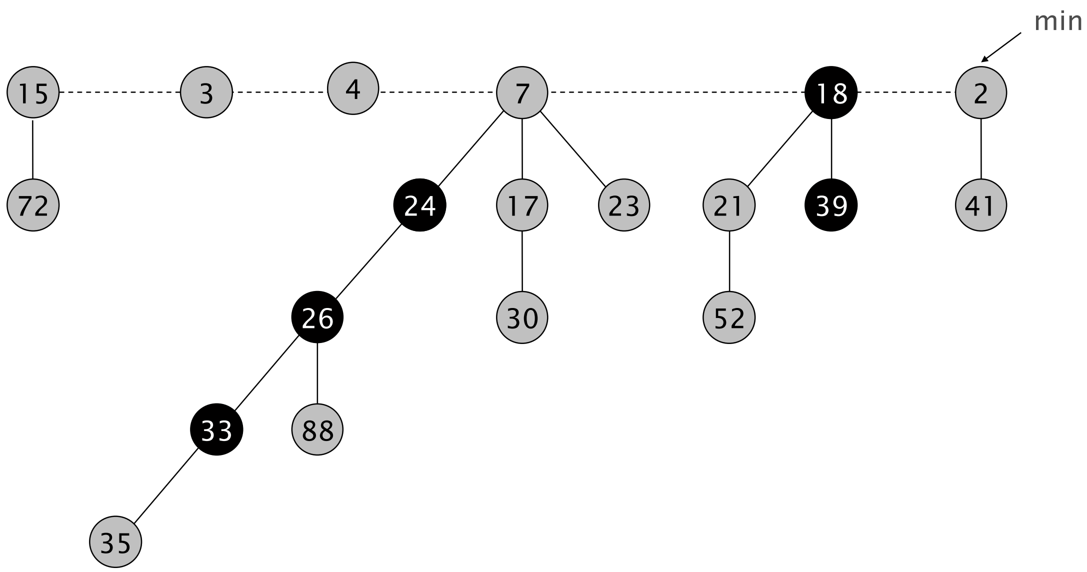
六.（5 分） 主方法是否可用于求解$\mathrm{T}(\mathrm{n})=8\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{n}}{2}\right)+3n^3\log^3 n$？说明理由并求解T(n)。

主定理的结论可以直接使用。

七．（10 分）Olay 教授是一家石油公司的顾问。这家公司正在计划建设一条从东向西的输油主管道，这一主管道将穿越一个有 n 口油井的油田。公司希望有一条支线管道从油井**垂直地**（即由南向北）连接到主管道，如图所示。给定每个油井的 x 和 y 坐标，设计算法确定主管道的最优位置（即主管道的 y 坐标），使得各支线管道的长度和最小，证明算法的正确性，并给出时间复杂度。这道题的解答中可直接使用课上讲过的算法，无需写出伪代码和具体的时间复杂度分析。



八.（15 分）考虑以下斐波拉契堆。假设黑色节点为被标记节点，灰色节点为普通节点。虚线连接的节点为根链表。



（1） 画出对上图斐波拉契堆执行 Exact-Min 的最终结果。在本例中该操作的真实代价和摊还代价分别为多少？写出斐波拉契堆的势能函数的表达式以及本例中该操作的势能变化。

（2） 画出对上图斐波拉契堆执行 Decrease_Key 操作（将 35 降为 1）的最终结果。在本例中该操作的真实代价和摊还代价分别为多少？写出该操作的势能变化。

九．(15 分) 考虑课上讲过的为二进制计数的 INCREMENT 算法

```
INCREMENT(A)
    i ← 0
    while i < length[A] and A[i] = 1 do
        A[i] ← 0                ▻ reset a bit
        i ← i + 1
    if  i < length[A]
        then  A[i] ← 1          ▻ set a bit
```

（1）假设 A 的初始值为 0，利用势能法分析 INCREMENT 算法的摊还代价。

（2)如果 A 的初始值不为 0,应该如何分析该算法的摊还代价？设$k = length[A]$，n为执行 INCREMENT(*A*)的次数。考虑$n = O(1)$和$n = \Omega(k)$两种情况。

十. （15 分）考虑课上讲过的随机重排算法 PERMUTE-BY-SORTING，其输入是一个数组 A，输出为 A 的随机重排。

```
PERMUTE-BY-SORTING(A)
n = length[A]
for(i=1; i<=n; i++)
        P[i] = RANDOM(1, n^3)
sort A, using P as sort keys
return A
```

（1） 证明：以至少$1-1/n$的概率，产生的随机优先级 $P[i]$, i=1,..,n 均不相同。假设以下马尔科夫不等式可以直接使用：对任意非负随机变量 X，我们有$\Pr[X \geq k \cdot \mathrm{E}[X]] \leq \frac{1}{k}$（注意也可以不使用马尔科夫不等式）。

（2） 用较好的方法实现该算法的时间复杂度是多少？给出尽量紧的界并说明理由。

十一．（10 分）考虑球与盒子模型，即将若干个球独立均匀地扔到n个盒子中。

（1）若扔的球数等于n，求证：当n趋于无穷时，空盒子所占比例的期望趋于$1/e$；

（2）考虑如下过程：一直往盒子中扔球，直到所有盒子里都有球时停止。设X为停止时的总扔球数（注意X是一个随机变量），求证$\mathrm{E}[X] = \mathrm{O}(n \log n)$。

十二. （5 分）假设我们希望将$\{0,1\}^w$（即w个比特的整数, 范围为 0 到2^w-1）范围的关键字用哈希函数映射到$\{0,1\}^l$范围的哈希表（即 0 到2^l-1范围的数组）。证明以下哈希函数族H是全域的：

$$H=\{h \mid h(x)=\lfloor (ax \bmod 2^w)/2^{w-l} \rfloor\}$$

其中a为从$\{0,1\}^w$范围内选出的一个随机的奇数。该哈希函数族与我们课上提到的另一个全域哈希族

$$H'=\{h \mid h(x)=(ax+b \bmod p) mod\ 2^l\}$$

相比（其中p是一个大于2^w的质数，a和b都是在$[p]$中选取的随机数，a不为0），哪一个计算更高效？