

# 中国人民大学期中考试试题

## 数学分析 II

(2022-2023 学年)

一. (18 分) 计算下列积分:

$$(1) \int \frac{\cos x \sin x}{1 + \sin^4 x} dx; \quad (2) \int \arctan \sqrt{x} dx; \quad (3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

二. (10 分) 设

$$a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}, n \in \mathbf{Z}^+$$

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

三. (12 分) 设函数  $f$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且满足

$$\int_a^b x^i f(x) dx = 0, (i = 0, 1)$$

证明:  $f$  在区间  $(a, b)$  内至少有两个零点.

四. (12 分) 设  $f$  是区间  $[a, b]$  上的非负可积函数, 有有限多个间断点. 证明:

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

仅当  $f$  在连续点上恒为零.

五. (12 分) 设  $f$  是  $\mathbf{R}$  上的连续函数. 已知  $\int_0^1 f(tx) dt = 0$  对任意  $x \in \mathbf{R}$  成立  $f(x) \equiv 0$ .

六. (12 分) 求曲线  $r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$ ,  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  的弧长.

七. (12 分) 求位于“曲线  $r = 1 + 2 \cos \theta$  以内, 圆周  $r = 2$  以外”这部分区域的面积.

八. (12 分) 设  $\alpha > 0$ , 请讨论无穷限积分  $\int_1^{\infty} \frac{\ln^\alpha x \sin x}{x} dx$  的收敛性.