中国人民大学 2022-2023 春季学期高等代数 II 期中试题 (A)

(考试时间：2023 年 4 月 26 日上午)

序号____ 班级________ 姓名____________ 学号____________

我郑重承诺：在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严.

承诺人签字：

一、单选题 (共 10 题, 每题 4 分, 共 40 分).

1. 设 $f(x), g(x) \in P[x]$，则下列哪一项不能保证 $f(x), g(x)$ 是互素的(D).

   A. 存在复数域上的多项式 $u(x), v(x)$，使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$. √

   B. $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, 且有 $(f_1(x), g(x)) = 1, (f_2(x), g(x)) = 1$ √

   C. $(f(x^n), g(x^n)) = 1$, 这里 $n > 1$ 为正整数 √

   D. $f(x), g(x)$ 都是本原多项式，且二者无公共的有理根 ×

   答案 D.

2. 下列结论正确的是(B).

   A. $\mathbb{R}^3$ 中平面 $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ 是一个子空间 ×

   B. $\mathbb{R}^3$ 中两个过原点不重合的平面作为子空间的和空间是 $\mathbb{R}^3$

   C. $\mathbb{R}^3$ 中两个过原点不重合的平面作为子空间的交空间的维数不一定是 1 ×

   D. $\mathbb{R}^3$ 中一条直线是一个子空间 ×

   答案 B.

3. 设 $f(x), g(x), u(x), v(x) \in P[x]$, $\partial f(x) > 0$，则下列哪一项不能保证 $\partial g(x) \leq \partial f(x)$(B).

   A. 存在整除关系 $g(x)|f(x)$ √

   B. 等式 $u(x) = f(x)v(x) + g(x)$ 成立, 其中 $u(x), v(x)$ 次数不为零 ×

C. $\frac{g(x)}{(g'(x),g(x))} = g(x)$, 且 $g(x)$ 的根都是 $f(x)$ 的根 √

D. $g(x)|u(x)f(x)$, $(u(x),g(x)) = 1$, 且 $u(x)$ 是不可约多项式 √

答案 B.

4. 约定零子空间 $\{0\}$ 的维数为 0. 设 V_1 和 V_2 分别是数域 P 上线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的解空间, 那么线性子空间 $V_1 \cap V_2$ 的维数为(B).

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 4

答案 B.

5. n 是正整数，下列哪一项是有理数域上的不可约多项式(~~C~~ D).

A. $x^n - 1$ ×　　B. $x^{2n+1} + 1$ ×

C. $(x-1)(x-0)(x+1)(x+2)+1$ 　$x(x+1)(x+2)(x+3)+1$　　D. $(x-1)(x-2)\cdots(x-n)-1$

答案 D.

6. 下列结论错误的是(A).

A. 线性无关的向量组在同构映射下的向量组不一定线性无关

B. V 两个子空间 V_1 与 V_2 的和空间维数 $\dim\,(V_1 + V_2)$ 不大于它们的维数之和 $\dim V_1 + \dim V_2$ √

C. 线性空间中任何一个真子空间的线性无关向量组都可以扩充为该空间的一组基 √

D. 若子空间 V_1 和 V_2 的交 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, 则 $V_1 + V_2 = V_1 \bigoplus V_2$ √

答案 A.

7. 考虑如下命题:

① 两个多项式做带余除法的结果不随数域的变化而改变 √

② 两个多项式的互素性随数域的变化而改变 ×

③ 两个多项式的最大公因式不随数域的变化而改变 √

④ 一个多项式有无重因式随数域的扩大而改变 ×

其中正确的个数为(B).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

答案 B.

8. 下列结论错误的是(C).

A. 非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关的充要条件是其中的某个向量必然能被其他向量线性表示

B. 非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关的充要条件是其中的某个向量 α_i 必然能被它前面 $i-1$ 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ 线性表示 $(i \geq 2)$

C. 若向量组 $\mathcal{C} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}\}$ 线性无关, 若 α_i 不能由向量组 $\mathcal{C}$ 线性表示，则 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i\}$ 不一定线性无关

D. 非零向量 $\{\alpha\}$ 线性无关

答案 C.

9. 设 $f(x), g(x), h(x) \in P[x]$, 若 $(f(x), g(x)) = 1$, $(f(x), h(x)) = 1$, 那么下列叙述中正确的是(B).

A. $(f(x)+g(x), h(x)) = 1$

B. $(f(x), f(x)+g(x)) = 1$

C. $(f(x)h(x), g(x)) = 1$

D. $(f(x), g(x)+h(x)) = 1$

答案 B.

10. 下列结论错误的是(B).

