一、单项选择题

选项填在表中

1	2	3	4	5

1. 设 $f(x)=u(x)+v(x), g(x)=u(x)-v(x),$ 并设 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$ 都不存在. 下列论断正确的是

（A） 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

（B） 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必不存在

（C） 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必不存在

（D） 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

2. 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则

（A） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

（B） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

（C） $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D） $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

3. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt, g(x)=x^3+x^4,$ 则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A)等价无穷小　　(B)同价但非等价的无穷小

(C)高阶无穷小　　(D)低价无穷小

4. 设 $I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx,\ I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx,\ I_3=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx,$

则有

（A） $I_2<I_3<I_1$　　（B） $I_1<I_3<I_2$

（C） $I_2<I_1<I_3$　　（D） $I_3<I_1<I_2$

5. 下面结论中正确的是 （）

(A) 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续，则它在此区间上必有最大值和最小值.

(B)设 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有一阶导数，$x_0\in(a,b)$ 是它的一个驻点（$f'(x_0)=0$）。如果 $f''(x_0)=0$，那么 x_0 不可能是极值点.

(C)设有三非零向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$。若 $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$ 且 $\vec{a}\times\vec{c}=0,$ 则 $\vec{b}\bullet\vec{c}=0.$

(D) 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在实数集 R 上连续，那么 $\dfrac{d(\int_0^{g(x)}f(t)dt)}{dx}=f(g(x)).$

二、计算题

1. 求极限 $\lim_{x\to 0^+}(e^{2x}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

2. 设 $x_n=\dfrac{1}{3n^2+1}+\dfrac{2}{3n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{3n^2+n}, n=1,2,\cdots,$ 求极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=f(x+y)$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且其一阶导数不等于 1，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4. 利用泰勒公式求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{e}\right)$.

5. 设常数 $a>0,$ 求 $\int\dfrac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$.

6. 求曲线 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\ (a,b>0,t\in[0,2\pi])\\ z=bt\end{cases}$ 的弧长，并求在点 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\pi b}{4})$ 的切线方程和法平面方程.

7. 求经过直线 $\begin{cases}x+5y+z=0\\ x-z+4=0\end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的平面方程.

8. 设直线 $y=\frac{x}{\sqrt{2}}$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2． 求对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

三、作图题

已知函数 $y=(x+6)e^{\frac{1}{x}}$，求

1. 函数的单调区间及极值；
2. 凸凹区间以及拐点；
3. 函数的所有渐近线；

以及根据以上知识作函数图像。

四、证明题

求证：当 $a\neq b$ 时，$\frac{e^a-e^b}{a-b}<\frac{e^a+e^b}{2}$.

五、综合题

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$，若极限 $\lim_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：

1. 在 (a,b) 内 $f(x)>0$;
2. 在 (a,b) 内存在点 ξ 使得 $\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$;
3. 在 (a,b) 内存在与②中 ξ 相异的点 η，使得 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx.$