23级微积分C2期中试题

Collected by 盖瑞丝儿

一. 单选题

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}\cdots+\cos\frac{n\pi}{n}\right)=(\quad)$$

(A) 2

(B) π

(C) 1

(D) 0

2、已知 $a=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^6 x\,\mathrm{d}x, b=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^5 x+\cos^6\right.$
$c=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2\sin^5 x-\cos^8 x\right)\mathrm{d}x$, 则下列结论正确的是 ( )

(A) $b<c<a$

(B) $a<c<b$

(C) $b<a<c$

(D) $c<a<b$

3、$f(x)=\sin(x+1)-\sin(1-x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的平均值是 ( )

(A) $2\cos 1$

(B) π

(C) $\cos 1$

(D) 0

4、 以下结论正确的是（ ）

- (A) 有限闭区间上的可积函数一定连续.
- (B) 有限闭区间上的无界函数一定不可积.
- (C) 有限闭区间上的不连续函数一定不可积
- (D) 有限闭区间上的有界函数一定可积.

5、 设 $F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, 以下结论正确的是 ( )

- (A) $F(x)=0$
- (B) $F(x)=\frac{\pi}{2}$
- (C) $F(x)=2\arctan x$
- (D) $F(x)=\arctan x$

6、 设 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}, & x\geq 0 \\ 3x^2+1, & x<0 \end{cases}$, 则 $\int_2^3 f(2x-5)\mathrm{d}x$ = ( )

- (A) $\frac{e^2+3}{4}$
- (B) $\frac{e^2+1}{4}$
- (C) $\frac{e^2-1}{4}$
- (D) $\frac{e^2+4}{4}$

7、 曲线 $y=x^3-4x$ 与直线 $x=-1, x=2$ 以及 x 轴所围成图形的面积等于 ( )

(A) 8

(B) $\frac{9}{2}$

(C) $\frac{23}{4}$

(D) $\frac{7}{2}$

8、 下列积分收敛的是 ( )

(A) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

(B) $\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(C) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(D) $\int_{-3}^{3} \frac{1}{x-1}\,dx$

9、 设函数 $F(u,v)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{z}{x},yz\right)=0$ 所确定, 设题中出现的分母均不为 0 , 则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=(\quad)$

(A) $\frac{1}{z}$

(B) z

(C) 0

(D) 1

、设 $\mathbf{z}=\mathbf{x}\arctan\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$, 下列说法正确的是 ( )

(A) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

(B) 以上都不对

(C) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

(D) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

二．多选题

关于反常积分, 以下说法正确的是 ( )

(A) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}[k+f(x)]\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性, k 是非零常数.

(B) 如果 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ 都发散, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 可能收敛.

(C) 如果 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ 一定发散.

(D) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} kf(x)\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性.

(E) 如果 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 可能都发散.

2、已知函数 $f(x)$ 为连续函数, 满足等式 $f(0)=1, F(x)=\int_0^x tf\left(x^2-t^2\right)dt$, 则下列正确的是 ( )

- [x] (A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$
- [x] (B) $F'(x)=xf\left(x^2\right)$
- [ ] (C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$
- [ ] (D) $F'(x)=x^2f\left(x^2\right)$
- [ ] (E) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

3、 关于二元函数 $f(x,y)$，下列说法错误的是（ ）

- [x] (A) 若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, 则 $f(x,y)$ 在该点处可微
- [ ] (B) 若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 则 $f(x,y)$ 在该点处连续
- [x] (C) 若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x,y 的偏导数均存在, 则 $f(x,y)$ 在该点处可微
- [ ] (D) 若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 则 $f(x,y)$ 在该点处关于 x,y 的偏导数均存在
- [ ] (E) 若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x,y 的偏导数均存在, 则 $z=f(x_0,y)$ 和 $z=f(x,y_0)$ 分别在 $y=y_0$ 和 $x=x_0$ 连续

4、 设函数 $f(x,y)=x|x|+x|y|+y|x|+y|y|$, 则以下命题正确的是 ( )

- [ ] (A)) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微
- [ ] (B) $df(x,y)|_{(0,0)}=0$
- [x] (C) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$
- [ ] (D) $\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0$
- [ ] (E) $\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(0,0)}=1$

设 $u=f(2x+y,2y+z,2z-x)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 则下列正确的是 ( )

(A) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2f'{}_1-f'{}_3$

(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=f'{}_{12}+2f'{}_{13}+2f'{}_{22}+4f'{}_{23}$

(C) $\dfrac{\partial u}{\partial z}=f_2'+f'{}_3$

(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2f'{}_{11}+2f''{}_{12}-f''{}_{31}-f''{}_{32}$

(E) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=f_1'+2f'{}_2$

三．计算题

1、 设 $f(x)$为可导函数, 且 $f(0)\neq 0$, 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x xf(x-t)\mathrm{d}t}$$

2、 已知函数 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$ 可导, 求

$$\int_0^1\left[f(x)+xf'(x)\right]dx$$

3、 设函数 $u=f\left(x,y,x^2\sin t\right)$具有二阶连续偏导数, 其中 $t=2x+y$, 求 $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}$.

4、 设函数 $z=z(x,y)$ 由 $e^z+xz=2x-y$ 确定, $z(1,1)=0$, 求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$

四．综合题

1、 求曲线 $y=x^2-2x, y=0, x=1, x=3$ 所围成的平面图形的面积 S, 并求当 $y \geq 0$ 时平面图形绕 $\mathbf{y}$ 轴旋转一周所得旋转体的体积.

2、 设 $x+y-z=e^z, xe^x=\tan t, y=\cos t$, 求 $\left.\frac{dz}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$.