

高等数学 I 练习题

一、计算下列各题

1. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 2}{2n + 1} = 3$, 求 a, b 的值

2. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2})$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\arctan x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$

5. 已知 $y = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sin t^3 dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

二、求解下列问题

1. 假设 $y = y(x)$ 是由方程 $\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \arctan \frac{y}{x}$ 所确定的隐函数, 求 $y'(x)$ 。

2. 求直线 $\begin{cases} 5x - 3y + 3z = 9 \\ 3x - 2y + z = 1 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 2x + 2y - z = -23 \\ 3x + 8y + z = 18 \end{cases}$ 的夹角的余弦。

3. 计算星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} (a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi)$ 的全长。

4. 求不定积分 $\int x^2 \sqrt{1+x^2} dx$ 。

5. 设 $f(x) = x|x(x-2)|$, 求 $f'(x)$

三、作出下列函数的图象 $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

四、积分应用:

设区域D是由曲线 $y = x^2$ 和 $x = y^2$ 围成的平面区域.

(1) 计算D的面积;

(2) 计算D绕ox轴旋转一周所得到旋转体的体积。

五、证明：对于每个正整数 n ，都成立着不等式 $\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{2}{3}n\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{2}$ 。

六、设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域中有 $n+1$ 阶导数且 $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ ，证明：在 $f(x)$ 的拉格朗日型余项的泰勒公式

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!}h^n \quad (0 < \theta < 1)$$

中，必有 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$ 。