

Université Paris Cité

École doctorale 564 : Physique en Île de France
Laboratoire Matière et Systèmes Complexes

DYNAMIQUE NON-LINÉAIRE D'UN RIVELET LIQUIDE EN CELLULE DE HELE-SHAW

par Grégoire LE LAY

Thèse de doctorat de Physique

Dirigée par Adrian DAERR

Présentée et soutenue publiquement le 15 octobre 2025

Devant le jury composé de

Camille DUPRAT	Prof.	LadHyX, École Polytechnique	Rapportrice
Frédéric MOISY	Prof.	FAST, Université Paris-Saclay	Rapporteur
Alice MARCOTTE	MCF	∂ 'Alembert, Sorbonne Université	Examinateuse
François PÉTRÉLIS	DR	LPENS, École Normale Supérieure	Examinateur
Benoit SCHEID	Prof.	TIPs, Université Libre de Bruxelles	Examinateur
Adrian DAERR	Prof.	MSC, Université Paris Cité	Directeur de thèse

Thèse de doctorat

Dynamique non-linéaire d'un rivelet liquide en cellule de Hele-Shaw

préparée par

Grégoire Le Lay

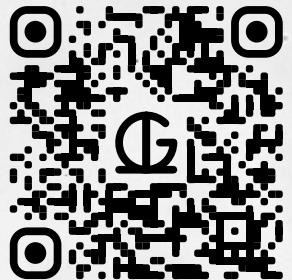
sous la direction de

Adrian Daerr

au laboratoire

Matière et Systèmes Complexes

Université Paris Cité | CNRS



Dynamique non-linéaire d'un rivelet liquide en cellule de Hele-Shaw

Résumé : Dans cette thèse, nous explorons plusieurs aspects de la dynamique d'un mince filet liquide (un *rivelet*) s'écoulant entre deux plaques de verre parallèles et faiblement espacées (formant une cellule dite de *Hele-Shaw*). Le champ de vitesse à l'intérieur du rivelet dépend de la géométrie des interfaces, qui elle-même est modifiée par l'écoulement, donnant naissance à la dynamique riche de cet objet au comportement complexe. Le long du rivelet, plusieurs types d'ondes peuvent se propager, et interagir entre elles de manière faiblement non-linéaire. Cet objet unidimensionnel est donc un excellent système modèle pour étudier les couplages entre ondes et les instabilités qui en découlent. En contrôlant son déplacement dans la direction transverse, il permet aussi d'étudier avec précision le dépôt de films minces par entraînement.

Nous nous intéressons particulièrement au comportement du rivelet lorsqu'il est déplacé rapidement de manière homogène par une surpression acoustique contrôlée (chapitre 4). Nous découvrons et rapportons l'existence d'une instabilité hydrodynamique nouvelle, au mécanisme original. Le couplage non-linéaire entre ondes transverses et longitudinales est à l'origine de l'amplification paramétrique de la sinuosité et des modulations d'épaisseur sur le rivelet. Nous expliquons la longueur d'onde observée par une condition de résonance portant sur une interaction triadique faiblement non-linéaire. Nous construisons ensuite un modèle théorique détaillé à partir des premiers principes, qui nous donne accès à la structure du mode le plus instable, et qui s'accorde parfaitement avec nos résultats expérimentaux. Ce même modèle nous permet d'expliquer le désaccord non-linéaire de fréquence observé expérimentalement, et la saturation du phénomène en amplitude. Nous montrons enfin comment l'utilisation des transformées de Fourier bidimensionnelles, en amplitude et en phase, sur les signaux expérimentaux permet d'obtenir une description synthétique du phénomène.

Nous étudions aussi la fine couche de liquide déposée derrière lui par le rivelet lorsqu'il se déplace transversalement (chapitre 3). Derrière les ménisques en mouvement, un très mince film de liquide d'au plus quelques microns d'épaisseur est déposé sur les plaques par entraînement. Nous montrons que nous sommes capables de mesurer les caractéristiques géométriques de ces films avec une excellente résolution temporelle et spatiale, ce qui nous permet de relier quantitativement le drainage des films aux effets physiques, gravitaires et capillaires, qui en sont responsables. Nous vérifions quantitativement que la hauteur des films obtenus est donnée par la relation classique de Landau—Levich—Derjaguin. Cela nous permet de déposer des films modulés spatialement avec une épaisseur contrôlée, ouvrant la voie à une nouvelle technique de génération de films minces texturés. Nous étudions les oscillations à haute vitesse du rivelet et les déformations des ménisques qu'elles induisent.

