2020年春《微积分C2》期末考试A卷-闭卷　2小时

[答题纸抬头部分需手抄]

一、计算题.（每小题8分，共40分）

1、求定积分 $\int_0^1 \frac{(1+x)e^x dx}{\sqrt{1+xe^x}}$.

2、计算 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin 2x dx$.

3、交换积分次序 $I = \int_{-2}^{2} dy \int_{y^2}^{y+6} f(x,y)dx$，其中 $f(x,y)$ 在所给区域上连续.

4、求函数 $z = \ln\left(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}\right)$（$n \geq 2$）的全微分并计算 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$.

5、 可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + \int_0^x f(t)\cos t dt = \frac{1}{2}\sin^2 x$，求 $f(x)$.

二、求解下列各题.（每小题10分，共40分）

6、设 $z = F(xy, x^2 - y^2)$，其中 $F(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $x=1$，$y=1$ 时，

$\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 的值.

7、设区域 D：$x \geq 0$，$y \geq 0$，$x + y \leq 4$，求函数 $z = x^2 + y^2 - x - y - xy$ 在区域 D 上的最值.

8、求

$$\iint_D (1+y)\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$$

其中 $D = \{(x,y) \mid \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2, x \geq 0\}$.

9、求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$ 的收敛域及其和函数.

三、综合题.（20分）

10、(8分) 设D 是由曲线$y=\ln x$，直线$y=\dfrac{x-1}{e-1}$ 所围成的有界闭区域，求D分别绕x轴与绕y轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

11、(5分) 设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le \pi^2\}$，$f(x,y)$在$D$内可微，并且满足

$\sqrt{(f_x')^2+(f_y')^2}\le M$（$M$为正的常数），证明：对任何一点$P(x,y)\in D$，

$$|f(x,y)-f(0,0)|\le M|OP|,$$

其中$|OP|$为原点O与点P之间的距离.

12、(7分)讨论$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^a}dx$（$a>0$）的收敛性.并指出何时条件收敛，何时绝对收敛？