一、 1. (✔) 理由: $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$. 如果 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, 显然 $\boldsymbol{\alpha}$ 可被任意向量组线性表出; 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以被任意向量组线性表出, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以被 $\mathbf{0}$ 线性表出, 所以 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

2. (✔) 理由: 因为 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}$, 而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆.

3. (✘) 反例: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=1$, 但矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 至少有 $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$ 两个解.

4. (✔) 理由: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 它们是奇异的, 且 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

5. (✔) 理由: 因为 $(\boldsymbol{A}^*)^2=\boldsymbol{E}$, 所以 $|\boldsymbol{A}^*|^2=1$.

   又由 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}$, 得 $|\boldsymbol{A}|^{n-1}=|\boldsymbol{A}^*|$, 从而 $|\boldsymbol{A}|^2=1$.

   所以, $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{A}^*)^2=(\boldsymbol{AA}^*)^2=|\boldsymbol{A}|^2\,\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{E}$.

6. (✘) 反例: 取 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}_3$, 则 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{E}_3$, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 正定, 而 $\boldsymbol{A}$ 显然不是正定的.

二、 1. $c^n+bc^{n-1}+b^2c^{n-2}+\cdots+b^{n-1}c+b^n$

2. 3

3. 1

4. $k<-1$

三、 记方程组为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{pmatrix}$ 是系数矩阵, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. [1]

1. 可以看出, $\boldsymbol{A}$ 的前两行线性无关, 得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geq 2$; [1]

   设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是方程组的三个线性无关解, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{\beta},\ \ i=1,2,3.$

   令 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_3,\ \ \boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3$. 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0},\ \ i=1,2.$

   若 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2=\mathbf{0}$, 则有 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2-(k_1+k_2)\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}$, 从而 $k_1=k_2=0$.

   所以, $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的两个线性无关解, 得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leq 4-2=2$.

   故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$. [3]

2. 对增广矩阵作初等行变换,

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&4-2a&b-5+4a&4a-2\end{pmatrix}$$

   由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, 得 $4-2a=b-5+4a=0$, 解得 $a=2,b=-3$; [3]

   继续化为简化的阶梯形矩阵

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

   即得通解: $(2,-3,0,0)^{\mathrm{T}}+k_1(-2,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(4,-5,0,1)^{\mathrm{T}}$. [2]

四、 1. 设 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, 则

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=n(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2)=n\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\geq 0,$$

所以 f 半正定, 其秩等于正惯性指数, 而负惯性指数等于零. [4]

又因为 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \\ 0 & n & \cdots & 0 & -n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & -n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 f 的秩是 $n-1$, 正惯性指数是 $n-1$, 负惯性指数是 0. [3]

2. 当 $n=4$ 时, 直接对 $\boldsymbol{A}$ 做合同变换,

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$,

可得 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的标准形为 $3y_1^2+\dfrac{8}{3}y_2^2+2y_3^2$. [8]

注记. 答案不唯一.

五、 *方法一*　设 $\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\mathrm{r}\,(\boldsymbol{Z})$. [4]

对 $\boldsymbol{Z}$ 做分块初等变换

$$\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+R_1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1-C_2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1-\boldsymbol{A}R_2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2-C_1(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\qquad [4]$$

所以 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{Z})=\mathrm{r}\,(\boldsymbol{E})+\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2)$, 因此 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geq n$,

且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$. [2]

方法二　因为 $\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$, 所以 $n=\mathrm{r}\,(\boldsymbol{E})\leq\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$. [2]

记 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n)$, 设 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=t$. 则 $\mathrm{r}\,\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n\}=t$.

如果 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$, 那么 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0}$, 所以, $t\leq n-\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A})$,

即 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leq n$. 因此有 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$. [3]

反之, 如果等号成立, 则 $t=n-r$, 其中 $r=\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A})$.

设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\ldots,\boldsymbol{\gamma}_t$.

用 $\boldsymbol{\gamma}_i$ 右乘等式 $\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$ 两边, 得 $\boldsymbol{\gamma}_i=-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\gamma}_i$, $i=1,2,\ldots,t$. [2]

所以, $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\ldots,\boldsymbol{\gamma}_t$ 可以由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$ 表出, 而这两个向量组有相同的秩 t, 故它们等价. 所以, 每个 $\boldsymbol{\beta}_j$ 都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0}$.

于是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n)=\boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$. [3]

方法三　前两部分与方法二相同. 设 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n-r$. 要证 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$.