A. 两个线性子空间 V_1, V_2 的并 $V_1 \cup V_2$ 不一定是线性空间

B. 设向量组 $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ 为 n 维线性空间 V 中含有 n 个向量的向量组，且 V 中任何一个向量都可以由向量组 $\mathcal{A}$ 线性表示，那么向量组 $\mathcal{A}$ 仍不一定线性无关

C. 设 $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ 为 n 维线性空间 V 中的含有 n 个向量的线性无关组，则向量组 $\mathcal{B}$ 可作为 V 的一组基

D. 两个线性子空间 V_1, V_2 的和 $V_1 + V_2$ 是线性空间

答案 B.

二、简算题 (共 5 题，每题 4 分，共 20 分).

11. 设 $f(x) = x^3 - ax^2 + x + 2$, $g(x) = x^4 - 4x^2 + bx - 6$, 其中 a, b 为整数. 试求出使 $f(x), g(x)$ 有公共整数根的 a, b, 并写出相应的公共整数根.

答案: (1) $a = 4, b = 9$, 公共根为 1; (2) $a = 0, b = -9$, 公共根为 -1; (3) $a = 3, b = 3$, 公共根为 2; (4) $a = -2, b = -3$, 公共根为 -2.

解答步骤：由整系数多项式的有理根性质可知，$f(x)$ 的整数根只能是 $\pm 1, \pm 2$，而 $g(x)$ 的整数根只能是 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$，因此，若有公共整数根，只可能是 $\pm 1, \pm 2$.

若公共整数根是 1，那么可得 $f(1) = 0, g(1) = 0$，解得 $a = 4, b = 9$；同理可以求出其他三种情形.

12. 对于 $P[x]_3$ 中的向量组 $\mathcal{A} = \{1+x, 1-x, x+x^2\}$, 判断向量组 $\mathcal{A}$ 中的向量是否线性无关，进而说明向量组 $\mathcal{A}$ 能否作为 $P[x]_3$ 的一组基. $P[x]_3$ 是指所有次数小于 3 的数域 P 上的一元多项式全体.

令 $P[x]$ 中一组基 $(1, x, x^2)$

$A = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

答案: 解法一:

若存在 $k_1, k_2, k_3 \in P$, 使得

$$k_1(1+x) + k_2(1-x) + k_3(x+x^2) = 0,$$

$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ 线性无关

再由零多项式的定义，可得

∴ A 中线性无关

可以作为

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 - k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

解得

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0.$$

故向量组 $\mathcal{A} = \{1+x, 1-x, x+x^2\}$ 线性无关. $\cdots$ (3 分)

因线性空间 $P[x]_3$ 的维数 $\dim P[x]_3 = 3$，由基的定义，可知线性无关的向量组 $\mathcal{A} = \{1+x, 1-x, x+x^2\}$ 可以作为 $P[x]_3$ 的一组基. $\cdots$ (1 分)

解法二:

因

$$(1+x, 1-x, x+x^2) = (1, x, x^2)A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可计算验证 A 可逆（求秩或行列式），故向量组 $\mathcal{A} = \{1+x, 1-x, x+x^2\}$ 与 $\dim P[x]_3 = 3$ 的线性空间 $P[x]_3$ 通常的基 $\{1, x, x^2\}$ 为等价向量组，故三个元素的向量组 $\mathcal{A} = \{1+x, 1-x, x+x^2\}$ 线性无关. $\cdots$ (3 分) $2x+10$

$2f(x) = \cdots + 6x + 6 - 4x + 4$

因线性空间 $P[x]_3$ 的维数 $\dim P[x]_3 = 3$，由基的定义，可知线性无关的向量组 $\mathcal{A} = \{1+x, 1-x, x+x^2\}$ 可以作为 $P[x]_3$ 的一组基. $\cdots$ (1 分)

$(x+1)f(x) = (x^2-1)g(x) + 6(x+1)$

$(x-1)f(x) = (x^2-1)m(x) + 4(x-1)$

$f(x) = (x-1)g(x) + 6$ $\quad$ $f(x) = (x+1)m(x) + 4$

13. 设 $f(x) \in P[x]$, $f(1) = 6$, $f(-1) = 4$, 则 $x^2 - 1$ 除 $f(x)$ 的余式为___$x+5$___.

答案: 余式为 $x+5$. 解答步骤: $f(x) = (x^2-1)g(x) + ax + b$，由题意 $f(1) = 6$, $f(-1) = 4$，可得 $a + b = 6$, $-a + b = 4$，联立可得.

14. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 考虑 $\mathbb{R}^{2\times 2}$, 即 2 阶实方阵的子空间 $V_1 = \{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid MA = AM\}$, 计算 V_1 的维数并给出一组基.