Enfin, nous revisitons le problème du méandrage spontané du rivelet à haut débit (chapitre 5). En prenant en compte la flexion du filament due à la viscosité, nous construisons un modèle amélioré qui pour la première fois permet une prédiction sur la longueur d'onde des oscillations, offrant de nouvelles perspectives sur un problème en suspens depuis quinze ans. En excitant localement le rivelet près de la zone de croissance des méandres, nous sommes en mesure d'observer sa réponse spatio-temporelle, qui exhibe des comportements complexes de verrouillage en fréquence.

Nous proposons en ouverture d'étendre notre approche en utilisant comme liquides des mélanges eau—tensioactifs, dont les propriétés physico-chimiques microscopiques pourraient être sondés en observant le comportement d'un rivelet à l'échelle macroscopique.

Mots-clés : Instabilités hydrodynamiques, Rivelets, Ondes non linéaires, Instabilité paramétrique, Méandres, Capillarité, Films liquides, Dépôt par entraînement

Nonlinear Dynamics of a Liquid Rivulet in a Hele-Shaw Cell

Abstract : In this thesis, we explore several aspects of the dynamics of a thin liquid stream (a *rivulet*) flowing between two parallel glass plates that are narrowly spaced (forming what is known as a *Hele-Shaw cell*). The velocity field inside the rivulet depends on the geometry of the interfaces, which is itself modified by the flow, giving rise to the rich dynamics of this object exhibiting complex behavior. Along the rivulet, several types of waves can propagate and interact with each other in a weakly nonlinear manner. This one-dimensional object is therefore an excellent model system for studying wave coupling and the resulting instabilities. By controlling its motion in the transverse direction, it also allows precise study of thin film deposition by entrainment.

We focus in particular on the behavior of the rivulet when it is rapidly displaced in a uniform manner using controlled acoustic overpressure (chapter 4). We discover and report the existence of a new hydrodynamic instability, with an original mechanism. The nonlinear coupling between transverse and longitudinal waves is at the origin of the parametric amplification of sinuosity and thickness modulations on the rivulet. We explain the observed wavelength through a resonance condition involving a weakly nonlinear triadic interaction. We then build a detailed theoretical model from first principles, which gives us access to the structure of the most unstable mode, in perfect agreement with experiments. This same model allows us to explain the experimentally observed nonlinear frequency detuning and the saturation of the phenomenon in amplitude. Finally, we show how the use of two-dimensional Fourier transforms, in both amplitude and phase, on the experimental signals allows for a synthetic description of the phenomenon.

We also study the thin liquid layer left behind by the rivulet when it moves in the transverse direction (chapter 3). Behind the moving menisci, a very thin liquid film, at most a few microns thick, is deposited on the plates by entrainment. We show that we are able to measure the geometric characteristics of these films with excellent temporal and spatial resolution, which allows us to quantitatively link film drainage to the physical effects responsible for it, namely gravity, and capillarity. We quantitatively verify that the height of the films obtained is given by the classical Landau–Levich–Derjaguin relation. This allows us to deposit spatially modulated films with controlled thickness, opening the door to a new technique for generating textured thin films. We investigate the high-speed oscillations of the rivulet and the deformations of the menisci they induce.

Finally, we revisit the problem of spontaneous meandering of the rivulet at high flow rates (chapter 5). By taking into account the bending of the filament due to viscosity, we construct an improved model which, for the first time, leads to a prediction of the wavelength of the oscillations, offering new perspectives on a problem that has remained open for fifteen years. By locally exciting the rivulet near the meander growth zone, we are able to observe its spatiotemporal response, which exhibits complex frequency-locking behaviors.

In conclusion, we propose extending our approach by using water–surfactant mixtures, whose microscopic physico-chemical properties could be probed by observing the macroscopic behavior of a rivulet.

