# 《高等数学 I》 练习题

一．计算题：

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{2/\sin x}$

2．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}$.

3．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos(1/x)}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

4. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+2}{2n+1}=3$, 求 a,b 的值.

5.设 $f(x)=\begin{cases} e^{1/x}+1, x<0 \\ 1, x=0 \\ 1+x\sin\frac{1}{x}, x>0 \end{cases}$ ,求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

6. 已知 $y=\begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x\ge 0, \\ \sqrt{1-2x}, & x<0, \end{cases}$ 求导数 $y'$.

7. 设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$, 当自变量 $x$ 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 $\Delta y$ 的线性主部(即微分)为 0.1,求 $f'(1)$.

8. 已知 $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$, 求 $y''(0)$.

二、证明题

1. 证明方程 $x^3-9x-1=0$ 恰有 3 个实根。

2. 求证：当 $a\ne b$ 时，$\dfrac{e^a-e^b}{a-b}<\dfrac{e^a+e^b}{2}$.

3. $f$ 在 $[0,1]$ 内二阶可导, 且 $|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b$ 求证: $|f'(x)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$.

三　综合题

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数，试确定 $a,b$ 的值。

2. 关于函数 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 按照如下要求完成

(1)单调区间　(2)极值　(3)凹凸区间　(4)拐点　(5)渐近线　(6)作出函数图

3. 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域中有 $n+1$ 阶导数且 $f^{(n+1)}(x_0)\ne 0$， 证明：在 $f(x)$ 的拉格朗日型余项的泰勒公式

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!}h^n(0<\theta<1)$$

中，必有 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.