设 $V_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c, & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

∴ $c = 0$ $\quad$ $b+d = a$

∴ $V_1=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a-b\end{pmatrix}$ 一组基为 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

维数为2

答案. 不妨设 $M=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$ 其中 $x,y,z,w\in\mathbb{R}$, 由 $MA=AM$ 可得

$$\begin{pmatrix}x & x\\ z & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z & y+w\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{cases}x=y+w\\ z=0\end{cases}$$

即

$$M=\begin{pmatrix}y+w & y\\ 0 & w\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

由 y 和 w 的任意性，得

V_1 的维数为 2. $\cdots$ (2 分)

V_1 的一组基可以为 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. $\cdots$ (2 分)

x^2-x-2 $(x-2)(x+1)$

$x+1 \,\big)\, x^3-3x-2$

x^3+x^2

$-x^2-3x-2$

$-x^2-x$

$-2x-2$

$-1\;|\; 1 \quad 0 \quad 3 \quad -2$

$-1 \quad 1 \quad -4$

$1 \quad -1 \quad 4 \;|\; -6$

注意: 基的选择不唯一，只要能组合出这两组基的 2 个线性无关矩阵都可以.

$1-6+8-3$ $\quad 16-24-16-3$

15. 判断多项式 $f(x)=x^4-6x^2-8x-3$ 是否有重根?___✓___ 如果有重根, 是几重根?_3重___ $f'(x)=4x^3-12x-8=4(x^3-3x-2)=4(x+1)^2(x-2)$

答案: $f(x)$ 有重因式, $x=-1$ 是它的 3 重根. 解答步骤: 采用辗转相除法，可得 $(f(x),f'(x))=(x+1)^2$，于是 $f(x)$ 有重根，且 $x=-1$ 是它的三重根.

三、计算和证明题，请写出详细的解题或证明过程 (共 3 题，共 40 分).

16. (15 分) 已知 $f(x)=x^2+(a+6)x+2(2a+1)$ 与 $g(x)=x^2+(a+2)x+2a$ 的最大公因式是一次多项式. (1) 求 a 以及 $(f(x),g(x))$; (2) 求 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

解答 $a=3$时 $(f(x),g(x))=x+2$ $\qquad a=1$时 $(f(x),g(x))=x+1$

1

$x^2+(a+2)x+2a \,\big)\, x^2+(a+6)x+2(2a+1)$

$x^2+(a+2)x+2a$

$4x+2a+2 \quad (r_1)$

$f(x)=g(x)+r_1$

$g(x)=(\quad)r_1$

$\frac{1}{4}x$

$4x+(2a+2) \,\big)\, x^2+(a+2)x+2a$

$x^2+(\frac{a+1}{2})x$

$\frac{3}{2}(a+1)x+2a$

$r_1=f(x)-g(x)$

$=4x..$

$\frac{r_1}{4}=\frac{1}{4}$

$u(x)=\frac{1}{4}$ $\quad v(x)=-\frac{1}{4}$

16a. 解： 应用辗转相除法

$q_1(x)=1$	$g(x)=x^2+(a+2)x+2a$	$f(x)=x^2+(a+6)x+2(2a+1)$
	$x^2+\frac{a+1}{2}x$	$x^2+(a+2)x+2a$
$q_2(x)=\frac{1}{4}x+\frac{a+3}{8}$	$\frac{a+3}{2}x+2a$	$r_1(x)=4x+2a+2$
	$\frac{a+3}{2}x+\frac{(a+3)(a+1)}{4}$	$4x+8a$
	$r_2(x)=2a-\frac{(a+1)(a+3)}{4}$	

令 $2a-\frac{(a+1)(a+3)}{4}=0$ 得 $a=1$ or $a=3$. （6 分）

所以，当$a=1$ or $a=3$时最大公因式是一次的.

且当$a=1$时，$(f(x),g(x))=x+1$； (2 分)

当$a=3$ 时，$(f(x),g(x))=x+2$. (2 分)

（2）不论a取何值，都有 $u(x)=\frac{1}{4}$, $v(x)=-\frac{1}{4}$. (5 分)

图 1: 16 题解答

17. (15 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是实数域上三维线性空间 V 的一组基, 已知 $\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$, $\beta_2=-\alpha_2$, $\beta_3=\alpha_2+\alpha_3$. （1）证明 β_1,β_2,β_3 也是 V 的一组基;（2）求在这两组基下坐标相同的所有向量.

