第一学期期末考试试卷

一、填空题（将正确答案写在答题纸的相应位置．答错或未答，该题不得分．每小题 3 分，共 15 分。）

1。 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} =$ ___0_____.

2。 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点是___x=0_____.

3. 已知 $f(1)=2$， $f'(1)=-\frac{1}{4}$，则 $\frac{df^{-1}(x)}{dx}\Big|_{x=2} =$ _______。

4. $(x x^a)' =$_______。

5. 函数 $f(x)=4x^3-x^4$ 的极大值点为________.

二、单项选择题(从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案，并将其代码写在答题纸的相应位置.答案选错或未选者，该题不得分。每小题 3 分,共 15 分。)

1。 设 $f(x)$ 的定义域为 $(1,2)$，则 $f(\lg x)$ 的定义域为________。

A. $(0,\lg 2)$ B. $[0,\lg 2]$ C. $(10,100)$ D。$(1,2)$.

2。 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，使 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ______.

A. 存在且一定等于零 B。 存在但不一定等于零
C。不一定存在 D. 一定存在。

3。 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{\sqrt[x]{1-2x}} =$________.

A. e^2 B。 e^{-2} C。 e D. 不存在.

4. 设 $f(0)=0$， $f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3x)+f(-2x)}{\tan x} =$________。

A。0 B。 1 C. 2 D. 5。

5. 曲线 $y=\frac{2x}{1-x^2}$ 渐近线的条数为________。

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3。

三、（请写出主要计算步骤及结果，8 分.）

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{\sin x^2}$。

四、（请写出主要计算步骤及结果，8 分。）

求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

五、（请写出主要计算步骤及结果,8 分。）

确定常数 a,b， 使函数 $f(x)=\begin{cases} x(\sec x)^{x-2} & x>0 \\ ax+b & x\le 0 \end{cases}$ 处处可导.

六、（请写出主要计算步骤及结果,8 分.）

设 $f(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$，求 dy 。dy=arctanxdx

七、（请写出主要计算步骤及结果,8 分.）

已知 $x^2-2xy+y^3=6$ 确定 y 是 x 的函数，求 y''.

八、（请写出主要计算步骤及结果，8 分。）

列表求曲线 $y=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+1$ 的凹向区间及拐点.

九、证明题（请写出推理步骤及结果，共 6+6=12 分。）

1。 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)<a, f(b)>b$, 证明在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导， 且 $f(1)=0$,求证:至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得 $3\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$.

第一学期期末考试参考答案与评分标准

一、填空题（3×5=15）

1、0　　2、 $x=0$　　3 、-4　　4、$x^{x^a}\cdot x^{a-1}(a\ln x+1)$　　5、 $x=3$

二、单项选择题（3×5=15）

1、C　2、C　3、A　4、B　5、D

三、（8×1=8）

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{x^2}\cdots\cdots\cdots 2分$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{2x}\cdots\cdots\cdots 6分$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{2}=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots 8分$$

四、（8×1=8）

$$\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{x}}\cdots\cdots\cdots 2分$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{1}}\cdots\cdots\cdots 6分$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}\cdots\cdots\cdots 8分$$

五、（8×1=8）

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 处处可导,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可导。……1 分

因为

$$\lim_{x\to 0^+}x(\sec x)^{x-2}=0\cdots\cdots\cdots 2分$$

$$\lim_{x\to 0^-}ax+b=b\cdots\cdots\cdots 3分$$

$$\mathrm{f}(x)=b\cdots\cdots\cdots 4分$$

所以 $b=0$ ………5分

又因为 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax+b-0}{x}=a$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(\sec x)^{x-2}-0}{x}=1$

所以 $a=1$ ………8 分

六、（8×1=8）

$$f'(x)=\arctan x-x\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}\cdots\cdots\cdots 5分$$

$$=\arcsin x\cdots\cdots\cdots 6分$$

$$dy=\arcsin x dx\cdots\cdots\cdots 8分$$

七、（8×1=8）

$2x-2y-2xy'+3y^2y'=0$………4分

$y'=\dfrac{2x-2y}{2x-3y^2}$………7分

$y''=(\dfrac{2x-2y}{2x-3y^2})'=\dfrac{(2-2y')(2x-3y^2)-(2x-2y)(2-6yy')}{(2x-3y^2)^2}$………8分

八、(8×1=8)

(1)定义域为 $(-\infty,+\infty)$;

（2）

$y'=x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}$………1分

$y''=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=\dfrac{2x+1}{3x^{\frac{4}{3}}}$………3分

令 $y''=0$ 得 $x_1=-\dfrac{1}{2}$,又 $x_2=0$ 为 y'' 不存在的点………4分

（3）列表：

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$(0,+\infty)$
y''	−	0	+	不存在	+
y	下凹	$1-\frac{9}{10}\sqrt[3]{2}$	上凹	1	下凹

………8分

$Q=625$ 时利润最大，最大利润为 $L(625)=1250$ ………8 分

九、证明题(6×2=12)

1。 设 $F(x)=f(x)-x$ ，则有 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，………2 分

$F(a)=f(a)-a<0, F(b)=f(b)-b>0,$ ………4分

根据零值定理可得在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ ,使 $F(\xi)=0$,

即 $f(\xi)=\xi$ ………6 分

2。设 $F(x)=\sqrt[3]{x}f(x)$, 则 $F'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}f(x)+\sqrt[3]{x}f'(x)$ 。………2 分

显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 内连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=F(1)=0$ 。………4 分

由罗尔定理知：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ 使

$$F'(\xi)=\frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}f(\xi)+\sqrt[3]{\xi}f'(\xi)=0$$

即 $f(\xi)+3\xi f'(\xi)=0$

………6 分