我郑重承诺:
在本次考试中,遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争、维护学校的荣誉和学生的尊严。

承诺人签字:________________

中国人民大学2022-2023学年 第一学期

高等数学I期中 试卷（A卷）

院(系)____________ 姓名____________ 学号____________

题 号	一	二	三	四	小 计
得 分					

装 订 线

一、简单计算题(共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分)

1. 用$\varepsilon-N$定义来证明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^{\alpha}}}=1$.

$\forall\varepsilon>0$, 取N $=\left[\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\right]+1$, 当 $n>N$ 时:

$$\left|\sqrt{1+\frac{1}{n^{\alpha}}}-1\right|$$

$$=\frac{1}{n^{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^{\alpha}}}+1}$$

$$<\frac{1}{2n^{\alpha}}<\frac{1}{n^{\alpha}}<\varepsilon$$

2. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2+1}{n^3+n^2+1}\right)^n$.

$$=e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{n^2+1}{n^3+n^2+1}\right)}$$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n}{n^3+n^2+1}}$$

$$=e$$

3. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\tan x^3}$.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}$$

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}$$

4. 研究函数 $y=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续性, 即求出其连续区间, 指出其间断点及其分类; 若是可去间断点, 则补充定义使其在该点连续.

$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

$x^3+3x^2-x-3=(x+3)(x^2-1)$ ~~$=x+3$~~

$f(x)$在 $x=2$ 和 -3 是不连续

$\lim_{x\to 2}f(x)=\infty$ $\lim_{x\to -3}f(x)=-\frac{8}{5}$

$\Rightarrow$ 连续区间 $(-\infty,-3)\cup(-3,2)\cup(2,+\infty)$

$x=-3$ 可去间断点 补充$f(-3)=-\frac{8}{5}$

$x=2$ 第二类间断点

5. 求函数 $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$ 的导数.

$\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln\sin x+\frac{1}{4}\ln(1-e^x)$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2x}+\frac{\cos x}{2\sin x}-\frac{e^x}{4(1-e^x)}$$

$$y'=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\frac{1}{2x}+\frac{\cot x}{2}-\frac{e^x}{4(1-e^x)}\right)$$

6. 设$y=y(x)$是由方程 $\ln(x^2+y^2)=\arctan\frac{y}{x}+\ln 2-\frac{\pi}{4}$ 确定的隐函数, 求 dy 以及 $dy|_{(1,1)}$.

$$\frac{2x\,dx+2y\,dy}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow dy=\frac{2x+y}{x-2y}dx \quad (3分)$$

$$dy|_{(1,1)}=-3dx \quad (2分).$$

7. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$, 请问 a,b 取何值时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

$f(x)$在$x=1$连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}f=e=a+b=\lim\limits_{x\to 1^+}f$

左右可导: $\Rightarrow f'_-(1)=f'_+(1)$, $f'_-(1)=e$, $f'_+(1)=a$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=e\\ b=0\end{cases}$$

8. 求 $y=\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$ 的n阶导数 $y^{(n)}$.

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right).$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(-1)^n n!\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{2}(-1)^n n!\frac{1}{(x+1)^{n+1}}.$$

二、计算题(共2小题, 每小题8分, 共16分)

1. 求由参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 所确定的函数$y=y(x)$的一阶导数和二阶导数. (3) (5)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^2}{2t}=\frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$$

2. 设 $y = x - 2\arctan x,\ x \in \mathbb{R}$, 求$y(x)$的单调区间和极值、凹凸区间和拐点、所有渐近线, 并描绘$y(x)$的草图.

$$y' = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}$$

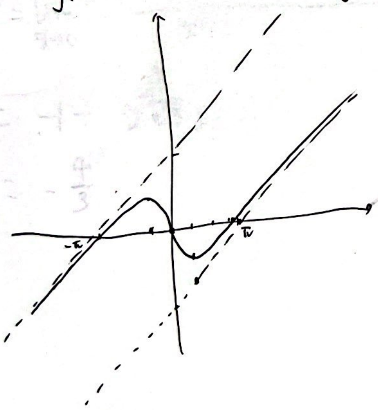
$$y'' = \frac{-2\cdot(-2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{1+x^2}$$

$y'=0 \Rightarrow x=\pm 1$ $\qquad$ $y''=0 \Rightarrow x=0$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	>0	0	<0		<0	0	>0
y''	<0	<0	<0	0	>0	>0	>0
y	↑ 上凸	极大	↓ 上凸	拐点	↓ 下凸	极小	↑ 下凸

$y(1) = 1-\pi/2$ $\quad$ $y(-1) = -1+\pi/2$ $\qquad$ 渐近线: $y = x \pm \pi$

$y(0) = 0$ $\qquad$ $y(x)$是奇函数.



三、证明题(共2小题, 每小题10分, 共20分)

1. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$, $x_1 > 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求其值.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \geq 1$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n} - x_n\right) \leq 0$$

$\Rightarrow \{x_n\}\downarrow$ 有下界

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 为 a, 且 $a \geq 1$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \Rightarrow a = 1$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(ab>0)$, 在 (a,b) 上可导, 求证存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a-b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a-b}$$ $\qquad$ 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $h(x) = \frac{1}{x}$

$$= \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$$

$$= \frac{g(b) - g(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}$$

$$= \frac{\frac{f'(\xi)\cdot\xi - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}$$

$$= f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

四、综合题(共 2 小题, 每小题 12 分, 共 24 分) 7 5

1. 写出函数 $y=\cos^2 x$ 带佩亚诺余项的2n阶麦克劳林公式, 并求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^4}-\cos^2 x-x^2}{x^4}.$$

$y=\cos^2 x=\frac{1}{2}(\cos 2x+1)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\right)$

$=1-\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!}+\cdots+\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}+o(x^{2n+1})$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^4}-\cos^2 x-x^2}{x^4}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-x^4+o(x^4)-\cancel{1}+\cancel{x^2}-\frac{2^4}{2\cdot 4!}x^4+o(x^4)-\cancel{x^2}}{x^4}$

$=-1-\frac{2^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$

$=-\frac{4}{3}$

2. 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$,

8 1) 证明 $\frac{x}{\sin x}+\frac{1}{3}\cos x>\frac{4}{3}$.

4 2) 说明1)中不等式右侧常数 $\frac{4}{3}$ 不能换成更大的数.

1) $\frac{x}{\sin x}+\frac{1}{3}\cos x>\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow x+\frac{1}{3}\cos x\cdot\sin x>\frac{4}{3}\sin x$

$g(x)=x+\frac{1}{3}\cos x\sin x-\frac{4}{3}\sin x$

$g(0)=0$

$g'=1-\frac{1}{3}\sin^2 x+\frac{1}{3}\cos^2 x-\frac{4}{3}\cos x$

$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cos^2 x-\frac{4}{3}\cos x$

$=\frac{2}{3}(1-\cos x)^2>0$

$\Rightarrow g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})\nearrow$

$\Rightarrow g(x)>g(0)=0$

2) 令 $f(x)=\frac{x}{\sin x}+\frac{1}{3}\cos x$

$\lim_{x\to 0}f(x)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

因此 $\frac{4}{3}$ 为最优常数.