2022秋《高等代数I》期中考试A卷

考试时间：2022年11月21日上午8：00—10：45

一，单项选择题（每小题3分，共30分）

1，考虑如下线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$,记其系数矩阵为$A$，增广矩阵为$\bar{A}$.

下述命题正确的是（　）

A. 若$\mathrm{r}(A)=n$，则方程组有唯一解

B. 若$\mathrm{r}(A)<n$，则方程组有无穷多解

C. 若$\mathrm{r}(\bar{A})=m$，则方程组有解

D. 若$\mathrm{r}(A)=m$，则方程组有解

2，若向量$\alpha=\begin{pmatrix}0\\m\\m^2\end{pmatrix}$可由向量组$\beta_1=\begin{pmatrix}1+m\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1+m\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+m\end{pmatrix}$唯一线性表出，那么参数$m$的取值范围是（　）

A. $m<-3$　　B. $-3<m<0$　　C. $m>0$　　D. $m\neq 0,-3$

3，已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2k+1 \\ -x_1-2x_2+x_3=k+3 \\ x_1-x_2-x_3=3k-1 \end{cases}$有解，那么（　）

A. $k=-2$　　B. $k=-1$　　C. $k=1$　　D. $k=2$

4，以下行列式中，取值一定为正的是（　），其中n为正整数。

A. $\begin{vmatrix} 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

B. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 2^2-1 & 3^2-1 & \cdots & n^2-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2^{n-1}-1 & 3^{n-1}-1 & \cdots & n^{n-1}-1 \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

D. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \varpi & 0 \\ 0 & 0 & \varpi^2 \end{vmatrix}$，$\varpi=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$

5，以下与排列23541奇偶性相同的排列为（　）

A. 21543　　B. 51342　　C. 23514　　D. 21345

6, 一个三阶矩阵A的所有元素取值为1或-1，则$|A|$可能取到的最大值为（　）

A. 0　　B. 1　　C. 4　　D. 8

7, 下列说法错误的是（　）

A. 设$A=\left(a_{ij}\right)$是n阶矩阵，且$|A|=0$，而a_{11}的代数余子式$A_{11}\neq 0$，那么向量$\xi=(A_{11},A_{12},\dots,A_{1n}\ )^T$构成以$A$为系数矩阵的齐次线性方程组的一个基础解系.

B. 设A为s行t列的矩阵, 其秩为r, 那么A的所有r阶子式均不为零.

C. 已知n个向量$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$线性相关，而其中任意$n-1$个向量都线性无关，那么满足等式$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$的系数$k_1,k_2,\dots,k_n$或者全为 0，或者全不为 0.

D. 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是某齐次线性方程组的基础解系，那么$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也是该齐次线性方程组的基础解系.

8, 已知行列式$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&5&7&9\\5&8&12&11\\8&7&5&8\end{vmatrix}$，则该行列式第一行代数余子式之和为（　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 10

9, 已知向量组$\alpha_1=(1,0,1,0),\alpha_2=(-1,2,1,1),\alpha_3=(1,2,2,1),\alpha_4=(1,4,5,2),\alpha_5=(1,6,7,3)$，下面组合中哪一个不是该向量组的极大线性无关组？（　）

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　B. $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$　　C. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　　D. $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

10, 下列选项中哪一个不是方程$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&-2&4&-8\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}=0$的根？（　）

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

二，简算题（每小题 6 分，共 30 分）

1，求行列式$f(x)=\begin{vmatrix}x&x&1&0\\1&x&2&3\\2&3&x&3\\1&1&2&x\end{vmatrix}$中的常数项.

2，设α_1，α_2，α_3是齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$的一个基础解系。证明：向量组$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$也是该方程组的一个基础解系.

3，求行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$的第二行的余子式之和,即求$M_{21}+M_{22}+M_{23}$的值.

4，解下列线性方程组，并用导出组的基础解系表示其通解：

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2 \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4=1 \end{cases}$$

5，判断下列两组向量是否等价.

A 组：$\alpha_1=(1,0,2)^T$，　$\alpha_2=(1,1,3)^T$，　$\alpha_3=(1,-1,0)^T$；

B 组：$\beta_1=(1,2,1)^T$，　$\beta_2=(2,1,4)^T$，　$\beta_3=(2,1,1)^T$.

三，解答题（共 40 分）

1，（10 分）计算行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

2,（15 分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出.求证：

(1)　$r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\le r\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$；

(2)　$r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}=r\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$；

(3)　如果$r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}=r\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$，则$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$.

3,（15 分）已知齐次线性方程组：

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{x}_n=\mathbf{0} \\ \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_1+(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{x}_n=\mathbf{0} \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}_n=\mathbf{0} \end{cases}，其中\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i\ne\mathbf{0},\ \boldsymbol{n}\ge\mathbf{2}$$

(1) 求该方程组系数矩阵的行列式的值；

(2) 讨论$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$和$\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时该方程组仅有零解；讨论$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$和$\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时该方程组有非零解，并用基础解系表示出通解.