中国人民大学 2021-2022 春季学期高等代数 II 期中试题 (A)

(考试时间: 2022 年 4 月 26 日上午)

序号____ 班级________ 姓名____________ 学号____________

> 我郑重承诺：在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严.
>
> 承诺人签字：

一、单选题 (共 6 题, 每题 5 分, 共 30 分).

1. 下列结论正确的是(C).

   A. 三维空间 R^3 中一个平面是一个子空间 ×
   B. 数域 P 上的线性空间 V 的两个子空间的并也是子空间 ×
   C. 一个向量组线性相关当且仅当其中一个向量可以被其余向量线性表出 √
   D. 二维空间 R^2 中一条直线是一个子空间 ×

2. 下列说法错误的是(D).

   A. 若一个整系数多项式在有理数域上可约, 则它一定能分解为两个次数较低的整系数多项式之积 √
   B. 设 $p_1, p_2, \ldots, p_s$ 是 s 个不同的素数, 则 $f(x) = x^n - p_1p_2\ldots p_2 (n > 1)$ 在有理数域上不可约 √ $p_s \nmid 1$ $p_s \nmid k_0$
   C. 如果 $x = a$ 是多项式 $f'(x)$ 的 m 重根，且 $x = a$ 是多项式 $f(x)$ 的根，那么它必为 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根，其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的一阶微商 √
   D. 若有理多项式 $f(x)$ 只有无理根，那么 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约 ×

3. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 2)$, $\alpha_2 = (1, 1, 3)$, $\alpha_3 = (1, -1, a+2)$, 及向量组 $\beta_1 = (1, 2, a+3)$, $\beta_2 = (2, 1, a+1)$, $\beta_3 = (2, 1, a+4)$, 则 a 满足下列哪种条件时, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 与 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 生成相同的子空间 (A).

   A. $a \neq -1$ B. $a \neq -2$ C. $a = -1$ D. $a = 0$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a \end{matrix}$$

$a=-1$ 时 dim=2
$a\neq-1$ 时 dim=1

2a+b

$a_1+a_2+a_3+a_4$

4. 设多项式 $f(x)=x^4+3x^3+5x^2+12x+4$ 的四个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 那么 $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2$ 的值为(C).

$a_1^2+a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+$

$a_1a_2a_3a_4=4$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

$a_1+a_2+a_3+a_4=-3$

15

$t+3(a_1a_2+\cdots)=6$

5. 下列结论错误的是(C).

A. 线性相关的向量组在同构映射下的向量组仍然线性相关 ✓

B. V 两个子空间 V_1 与 V_2 的和空间维数 $\dim\,(V_1+V_2)$ 不大于它们的维数之和 $\dim V_1+\dim V_2$ ✓

C. R^n 中的集合 $\{(a_1,a_2,\cdot,a_n)\in R^n:$ 有某个$a_i>0, 1\le i\le n\}$ 是 R^n 的一个子空间

D. R^n 中的集合 $\{(a_1,a_2,\cdot,a_n)\in R^n:$ $a_1,a_2,\cdots,a_n$不同时大于零，或不同时小于零$\}$ 是 R^n 的一个子空间

$\pm\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}-\frac{7}{4}$

6. 多项式 $f(x)=4x^4-7x^2-5x-1$ 的有理根个数为 (B)，重根按重数计算.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

$-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-1$

二、填空题 (共 4 题，每题 5 分，共 20 分.)

$x^2-3x+1\,\big)\,x^4-3x^3+a_1x+a_0$

$x^4-3x^3+x^2$

7. 多项式 $f(x)=x^4-3x^3+a_1x+a_0$, $g(x)=x^2-3x+1$, 则 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 的充要条件是 $a_1=3$　$a_0=-1$

$-x^2+a_1x+a_0$

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

8. 在 P^3 中，写出由基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

$\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵 A, 即 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$, $A=$ $\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ (2 分), 同时写出 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 到 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的过渡矩阵 $B=$ ________ (3 分).

9. 设 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 是 n 次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq 0, a_0\neq 0)$ 的 n 个根，请写出多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的根 $\frac{1}{\beta_1},\frac{1}{\beta_2}\cdots\frac{1}{\beta_i}$

10. 在 $P^{2\times 2}$ 中，所有形如 $\begin{pmatrix}-x&y\\x&-z\end{pmatrix}$ 的矩阵集合记为 V_1，所有形如 $\begin{pmatrix}b&c\\a&-a\end{pmatrix}$ 的矩阵集合记为 V_2，可证 V_1 与 V_2 均为 $P^{2\times 2}$ 的子空间，写出 $V_1\cap V_2$ 的一组基 $\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ (3 分)，同时 $\dim\,(V_1+V_2)=$ 4 (2 分).

dim=3　dim=3

三、计算和证明题，要求写出详细的解题或证明过程. 共 4 题，共 50 分.

