中国人民大学2023-2024秋季学期《概率论与数理统计C》期末考试试卷

一、单项选择题(本大题共 10 小题，共 30 分) (本大题共 10 小题，共 30 分)

1、设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=1/4, P\{X=0\}=1/2, Y$ 与 X 同分布, 若满足 $P\{XY=0\}=1$, 则 $P\{X=Y\}$ 为

(A) $1/4$

(B) 0

(C) $1/2$

(D) $3/4$

2、设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布, 在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布, 则 (X,Y) 的联合概率密度函数为(　　).(本小题3分)

(A) $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(B) $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(C) $f(x,y)=\begin{cases}1/x, & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(D) $f(x,y)=\begin{cases}1/x, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

3、随机变量 $X\sim U[1,2]$, 随机变量 $Y\sim U[0,2]$, X 与 Y 相互独立, 随机变量 $Z=X+Y$, 记 Z 的概率密度函数为 $f_Z(z)$, 则 $z\in(3.4,3.8)$ 时, $f_Z(z)$ 的表达式为

(A) $\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $2-\frac{z}{2}$

(D) $8-2z$

4、设 X 与 Y 相互独立, X 的分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=0.5$, Y 是 $[-1,1]$ 上的均匀分布, 则下列概率计算不正确的是(

(A) $P\{X+2Y<0\}=\frac{1}{2}$.

(B) $P\{2X+Y>0\}=\frac{1}{2}$.

(C) $P\{X+2Y<3\}=1$.

(D) $P\{2X+Y>3\}=1$.

5、下列说法正确的是(

(A) 若随机变量 X 服从参数为3的泊松分布, 随机变量 Y 服从参数为2的泊松分布, X 与 Y 相互独立, 则 $X-Y$ 服从参数为1的泊松分布

(B) 若随机变量 X 服从参数为3的指数分布, 随机变量 Y 服从参数为2的指数分布, X 与 Y 相互独立, 则 $\min\{X,Y\}$ 服从参数为5的指数分布

(C) 若随机向量 (X,Y) 服从区域 $G=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$ 上的均匀分布, 则 $\max\{X,Y\}$ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布

(D) 若随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N\left(3,\frac{1}{3};2,\frac{2}{3};0\right)$, 则 $X+Y$ 服从正态分布 $N(5,1)$

6、下列说法正确的是(

(A) 若随机变量列 $X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2, \cdots$ 相互独立同分布且期望存在, 则 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 满足辛钦大数定律

(B) 若随机变量列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立且具有相同的分布函数, 则 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 满足辛钦大数定律

(C) 若随机变量列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 且对任意正整数 n 有 X_n 服从自由度为 n 的卡方分布, 则 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 满足切比雪夫大数定律

(D) 若随机变量列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 且对任意正整数 n 有 X_n 服从区间 $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ 上的均匀分布, 则 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 满足切比雪夫大数定律

7、$Y\sim E\left(\frac{1}{2}\right)$, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为取自标准正态总体 X 的一个样本, X 与 Y 独立, 记 Z 为 X 的二阶原点矩, 则 $\frac{2Z}{Y}$ 服从的分布是(

(A) $F(2,n)$

(B) $F(n,2)$

(C) $t(n)$

(D) $t(2)$

8、设$(X_1, X_2, \cdots X_n)$是总体X的一个样本，且$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中μ已知而σ^2未知，则下列叙述正确的是(

(A) σ^2的矩估计量为$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

(B) σ^2的极大似然估计量为$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

(C) σ^2的矩估计量为$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$.

(D) σ^2的极大似然估计量为$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$.

