中国人民大学考试试卷　　高等代数 A1 试题 A 卷

2011-2012 年度第一学期（考试时间 2012 年 1 月 6 日上午 8:00—10:00 ）

我郑重承诺：在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严。 承诺人签字：

序号___________ 专业_________ 学号_____________ 姓名_____________

高等代数 A1 期末试题（2012 年 1 月 6 日上午 8:00-10：00）

题号	一	二	三	合计	阅卷人
题分	30	35	35	100	
得分					

得分	评卷人

一．填空（每小题 5 分，共 30 分）

1．多项式 $f(x)=x^4-3x^3+a_1x+a_0, g(x)=x^2-3x+1$，则 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 的充分必要条件是___________________________________。

2．α_1，α_2 为 2 维列向量，矩阵 $A=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2), B=(\alpha_1,\alpha_2)$，若行列式 $|A|=6,$ 则行列式 $|B|=$__________________________.

3． 设 β_1,β_2 是非齐次方程组 $\mathrm{Ax=b}$ 的两个不同的解，α 是对应的齐次方程组的基础解系，则用 β_1,β_2,α 表示 $\mathrm{Ax=b}$ 的通解为 ____________ .

4．若某二次多项式在 $x=0,\frac{\pi}{2},\pi$ 处与函数 $\sin x$ 有相同的值，则此二次多项式为____________ . .

5． 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\alpha=(a,1,1)$，已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$____________.

6． 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$，当a, b满足____________________时，A 的伴随矩阵的秩为 1.

得分	评卷人

二．计算（共 35 分）

1, 设 $B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足下面的关系式:

$X\left(E-C^{-1}B\right)^TC^T=E$，求 X .

2. 设数域 P 上所有二阶方阵构成的线性空间的两组基为：

（Ⅰ）：$A_1=\begin{pmatrix}5&2\\0&0\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}0&0\\8&5\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}0&0\\3&2\end{pmatrix}$

（Ⅱ）：$B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix},B_3=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix},B_4=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

(1). 求由（Ⅰ）到（Ⅱ）的过渡矩阵；

(2). 求向量 $C=3B_1+2B_2+B_3$ 在基(Ⅰ)下的坐标.

3. 已知齐次线性方程组：$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0\\a_1x_1+(a_2+b)x_2+\cdots+a_nx_n=0\\\quad\cdots\cdots\\a_1x_1+a_2x_2+\cdots+(a_n+b)x_n=0\end{cases}$ ，其中 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0,$

(1). 求该方程组系数矩阵 A 的行列式的值；

(2). 讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足什么条件时方程组仅有零解；

(3). 讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足什么条件时方程组有非零解，并用基础解系表示出通解。

得分	评卷人

三．证明题（共 35 分）

1.（1）请叙述线性空间的定义；

（2）平面上全体向量，对于通常的向量加法和如下定义的数乘：$\boldsymbol{k}\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，是否构成实数域上的线性空间？

2.（1）请叙述数域 $\boldsymbol{P}$ 上不可约多项式的定义；

（2）已知 $\boldsymbol{p(x)}$ 是数域 $\boldsymbol{P}$ 上的不可约多项式， $\boldsymbol{f(x)}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 上任意多项式，请讨论 $\boldsymbol{p(x)}$ 与 $\boldsymbol{f(x)}$ 的关系；

(3) 已知 $\boldsymbol{p(x)}$ 是数域 $\boldsymbol{P}$ 上的不可约多项式，$\boldsymbol{f(x)}$，$\boldsymbol{g(x)}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 上任意两个多项式。

求证：如果 $\boldsymbol{p(x)\mid f(x)g(x)}$，则一定有 $\boldsymbol{p(x)\mid f(x)}$ 或者 $\boldsymbol{p(x)\mid g(x)}$.

3. 设 A，B，C，D 是数域 P 上的两两可交换的 n 阶矩阵，且满足 $\mathrm{AC}+\mathrm{BD}=\mathrm{E}_n$.

证明：n 元齐次线性方程组 $\mathrm{ABX}=0$ 的解空间是 n 元齐次线性方程组 $\mathrm{AX}=0$ 和 $\mathrm{BX}=0$ 的两个解空间的直和。