Keywords : Hydrodynamic instabilities, Rivulets, Nonlinear waves, Parametric instability, Meanders, Capillarity, Liquid films, Entrainment-based deposition

Sommaire

Introduction générale	1
Chapitre 1 Créer et observer le rivelet	9
1.1 Générer le rivelet	10
1.1.1 La cellule	10
1.1.2 L'écoulement	12
1.1.3 Forçage acoustique	13
1.1.4 Le liquide	15
1.2 Interlude : Mesurer une tension de surface avec PyPendantDrop	16
1.2.1 Méthode de la goutte pendante	16
1.2.2 Motivation : dispositif personnalisé et science frugale	18
1.2.3 PyPendantDrop : une solution simple et adaptable pour les mesures frugales de tension de surface	19
1.3 Visualiser le rivelet	20
1.3.1 Méthode d'éclairement	20
1.3.2 Caméras et objectifs	22
1.4 Interlude : Contrôler des caméras avec Limrendir	23
1.4.1 Contexte : Genicam, Aravis et GevCapture	23
1.4.2 Limrendir	23
1.5 Repérer et mesurer le rivelet	25
1.5.1 Déetecter le rivelet	25
1.5.2 Représenter graphiquement le rivelet	29
1.5.3 Le rivelet dans l'espace de Fourier	29
Chapitre 2 Modélisation	35
2.1 Équations dynamiques	36
2.1.1 Effets hydrodynamiques : termes de volume	37
2.1.2 Effets capillaires : termes de tension de surface	40
2.1.3 Viscosité de ligne de contact	42
2.1.4 Force de pression acoustique	44
2.2 Approche perturbative	45
2.2.1 « Ordre zéro »	45
2.2.2 Approximation linéaire	46
2.2.3 Approche non-linéaire : coordonnées curvilignes	47
2.3 Vagues sur le rivelet	50
2.3.1 Relations de dispersion	50
2.3.2 Approche énergétique	51
Chapitre 3 Film déposé par un rivelet en mouvement	55
3.1 Principe et motivations	56
3.1.1 Films minces et enduisage contrôlé	56
3.1.2 Analyse d'image	58
3.1.3 Déposition à haute accélération	58
3.1.4 Dissipation de ligne de contact	59
3.2 Mesure interférométrique d'épaisseur de film	60

3.2.1 Montage expérimental	60
3.2.2 Méthodes numériques	61
3.3 Drainage d'un film liquide	65
3.3.1 Évolution spatio-temporelle	65
3.3.2 Drainage du film déposé : théorie	67
3.3.3 Drainage du film déposé : mesures	69
3.4 Déposition périodique d'un film	72
3.4.1 Mesure de la vitesse du rivelet	72
3.4.2 Mesure de l'épaisseur des films	72
3.4.3 Comparaison entre vitesse de déposition et hauteur du film	74
3.4.4 Lien avec la théorie de LLD	76
3.4.5 Vitesse de drainage	77
3.5 Déformation du rivelet à haute fréquence	80
3.5.1 Visualisation d'un rivelet oscillant	80
3.5.2 Mouvements rapides du rivelet	83
Conclusion du chapitre 3	87
Chapitre 4 Déstabilisation paramétrique d'un rivelet forcé acoustiquement	89
4.1 Contexte et motivation	91
4.1.1 Forçage externe, interne, paramétrique	91
4.1.2 Instabilité de Faraday et couplage paramétrique entre ondes	94
4.1.3 Forçage additif, déstabilisation paramétrique?	95
4.2 La danse du rivelet	96
4.2.1 Condition d'apparition	96
4.2.2 Une instabilité génératrice de motifs	98
4.3 Résonance triadique et co-amplification	100
4.3.1 Formulation mathématique du problème	100
4.3.2 Arguments de symétrie	103
4.3.3 Condition de résonance	104
4.3.4 Interprétation physique du mécanisme de l'instabilité	105
4.4 Développement(s) non-linéaire(s)	109
4.4.1 Formulation adimensionnée	109
4.4.2 Seuil d'instabilité	110
4.4.3 Structure du motif	111
4.4.4 Désaccord non-linéaire et saturation	113
4.5 Rupture du rivelet	117
4.5.1 Cassage à haut forçage	117
4.5.2 Seuil de rupture	118
4.5.3 Trains de gouttes	119
4.6 Visualisation dans l'espace de Fourier	121
Conclusion du chapitre 4	124
Annexes du chapitre 4	126
Annexe 4.A Un autre point de vue sur le verrouillage de phase	127
Annexe 4.B Expériences de trempe	129
Annexe 4.C Article paru dans Physical Review Letters	131
Annexe 4.D Dérivation des équations aux ordres deux et trois	138
Chapitre 5 Méandrage spontané	147
5.1 Instabilités en hydrodynamique	148
5.1.1 Les instabilités en mécanique des fluides	148

