我郑重承诺：

在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严。

签字：

2013–2014 学年第一学期 **高等代数** 期终试卷

（考试时间：2014.01.16　上午 8:00 — 10:00 ）

姓名 ____________ 学号 ____________

题号	一	二	三	四	五	六	合计	评卷人
题分	30	20	15	10	15	10	100	
得分								

得分	

一、(共 30 分) 判断下列命题是否成立, 画(✔)或(✘), 并说明理由

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 n 阶方阵, $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{O}$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{C})\le 2n$.

   (✔)

   利用r(A)+r(BC)<=n;r(BC)>=r(B)+r(C)-n

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^2\\ \boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A}^3\end{pmatrix}$ 也可逆.

   (✘)

   取A=E即可证明结论错误

3. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

   (✔)

   此题直接列方程组求解即可

4. 设方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解, 则对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{\beta}$, 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解.

   (✘)　Ax=β有解的条件应该是A的秩为n。

5. 对于任意 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 当 $\lambda>0$ 时, $\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 正定.

   (✔)

6. 若 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

   (✘)　显然错误，当秩小于n-1的时候，A的伴随矩阵即为0

得分	

二、（共 20 分） 填空

1. 设 $a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$, 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵为 $\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}}$.

2. n 阶三对角行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\quad n+2 \quad}$.

3. 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + \ \ 4x_2 + 12x_3 = 5 \\ 2x_1 + \ \ ax_2 + 12x_3 = a-1 \\ 3x_1 + 12x_2 + 2ax_3 = 10 \end{cases}$

无解, 则 $a = \underline{\quad 18 \quad}$.

4. 若二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^3) + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3 + x_4^2$$

是正定的, 则所有 λ 的取值为 $\underline{\quad \lambda > 2 \quad}$.

得分	

三、(共 15 分) 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0\\ \vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases},\quad (n\geq 2)$$

试问 a 为何值时, 该方程组有非零解, 并求其通解.

解. 系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a&1&\cdots&1\\2&2+a&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&\cdots&n+a\end{pmatrix}=a\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,

其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,\ldots,n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$. 所以, $|\boldsymbol{A}|=a^{n-1}\left[a+\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$ [4]

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\iff$ $|\boldsymbol{A}|=0$ $\iff$ $a=0$ 或 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$. [2]

当 $a=0$ 时, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&\cdots&n\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$

故一般解为 $x_1=-x_2-\cdots-x_n$, 得一基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1,\ldots,0)^{\mathrm{T}},\ldots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(1,0,0,\ldots,-1)^{\mathrm{T}}.$$

通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}$. [5]

当 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a&1&\cdots&1\\2&2+a&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&\cdots&n+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&\frac{n+a}{n}\\0&1&\cdots&0&-\frac{2}{n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-\frac{n-1}{n}\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}=(1,2,\ldots,n)^{\mathrm{T}}$, 通解为 $k\boldsymbol{\xi}$. [4]

得分	

四、（共 10 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XD}$，其中

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

1. 计算 $\boldsymbol{X}^{-1}$；　　2. 计算 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解.

1. 作初等行变换

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{E}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1,\,R_3-2R_2}\begin{pmatrix}1&-1&1&1&0&0\\0&2&-1&-1&1&0\\0&3&-1&-2&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2,\,R_2\leftrightarrow R_1}\begin{pmatrix}1&-1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&-1&1\\0&2&-1&-1&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&-1\\0&1&0&-1&-1&1\\0&0&1&-1&-3&2\end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{X}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-1&1\\-1&-3&2\end{pmatrix}$. [5]

2. $\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&1/2\end{pmatrix}$. [2]

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{XD}^{-1}\boldsymbol{X}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\2&3&-2\\\frac{5}{2}&\frac{7}{2}&-2\end{pmatrix}$$

[3]

得分	

五、(共 15 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $n\geq m$,

1. 证明:$|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}|=\lambda^{n-m}|\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA}|$.
2. 证明:$\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA}$ 可逆.
3. 当 $\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA}$ 可逆时, 用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 及 $(\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA})^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}$ 的逆.

证明:

1. 考虑 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-\boldsymbol{A}R_2}\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}$,

   所以 $|\boldsymbol{M}|=\begin{vmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_m\end{vmatrix}=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}|$. [2]

   当 $\lambda\neq 0$ 时, $\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B}R_1}\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_m-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{BA}\end{pmatrix}$,

   于是 $|\boldsymbol{M}|=|\lambda\boldsymbol{E}_n|\,|\boldsymbol{E}_m-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{BA}|=\lambda^n|\boldsymbol{E}_m-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{BA}|=\lambda^{n-m}|\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA}|$. [2]

   当 $\lambda=0$ 时, 若 $n=m$, 由乘法公式; 若 $n>m$, 则左边为零, 右边也为零. [2]

2. 由1., $|\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA}|$, $|\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}|=0$ 当且仅当 $|\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA}|=0$,
   故 $\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA}$ 可逆. [4]

3. 方法一. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB})^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB})^{-1} & \boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}$. [1]

   又 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}$, [1]

   所以有, $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA})^{-1}\boldsymbol{B} & *\\ * & *\end{pmatrix}$, [2]

   比较即得. [1]

   方法二. 设 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB})^{-1}$, 即 $(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}_n$. 两边左乘 $\boldsymbol{B}$, 得

   $$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BX}-\boldsymbol{BABX}=(\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA})\boldsymbol{BX},\qquad [1]$$

   所以 $\boldsymbol{BX}=(\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA})^{-1}\boldsymbol{B}$, 即有 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA})^{-1}\boldsymbol{B}$, [2]

   $$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}+\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA})^{-1}\boldsymbol{B}.\qquad [2]$$

得分	

六、（共 10 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, 证明 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}) = n$ 的充分必要条件是存在 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

证明:

必要性. 设 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}) = n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 取 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$, 则有 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$, [3]

所以, $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 是正定的. [2]

充分性. 设 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定的. 任给 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,

$$0<\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB\alpha}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha} \qquad [2]$$

所以, $\boldsymbol{A\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, [1]

即线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 即 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A})=n$. [2]