2017 级第一学期高等代数期中试题

一. 判断题(每小题 5 分，共 20 分)判断下列命题是否正确,并说明理由.

1、 数域 P 上的 n 元线性方程组的系数矩阵 A 的秩比未知量个数少 1，那么该方程组的任意两个解向量成比例；

（错） 反例：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1+x_2+3x_3=1 \end{cases}$

2、方程个数等于未知量个数的齐次线性方程组，系数矩阵为 A，则 A 的行列式的每行的代数余子式组成的向量都是该齐次方程组的解；

（错） 如果系数行列式为零，结论正确

否则不正确

3、向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关的充分必要条件是其中每个向量都可由其余向量线性表示；

（错）反例： α_1,α_2 中有一个为 0，另外一个不是 0，则不为 0 的向量不能被其余表示

4、设 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，向量 β 不是 $Ax=0$ 的解则 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,...,\beta+\alpha_t$ 线性无关.

（正确）证明：如果 $k_0,k_1,\cdots,k_t$ 使得

$k_0\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+...k_t(\beta+\alpha_t)=0$

$(k_0+k_1+k_2\cdots k_t)\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_t\alpha_t=0$

$k_0+k_1+k_2\cdots k_t=0$，否则与 β 不是齐次方程组的解矛盾

所以 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_t\alpha_t=0$，又 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_t$ 线性无关，从而

$k_0=k_1=k_2=\cdots=k_t=0$，所以

$\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\ldots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.

二、填空与选择（每小题 5 分，共 30 分）

1、元素为 0 或 1 的三阶行列式可以取到的最大值为____2___;

2、设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = b_1 \\ \quad x_2 - x_3 = b_2 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = b_3 \end{cases}$$

有解，试求常数 b_1,b_2,b_3 满足的条件 $\underline{b_3+2b_1+3b_2=0}$.

3、设线性方程组 $Ax=0$ 的解都是线性方程组 $Bx=0$ 的解，则矩阵 A 的秩与矩阵 B 的 $r(B)$ 之间的关系是____ $r(B)\le r(A)$ ________;

4、设 $A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$，则 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=$ ___8_____;

5、$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2016 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2017 \end{vmatrix}=$__________2017!___________;

6、已知 $r(A)=n-1$，则________ $b=\pm\frac{2}{\sqrt{n-1}}$___________.

其中，n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & b & b & b & b \\ b & 2 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, n>2,$$

三. （15 分）计算 $n \quad (n>1)$ 阶行列式.

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

解：

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n\\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \ldots & 0\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{行加边}}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n\\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1\\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{按列加边}}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1\\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_i-l_1(i=3,4\ldots,n)}\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0\\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n\end{vmatrix}\xrightarrow{l_1+\frac{1}{2}l_i(i=3,4\ldots)}\begin{vmatrix}1-\frac{n}{2} & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2} & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+\frac{1}{2}r_i,i=3,\ldots n+2}\begin{vmatrix}1-\frac{n}{2} & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2} & 1-\frac{n}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\frac{n}{2} & 0\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2} & 1-\frac{n}{2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-2a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -2a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -2a_3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n\end{vmatrix}=\left[\frac{(2-n)^2}{4}-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2}\right](-2)^n a_1a_2\cdots a_n$$

四、（10 分）如果$n \quad (n>1)$行列式等于 0, 那么该行列式的任意两行对应元素的代数余子式成比例 ；

证明：根据行列式中矩阵的秩，分情况

$r(A)<n-1$ 此时代数余子式都为0，结论成立

$r(A)=n-1$ 方程组的基础解系只有一个解向量

根据矩阵秩的行列式定义，存在一个代数余子式不等于 0，

根据判断题 2，该行的代数余子式即为基础解系，其余各列都是其倍数，所以成比例。

五、（15 分） 设 4 元齐次线性方程组(I)为 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$，

且已知另一个 4 元齐次线性方程组(II)的一个基础解系为$\alpha_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

（1）求方程组(I)的一个基础解系；

（2）方程组(I)与(II)有无非零公共解？若有非零公共解，求出全部非零公共解。

解：(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1=5x_3-3x_4 \\ x_2=-3x_3+2x_4 \end{cases}$$

$\eta_1=(5,-3,1,0)^T, \eta_2=(-3,2,0,1)^T$

（2） $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=x_3\eta_1+x_4\eta_4$

解得 $\xi_1=(\frac{7}{3},-\frac{1}{3},1,0)^T, \xi_2=(\frac{4}{3},\frac{1}{3},0,1)$

所以$\eta_1=(5,-3,1,0)^T,\eta_1=(-3,2,0,1)^T$可以由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\7\end{pmatrix}$

线性表示，又秩都为 2，所以

$\{\eta_1,\eta_2\}=\{\alpha_1,\alpha_2\}$，全部公共解为$k_1\eta_1+k_2\eta_2\quad(k_1,k_2$为不全为零的任意数$)$

六、（10 分）设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0\\2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases}\quad(n\ge 2)$$

试问a为何值时该方程组有非零解，并求其通解。

解：令系数矩阵为 *A*，计算行列式

$$|A|=[a+\frac{n(n+1)}{2}]a^{n-1},$$

$$\boldsymbol{AX=0\text{有非零解}\Leftrightarrow R(A)<n\Leftrightarrow |A|=0\Leftrightarrow a=0\text{或}a=-\frac{1}{2}(n+1)n}$$

$$\boldsymbol{a=0\text{时，}A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n&n&\cdots&n\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\text{通解方程为：}}$$

$\boldsymbol{x_1+x_2+\cdots+x_n=0}$**,得基础解系为：**

$\boldsymbol{\xi_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T,\xi_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\xi_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T}$**,方程组通解为：**

$\boldsymbol{k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-1}\xi_{n-1}}$

$a=-\frac{n(n+1)}{2}$时，$A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ n & n & \cdots & n+a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -na & 0 & \cdots & a\end{pmatrix}\sim$

$\begin{pmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1\\ -2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -n & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1+2+\cdots+n+a & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -n & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -n & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$

通解方程组为：$\begin{cases}-2x_1+x_2=0\\ -3x_1+x_3=0\\ \quad\vdots\\ -nx_1+x_n=0\end{cases}$,$R(A)=n-1$,自由变量有一个$x_1$,

令$x_1=1$,得基础解系$\xi=(1,\ 2,\ \cdots,\ n)^T$,通解为$k\xi$,$k$为任意常数。 参考