5.1.2	Méandrage entre deux plaques	150
5.2	Instabilité de méandrage spontané	152
5.2.1	Phénoménologie	152
5.2.2	Mécanisme d'instabilité	156
5.2.3	Interprétations	159
5.2.4	Limites	162
5.3	Flexion visqueuse du rivelet	163
5.3.1	Une « poutre liquide »	163
5.3.2	Méandrage d'un rivelet soumis à la flexion	166
5.4	Effet du forçage acoustique	168
5.4.1	Déclencher et contrôler les méandres	169
5.4.2	Atténuer les méandres	174
	Conclusion du chapitre 5	176
	Annexes du chapitre 5	178
Annexe 5.A	Autres représentations	178
Annexe 5.B	Calcul du critère d'instabilité	182
Annexe 5.C	Calcul du moment quadratique I_y	184
Annexe 5.D	Simulations	184
	Conclusion et ouverture	187
	Annexes de la thèse	191
Annexe A	Roue à eau chaotique	193
Annexe B	Un modèle simple de lévitation magnétique	197
Annexe C	Galerie	207
	Bibliographie	215

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, nous traitons de la *dynamique*, c'est-à-dire du mouvement et des causes de ce mouvement, d'un *rivelet*. Il s'agit d'un mince filament de liquide qui s'écoule à l'intérieur d'une *cellule de Hele-Shaw*, qui est le nom donné à l'ensemble de deux plaques de verre parallèles entre lesquelles le fluide est injecté. Avant d'aller plus loin dans la présentation de nos travaux, prenons le temps de décrire cet objet original et d'exposer nos motivations pour l'étudier.

Lorsque l'on dépose une petite quantité de liquide sur une plaque, la tension de surface lui fait généralement prendre la forme d'une goutte. L'interface entre le liquide et l'air au bord de cette goutte fait un angle caractéristique avec la plaque, appelé angle de contact. Lorsque les interactions moléculaires liquide/plaque et liquide/air sont énergétiquement beaucoup plus favorables que celles entre la plaque et l'air, cet angle de contact s'approche de zéro : on dit que le liquide est *mouillant*, et il cherche alors à s'étendre sur toute la plaque jusqu'à former une couche uniforme très peu épaisse.

En injectant un liquide mouillant entre deux plaques parallèles, il va chercher à s'étendre sur les deux surfaces simultanément, et former ainsi un *pont liquide* entre elles. Le liquide formant ce pont occupe l'espacement entre les plaques, et il est délimité sur le côté par des surfaces courbées, appelées *ménisques*. La géométrie de ces ménisques dans le plan normal aux plaques est dictée par la tension de surface, et consiste, au repos, en un demi-cercle dont le diamètre correspond à l'espacement entre les plaques.

Si les plaques sont verticales, et si le liquide est injecté en continu, ce pont liquide tombe et s'allonge sous l'effet de la gravité. Il se forme alors un fin filament vertical, délimité par deux ménisques sur les côtés, et à l'intérieur duquel le fluide s'écoule : c'est cela que nous appelons ici un *rivelet*. Un tel objet est particulièrement intéressant pour les physiciens et les physiciennes, car il présente une dynamique riche, due en grande partie au couplage important entre l'écoulement du liquide à l'intérieur et la géométrie des ménisques sur les bords. L'écoulement se faisant à l'intérieur du rivelet, le champ de vitesse doit suivre le chemin dicté par la position des interfaces. Mais, à leur tour, les interfaces elles-mêmes se déplacent, mues par les efforts transverses dus à l'écoulement et les effets de surface : cette interdépendance est la source de comportements complexes.

Un aspect qui participe à l'originalité du rivelet est sa faible épaisseur. Le fait que cet objet soit élancé (ou mince, en anglais *slender*) justifie mathématiquement de faire certaines approximations qui rendent le comportement du rivelet accessible à l'étude mathématique et à la simulation numérique. Cette caractéristique rapproche aussi le rivelet d'autres objets d'études comme les jets ou les nappes liquides. Le rivelet peut être traité comme un objet unidimensionnel, dont l'hydrodynamique dépend de deux champs de vitesse u et v , dans les directions longitudinale et transverse, respectivement. Il s'agit donc d'un objet « 2C-1D » (deux composantes de vitesse, une dimension d'espace)¹.

