期中复习题

题 1. 设 $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$($n$ 重根式), 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

题 2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 并考虑其逆命题是否成立, 成立请证明; 不成立请举例说明.

题 3. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 分别收敛于 a,b. 记 $c_n=\max\{a_n,b_n\},d_n=\min\{a_n,b_n\}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\max\{a,b\},\lim_{n\to\infty}d_n=\min\{a,b\}.$$

题 4. 设数列 a_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=a,\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

题 5. 设 $a_1,\cdots,a_m$ 是 m 个正数, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$.

题 6. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

题 7. 设 $a_n\le a\le b$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

题 8. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

题 9. 求证:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\alpha}{n^2}+\sin\dfrac{2\alpha}{n^2}+\cdots\sin\dfrac{n\alpha}{n^2}\right)=\dfrac{\alpha}{2}$.

题 10. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$.

题 11. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^p}\right)^x$.

题 12. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续, 且 $f(0)=f(2a)$. 证明: 在区间 $[0,a]$ 上存在某个 x_0, 使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

题 13. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$, 记 $f(x)=\dfrac{|x-x_1|+|x-x_2|+\cdots|x-x_n|}{n}$, 证明: 存在 $x_0\in[0,1]$, 使得 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

题 14. 设 a_1,a_2,a_3 为三个正实数,,$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$, 证明函数 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ 有且只有两个零点, 且分别位于 (λ_1,λ_2) 和 (λ_2,λ_3) 中.

题 15. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$. 证明: 对任意正整数 n, 在区间 $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ 中有一点 ξ, 使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)$.

题 16. 设 $\alpha\in\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 请问 α 取何值时,

- $f(x)$ 在 0 处连续;
- $f(x)$ 在 0 处可导;
- $f(x)$ 的导函数在 0 处连续.

题 17. 设 $f(x)$ 处处有三阶导数, 求 y'' 和 y''', 其中

- $y=f\left(x^2\right)$;
- $y=f(x+e^x)$.

题 18. 证明双曲线 $xy=1$ 上任意一点处的切线与两坐标轴构成的三角形面积为定值.

题 19. 设 $0<a<b$, 证明不等式

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}.$$

题 20. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$.

题 21. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(ab>0)$, 在 (a,b) 上可导, 求证存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

题 22. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导函数,$f(0)=f(1)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

题 23. 设 $f(x)$ 在 x_0 处存在二阶导数, 求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}.$$

题 24. 求 $\cos^2 x$ 的 $2n$ 阶麦克劳林公式.

题 25. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^4}-\cos^2 x-x^2}{x^4}$.

题 26. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导, 且对于任意 $x\in[0,2]$, 有 $|f(x)|\le 1$ 以及 $|f''(x)|\le 1$, 证明对任意 $x\in[0,2]$, 有 $|f'(x)|\le 2$.

题 27. 描绘函数 $y=x-2\arctan x$ 的草图.