9、设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是正态总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，其中μ, σ^2均未知，则σ^2的$1-\alpha$置信区间的置信上限与置信下限之比为(本小题3分)

(A) $\dfrac{\chi^2_{\alpha}(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$

(B) $\dfrac{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$

(C) $\dfrac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$

(D) $\dfrac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$

10、设总体X服从参数为$\lambda(\lambda > 0)$的泊松分布，$(X_1, X_2, \cdots, X_{10})$是取自$X$的样本，对假设检验问题：$H_0: \lambda = 0.1 \leftrightarrow H_1: \lambda = 0.2$，当拒绝域为$C = \left\{\sum_{i=1}^{10} X_i = 0\right\}$，则该检验犯第一类错误的概率为(D).

(本小题3分)

(A) e^{-4}

(B) e^{-3}

(C) e^{-2}

(D) e^{-1}

二、填空题 (本大题共 5 小题，共 20 分) (本大题共 5 小题，共 20 分)

11、若(X, Y)是$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y \le 1\}$上的均匀分布，则$P\{X \ge Y^2 | X \ge Y^3\} =$ ________.(本小题4分)

$PA = \frac{1}{2}$ $B = \frac{1}{4}$ $C = \frac{1}{4}$

12、盒子中有红、黄、蓝三种颜色的小球，其中红色小球2个，黄色和蓝色小球各1个，每次取一个后放回，取两次后，问这两次取到小球的不同颜色数的期望是________.(本小题4分)

13、若随机向量(X, Y)的取值点位于以坐标原点$(0, 0)$为圆心，半径为常数r的圆周上，则X^2与$-Y^2$的相关系数为________.(本小题4分)

14、设总体X服从参数入的指数分布，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为总体的一个样本，$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，若存在两个不相等的常数$a, b$满足$a\overline{X} + b$和$b\overline{X} + a$都是$\lambda$的无偏估计，则$\lambda =$ ________.(本小题4分)

$\sigma^2 = 8$

15、设总体$X \sim N(\mu, 8)$，其中μ为未知参数. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为来自总体X的一个样本，其均值为$\overline{X}$. 若假设检验：$H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \ne \mu_0$在显著水平$\alpha = 0.05$的拒绝域为$|\overline{X} - \mu_0| \ge u_{0.025} = 1.96$，则样本容量$n =$ ________.

(本小题4分)

三、解答题 (本大题共 5 小题，共 50 分) (本大题共 5 小题，共 50 分)

0.6 0.7

16、已知A, B是同一个样本空间的两个事件，且$P(A) = 0.6, P(B) = 0.7$. 试求：(1) 什么条件下，$P(AB)$取最大值，最大值是多少？(2) 什么条件下，$P(AB)$取最小值，最小值是多少？(本小题8分)

A B

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

17、设随机变量X服从区间$[-\pi, \pi]$上的均匀分 布，求$E[\min(|X|, 1)]$.(本小题8分)

18、若随机向量(X, Y)的概率密度函数为$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 < x < 1, |y| < x, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$ $Y \in (-X, X)$.

试求：(1) $f_{Y|X}(y|x)$; (2) $P\left\{Y \le \frac{1}{4} | X = \frac{1}{2}\right\}$; (3) $P\{X + Y > 1\}$.(本小题13分)

$\frac{1}{4}$

$Y \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

19、设随机变量X与Y相互独立且分别服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$与$N(\mu, 2\sigma^2)$，其中σ是未知参数，且$\sigma > 0$. 设$Z = X - Y$. (1) 求Z的概率密度$f_Z(z)$; (2) 设$(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$为来自总体Z的简单随机样本，求σ^2的最大似然估计量$\hat{\sigma^2}$; (3) 证明$\hat{\sigma^2}$为σ^2的无偏估计量.(本小题13分)

20、设二维随机向量(X, Y)的概率密度函数为

$f(x, y) = \begin{cases} [(1+\rho y)(1+\rho x) - \rho]e^{-x-y-\rho xy}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$ 其中$\rho \in [0, 1]$. 试求 (1) X和Y的边缘分布函数; (2) 当$\rho = 0$时，相关系数ρ_{xy}; (3) 当$\rho = 0$时，$2(X + Y)$满足什么分布？(本小题8分)