1. Nous improvisons cette notation par analogie avec le domaine des écoulements en rotation « 3C-2D », pour lesquels la dynamique est donnée par trois champs de vitesse ne dépendant que de deux coordonnées d'espace.

La faible épaisseur du rivelet se traduit aussi par une importance particulière de la dissipation de ligne de contact dans sa dynamique. Souvent, dans les écoulements en cellule de Hele-Shaw, la dissipation due à la viscosité dans le volume est prédominante, et la perte d'énergie due au déplacement de la ligne de contact peut être traitée comme une perturbation. Au contraire, la finesse du rivelet, qui rend la dissipation de volume très peu importante, en fait un excellent système pour sonder l'influence de la dissipation de ligne de contact sur son comportement. Enfin, cette faible épaisseur diminue la masse du rivelet, qu'il est donc aisé de déplacer en utilisant des forces extérieures contrôlées. Cela rajoute des paramètres de contrôle à la portée de l'expérimentateur(ice), et en fait un système qu'il est possible de sonder sur différentes échelles de temps et d'espace.

Puisque le rivelet est constitué d'un liquide mouillant, il n'est pas sensible au détail de l'état de surface des plaques. Cela nous permet de nous intéresser à la dynamique de cet objet mobile sans devoir prendre en compte l'hystéresis d'angle de mouillage, ou l'accrochage des interfaces aux inhomogénéités microscopiques de la surface qui créé un bruit difficilement contrôlable. Ces artefacts dus au mouillage partiel, non dénués d'intérêt, ont tendance, par leur importance, à masquer les effets des autres paramètres sur le système.

Sur le rivelet, deux types d'ondes peuvent se propager : des ondes transverses, qui sont les déformations du chemin suivi par le liquide, et des ondes longitudinales, qui sont les modulations d'épaisseur du rivelet. Ces ondes peuvent interagir non-linéairement : cela fait du rivelet un système modèle unidimensionnel adapté à l'étude de l'interaction faiblement non-linéaire entre ondes et des instabilités qui peuvent émerger de ces interactions.

Enfin, le rivelet avec lequel nous avons travaillé au cours de cette thèse est formé d'une huile perfluorée, un liquide chimiquement inerte. Il constitue ainsi une « version simplifiée » des rivelets formés d'un mélange eau–tensioactifs, dont la grande variété de comportements observés n'a pas encore été expliquée à ce jour. En développant une compréhension précise et profonde de l'objet que nous étudions, nous avons bon espoir de réussir à mieux interpréter les comportements de rivelets à la rhéologie de surface plus complexe.

Nous avons au cours de notre travail voulu explorer trois directions différentes dans l'étude du rivelet, trois phénomènes dynamiques qualitativement différents et cependant reliés, qui permettent chacun d'explorer en profondeur un aspect de ce système, et qui s'enrichissent les uns de la compréhension des autres.

Premier axe : Mouvement transverse du rivelet et dépôt de film

Le mouvement transverse du rivelet dans la cellule, c'est-à-dire le déplacement d'une interface liquide-air près d'une plaque, fait écho à plusieurs sujets d'études classiques en mécanique des fluides.

De manière très générale, le mouvement du rivelet dans la cellule constitue un écoulement multiphasique confiné, ce qui le place dans la même catégorie que les bulles confinées, ou bulles de Taylor (Taylor 1961), dont la compréhension est essentielle dans de nombreuses applications (Marcotte et al. 2024), y compris l'étude et la conception de dispositifs microfluidiques (Ba-

roud, Gallaire et Dangla 2010), les échanges liquides-gaz (Rivero-Rodriguez et Scheid 2019), ou encore la prévention de l’obstruction des voies respiratoires dans le contexte biomédical (Grotberg 2011; Baudoin et al. 2013).

