一、选择

1. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{d}t$ 所确定的隐函数，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0,y=1}=$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

(B) 解：（一）公式法：$F(x,y)=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{d}t-x$，

$$F'_x=-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)-1, F'_y=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0,y=1}=-\frac{F'_x}{F'_y}=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)+1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)}=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}}=3.$$

（二）两边微分法：$1=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)(y'-1)$，得 $y'=\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)}+1=3$.

2. 已知 $f(u,v)$ 具有二阶连续的偏导数，且 $f''_{11}(3,-1)=1, f''_{12}(3,-1)=2, f''_{22}(3,-1)=3$，

又 $F(x,y)=2xy+f(2x-y,x+2y)$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=-1}=$

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

(D) 解： $\frac{\partial F}{\partial x}=2y+2f'_1+f'_2$，

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=2+2(-f''_{11}+2f''_{12})+(-f''_{21}+2f''_{22}),\quad \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=-1}=2+2(-1+4)+(-2+6)=12.$$

3. 设积分区域为 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,-x\le y\le x\}$，则 $\iint\limits_D\left(30xy^2+20x^2y+10xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

(A) 解： $\iint\limits_D\left(30xy^2+20x^2y+10xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^x 30xy^2\mathrm{d}y=\int_0^1 20x^4\mathrm{d}x=4$.

4. 在区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)<0$，记 $A_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, A_2=f(a)(b-a), A_3=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$，

则有

(A) $A_1<A_2<A_3$ (B) $A_2<A_1<A_3$ (C) $A_3<A_1<A_2$ (D) $A_2<A_3<A_1$

(D) 解： $f(x)$ 凸的单调增.

5. 二重积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$

(A) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$ (B) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(C) 解： $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

6. 已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ ，以下说法正确的是

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 一定发散　(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 同时收敛或发散　(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{1+n^2u_n}$ 一定发散

(B) 解： $\sqrt{u_nu_{n+1}}\le\dfrac{u_n+u_{n+1}}{2}$，若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$ 也收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 收敛，矛盾；

(A)反例 $u_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n=2k-1,\\ \dfrac{1}{n^3}, & n=2k,\end{cases}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛；

(D)反例，若 $u_n=1$，则 $\dfrac{u_n}{1+n^2u_n}=\dfrac{1}{1+n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{1+n^2u_n}$ 收敛.

7. 设 $0<a_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}(n=1,2,\cdots)$，则下列级数中一定收敛的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^4-a_n^3)$　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^3-a_n^2)$　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2-a_n)$　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\sqrt{a_n})$

(A) 解： $0<a_n^3-a_n^4=a_n^3(1-a_n)<M\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^4-a_n^3)$ 收敛，

$a_n^4<\dfrac{1}{n^2},a_n^3<\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^4,\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 都收敛.

8. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(3-2x)^n$ 在 $x=3$ 处收敛，则该级数在 $x=-1$ 处

(A) 绝对收敛　(B) 条件收敛　(C) 发散　(D) 敛散性不确定

(D) 解： $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(3-2x)^n$ 在 $|3-2x|<3$ 内绝对收敛，$x=-1$ 时，$|3-2x|=5$，不确定.

二、填空

1. 广义积分 $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=$

解： $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}\overset{\sqrt{1-x}=t}{=}\int_1^0\dfrac{-2t\mathrm{d}t}{(1+t^2)t}=\int_0^1\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\arctan t\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{2}$.

2. 函数 $z=z(x,y,t)$ 是由方程 $\mathrm{e}^z=f(x+t+z,x+y)$ 所确定的三元函数，

其中 f 具有连续一阶偏导数, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial t}=$

解： 设 $F(x,y,z,t)=f(x+t+z,x+y)-\mathrm{e}^z$，$F_x'=f_1'+f_2',F_y'=f_2',F_z'=f_1'-\mathrm{e}^z,F_t'=f_1'$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial t}=-\frac{F_x'}{F_z'}+\frac{F_y'}{F_z'}+\frac{F_t'}{F_z'}=\frac{-(f_1'+f_2')+f_2'+f_1'}{f_1'-\mathrm{e}^z}=0.$$

3. 对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3a)^n}{1+\sqrt{n}}$，要使级数绝对收敛，则 a 应满足的条件是______；

要使级数条件收敛，则 a 应满足的条件是______.

解：设 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(2-3a)^n}{1+\sqrt{n}}\right|}=|3a-2|$，当 $|3a-2|<1$，即 $\frac{1}{3}<a<1$ 时，级数绝对收敛，

$a=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ 条件收敛，$a=\frac{1}{3}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ 发散.

4. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(2n+1)!}$ 的和为______.

解：设 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sin 2$.

三、计算

1. 已知 $g(x)=\int_0^{\sin x}(e^t+1)dx, x\in[0,1]$，试求 $y=g(x)$ 在 $(0,0)$ 点处的切线方程以及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}g'(x)dx$ 的值.

【答案】：

解：因为 $g'(x)=\left(\int_0^{sinx}(e^t+1)dt\right)'=(e^{sinx}+1)cosx$---------------------------(2 分)

所以 $g'(0)=2$

切线方程为 $y=2x.$ ---(3 分)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}g'(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{sinx}+1)cosx\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{sinx}+1)\,dsinx$$

$$=(e^{sinx}+sinx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=e$$ ---(6 分)

2. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在 $y>0$ 时的极值.

【答案:】

$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+6x-9=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=-3y^2+6y=0\end{cases}$ 又 $y>0$,从而得驻点 $(-3,2)$, $(1,2)$.......................................（2分）

又 $f''_{xx}=6x+6, f''_{xy}=0, f''_{yy}=-6y+6$

....（4分）

对于点 $(-3,2)$: $A=-12, B=0, C=-6$, $B^2-AC<0$, $A<0$,极大值 $=f(-3,2)=31$.

