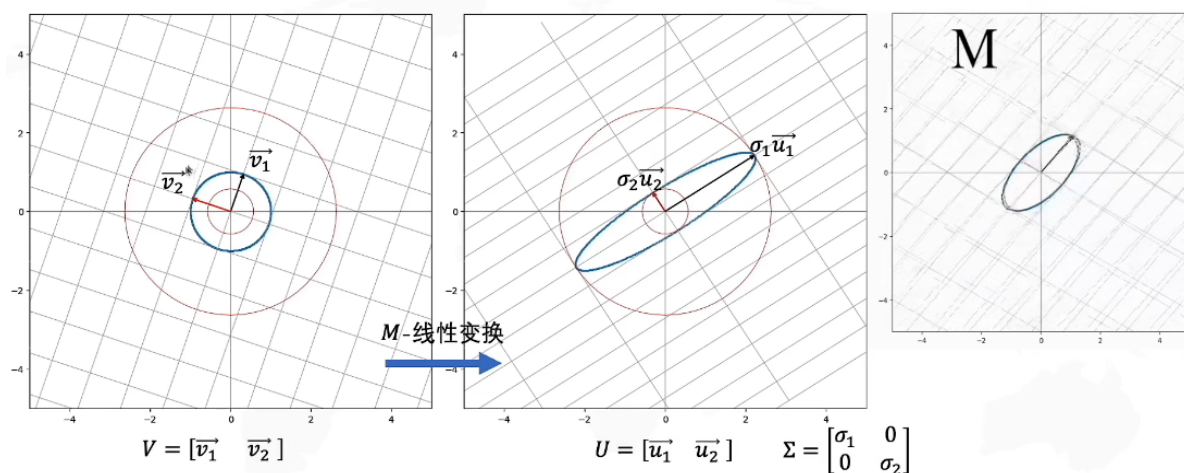


# singular value decomposition

## 理论知识

矩阵的奇异值分解（singular value decomposition，简称SVD）是线性代数中很重要的内容，并且奇异值分解过程也是线性代数中相似对角化分解（也被称为特征值分解，eigenvalue decomposition，简称EVD）的延伸。因此，以下将从线性代数中最基础的矩阵分解开始讲起，引出奇异值分解的定义，并最终给出奇异值分解的低秩逼近问题相关的证明过程。



