装 订 线

我郑重承诺：
在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严。
签字：

2015－2016学年第一学期 高等代数（I）期末试题

（考试时间：2016.01.07. 上午 8:00-10:00）

姓名__________ 学号__________

题号	一	二	三	四	五	六	合计	评卷人
题分	30	20	15	10	10	15	100	
得分								

得分	

一、（共30分）判断下列命题是否成立，并说明理由.

1. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关蕴含 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\ldots$，$\alpha_n+\alpha_1$ 也线性无关.

（ ✗ ）$n=4$ 时，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4+\alpha_1$ 必定线性相关. 这可由其行列式为0证明.

2. 设 A_1,A_2 是 $m\times n$ 矩阵，β_1,β_2 是 m 维向量. 若 $A_1x=\beta_1$ 与 $A_2x=\beta_2$ 同解，则 (A_1,β_1) 与 (A_2,β_2) 行等价.

（ ✗ ）反例：$A_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_1=\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. 则两个方程组同解（均无解），但 (A_1,β_1)，(A_2,β_2) 不是行等价的.

3. 两个可逆矩阵的和必可逆.

（ ✗ ）反例：$A=E$，$B=-E$ 均可逆，而 $A+B=0$ 不可逆.

4. 对称矩阵的逆矩阵也是对称矩阵.

（ ✓ ）设 $A^T=A$，$AA^{-1}=E$，则有 $E=(A^{-1})^TA^T=(A^{-1})^TA$，所以 $(A^{-1})^T=A^{-1}$

5. 设 n 阶矩阵 A,B 的元素均为非负实数，那么 $|A|+|B|\le|A+B|$.

（ ✗ ）反例：$|A|=\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}=0$，$|B|=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1$，$|A+B|=\begin{vmatrix}2&2\\1&1\end{vmatrix}=0$

6. 实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 正定的充要条件是符号差为 n.

（ ✓ ）实二次型正定 $\Leftrightarrow$ 正惯性指数为 n，即负惯性指数为0，也就是符号差为 $n-0=n$.

得分	

二、(共20分) 填空

1. 设n阶行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则$\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}=$ $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$ ______.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ______.

3. 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = b_1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = b_2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = b_3 \end{cases}$$

有无穷多解，则λ, b_1, b_2, b_3满足的条件是 $\lambda=1,\ b_1=b_2=b_3$ 或者 $\lambda=-2,\ b_1+b_2+b_3=0$ ______.

4. 矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & y \end{pmatrix}$正定. 则$x, y$满足 $x>4,\ y>\frac{1}{2}$ ______.

得分	

三、(共15分) 设n元线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. 计算行列式$|\boldsymbol{A}|$;
2. 当a为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求通解;
3. 当a为何值时, 该方程组有唯一解, 并求解的第1个分量.

解: 1. 记 $D_n=|A|$, 按第一行展开有 $D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$

同时, $D_1=2a$, $D_2=3a^2$, 由此可解出 $|A|=D_n=(n+1)a^n$.

2. 当 $a=0$ 时, 增广矩阵为

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知 $r(A,\beta)=r(A)=n-1<n$, 从而方程组有无穷多解.

容易求出一个特解为 $(0,1,0,\cdots 0)^T$, 导出组的基础解系为

$(1,0,\cdots 0)^T$. 所以可知通解为 $x=k(1,0,\cdots,0)^T+(0,1,0,\cdots 0)^T$

3. 当 $a\neq 0$ 时, 方程组有唯一解.

行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & 2a & 1 \\ 0 & 0 & & a^2 & 2a \end{vmatrix}=D_{n-1}=na^{n-1}$

由 Cramer 法则可知 $x_1=\dfrac{na^{n-1}}{|A|}=\dfrac{n}{(n+1)a}$

装 订 线

得分	

四、(共10分) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实矩阵.

1. 证明 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 合同.
2. 若 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 正定, 证明 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 负定.