解答 (1) $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$

$\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆 $\therefore(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$线性无关

(2) 设向量γ在$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$下的坐标为$(x_1,x_2,x_3)$

则 $\gamma=x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3$

$=x_1(2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)+x_2(-\alpha_2)+x_3(\alpha_2+\alpha_3)$

$=2x_1\alpha_1+(x_3-x_1-x_2)\alpha_2+(x_3-x_1)\alpha_3$

$\therefore\gamma$在$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$下的坐标为$(2x_1,x_3-x_1-x_2,x_3-x_1)$

$\therefore\begin{cases}x_1=2x_1\\x_2=x_3-x_1-x_2\\x_3=x_3-x_1\end{cases}$ $x_1=0$, $2x_2=x_3$

$\therefore\gamma$坐标为$(0,x,2x)$ $(x\in R)$

17a. 证明：（1） 根据已知条件写出形式表达式：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

式中矩阵的列正是 β_1,β_2,β_3 的坐标，其线性关系与 β_1,β_2,β_3 相同，而显然该矩阵行列式不等于零，所以该矩阵可逆，从而 β_1,β_2,β_3 线性无关。

所以 β_1,β_2,β_3 也是 V 的一组基 （7 分）

（2）根据（1）知，矩阵 A= $\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ 是基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵，

所以任意向量 α 在 β_1,β_2,β_3 和在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别记为

$$(y_1,y_2,y_3)^T,(x_1,x_2,x_3)^T$$

的话，有 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，两边左乘 A

$$A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

坐标相同，所以有

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$(A-E)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$ （4 分）

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-2&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

解方程组

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-2&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

就得到相同坐标所有向量在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标 $k\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ （2 分）

所以在这两组基下坐标相同的所有向量为 $k(-2\alpha_2+\alpha_3)$，k 为任意数。 （2 分）

图 2: 17 题解答

18. (10 分) $f(x)=x^3-x$ 是数域 P 上的一元多项式, A 是数域 P 上的 $n(n\geq 2)$ 阶方阵. 设齐次线性方程组 $f(A)X=0$ 的解空间为 W, 齐次线性方程组 $AX=0$, $AX+X=0$, $AX-X=0$ 的解空间分别是 W_1,W_2,W_3.

$(A^3-A)X=0$

$(A+E)X=0$ $(A-E)X=0$

$W_1\subset W$ $A\alpha_1=0$

$W_2\subset W$ $A\alpha_2+\alpha_2=0$

$W_3\subset W$ $A\alpha-\alpha=0$

设 $k_1(x^2-1)+k_2(x^2-x)+k_3(x^2+x)=0$

$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_1=0\end{cases}$

$\therefore k_1=k_2=k_3=0$

$\therefore W_1+W_2+W_3\subset W$ $A(\alpha)=A(\alpha_1+\alpha)$

$\begin{cases}AX=0\\AX+X=0\end{cases}\Rightarrow X=0$ $-\alpha_2=\alpha=0$

$\alpha=0$

$k_3 - k_2 = 0$ $\therefore$ 线性无关

$\therefore W_1 \cap W_2 = \{0\}$
$\therefore W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$
$\forall \alpha \in (W_1+W_2) \cap W_3$
$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

$\therefore (W_1+W_2) \oplus W_3$
$= (W_1 \oplus W_2) \oplus W_3$
$= W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$

(1) 证明 $(x^2-1, x^2-x, x^2+x) = 1$; (2) 证明 $W = W_1 \bigoplus W_2 \bigoplus W_3$.

证明：(1) 因为 $-(x-1)(x+1) + \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{2}x(x+1) = 1$, 所以 $((x-1)(x+1), x(x-1), x(x+1)) = 1$; (或其他证法均可，这一问很简单) $\cdots$ (2 分)

(2) 因为 $-(x^2-1) + \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{2}x(x+1) = 1$, 所以对任意的 $X \in W$, 有 $X = -(A-E)(A+E)X + \frac{1}{2}(A-E)X + \frac{1}{2}A(A+E)X$, 当 $X \in W$ 时，显然 $-(A-E)(A+E)X \in W_1, \frac{1}{2}A(A-E)X \in W_2, \frac{1}{2}A(A+E)X \in W_3$. 所以 $W \subseteq W_1 + W_2 + W_3$.

另外，对任意的 $X \in W_i, i = 1, 2, 3$, 显然有 $X \in W$, 故 $W_1 + W_2 + W_3 \subseteq W$. 因此 $W = W_1 + W_2 + W_3$. $\cdots$ (4 分)

又假设 $0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 其中 $\alpha_i \in W_i$. 则 $A\alpha_1 = 0$, 从而 $(A-E)A\alpha_1 = 0$, $(A+E)A\alpha_1 = 0$. 类似地，$(A+E)\alpha_2 = 0$, 从而 $(A-E)(A+E)\alpha_2 = 0$, $A(A+E)\alpha_2 = 0$；$(A-E)\alpha_3 = 0$, 从而 $A(A-E)\alpha_3 = 0$, $(A+E)(A-E)\alpha_3 = 0$. 因此有

$0 = (A-E)(A+E)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -\alpha_1$,

$0 = A(A-E)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2\alpha_2$,

$0 = A(A+E)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2\alpha_3$. 所以是直和. $\cdots$ (4 分)