

2003–2004学年第一学期期末考试

数学分析试题 (A) (03 级统计、环境科学、金融工程专业)

姓名 _____ 学号 _____ 专业 _____

一、计算下列极限 (共有 3 个小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right).$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\sin \frac{1}{x}}.$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right).$

二、求下列导数和微分（共有 4 个小题，每小题 8 分，共 32 分）

1. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, 求 y' .

2. $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\arctg \frac{y}{x}}$, 求 dy .

3. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$, 求 y'' (y 对 x 的二阶导数), d^2y 及 dx^2 .
并回答 y'' 是否等于 d^2y 除以 dx^2 的商, 为什么?

4. 已知 $f(x) = (x - a)^2\varphi(x)$, 其中 $\varphi'(x)$ 在点 $x = a$ 的某邻域内连续, 求 $f''(a)$.

三 (14 分) 计算机通常用牛顿迭代法做开方运算。设 $A > 0$ 是一给定数, $f(x) = x^2 - A$, 我们可得到迭代关系式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right), \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

取初值 $x_0 = A + 1$, 请证明迭代数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且其极限为 \sqrt{A} .

四 (16 分) 请确定常数 a, b, c 使 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有一拐点 $(1, 3)$, 且在点 $x = 0$ 处有极大值 5, 然后证明方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 只有一个实零点.

五 (14 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 连续, $a < c < b$, 区间 (a, b) 既可为有限区间也可为无限区间. 若 $f(x)$ 在 $(a, c]$, $[c, b)$ 分别一致连续, 请证明 $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续, 并用此结果证明 \sqrt{x} 在 $(0, +\infty)$ 一致连续.