设 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\ldots,\boldsymbol{\eta}_r$, 则 $\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i$, $i=1,2,\ldots,r$.

先证明 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\ldots,\boldsymbol{\gamma}_t,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\ldots,\boldsymbol{\eta}_r$ 线性无关. 设

$$k_1\boldsymbol{\gamma}_1+k_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\gamma}_t+l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\eta}_r=\mathbf{0}.$$

两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得到 $l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\eta}_r=\mathbf{0}$, 从而有 $l_1=l_2=\cdots=l_r=0$.

于是, $k_1\boldsymbol{\gamma}_1+k_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\gamma}_t=\mathbf{0}$, 得 $k_1=k_2=\cdots=k_t=0$. 无关性得证. [3]

验证: $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\ldots,\boldsymbol{\gamma}_t,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\ldots,\boldsymbol{\eta}_r$ 都是 $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解.

所以, $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})=0$, 从而, $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$. [2]

六、设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，设 $M=\max\limits_{1\le i,j\le n}\{|a_{ij}|\}$.

1. **方法一** 取整数 $k>Mn$，则 $k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的对角元素

$$k+a_{ii}>Mn-|a_{ii}|\ge\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|-|a_{ii}|=\sum_{j\ne i}|a_{ij}|,$$

即 $k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是严格对角优势矩阵. [4]

由教材第 3 章补充题 10，$|k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|>0$. [1]

方法二 按行列式的定义，$|k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$ 展开式的一般项中除对角线元素的乘积 $(k+a_{11})(k+a_{22})\cdots(k+a_{nn})$ 这一项以外, 其他项的乘积中至多有 $n-2$ 个对角线元素, 这些项是 k 的至多 $n-2$ 次多项式, 所以,

$$\begin{aligned}|k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|&=(k+a_{11})(k+a_{22})\cdots(k+a_{nn})+k\text{ 的至多}n-2\text{次多项式}\\&=k^n+(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})k^{n-1}+k\text{ 的至多}n-2\text{次多项式}\\&=k^n+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k+a_n.\end{aligned}\qquad[4]$$

当 $k\to\infty$ 时，$f(k)\to\infty$. 所以, 存在正整数 k 使得 $|k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|>0$. [1]

注记. 事实上, 上式中的 a_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有 i 级主子式之和. 证明如下:

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

给定整数 $1\le j_1<j_2<\cdots j_i\le n$，定义 $\boldsymbol{A}_{j_1j_2\cdots j_i}$ 为 n 阶矩阵,

$$\boldsymbol{A}_{j_1j_2\cdots j_i}\text{的第 }j\text{ 列}=\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_j, & j\in S,\\ k\boldsymbol{e}_j, & j\notin S,\end{cases}$$

其中 $S=\{j_1,j_2,\ldots,j_i\}$.

选定第 $j_1,j_2,\ldots,j_i$ 列, 由 Laplace 定理, 得 $|\boldsymbol{A}_{j_1j_2\cdots j_i}|=k^{n-i}A\begin{pmatrix}j_1\ j_2\ \cdots\ j_i\\ j_1\ j_2\ \cdots\ j_i\end{pmatrix}$.

把 $|k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$ 拆成 2^n 个行列式之和,

$$\begin{aligned}|k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|&=|k\boldsymbol{E}|+\sum_{r=1}^{n}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_i\le n}|\boldsymbol{A}_{j_1j_2\cdots j_i}|\\&=k^n+\sum_{i=1}^{n}k^{n-i}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_i\le n}A\begin{pmatrix}j_1\ j_2\cdots j_i\\ j_1\ j_2\cdots j_i\end{pmatrix}\\&=k^n+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k+a_n.\end{aligned}$$

其中 $a_i=\sum\limits_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_i\le n}A\begin{pmatrix}j_1\ j_2\cdots j_i\\ j_1\ j_2\cdots j_i\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有 i 级主子式之和.

