17 已知生产函数具有柯布-道格拉斯形式

$$f(x)=Ax_1^{0.5}x_2^{0.3}$$

且要素x_1和x_2的价格分别为w_1和w_2，产品价格为p。试推导利润最大化函数。

解：利润最大化问题即为：

$$\max \quad pf(x)-w_1x_1-w_2x_2$$

利润最大化的一阶条件为：

$$-w_1+0.5pAx_1^{-0.5}x_2^{0.3}=0 \quad ①$$

$$-w_2+0.3pAx_1^{0.5}x_2^{-0.7}=0 \quad ②$$

由①式和②式可得$x_1=[5w_2/(3w_1)]x_2$，代入①、②式，可解得：

$$x_1=0.6^{1.5}\cdot(0.5pA)^5\,w_1^{-3.5}w_2^{-1.5}$$

$$x_2=(0.5pA)^5\left(0.6w_1^{-1}w_2^{-1}\right)^{2.5}$$

再将上面各式代入利润函数，可得到：

$$\pi=0.4\cdot0.6^{1.5}\cdot0.5^5\cdot w_1^{-2.5}w_2^{-1.5}p^5A^5$$

18 x公司和y公司是生产相同产品的企业，两家各占市场份额一半，故两家公司的需求曲线均为P＝2400－0.1Q，但x公司的成本函数为

$$TC_x=400000+600Q_x+0.1Q_x^2$$

y公司的成本函数为

$$TC_y=600000+300Q_y+0.2Q_y^2$$

现在要求计算：

(1) x公司和y公司的利润极大化的价格和产出。

(2) 两个公司之间是否存在价格冲突？

解：(1) x、y公司的利润函数分别为：

$$\pi_x=(2400-0.1Q_x)Q_x-(400000+600Q_x+0.1Q_x^2)$$

$$\pi_y=(2400-0.1Q_y)Q_y-(600000+300Q_y+0.2Q_y^2)$$

利润最大化的一阶条件为：

$$\frac{\mathrm{d}\pi_x}{\mathrm{d}Q_x}=2400-0.4Q_x-600=0$$

$$\frac{\mathrm{d}\pi_y}{\mathrm{d}Q_y}=2400-0.6Q_y-300=0$$

解得：$Q_x=4500$，$Q_y=3500$，则$P_x=1950$，$P_y=2050$。

(2) x公司产品的价格低于y公司产品的价格，所以两个公司之间存在价格冲突。

15 假设一家厂商用两种生产要素生产一种产品，其生产函数为

$$y=\left(X_1^{-1}+X_2^{-1}\right)^{-1/2}$$

其中X_1和X_2代表要素1和2的投入数量。产品和要素的价格分别为P、r_1和r_2。请按下面的要求回答问题：

（1）判断该生产技术的规模经济状况；

（2）计算两种要素的边际技术替代率RTS_{12}；

（3）计算该厂商对要素1和2的需求；

（4）如果要素的价格上涨，讨论该厂商利润将发生怎样变化。

解：（1）设α > 1，根据生产函数可判断生产技术的规模经济状况，即有：

$$\begin{aligned} f(\alpha X_1,\alpha X_2) &= \left[(\alpha X_1)^{-1}+(\alpha X_2)^{-1}\right]^{-1/2} \\ &= \alpha^{1/2}(X_1^{-1}+X_2^{-1})^{-1/2} \\ &= \alpha^{1/2}f(X_1,X_2)<\alpha f(X_1,X_2) \end{aligned}$$

所以，该生产技术为规模报酬递减。

（2）要素1对要素2的边际技术替代率为：

$$RTS_{12}=\frac{MP_1}{MP_2}=\frac{-\frac{1}{2}(X_1^{-1}+X_2^{-1})^{-3/2}(-X_1^{-2})}{-\frac{1}{2}(X_1^{-1}+X_2^{-1})^{-3/2}(-X_2^{-2})}=(\frac{X_2}{X_1})^2$$

（3）利润函数π = Pf（X_1，X_2） - r_1X_1 - r_2X_2，利润最大化应满足以下两个条件：

$$\frac{\partial\pi}{\partial X_1}=P\left[-\frac{1}{2}(X_1^{-1}+X_2^{-1})^{-3/2}(-X_1^{-2})\right]-r_1=0$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial X_2}=P\left[-\frac{1}{2}(X_1^{-1}+X_2^{-1})^{-3/2}(-X_2^{-2})\right]-r_2=0$$