设有整全 α

16. (10 分) 设 $f(x)$ 是整系数多项式, 如果 $f(1)$ 和 $f(0)$ 都是奇数，证明 $f(x)$ 没有整数根.

$f(x)=(x-a)g(x)$

$f(1)=(1-a)g(1)$ $(1-a)$ 为奇

$f(0)=-ag(0)$ a 为奇

12. (15 分) 数域 P 上 $2n$ 维向量空间 P^{2n} 中，记

$$V=\{(a_1,a_2,\cdots,a_{2n})\in P^{2n}: a_i=a_{2n+1-i},\ 1\le i\le n\},$$
$$W=\{(a_1,a_2,\cdots,a_{2n})\in P^{2n}: a_i=-a_{2n+1-i},\ 1\le i\le n\}.$$

求解或证明以下结论:

$(0,0,\cdots 0)\in V.\in W$ $k(\ )\in V$ $(\ )+(\ )\in V$

(1)(4 分) 证明 V 与 W 均为 P^{2n} 的子空间.

$(1,0,\cdots 0,1)$ $(0,1,\cdots 0,1,0)$

(1)(6 分) 分别写出 V 和 W 的一组基.

$\forall \in P^{2n}$

(2)(5 分) 证明 $P^{2n}=V\bigoplus W$. $\dim P^{2n}=\dim V+\dim W$

13. (15 分) 设 $f(x)=x^3+\alpha x+\beta$，其中 α,β 为系数.

$1^\circ\ \alpha=\beta=0$ $f'(x)=3x^2+\alpha$

(1)(9 分) 求多项式 $f(x)$ 有重因式的$\boxed{\text{充分必要}}$条件.

$(f'(x),f(x))=$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{3}x \\ 3x^2+\alpha & x^3+\alpha x+\beta \\ & x^3+\frac{1}{3}\alpha x \\ \hline & \frac{2}{3}\alpha x+\beta \\ & 2\alpha x+3\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{3}{2\alpha}x-\frac{9\beta}{4\alpha^2} \\ 2\alpha x+3\beta & 3x^2+\alpha \\ & 3x^2+\frac{9\beta}{2\alpha}x \\ \hline & -\frac{9\beta x}{2\alpha}+\alpha \\ & -\frac{9\beta x}{2\alpha}-\frac{27\beta^2}{4\alpha^2}=\alpha \end{array}$$

$27\beta^3+4\alpha^3=0$

(2)(6 分) 在 $f(x)$ 有重因式时求一个多项式 $g(x)$，使 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的不可约因式，但没有重因式. $g(x)=\frac{f(x)}{(f'(x),f(x))}$

14. (10 分) 设 V_1,V_2,V_3 为线性空间 V 的子空间, 求解或证明以下结论:

(1)(4 分) 举反例说明 $(V_1+V_2)\cap(V_1+V_3)=V_1+(V_2\cap V_3)$ 不成立.

(2)(6 分) 进而证明 $(V_1+V_2)\cap(V_1+V_3)=V_1+(V_1+V_2)\cap V_3$.

设 $V=R^3$ $V_1=\{(m,0,0)\mid m\in R\}$

$V_2=\{(0,k,0)\mid k\in R\}$

$(V_1+V_2)\in R^2$ $\{(k,k,0)$

$(V_1+V_3)\in R^2$

$\cap\ \in R^2$ $V_1+0=V_1$

$\forall\alpha\in(V_1+V_2)\cap(V_1+V_3)$

$\therefore \alpha\in V_1+V_2$ 且 $\alpha\in V_1+V_3$

令 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$

$\alpha_1\in V_1$ $\alpha_2\in V_2$

$\therefore \alpha_1\in V_1+V_3$

$\therefore \alpha_2\in V_1+V_3$

$\therefore$ 令 $\alpha_2=\alpha_1'+\alpha_3'$

$\therefore \alpha=\alpha_1+\alpha_1'+\alpha_3'$

$\alpha_b'\in V_3$ 且 $\alpha_3'\in V_2$

$\therefore \alpha_3'\in V_3\cap V_3$

$\therefore \forall\alpha\in$ ___ 有 $\alpha\in$ ___

$\forall\alpha\in V_1+(V_1+V_2)V_3$

$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$

$\alpha_2\in(V_1+V_2)\cap V_3$

$\alpha_2\in V_1+V_2$

且 $\alpha_2\in V_3$

$\therefore \alpha_1+\alpha_2\in V_1+V_2$

$\alpha_1+\alpha_2\in V_3+V_1$

$\therefore$ ___ $\to$ ___