En se déplaçant, le rivelet laisse derrière lui une certaine épaisseur de fluide, qui dépend notamment des caractéristiques du déplacement (vitesse, accélération) et de la géométrie de la cellule. Ce phénomène de *dépôt par entraînement* est au cœur du problème de Landau-Levich-Dejarguin (LLD) (Landau et Levich 1942; Derjaguin 1943) qui traite du cas d’une plaque tirée hors d’un bain et qui a de nombreuses conséquences dans le vaste domaine de l’enduisage (Quéré 1999; Cantat 2013). Plus proche encore de notre géométrie, on trouve le problème de Bretherton (Bretherton 1961), qui concerne le mouvement d’une bulle dans une cellule de Hele-Shaw infinie remplie de liquide, et dont les applications sont nombreuses, par exemple en microfluide, dans les échangeurs thermiques, les microréacteurs, etc. La courbure des interfaces dans le plan des plaques induit une légère déformation des ménisques, qui a été calculée par Park et Homsy 1984.

Avec notre système expérimental, nous sommes en mesure d’imposer un gradient de pression au rivelet, donc de déposer un film entraîné de manière contrôlée, et de mesurer les caractéristiques de ce film avec une méthode interférométrique. Nous pouvons faire varier indépendamment la vitesse et la fréquence d’un déplacement sinusoïdal imposé au rivelet, et mesurer l’effet de chacun de ces paramètres sur le système. Ainsi, nous pouvons mieux comprendre la nature et la géométrie des films déposés, et ainsi mieux prendre en compte le frottement de ligne de contact, qui cause la majeure partie de la dissipation lors des mouvements transverses du rivelet.

Deuxième axe : Instabilité paramétrique du rivelet forcé acoustiquement

En temps normal, les ondes se propageant sur le rivelet sont linéairement atténuées, elles sont soumise à la dissipation visqueuse et leur amplitude diminue exponentiellement. Nous avons découvert qu’en appliquant un forçage transverse homogène au rivelet, il était possible de coupler deux ondes entre elles et, sans amplifier directement aucune d’elles, de faire en sorte qu’elles se renforcent l’une l’autre de manière à déclencher une instabilité.

Cette instabilité est paramétrique, ce qui rappelle par exemple le cas de l’instabilité de Faraday à laquelle est soumis un fluide dont le conteneur est oscillé verticalement (Faraday 1831; Douady 1990). En particulier, l’instabilité de Faraday dans une cellule de Hele-Shaw peut s’expliquer par l’interaction constructive de deux ondes de surface couplées par le forçage (Douady, Fauve et Thual 1989), ce qui est analogue à ce qu’il se passe dans notre système. Les principales différences entre l’instabilité de Faraday et celle en collier de perles sont les suivantes : tout d’abord, nous couplons deux ondes de natures différentes, aux mécanismes de propagation distincts, ce qui explique que nous n’obtenions pas une réponse à la fréquence moitié; ensuite, tandis que dans le cas de Faraday en cellule de Hele-Shaw la perte d’énergie vient principalement de la dissipation dans le volume (Bongarzone et al. 2023), la perte d’énergie est dans notre cas due au frottement de ligne de contact, ce qui change la phénoménologie.

La co-amplification de deux ondes en présence d’un forçage nous permet de concevoir un lien

entre le comportement des ondes sur le rivelet et celui d'autres ondes dans des contextes différents, comme dans le domaine des ondes internes (Benilov 1987), des ondes de Rossby (Kerswell 1993), ou même, en dehors de la mécanique des fluides, en optique (Amon, Suret et al. 2009).

On peut formellement voir la réponse du rivelet au forçage appliqué comme une onde transverse de longueur d'onde infinie. Cela permet de voir le mécanisme de déstabilisation comme une interaction résonante à trois ondes, et d'obtenir mathématiquement les équations canoniques correspondantes (Martin, Simmons et Wunsch 1972).

Enfin, l'instabilité, au-delà d'un certain seuil, cause la fragmentation du rivelet. Ceci permet de le fractionner en portions régulières de volume contrôlé, ce qui pourrait avoir des applications dans le domaine microfluidique pour la génération de gouttelettes.

Troisième axe : Instabilité de méandrage spontané

Lorsque le rivelet est injecté avec un débit suffisamment important, il passe d'un état où son trajet est rectiligne, dicté par la gravité, à un état où il forme une ligne courbe, d'épaisseur constante (Daerr, Eggers et al. 2011).

