中国人民大学2018–2019学年秋季学期
《数学分析》(I)期末试卷(2019.1.16)

一、(20分)求不定积分

$$\text{(i)} \int \sqrt{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x; \qquad \text{(ii)} \int \frac{1}{\sin^3 x\cos^5 x}\,\mathrm{d}x.$$

二、(20分)求极限

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}; \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right].$$

三、(10分) 设

$$f(x)=(x-a)^n g(x),$$

其中$g(x)$在a点的某邻域内有$(n-1)$阶连续导数, 求$f^{(n)}(a)$.

四、(10分)已知由方程

$$x^2-xy+y^2=1$$

在点$(1,\,1)$附近确定唯一的函数$y=y(x)$, 求在点$(1,\,1)$处的$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 以及$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

五、(10分)设曲线由参数方程

$$\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3, \end{cases} \quad t\in[0,\,\infty)$$

确定, 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 以及在$t=1$时的切线方程.

六、(10分)求$1,\ \sqrt{2^2},\ \sqrt[3]{3^2},\ \ldots,\ \sqrt[2019]{(2019)^2}$ 中的最大数.

七、(10分)设$f(x)$在$(-\infty,\,\infty)$上二阶可导, $f(1)=0$且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

证明: 在$(0,\,1)$内至少存在一点ξ使得$f''(\xi)=0$.

八、(10分)设$f(x)$在$(0,\,1)$内二阶可导且

$$|f''(x)|\le 1, \quad x\in(0,\,1).$$

又设$f(x)$在$(0,\,1)$内取得极值$\dfrac{1}{4}$. 证明:

$$|f(0)|+|f(1)|\le 1.$$