证明：1. 由于

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ B^T & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E-B^TB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & B \\ B^T & E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E-BB^T & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ B^T & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & B \\ B^T & E \end{pmatrix}$$

所以 $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E-B^TB \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} E-BB^T & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ 合同.

从而可知 $E-B^TB$ 与 $E-BB^T$ 有相同的正负惯性指数，故它们合同.

2. A 正定，则存在可逆矩阵 P 使得 $A=P^TP$.

由 $E-A$ 正定，即 $E-P^TP$ 正定可知 $E-PP^T$ 正定，从而 PP^T-E 负定.

又 $PA^{-1}P^T=E$，从而有 $P(E-A^{-1})P^T=PP^T-E$，所以 $E-A^{-1}$ 负定.

得分	

五、(共10分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $s\times t$ 矩阵, $\boldsymbol{C}$ 为 $m\times t$ 矩阵.

1. 证明: 若矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 有解, 则秩的等式成立:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}) \quad \text{和} \quad \mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}.$$

2. 问 1. 的逆命题是否成立? 如果成立, 请给出证明; 如果不成立, 请给出反例.

1. 证明：将 AX 看成一个整体，则可知 C 的行向量组可由 B 的行向量组线性表出，所以有 B 与 $\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}$ 有相同的行秩，即

$$r(B)=r\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}$$

同理，把 XB 看做一整体，可得出 $r(A)=r(A,C)$

2. 结论成立.

① 对于特殊情况 $A=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

由 $r(A,C)=r(A)$，可得 $C=\begin{pmatrix}C_1\\0\end{pmatrix}$，$C_1$ 是 r 行矩阵.

令 $Y=\begin{pmatrix}C_1\\0\end{pmatrix}$ 是 $n\times t$ 矩阵. 验证 $AY=C$.

又 $r(B)=r\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}B\\Y\end{pmatrix}$，存在 X 使得 $XB=Y$. 所有 $AXB=C$.

② 对于一般情况，设 $r(A)=r$，有可逆矩阵 P,Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

原方程转化为 $A_1X_1B=PC$，其中 $A_1=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$X_1=Q^{-1}X$

验证 $r(A_1,PC)=r(A_1)$，及 $r\begin{pmatrix}B\\PC\end{pmatrix}=r(B)$，所以 X_1 有解，

即 X 有解.

装 订 线

得分	

六、(共15分) $\boldsymbol{A}$是三阶实对称矩阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}^3$ 是非零向量, 满足

$$\boldsymbol{A}\alpha_1=\alpha_1,\quad \boldsymbol{A}\alpha_2=2\alpha_2,,\quad \boldsymbol{A}\alpha_3=3\alpha_3.$$

1. 证明当$i\neq j$时, $\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_j=0$.
2. 证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.
3. 证明$\boldsymbol{A}$是正定矩阵.

证明: 1. 由于 $A\alpha_i=i\alpha_i$, $i=1,2,3$.

可知 $j\alpha_i^T\alpha_j=\alpha_i^TA\alpha_j=\alpha_j^TA\alpha_i=i\alpha_j^T\alpha_i=i\alpha_i^T\alpha_j$

即有 $(i-j)\alpha_i^T\alpha_j=0$.

从而当 $i\neq j$ 时, $\alpha_i^T\alpha_j=0$.

2. 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$. 对于 $i=1,2,3$, 有 $\alpha_i^T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3)=0$.

由1的结论可知 $k_i\alpha_i^T\alpha_i=0$.

而实向量 $\alpha_i\neq0$, 从而 $\alpha_i^T\alpha_i\neq0$. 所以 $k_i=0$. 即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

3. 任取 $x\in R^3$, $x\neq0$, 则存在不全为零的 x_1,x_2,x_3 使得

$x=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$

则有 $x^TAx=x_1^2\alpha_1^T\alpha_1+2x_2^2\alpha_2^T\alpha_2+3x_3^2\alpha_3^T\alpha_3>0$.

从而 A 正定.