1、求行列式$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 3 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$中的常数项。

解：行列式的常数项实际就是

$$f(0)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xRightarrow{\text{按第一行张开}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \quad \text{........(5 分)}$$

注: 直接用定义计算亦可。

2、设α_1，α_2，α_3是齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$的一个基础解系。证明：向量组$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$也是该方程组的一个基础解系.

证明： α_1，α_2，α_3也是该方程组的解，所以只需要证明它们是线性无关的　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……(2 分)

$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$，

∴（$k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$，

α_1，α_2，α_3也线性无关，所以$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0, \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$

解得$k_1=k_2=k_3=0$　　　　　　　　　　　　　　　…...(3 分)

所以向量组$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$也是该方程组的一基础解系.

3、求行列式$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 4 & 9\end{vmatrix}$的余子式第二行的余子式之和

$$M_{21}+M_{22}+M_{23}$$

解：

$M_{21}+M_{22}+M_{23}=-A_{21}+A_{22}-A_{23}$ ……. (3 分)

$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 1 & -1\\1 & 4 & 9\end{vmatrix}=-2$ …… （2 分）

注：直接计算也可以。

4、解线性方程组，并用基础解系表示其通解：

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2\\2x_1+x_2-x_3-x_4=1\end{cases}$$

解：$B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & 1\\4 & 2 & -2 & 1 & 2\\2 & 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

…….(2 分)

与原方程组通解的方程组为：$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}\\x_4=0\end{cases}$

其中导出组的一个基础解系为$\xi_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

…..(2 分)

通解为：$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ .....(1 分)

5、判断下列两组向量是否等价.

（Ⅰ）$\alpha_1=(1,0,2)^T$， $\alpha_2=(1,1,3)^T$， $\alpha_3=(1,-1,0)^T$；

（Ⅱ）$\beta_1=(1,2,1)^T$， $\beta_2=(2,1,4)^T$， $\beta_3=(2,1,1)^T$.

解：因为$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

所以$r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=3$， ....（2 分）

同理可求得$r\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=3$， ----(1 分)

所以$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$和$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，又因为四个三维向量一定线性相关，因此两者等价. ......(2 分)