姓名____________ 学号____________

题号	一	二	三	四	五	六	合计	评卷人
题分	24	20	10	15	15	16	100	
得分								

得分	

一、(共 24 分) 判断下列命题是否成立, 并说明理由.

以下设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 是 n 阶矩阵.

1. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出, 且表法唯一, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

2. 设 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 同解, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

3. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解.

4. 秩为 r 的矩阵可以写成 r 个秩为 1 的矩阵之和.

5. 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

6. $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 蕴含 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^3) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2)$.

得分	

二、（共 20 分） 填空

1. 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\cdots+\ \ x_n=a \\ 2x_1+2x_2+\cdots+2x_n=b \end{cases}$$

有解的充分必要条件是 ______________________ .

2. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,0,c)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(b,c,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,a,b)^{\mathrm{T}}$ 线性无关,

则常数 a,b,c 必须满足的条件是 _______________ .

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{B}=$

___________________ .

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1}=$ ___________________ .

5. 线性变换 σ 满足 $\sigma\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

则 σ^{-1} 的标准矩阵是

__________________________ .

得分	

三、（共 10 分） 讨论 a 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -7 \\ 2x_1 + (a-9)x_2 - 10x_3 = -11 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2ax_3 = -29 \end{cases}$$

无解, 有唯一解, 有无穷多解. 在有无穷多解时, 求满足 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ 的解.

得分	

四、（共 15 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$.

1. 证明 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$ 可逆, 并求 $\boldsymbol{P}^{-1}$.
2. 证明 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}) \leq n/2$.
3. 对 $n = 3$, 求 $\boldsymbol{A}$.

得分	

五、（共 15 分） $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{\beta}$ 是 m 维向量. 则下列命题等价

1. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解;
2. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 的解都满足 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$;
3. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ 1\end{pmatrix}$ 无解.

得分	

六、（共 16 分） 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_n \end{pmatrix}$.

记 $\boldsymbol{\beta}=(-a_1,-a_2,-a_3,\ldots,-a_n)^{\mathrm{T}}$, $f(x)=x^n+a_nx^{n-1}+\cdots+a_3x^2+a_2x+a_1$.

1. 计算: $\boldsymbol{C}^i\boldsymbol{e}_1$, $i=0,1,2,\ldots,n-1$; 并证明 $\boldsymbol{C}^n\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{\beta}$.
2. 证明: $f(\boldsymbol{C})\boldsymbol{e}_j=0$, $j=1,2,\ldots,n$, 从而证明 $f(\boldsymbol{C})=\boldsymbol{O}$.
3. 证明: 若 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}k_i\boldsymbol{C}^i=\boldsymbol{O}$, 则 $k_i=0$, $i=0,1,2\ldots,n-1$.
4. 证明: $\boldsymbol{C}$ 可逆当且仅当 $a_1\neq 0$. 若 $\boldsymbol{C}$ 可逆, 求多项式 $g(x)$ 使得 $\boldsymbol{C}^{-1}=g(\boldsymbol{C})$.