我郑重承诺：

在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严。

签字：

2017 – 2018 学年第一学期 **高等代数** I 期末试题

（考试时间：2018.01.11 上午 8:00–10:00）

姓名____________ 学号____________

题号	一	二	三	四	五	六	合计	评卷人
题分	30	20	10	15	10	15	100	
得分								

得分	

一、（共 30 分）判断下列命题是否成立, 画(✔)或(✘), 并说明理由

1. 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以被任意向量组线性表出.

   [ ]

2. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆方阵, 则由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆一定可以推出 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 可逆.

   [ ]

3. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别是 $m \times n$ 和 $m \times s$ 矩阵, 那么当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 时, 矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 一定有唯一解.

   [ ]

4. 存在二阶奇异矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   [ ]

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵,且 $(\boldsymbol{A}^*)^2 = \boldsymbol{E}$, 那么 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$.

   [ ]

6. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵正定, 则 $\boldsymbol{A}$ 正定.

   [ ]

得分	

二、（共20分）填空

1. n阶行列式

$$\begin{vmatrix} b+c & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & b+c & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & b+c & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b+c & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & b+c \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

2. 已知四阶矩阵$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$的秩是3, 则$k=$________________.

3. 设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵, 且已知$\boldsymbol{A}$的秩是$n-1$, 那么$\boldsymbol{A}^*$的秩为________________.

4. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$是负定矩阵, 则$k$满足条件________________.

得分	

三、（共 10 分） 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解.

1. 证明方程组系数矩阵的秩等于 2;
2. 求 a, b 的值和该方程组的通解.

得分	

四、（共 15 分） 设实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\,.$$

1. 求出 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩, 正惯性指数和负惯性指数;
2. 当 $n=4$ 时, 把 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 化为标准形, 并给出所做的非退化线性替换.

得分	

五、（共 10 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上的 n 阶方阵, 证明:

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geq n,$$

并且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.

得分	

六、（共 15 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵.

1. 证明: 存在正整数 k, 使 $|k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|>0$;
2. 若对任意 n 维非零实向量 $\boldsymbol{x}$ 有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\neq 0$, 求证: $|\boldsymbol{A}|\neq 0$;
3. 若对任意 n 维非零实向量 $\boldsymbol{x}$ 有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$, 求证: $|\boldsymbol{A}|>0$.