2020- 2021 学年第二学期《高等代数 II》期中考试试题-1

（考试时间 2021 年 4 月 30 日 ）

我郑重承诺：在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严。 承诺人签字:

一、 判断题（每小题 5 分，共 25 分）判断下列命题是否成立，并说明理由。

1. 数域P上任意一个不可约多项式在复数域内没有重根. ✓

2. 在$P[x]$中, $f(x)$的次数大于 0, 令$g(x)=f(x+b)$, $b\in P$, 若$f(x)$在P上不可约, 那么$g(x)$在P上不可约.

3. 如果$f(x)|g_1(x)g_2(x), f(x)\nmid g_1(x)$，那么$f(x)|g_2(x)$.

4. $A_{s\times n}$是实矩阵，其秩为$r<n$，$x_{r+1},\dots,x_n$是$Ax=0$的一个基础解系，将其扩充为R^n中的一组基$x_1,\dots,x_r,x_{r+1},\dots,x_n$，令$B=(x_1,\dots,x_r)$，那么矩阵$AB$列满秩.

5. 数域P上n维数组线性空间P^n的任一子空间V都是数域P上某个齐次线性方程组的解空间.

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

6. 写出多项式$f(x)=3x^4+8x^3+6x^2+3x-2$的全部有理根并标明其重数：__________.

7. 写出多项式 x^n+1 在复数域和实数域上的标准分解式：____________________.

8. 多项式$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$， $g(x)=x^3+x^2-2x-1$，那么$(f(x),g(x))=$ ____________________.

9. 在$R[x]$中，向量$5x^3-12x^2+13x-4$在子空间直和$L((x-1)^0,(x-1)^2)\oplus L((x-1),(x-1)^3)$中的分解式为____________________.

10. 设$V=\left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2+\mathrm{i}x_3 \\ x_2-\mathrm{i}x_3 & -x_1 \end{pmatrix}\middle| x_1,x_2,x_3\in R\right\}$，其中$i$表示虚数，请写出$V$的维数和一组基____________________.

三．解答题和证明题（50 分 ）

11. (15 分)数域P上的多项式$f(x)$是 4 次多项式，如果$x-2$是$f(x)+5$的三重因式，$x+3$是$f(x)-2$的二重因式，求$f(x)$.

12. (15 分) A为n阶实对称矩阵，秩为r，且$A^2=A$

（1）求证$V=\{x\in R^n|x^TAx=0\}$为R^n的子空间；

（2）求V的维数；

（3）给出V的一个直和补，即R^n的一个子空间 W，使得$R^n=V\oplus W$.

13. （20 分） 在线性空间$P[x]_n$中，

（1）证明：$1,x,x^2,\dots,x^{n-1}$和$1,x-a,(x-a)^2,\dots,(x-a)^{n-1}$都是 $P[x]_n$的基，其中$a\in P$且$a\neq 0$;

（2）当$n=3, a=2$时，给出从基$1,x,x^2,\dots,x^{n-1}$到基$1,x-a,(x-a)^2,\dots,(x-a)^{n-1}$的过渡矩阵及相应的坐标变换公式;

（3）求$P[x]_n$的一组基，使得$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}\in P[x]_n$在这组基下的坐标都是非负的.

2020- 2021 学年第二学期《高等代数 II》期中考试试题-2

（考试时间 2021 年 4 月 30 日 ）

我郑重承诺：在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严。 承诺人签字:

一、 判断题（每小题 5 分，共 25 分）判断下列命题是否成立，并说明理由。

1. 若 $p(x)$是 $f'(x)$的因式，则 $p(x)$是 $f(x)$的重因式. ×

2. 若n次整系数多项式$f(x)$不能分解为两个次数较低的整系数多项式的乘积, 那么它在有理数域上不可约. √

3. 设向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$为线性空间$V$中的一组向量，若 V 中任意向量均可由该向量组线性表出，那么$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$必线性无关且可构成 V 的一组基. √

4. 复数域作为实数域上的线性空间时是 2 维的，且$1+i$和$1-i$可以构成它的一组基，这里$i^2=-1$. √

5. W_1，W_2是n维线性空间V的两个子空间， 那么$W_1\cup W_2$也一定是V的子空间. √

二、 填空题（每小题 5 分，共 25 分）

6. 实数域上不可约多项式的最高次数是____________， 写出实数域上所有不可约多项式的具体形式及附带条件______________________________________.

7. 多项式$f(x)=2x^3+3x^2+2x+1$与$g(x)=4x^4+8x^3+6x^2+5x+2$的最大公因式$(f(x),g(x))$=________________________________.

8. 分别写出多项式x^4+64在实数域和复数域上的标准分解式______________.

9. 已知$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是线性空间 V 的一组基，V 中向量α_1，α_2，α_3在这组基下的坐标分别是$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，而$\beta=\alpha_1+\alpha_2$，那么$\beta$ 在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的坐标是____________ .

10. 设 $V=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in R\right\}$， 请写出 V 的维数______________和一组基_________________________.

三．解答题和证明题（50 分 ）

11. (15 分)判断多项式$f(x)=2x^5+6x^4-12x^2+4x+3$在有理数域上是否可约..

12. (15 分) 设 m,n 都是正整数，$P^{m\times n}$ 表示数域 P 上所有 $m\times n$ 矩阵构成的线性空间. $P^{m\times n}$ 中所有满足每一行的行和都是 0 的矩阵集合记为W， $P^{m\times n}$ 中所有满足任意一行各元素都相等但不同行的元素可以不相等的矩阵集合记为U， 证明

(1) W 和U 均为 $P^{m\times n}$ 的子空间;

(2) $W\oplus U=P^{m\times n}$；

(3) 写出U 的一组基，并求W 和U 的维数.

13. （20 分） 设W_1，W_2为n维线性空间V 的两个子空间， 证明:

(1) $W_1\cup W_2$是V 的子空间当且仅当: $W_1\cup W_2=W_1+W_2$

(2) $W_1\cup W_2$是V 的子空间当且仅当: $W_1\subset W_2$或者$W_2\subset W_1$