由以上两式可得，要素X_1、X_2的需求函数分别为：

$$X_1=\frac{P^2}{4r_1^2\left(1+\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}\right)^3}$$

$$X_2=\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\cdot\frac{P^2}{4r_1^2(1+\sqrt{\frac{r_2}{r_1}})^3}$$

（4）根据利润函数π = Pf（X_1，X_2） - r_1X_1 - r_2X_2，分别对要素X_1、X_2的价格r_1、r_2求导可得：

$$\frac{\partial\pi}{\partial r_1}=-X_1<0$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial r_2}=-X_2<0$$

所以，当要素价格上升时，利润下降。

16 已知生产函数为$y=(KL)^{1/2}$，其中，y为产出，K为资本量，L为劳动投入量。

（1）作出$y=1，2，3，4$时的四条等产量线。

（2）如果当$y=10$时，投入组合为$K=20，L=5$，请分别算出在该点的$RTS_{L,K}$，MP_L与MP_K。

（3）$RTS_{L,K}=MP_L/MP_K$在这个例子中成立吗？如果不成立（不符合），那么原因是什么？

（4）证明：在长期中，如$p_K=p_L=1$元，$y=10$，则需要10个单位资本与10个单位劳动才符合最优原则。

（5）这一生产函数是呈规模报酬不变，递增还是递减？

解：（1）等产量线如图19-1所示。

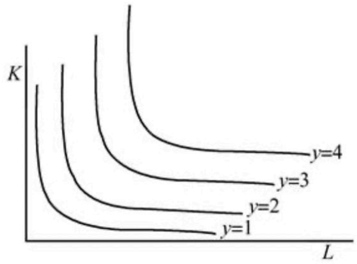

图19-1 等产量线

（2）$y=10$，投入组合为$K=20，L=5$时，该点的$RTS_{L,K}$，MP_L与MP_K分别为：$MP_L=0.5K^{1/2}L^{-1/2}=1$，$MP_K=0.5K^{-1/2}L^{1/2}=1/4$，则：

$$RTS_{L,K}=\left|\frac{dK}{dL}\right|=\left|-\frac{10^2}{L^2}\right|_{L=5}=4$$

（3）由（2）可知$RTS_{L,K}=MP_L/MP_K=4$，因此题中$RTS_{L,K}=MP_L/MP_K$是成立的，但是如果K与L是不连续变化的，即等产量曲线不是一条光滑的曲线，K不能直接对L求导，则$RTS_{L,K}$可能不等于MP_L/MP_K。

（4）证明：长期中求解企业的成本最小化规划问题为：

$$\begin{aligned}&\min p_K\cdot K+p_L\cdot L\\&s.t.\ \sqrt{KL}=10\end{aligned}$$

建立拉格朗日函数：$G=L+K-\lambda(K^{0.5}L^{0.5}-10)$。

一阶条件为：

$$\frac{\partial G}{\partial L}=1-0.5\lambda K^{0.5}L^{-0.5}=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial K}=1-0.5\lambda K^{-0.5}L^{0.5}=0$$

解得$K=L$，代入$(KL)^{1/2}=10$中解得$K=L=10$。所以在长期中，最优的要素投入为$K=L=10$。

（5）因为$y=f(tK,tL)=(t^2KL)^{1/2}=t(KL)^{1/2}=ty$，所以这一生产函数是规模报酬不变的。

16 哪种偏好可用形如$u(x_1,x_2)=\sqrt{x_1+x_2}$的效用函数表示？效用函数$v(x_1,x_2)=13x_1+13x_2$表示何种偏好？

答：（1）完全替代的偏好可用形如$u(x_1,x_2)=\sqrt{x_1+x_2}$的效用函数表示。

理由如下：对效用函数$u(x_1,x_2)=\sqrt{x_1+x_2}$做单调变换$f(u)=u^2$，得到新的效用函数为$u'(x_1,x_2)=x_1+x_2$，这是完全替代偏好的效用函数。由于效用函数的单调变换不改变它所代表的偏好的类型，所以，$u(x_1,x_2)=\sqrt{x_1+x_2}$也代表完全替代的偏好。

（2）$v(x_1,x_2)=13x_1+13x_2$表示完全替代的偏好。

理由如下：对$v(x_1,x_2)=13x_1+13x_2$做单调变换$f(v)=v/13$，得$v'(x_1,x_2)=x_1+x_2$，和（1）的理由相同，可知$v(x_1,x_2)=13x_1+13x_2$也代表完全替代的偏好。