方法三 任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$,

$$|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|=\left|\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right|\leq M\sum_{i,j=1}^{n}|x_i||x_j|\leq(Mn)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

取整数 $k>Mn$, 则

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}\geq k\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|\geq(k-Mn)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0,$$

由 (3) , 得 $|k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|>0$. [5]

2. **方法一 反证法** 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,
从而 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$. 与假设矛盾! [4]

方法二 数学归纳法 当 $n=1$ 时, $\boldsymbol{A}=(a_{11})\neq 0$, 结论显然成立.
假设结论对 $n-1$ 阶矩阵成立.
设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_1$ 是 $n-1$ 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{n-1}$.
当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1$ 时, 得 $a_{11}=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}\neq 0$.
令 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{1}{a_{11}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{n-1}\end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{C}|=1$, $\boldsymbol{C}$ 可逆.
验证: $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}a_{11} & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_1-\dfrac{1}{a_{11}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $n-1$ 阶矩阵.
可见, $|\boldsymbol{A}|=\left|\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right|=a_{11}\left|\boldsymbol{B}\right|$.
任意 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{n-1}$, $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$, 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$, 并且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$.
于是, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\neq 0$, 根据归纳假设, $|\boldsymbol{B}|\neq 0$. 从而, $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. [4]

3. **方法一** 构造 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix}a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$, $0\leq\lambda\leq 1$.
由于任意非零 $\boldsymbol{x}$ 有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$, 所以, $a_{ii}=\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i>0$.
因此, 当 $0\leq\lambda\leq 1$ 时, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}(1-\lambda)a_{ii}x_i^2+\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$. [4]
故由 (2) 可知, $|\boldsymbol{A}(\lambda)|\neq 0$. 但 $|\boldsymbol{A}(0)|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}>0$,
注意到, $|\boldsymbol{A}(\lambda)|$ 是 λ 的连续函数, 得 $|\boldsymbol{A}(1)|>0$, 即 $|\boldsymbol{A}|>0$. [2]

方法二 数学归纳法 （与(2)的方法二类似）
当 $n=1$ 时, $a_{11}>0$, 结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 阶矩阵成立.
设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_1$ 是 $n-1$ 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{n-1}$.

当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1$ 时, 得 $a_{11}=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}>0$.

令 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{1}{a_{11}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{n-1}\end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{C}|=1$, $\boldsymbol{C}$ 可逆.

验证: $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}a_{11} & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_1-\dfrac{1}{a_{11}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $n-1$ 阶矩阵.

可见, $|\boldsymbol{A}|=\left|\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right|=a_{11}\,|\boldsymbol{B}|$.

任意 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{n-1}$, $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$, 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$, 并且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$.

于是, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}>0$, 根据归纳假设, $|\boldsymbol{B}|>0$. 从而, $|\boldsymbol{A}|=a_{11}\,|\boldsymbol{B}|>0$. [6]

方法三　先证明如下引理:

引理 若 $\boldsymbol{B}$ 正定, $\boldsymbol{S}$ 是实反对称矩阵, 则 $|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{S}|>0$.

考虑 $f(\lambda)=|\boldsymbol{B}+\lambda\boldsymbol{S}|$, $0\le\lambda\le1$.

当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\lambda\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$. 根据 (2) 的结论, $f(\lambda)\neq0$.

$f(0)=|\boldsymbol{B}|>0$, 所以, $f(1)>0$, 即 $|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{S}|>0$, 引理得证. [3]

矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{S}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$ 对称, $\boldsymbol{S}=\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$ 反对称.

当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$, 所以, $\boldsymbol{B}$ 正定. 故 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{S}|>0$. [3]

注记. 事实上, 若 $\boldsymbol{S}$ 非零, 则 $|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{S}|>|\boldsymbol{B}|$. 证明如下:

由教材第 5 章补充题 5, $\boldsymbol{S}\simeq\operatorname{diag}(\boldsymbol{J},\cdots,\boldsymbol{J},\boldsymbol{O})$, 其中 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,

所以, $|\boldsymbol{S}|\ge0$. 同理, $\boldsymbol{S}$ 的所有主子式都是非负的.

由于 $\boldsymbol{S}$ 非零, 设某个 $s_{ij}\neq0(i<j)$, 则二阶主子式 $\begin{vmatrix}0 & s_{ij}\\ -s_{ij} & 0\end{vmatrix}=s_{ij}^2>0$.

于是, $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{S}|=1+a_1+\cdots+a_n>1$, 其中 a_i 是 $\boldsymbol{S}$ 的 i 级主子式之和.

$\boldsymbol{B}$ 正定, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$.

令 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}^{-1}$. 则 $\boldsymbol{U}$ 也是非零实反对称矩阵, $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}$, 从而,

$$|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{S}|=\left|\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{Q}\right|=\left|\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\right|\,|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{U}|\,|\boldsymbol{Q}|\ge\left|\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\right|=|\boldsymbol{B}|.$$