中国人民大学2020-2021秋季学期《高等代数I》期中试卷 (卷1)

试卷总分: 100分，共 1 套试卷

一、判断题 (本大题共 4 小题，共 20 分)

1、若 $n(n\geqslant 2)$ 阶行列式 $D=0,$ 则 D 有两行元素成比例。 ___________ 。(本小题5分)(题目ID:108100)

2、若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是某齐次线性方程组的基础解系，那么 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也是它的基础解系。 ___________ 。(本小题5分)(题目ID:108101)

3、设 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$ 则线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,n-1}x_{n-1}=a_{1n} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,n-1}x_{n-1}=a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,n-1}x_{n-1}=a_{nn} \end{cases}$
一定无解。
___________ 。(本小题5分)(题目ID:108102)

4、如果齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 只有零解，那么当 β 不是零向量时, 非齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta$ 有唯一解.
___________ 。(本小题5分)(题目ID:108103)

二、填空题 (本大题共 4 小题，共 20 分)

1、行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}=$ ___________ 。(本小题5分)(题目ID:108104)

2、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组的三个解，已知 $\alpha_1=(2,3,4,5),\alpha_2+\alpha_3=(1,2,3,4),$ 且该方程组的系数矩阵的秩为 $3,$ 则其解集可表示为
___________ 。(本小题5分)(题目ID:108105)

3、在五阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号为 ___________ ; 在六阶行列式中，$a_{32}a_{45}a_{64}a_{13}a_{51}a_{26}$ 一项的符号为 ___________ 。(本小题5分)(题目ID:108106)

4、 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 中所有元素的代数余子式之和等于 ___________ 。(本小题5分)(题目ID:108107)

三、解答题一 (本大题共 1 小题，共 15 分)

1、计算 n 阶行列式
$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$(本小题15分)(题目ID:108108)

四、解答题二 (本大题共 1 小题，共 20 分)

1、讨论 a,b 为何值时，方程组
$\begin{cases} x+ay+a^2z=1 \\ x+ay+abz=a \\ bx+a^2y+a^2bz=a^2b \end{cases}$
有唯一解？有无穷多解？无解？当有解时求出其解集. (本小题20分)(题目ID:108109)

五、解答题三 (本大题共 1 小题，共 10 分)

1、设
$\alpha_1=(1,0,1,0),\alpha_2=(-1,2,1,1),\alpha_3=(1,2,3,1),$
$\alpha_4=(1,4,5,2),\alpha_5=(1,6,7,3),$
求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组，并将每个向量都用极大线性无关组线性表出.(本小题10分)(题目ID:108110)

六、解答题四 (本大题共 1 小题，共 15 分)

1、设 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$ 为 $m+1$ 个向量，其中 $m>1$ 且 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$
证明：$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,...,\beta-\alpha_m$ 线性无关当且仅当$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关. (本小题15分)(题目ID:108111)