如上图所示，左图一组基经过线性变换 $M$ ，与右图线性变化是等价的。

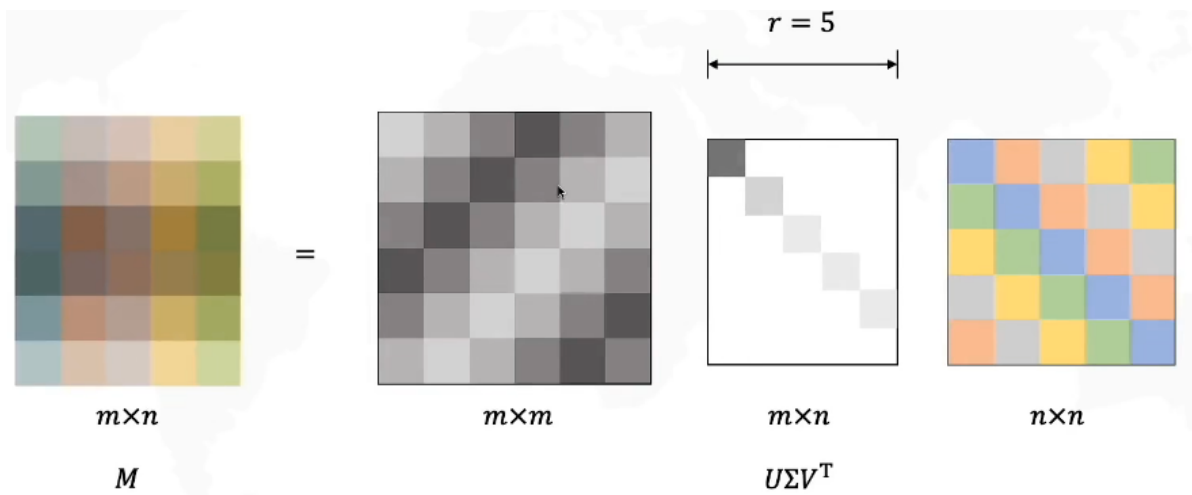
$$MV = U\Sigma$$

也即是：

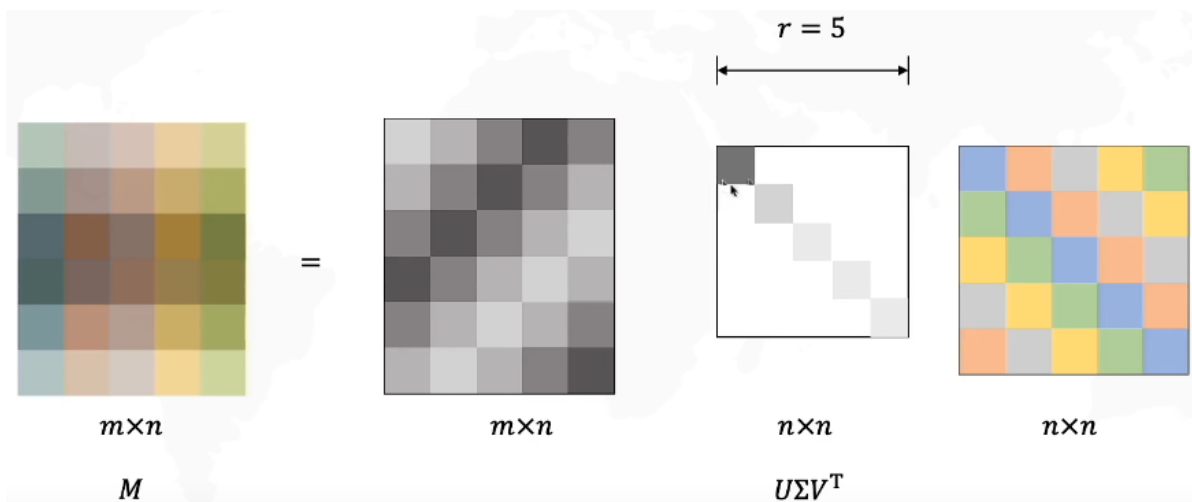
$$M = U\Sigma V^{-1}$$

其中： $V$ 是原始域的标准正交基， $U$ 是经过 $M$ 变换后的标准正交基

## SVD推广到任意大小矩阵

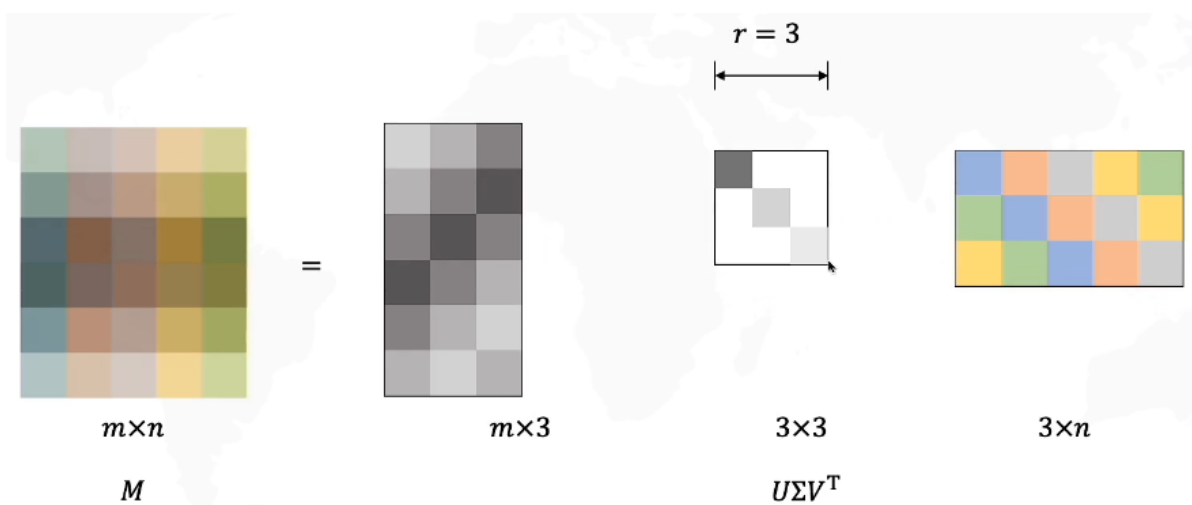


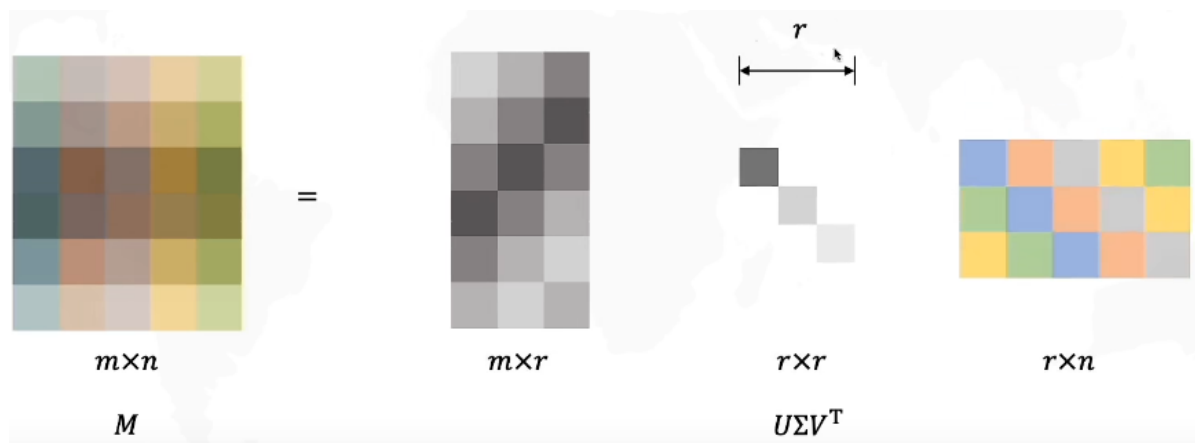
我们可以发现 $\Sigma$ 矩阵的最后一行（第6行）全是0，对于 $U$ 最后一列是乘以 $\Sigma$ 的最后一行，所以完全可以省略 $U$ 最后一列。



还可以发现 $\Sigma$ 矩阵的奇异值大小是从上到下依次排列的。

我们就可以只取前几个奇异值。





## 奇异值分解应用

假设我们现在有矩阵  $M$ , 需要对其做奇异值分解, 已知:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 10 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

那么可以求出  $MM^T$  和  $M^T M$ :

$$MM^T = \begin{bmatrix} 112 & 105 & 114 \\ 105 & 137 & 110 \\ 114 & 110 & 123 \end{bmatrix} \quad M^T M = \begin{bmatrix} 14 & 25 & 48 & 29 & 15 \\ 25 & 62 & 87 & 64 & 21 \\ 48 & 87 & 198 & 117 & 61 \\ 29 & 64 & 117 & 77 & 32 \\ 15 & 21 & 61 & 32 & 21 \end{bmatrix}$$

```
U =
[[-0.55572489, -0.72577856, 0.40548161],
 [-0.59283199, 0.00401031, -0.80531618],
 [-0.58285511, 0.68791671, 0.43249337]]

V =
[[-0.18828164, -0.01844501, 0.73354812, 0.65257661, 0.06782815],
 [-0.37055755, -0.76254787, 0.27392013, -0.43299171, -0.17061957],
 [-0.74981208, 0.4369731, -0.12258381, -0.05435401, -0.48119142],
