20**- 20**学年第二学期《高等代数 II》期中考试样题

（考试时间 20**年**月 ** 日 ）

我郑重承诺：在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严。 承诺人签字:

一、 判断题（每小题 5 分，共 25 分）判断下列命题是否成立，并说明理由。

1. 数域P上任意一个不可约多项式在复数域内没有重根.

2. 在$P[x]$中, $f(x)$的次数大于 0, 令$g(x)=f(x+b)$, $b\in P$, 若$f(x)$在P上不可约, 那么$g(x)$在P上不可约.

3. 如果$f(x)|g_1(x)g_2(x), f(x)\nmid g_1(x)$，那么$f(x)|g_2(x)$.

4. $A_{s\times n}$是实矩阵，其秩为$r<n$，$x_{r+1},\dots,x_n$是$Ax=0$的一个基础解系，将其扩充为R^n中的一组基$x_1,\dots,x_r,x_{r+1},\dots,x_n$，令$B=(x_1,\dots,x_r)$，那么矩阵$AB$列满秩.

5. 数域P上n维数组线性空间P^n的任一子空间V都是数域P上某个齐次线性方程组的解空间.

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

6. 写出多项式$f(x)=3x^4+8x^3+6x^2+3x-2$的全部有理根并标明其重数：__________.

7. 写出多项式x^n+1在复数域和实数域上的标准分解式：____________________.

8. 多项式$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$，$g(x)=x^3+x^2-2x-1$，那么$(f(x),g(x))=$ ____________________.

9. 在$R[x]$中，向量$5x^3-12x^2+13x-4$在子空间直和$L((x-1)^0,(x-1)^2)\oplus L((x-1),(x-1)^3)$中的分解式为____________________.

10. 设$V=\left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2+\mathrm{i}x_3 \\ x_2-\mathrm{i}x_3 & -x_1 \end{pmatrix} \middle| x_1,x_2,x_3\in R\right\}$，其中$i$表示虚数，请写出$V$的维数和一组基____________________.

三．解答题和证明题 (50 分)

11. (15 分)数域P上的多项式$f(x)$是 4 次多项式，如果$x-2$是$f(x)+5$的三重因式，$x+3$是$f(x)-2$的二重因式，求$f(x)$.

12. (15 分) A为n阶实对称矩阵，秩为r，且$A^2=A$

（1）求证$V=\{x\in R^n|x^TAx=0\}$为R^n的子空间;

（2）求V的维数;

（3）给出V的一个直和补，即R^n的一个子空间 W，使得$R^n=V\oplus W$.

13. （20 分） 在线性空间$P[x]_n$中，

（1）证明：$1,x,x^2,\dots,x^{n-1}$和$1,x-a,(x-a)^2,\dots,(x-a)^{n-1}$都是 $P[x]_n$的基，其中$a\in P$且$a\neq 0$;

（2）当$n=3,a=2$时，给出从基$1,x,x^2,\dots,x^{n-1}$到基$1,x-a,(x-a)^2,\dots,(x-a)^{n-1}$的过渡矩阵及相应的坐标变换公式;

（3）求$P[x]_n$的一组基，使得$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\in P[x]_n$在这组基下的坐标都是非负的.