一、单项选择（每小题 5 分，共 20 分）

1、设a是方阵 A 的特征值，f(x) 是多项式。则下列说法错误的是：(　　　　)

（1）$f(a)$一定是 $f(A)$ 的特征值。（2）如果 $f(A)=0$，一定 $f(a)=0$.

（3）如果 $f(a)=0$，一定 $f(A)=O$.（4）如果 $a=0$，一定 $\det A=0$.

2、p 是任意素数. 下列论断错误的是：（　　　）

(1) x^4+p 没有实数根.　　　　(2) x^4+p 在实数域上不可约.

(3) x^4+p 在有理数域上不可约.　(4) x^4+p 在复数域中没有重根.

3、下列哪个方程的全体实数解 (x,y,z) 能组成子空间（　　　）

(1) $x+y+z=2020$;　　　　(2) $x^2-y^2+z^2=0$;

(3) $(x-y)(y-z)=0$;　　　(4) $(x+y+z)^2+(x+2y+4z)^2=0$.

4、A 是 4 阶实对称方阵，秩为 3，且满足 $A^2+A=0$，则 A 相似于

(1) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

答案：1（3）　2、(2)　3（4）　4 (4)

二、判断题(每小题 5 分，共 30 分，判断下列命题是否成立，并说明理由：成立的证明之，不成立的举个反例)

1、　A 是正交方阵，则 A+2E 可逆。

2、　设 A,B 是二阶方阵，且 $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B$, $4\det A=4\det B\neq(\mathrm{tr}\ A)^2$, 那么 A 与 B 在复数域上相似；

3、　实数域上 2 阶方阵组成的空间 $V=R^{2\times2}$ 上的线性变换 $\tau: X\to X^T$ 将每个矩阵 X 转置. 则 τ 的特征向量 X 一定是对称方阵。

4、　若方阵 A 的特征多项式$f(x)$与它的导数$f'(x)$互素，那么 A 在复数域上相似于对角阵。

5、　A,B 是n阶实方阵，$S=A^TA$ 与 $W=BB^T$ 特征多项式相等，则 S 与 W 相似。

6、　同阶正定实对称方阵 A,B 的特征多项式相同。

答案：1、成立 (因为-2 不是 A 的特征值)

2、成立(特征多项式 $x^2-(\mathrm{tr}A)x+\det A$ 的判别式 $(\mathrm{tr}A)^2-4\det A\neq0$,有两个不同特征值，A,B 都相似于对角阵。

3、不成立(特征向量还有反对称方阵)

4、成立、5、成立　6、 不成立

三、**(12 分)** $f(x)=x^4+2x^3+5x^2+4x+4$。

(1) 证明 $f(x)$ 在复数域内有重根。 （2）求 $f(x)$ 的全部复数根。

四. (12分) 已知方阵 $A=\begin{pmatrix}0&4\\1&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&b\end{pmatrix}$ 相似。

(1) 根据 $\det A, \operatorname{tr} A$ 求 a, b.

(2) 求可逆方阵 T 将 A 相似到 $T^{-1}AT=B$.

五、(12 分）设 $M_n(\mathrm{R})$是 n 阶实矩阵组成的集合. 在 $M_n(\mathrm{R})$上定义二元函数:

$$(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \mathrm{tr}(\mathrm{AB}^T)$$

其中B^T 表示 B 的转置，$\mathrm{tr}(\mathrm{AB}^T)$表示矩阵$\mathrm{AB}^T$ 的迹.

1. 证明(A,B)满足内积条件, 因此 $M_n(\mathrm{R})$成为一个欧氏空间.
2. 写出一组标准正交基.

六、(14 分) 设V为n维欧氏空间，对于任意的向量$x,y\in V$, V中的内积记为(x,y), 已知α是V中一个固定向量，定义V上的一个变换如下：$\sigma(x)=x+k(x,\alpha)\alpha$, 对于任意的$x\in V$,其中$k$为非零实数.

(1)、证明：σ是线性变换；

(2)、已知α在 V 的一组标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$下的坐标为

$(a_1,a_2,\dots,a_n)^T$,求σ在这组基下的矩阵；

(3) 证明：σ是对称变换；

(4) 证明：σ是正交变换的充分必要条件是$k=-\dfrac{2}{(\alpha,\ \alpha)}$