 [-0.46504304, -0.27450785, -0.48996859, 0.39500307, 0.58837805],
 [-0.22080294, 0.38971845, 0.36301365, -0.47715843, 0.62334131]]
```

奇异值  $\Sigma = \text{Diag}(18.54, 1.83, 5.01)$

计算  $MM^T$ : `numpy.dot(M, numpy.transpose(M))`

## 在图像压缩中的应用

下面的代码运行环境为 `python3.6` + `jupyter`

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
from PIL import Image
import numpy as np

img_eg = Image.open('./ILSVRC2012_test_00000439_ground.jpg')
image_numpy_form_Image = np.array(img_eg)
h,w,c = image_numpy_form_Image.shape

img_temp = image_numpy_form_Image.reshape(h, w * 3)
U,Sigma,VT = np.linalg.svd(img_temp)

# 取前60个奇异值
sval_nums = 60
img_restruct1 =
(U[:,0:sval_nums]).dot(np.diag(Sigma[0:sval_nums])).dot(VT[0:sval_nums,:])
img_restruct1 = img_restruct1.reshape(h,w,c)

# 取前120个奇异值
sval_nums = 120
img_restruct2 =
(U[:,0:sval_nums]).dot(np.diag(Sigma[0:sval_nums])).dot(VT[0:sval_nums,:])
img_restruct2 = img_restruct2.reshape(h,w,c)

# plot figure
fig, ax = plt.subplots(1,3,figsize = (24,32))
ax[0].imshow(img_eg)
ax[0].set(title = "src")
ax[1].imshow(img_restruct1.astype(np.uint8))
ax[1].set(title = "nums of sigma = 60")
ax[2].imshow(img_restruct2.astype(np.uint8))
ax[2].set(title = "nums of sigma = 120")
```

