20**- 20** 学年第二学期《高等代数 II》期中样卷

（考试时间 20**年**月 ** 日　）

我郑重承诺：在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严。 承诺人签字：

一、 单选题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）.

1．在$P[x]$里能整除任意多项式的多项式是（ B ）。

A．零多项式　B．零次多项式　C．本原多项式　D．不可约多项式

2．设$g(x)=x+1$是$f(x)=x^6-k^2x^4+4kx^2+x-4$的一个因式，则$k=$（ B ）。

A．1　B．2　C．3　D．4

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} -1 & 1 & 0 & -k^2 & 0 & 4k & 1 & -4 \\ +) & & -1 & 1 & k^2-1 & 1-k^2 & k^2-4k-1 & 4k-k^2 \\ \hline & 1 & -1 & 1-k^2 & k^2-1 & -k^2+4k+1 & k^2-4k & \end{array}$$

$-4+4k-k^2$

$k^2-4k+4=0$

3．以下命题不正确的是　（ D ）。

A．若$f(x)|g(x)$，则$f(x),g(x)$的最大公因式是$f(x)$；✓

B．集合$F=\{a+bi|a,b\in Q\}$是数域；✓

C．若$(f(x),f'(x))=1$，则$f(x)$没有重因式；✓

D．设$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式，则$p(x)$是$f(x)$的k重因式

4．整系数多项式$f(x)$在Z上不可约是$f(x)$在Q上不可约的（ B ）条件.

A．充分　B．充分必要　C．必要　D．既不充分也不必要

5．下列对于多项式的结论不正确的是（ A ）.

A．如果$f(x)|g(x),g(x)|f(x)$，那么$f(x)=g(x)$

B．如果$f(x)|g(x),f(x)|h(x)$，那么$f(x)|(g(x)\pm h(x))$

C．如果$f(x)|g(x)$，那么$\forall h(x)\in P[x]$，有$f(x)|g(x)h(x)$

D．如果$f(x)|g(x),g(x)|h(x)$，那么$f(x)|h(x)$

6．下面论述中，错误的是（ D ）。

A．奇数次实系数多项式必有实根；✓　B．代数基本定理适用于复数域；✓

C．任一数域包含Q；✓　D．在$P[x]$中，$f(x)g(x)=f(x)h(x)\Rightarrow g(x)=h(x)$ ✗

7. 考虑如下命题：

(1) 两个多项式做带余除法的结果不随数域的变化而改变 ✓

(2) 两个多项式的互素性随数域的变化而改变 ✗

(3) 两个多项式的最大公因式不随数域的变化而改变 ✓

(4) 一个多项式有无重因式随数域的扩大而改变 ✗

其中正确的个数为（ B ）

A．1 个　B．2 个　C．3 个　D．4 个

8．下列集合中，是R^3的子空间的为（ A ），其中$\alpha=(x_1,x_2,x_3)'$

A．$\{\alpha|x_3\ge 0\}$　B．$\{\alpha|x_1+2x_2+3x_3=0\}$　C．$\{\alpha|x_3=1\}$　D．$\{\alpha|x_1+2x_2+3x_3=1\}$

9．下列集合有（ 3 ）个是R^n的子空间；

$w_1=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots x_n)\,|\,x_i\in R, x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$；

$w_2=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots x_n)\,|\,x_i\in R, x_1=x_2=\cdots=x_n\}$；

$w_3=\{\alpha=(a,b,a,b,\cdots,a,b)\,|\,a,b\in R\}$；

$w_4=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots x_n)\,|\,x_i$为整数$\}$；

10．设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$都是三维向量空间$V$的基，且

$\beta_1=a_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，则矩阵$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$是由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到

（ A ）的过渡矩阵。

A．β_2,β_1,β_3　B．β_1,β_2,β_3　C．β_2,β_3,β_1　D．β_3,β_2,β_1

二、简答题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）.

1. 设a,b是两个不相等的常数，求给定的多项式$f(x)$除以$(x-a)(x-b)$所得的余式.

