2023-2024 学年春季学期微积分 C2 期末试题

一、单项选择题（10 道小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 定积分$\int_0^{\pi}|sinx-cosx|dx$=()

(A)$\sqrt{2}$

(B)$2\sqrt{2}$

(C)1
(D)2

2. 若曲线$y=x^2$与直线$y=kx(k>0)$所围成的平面有界区域 D 的面积为 36，则k=（）
(A)3
(B)6
(C)12
(D)24

3. 已知函数$f(x,y)=\frac{e^y}{x+y}$, 则下列等式正确的是（）

(A)$f'_y-f'_x=0$

(B)$f'_x+f'_y=0$

(C)$f'_y-f'_x=f$

(D)$f'_x+f'_y=f$

4. 方程$x^2+y^2+z^2=3xyz$确定的隐函数$z=f(x,y)$, 则$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1,1)}$=（）
(A)5
(B)3
(C)1
(D)0

5. 设平面区域 D 由直线$y=2x, y=-2x$, y=4 所围成，则
$\iint_D(x^2sinx+y^2-xcosx)dxdy$=()
(A)0
(B)16
(C)32
(D)64

6. 下面四个表达式中与$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^1 r^2 dr$相等的是（）

①$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} dx \int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)dy + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)dy$

②$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} dx \int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$

③$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_{-y}^{y} \sqrt{x^2+y^2}dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}dx$

④$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_{-y}^{y} (x^2+y^2)dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dx$

(A)①③
(B)①④
(C)②③
(D)②④

7. 设常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的前n项和为S_n,下列说法错误的是（）

(A)若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则必有$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}$

(B)若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$也收敛（c为任意常数）

(C)若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$部分和数列$\{S_n\}$单调有界，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛

(D)若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$

8. 对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$，下列说法正确的是()

(A)级数收敛,和为 $1+\sqrt{2}$

(B)级数收敛,和为 $1-\sqrt{2}$

(C)级数收敛,和为 $2-\sqrt{2}$

(D)级数发散

9. 下列极限中能判断正级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的是（）

(A)$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_{n+1}} > 1$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{2^n}=0$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2u_{n+1}=0$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}<1$

10. 微分方程$y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}(x>0)$满足$f(1)=2$ 的特解为（）

(A) $\mathrm{y}=2\mathrm{x}(\ln x+1)$

(B) $\mathrm{y}=\mathrm{x}\left(\sqrt{2\ln x}+2\right)$

(C) $\mathrm{y}^2=4\mathrm{x}^2(\ln x+1)$

(D) $\mathrm{y}^2=2\mathrm{x}^2(\ln x+2)$

二、填空题（4 道小题，每小题 4 分，共 16 分）

11. 设$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$, 则$\int_0^1 f(x)dx$=________.

12. 已知函数$f(x, y)$满足$df(x, y)=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, $f(1,1)$=$\frac{\pi}{4}$, 则$f\left(\sqrt{3}, 1\right)$=________.

13. 将 6 分解成三个正数x,y,z之和，$u=xy^3z^2$的最大值为________.

14. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\cdot 3^n}{n!}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$=________.

三、计算题（5 道小题，每小题 7 分，共 35 分，要求写出求解过程）

15. 求函数$f(x, y)=e^x(x+y^2+4y)$的极值.

16. 计算累次积分$\int_0^1 dy\int_y^{y^{\frac{1}{3}}}\frac{sinx}{x}dx$.

17. 设有边界区域 D 是$x^2+y^2=1$ 和直线$y=\sqrt{3}x$以及x轴在第一象限围成的部分，求以 D 为底，以$f(x, y)=e^{(x^2+y^2)}(x^2+y^2)$为顶的曲顶柱体体积.

18. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{\sqrt{\ln n}}{n^2}}-1+\frac{n^n}{n!}\right)$的敛散性，写出判断过程.

19. 将函数$y=\ln(1-x-2x^2)$展开成x的幂级数，并写出收敛域.

四、解答题（2 道小题，20 小题 9 分，21 小题 10 分，共 19 分，要求写出求解过程）

20. 已知可导函数$f(x)$满足$f(x)=\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)dt+e^{2x}$，求$f(x)$.

21. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n}(x-1)^{n-1}$的收敛域及和函数.