对于点 $(1,2)$: $A=12, B=0, C=-6$, $B^2-AC>0$,非极值点

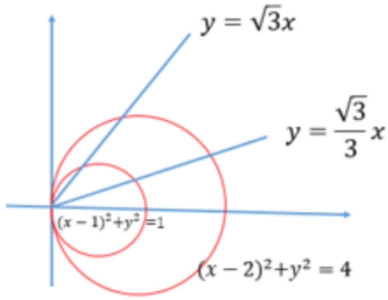
因此函数有极大值31，没有极小值 ....（6分）

3. 求由 $x^2+y^2=2x, x^2+y^2=4x, y=\frac{\sqrt{3}}{3}x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面图形 D 的面积.

【答案:】

解: $x^2+y^2=2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$

$x^2+y^2=4x \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4$



D 的图形如图 令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$y=\sqrt{3}x \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$

$x^2+y^2=2x \Rightarrow r=2\cos\theta$

$x^2+y^2=4x \Rightarrow \mathrm{r}=4\cos\theta$ $\quad y=\frac{\sqrt{3}}{3}x \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$

------(2 分)

所以 D 的面积为 $S(D)=\iint d\sigma=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}[\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r dr]d\theta=\frac{\pi}{2}$ ---(6 分)

4. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^2+\frac{\ln^2 n}{n^3}-1\right]$ 的敛散性, 写出判断过程.

【答案】:

$$\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^2-1\sim\frac{2}{2^n}\ (n\to\infty)$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^2-1\right]$ 收敛.---------------------------------------(3 分)

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln^2 n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}=0$$

由比较判别法的极限形式可知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^3}$ 收敛.---(5 分)

因此原级数收敛.--(6 分)

5. 将函数 $f(x)=\frac{x-1}{2+x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数, 并求 $f^{(2023)}(1)$.

【答案】:

$f(x)=\frac{x-1}{2+x}=(x-1)\cdot\frac{1}{3+(x-1)}=\frac{1}{3}(x-1)\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}$--(2 分)

由于 $\frac{1}{1+y}=\sum_{n=0}^{\infty}(-y)^n$, $y\in(-1,1)$,

则 $\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(x-1)^n$, $x\in(-2,4)$------------------------(4 分)

从而 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}(x-1)^n$, $x\in(-2,4)$.------------(5 分)

又因 $\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$ 所以 $f^{(2023)}(1)=\frac{2023!}{3^{2023}}$. ··(6 分)

6. 求微分方程 $y'+2y-e^x=0$ 的通解，若已知 $y(0)=\frac{1}{3}$，求 $y(1)$.

【答案:】

解： 显然， $p(x)=2, Q(x)=e^x$，代入一阶线性非齐次微分方程的通解公式：

$$y=[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]e^{-\int P(x)dx}$$ --（2 分）

$$=[\int e^x e^{\int 2dx}dx+C]e^{-\int 2dx}$$

$$=[\int e^x e^{2x}dx+C]e^{-2x}$$

$$=\frac{1}{3}e^x+Ce^{-2x}$$ --(4 分)

因为$y(0)=\frac{1}{3}e^0+Ce^0=\frac{1}{3}$,所以$C=0$，故$y(1)=\frac{e}{3}$.--（6 分）

四、综合题

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}(2x)^{n+2}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

【答案】:

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^2+(n+1)}(2x)^{n+3}\Big/\frac{1}{n^2+n}(2x)^{n+2}\right|=2|x|$

当$2|x|<1$, 即$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$时幂级数的收敛.

当$x=-\frac{1}{2}$时, 级数收敛, 当$x=\frac{1}{2}$时, 级数收敛, 故收敛域为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. ……………………………(3 分

由于$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}(2x)^{n+2}=2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}(2x)^{n+1}\quad x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

令$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}(2x)^{n+1}$，则 $G'(x)=\int_0^x G''(t)dt+G'(0)=-2\ln(1-2x), x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ………(5 分

进一步地， $G(x)=\int_0^x G'(t)dt+G(0)=2(\frac{1}{2}-x)\ln(1-2x)+2x, x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ……(6 分

由于和函数$S(x)$在收敛域$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$内连续，因此，$S(\frac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}S(x)=1$

从而可知 $S(x)=\begin{cases}2x(1-2x)\ln(1-2x)+4x^2, & x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\ 1, & x=\frac{1}{2}\end{cases}$ ……(9 分

2. 已知函数 $y=y(x)$ 满足方程 $x+yy'=0$ 且 $y(0)=1$， $S(x)$ 是幂级数 $x+x^2+\frac{1}{2!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^{n+1}+\cdots$ 的和函数，D 是由曲线 $y=y(x)$ 和 $y=|S(x)|e^{-x}$ 所围的平面区域.

试求：以 D 为底，以 $f(x,y)=x^2+y^2+e^{y^2}\sin x$ 为顶的曲顶柱体体积 V.

【答案】:

解：

由微分方程$x+yy'=0$ 得$x^2+y^2=C$, 又$y(0)=1$, 所以$y=\sqrt{1-x^2}$…（2 分）

利用幂级数展开式可得

$x+x^2+\frac{1}{2!}x^3+\frac{1}{3!}x^4+\cdots+\frac{1}{n!}x^{n+1}+\cdots=xe^x=S(x)$; ……（ 4 分）

根据二重积分的几何意义并注意到积分区域D关于y轴的对称性，

$$V=\iint_D\left(x^2+y^2+e^{y^2}\sin x\right)d\sigma=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{8}.$$ ····（9 分）