一、(20 分) 判断下列命题是否成立, 并说明理由

1. 设 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $f(x),g(x)$ 都是整系数多项式, $h(x)$ 是有理系数多项式, 则 $h(x)$ 也是整系数多项式.

2. 多项式 $x^6+5x-54$ 在任意数域 P 上可约.

3. 若把同构的子空间称作一类, 则 n 维线性空间的子空间共分成 n 类.

4. 设 V_1,V_2 是 P^n 的子空间, 且 $\dim V_1+\dim V_2=n$, 则 $P^n=V_1\oplus V_2$.

二、(20 分) 填空

1. 设 n 是正整数, 则 $x^{2n+1}+1$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 上的标准分解式为

   $(x+1)\prod_{k=1}^{n}(x^2-2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}+1)$.

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是多项式 x^3+px^2+qx+r 的三个根, 其中 $r\neq 0$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-r$

   则 $\frac{1}{\alpha_1^2}+\frac{1}{\alpha_2^2}+\frac{1}{\alpha_3^2}=$ $\frac{\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_3^2}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2}$.

3. 集合 $V=\{(x_1,x_2+ix_3,x_2-ix_3,-x_1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^4\mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$ 对于向量的加法和数乘构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间,

   则 V 的一组基为 ____________________ .

4. 已知 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{B}'$ 是三维线性空间 V 的两组基, V 中的任意向量 γ 在这两组基下的坐标 (x_1,x_2,x_3) 和 (x_1',x_2',x_3') 满足

$$x_1'=x_1,\quad x_2'=x_2-x_1,\quad x_3'=x_3-x_2,$$

   则由 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}'$ 的过渡矩阵是

   ____________________ .

三、(15 分) 设 a, b 是互异常数.

1. 求 $(x-a)(x-b)$ 除多项式 $f(x)$ 的余式;
2. 求 x^2-1 除 $f(x)=x^4+x^3+x+1$ 的商和余式;
3. 求 99 999 999 除 10 001 000 000 010 001 的商和余数.

四、(15 分) 设有 $\mathbb{R}^4$ 中的两个子空间

$$W_1=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}} \mid x_1+2x_2-x_4=0\right\}, \quad W_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}}$. 求 W_1+W_2 和 $W_1\cap W_2$ 的基与维数.

五、(15 分) 设 $f(x)=4x^3-21x-2019$.

$$3\overline{)2019}^{\;673}$$
18
21

1. 证明 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约;
2. 设 α 是 $f(x)$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个根, 记

$$\mathbb{Q}[\alpha]=\left\{a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2 \mid a_0,a_1,a_2\in\mathbb{Q}\right\}$$

   证明对任意 $g(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 有 $g(\alpha)\in\mathbb{Q}[\alpha]$;
3. 证明若 $\beta\in\mathbb{Q}[\alpha]$ 且 $\beta\neq 0$, 则存在 $\gamma\in\mathbb{Q}[x]$, 使得 $\beta\gamma=1$.

六、(15 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵. 证明

$$\dim\mathcal{N}(\boldsymbol{AB})=\dim\mathcal{N}(\boldsymbol{A})+\dim\mathcal{N}(\boldsymbol{B})$$

的充分必要条件是 $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})\subset\mathcal{R}(\boldsymbol{B})$.