2．设$f(x)\in R[x]$使得$\deg f(x)<3$ 且$f(1)=1,f(-1)=3,f(2)=3$，求$f(x)$.

$f(x)=ax^2+bx+c$　$a+b+c=0$　$a-b+c=3$　$4a+2b+c=3$

$a+c=\frac{3}{2}$　$3a=\frac{9}{2}$　$4a+c=6$

$b=-\frac{3}{2}$　$a=\frac{3}{2}$　$c=0$

$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x$

3．求多项式$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$与$g(x)=x^3+x^2-x-1$的最大公因式. $x+1$

$$\begin{array}{r|l|l|r} -\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} & x^3+x^2-x-1 & x^4+x^3-3x^2-4x-1 & x \\ & x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x & x^4+x^3-x^2-x & \\ \hline & -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1 & -2x^2-3x-1 & x+1 \\ & -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x & -2x^2-2x & \\ \hline & -x-1 & -x-1 & \end{array}$$

4．已知$R[x]=L(1,(x-1)^2)\oplus L((x-1),(x-1)^3)$，将多项式$5x^3-12x^2+13x-4$分解为子空间$L(1,(x-1)^2)$中的多项式与子空间$L((x-1),(x-1)^3)$中的多项式

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 5 & -12 & 13 & -4 \\ & & 5 & -7 & 6 \\ \hline & 5 & -7 & 6 & 2 \end{array}$$

$2+4(x-1)+3(x-1)^2+5(x-1)^3$

$=[2+3(x-1)^2]+[4(x-1)+5(x-1)^3]$

$\begin{cases} k_1+k_2=0 \\ -k_1+k_2+k_3=0 \\ k_3=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$

之和.

$k_1(1-x)+k_2(1+x)+k_3(x+x^2)=0$

5. 判断$1-x, 1+x, x+x^2$是否可以构成$P[x]_3$的一组基，如果可以，求出$f(x)=a+bx+cx^2$在这组基下的坐标；如果不可约，将其极大线性无关组扩充为$P[x]_3$的一组基，并求$f(x)=a+bx+cx^2$在这组基下的坐标.

$k_3=c$, $k_1=\frac{a+c-b}{2}$, $k_2=\frac{a+b-c}{2}$

$\frac{a+c-b}{2}(1-x)+\frac{a+b-c}{2}(1+x)+c(x+x^2)$

6. 设$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & -a \end{pmatrix} a,b,c\in R\right\}$,其中 i 是虚数，V 对矩阵的加法和数乘构成实数域上的线性空间，求 V 的维数和一组基. 3 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}$

（2）当$n=3, a=2$时，给出从基$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$到基$1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^{n-1}$的过渡矩阵及相应的坐标变换公式；

$1 \quad x-2 \quad x^2-4x-4$

$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&-2&-4\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$

（3）求$P[x]_n$的一组基，使得$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\in P[x]_n$在这组基下的坐标都是非负的.

$b_i=\begin{cases} a_i & a_i\neq 0 \\ 1 & a_i=0 \end{cases}$ $\therefore b_0, b_1x, \ldots, b_{n-1}x^{n-1}$为基

三．计算和证明题，要求写出详细的计算或证明过程.（共 40 分 ）

$f'(x)=a(x+3)(x-2)^2=a(x^3-x^2-8x+12)$ $f(x)=a(\frac14x^4-\frac13x^3-4x^2+12x)+b$

1.（10 分）数域P上的多项式$f(x)$是 4 次多项式，如果$x-2$是$f(x)+5$的三重因式，$x+3$是$f(x)-2$的二重因式，求$f(x)$.

2.（15 ） 设 R^3 中的两个基分别为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$（1）求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵.

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}$ $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

（2）已知向量α在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$，求$\alpha$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标.

3. （15 分） 在线性空间$P[x]_n$中，

（1）证明：$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$和$1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^{n-1}$都是 $P[x]_n$的基，其中 $a\in P$且$a\neq 0$；