中国人民大学期中考试试题

数学分析 II

（2023-2024 学年）

一、（10 分）求极限

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right]$$

二、（12 分）（i）设$F(x)$是$f(x)$在$(-1,1)$内的原函数且满足

$$f(x)=\frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}},x\in(-1,1)$$

求$f(x)$.

（ii）求不定积分$\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.

三、（14 分）计算

（i）$\int_{-1}^{1}(\tan x+\sqrt{1-x^2})^2\,dx$　　　　（ii）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{1-x}+e^{1+x}}dx(p,q>0)$

四、（14 分）求曲线：$\mathrm{r}=2(1-\cos\theta),0\in[0,2\pi)$的周长以及该曲线绕极轴旋转一周所得旋转曲面的表面积.

五、（12 分）设

$$R（x） =\begin{cases}\dfrac{1}{q},x=\dfrac{p}{q},\text{其中}p,q\text{为互质正整数且}p<q\\ 0,x=0,1\text{ 或（0,1）内的无理数}\end{cases}$$

证明：R（x）在$[0,1]$上可积.

六、（12 分）设$f(x)$在$[0,1]$上连续且单调递减，证明：对任意的$\alpha\in[0,1]$，

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx\ge\alpha\int_0^1 f(x)\,dx$$

七、（16 分）判断下列反常积分的敛散性（请指出是绝对收敛、条件收敛还是发散）

（i）$\int_0^{+\infty}\sin\left(\frac{\ln x}{(x+\frac{1}{x})^\alpha}\right)dx(\alpha>0)$　　　　（ii）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+x^q}dx(p,q>0)$

八、（10 分）设$m<2$，证明：

$$\lim_{x\to 0^+}x^{-m}\int_0^x\sin\frac{1}{t}dt=0$$