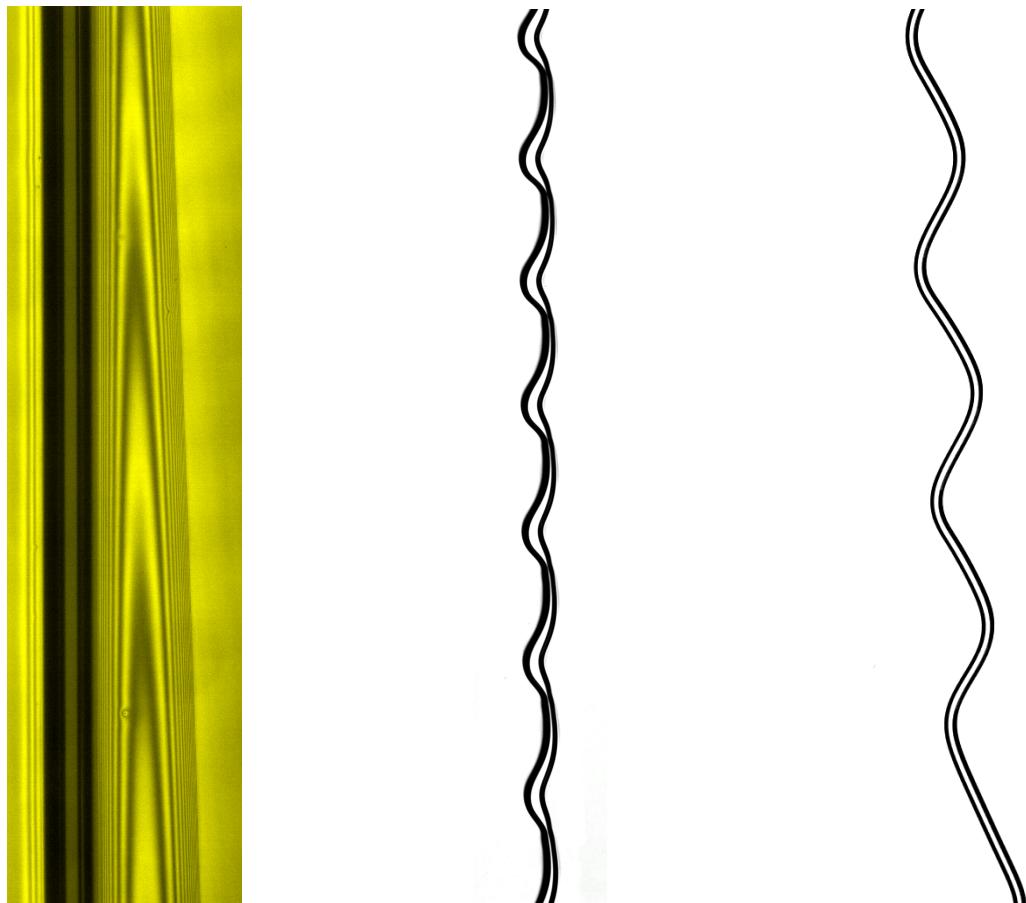
Les sinuosités du trajet du rivelet rappellent les boucles et les détours effectués naturellement par certains fleuves et rivières, qui déforment leur lit sur des échelles de temps très lentes. En suivant cette analogie avec les méandres des cours d'eau géologiques, nous appelons « méandrage spontané » (*spontaneous meandering*) le phénomène qui amène le rivelet à se tordre et à adopter des excursions transverses importantes.

Le méandrage des rivières est principalement dû à l'érosion des berges (Liverpool et S. F. Edwards 1995), ce qui n'est pas un phénomène que nous avons à considérer ici, mais il est possible d'obtenir un effet analogue à l'échelle miniature, sur un dispositif plus simple, en faisant simplement couler un petit filet de liquide sur une plaque inclinée (Nakagawa et Scott 1984). La dynamique précise de ce phénomène n'est pas encore parfaitement comprise, et nous espérons que nos études sur le méandrage de fluides mouillants en cellule de Hele-Shaw puisse permettre d'approfondir les connaissances du mécanisme de méandrage capillaire en général.

Le méandrage en cellule de Hele-Shaw est aussi observé dans le cas où le liquide est une solution de tensioactifs dilués dans l'eau. Dans ce cas, une grande variété de comportements est observée : méandres réguliers ou chaotiques, persistant sur des distances courtes ou longues, montrant des vitesses de phase positive ou négative, etc (Drenckhan, Gatz et Weaire 2004; Le Grand-Piteira 2006). La dynamique précise du phénomène, et la répartition dans l'espace des phases des comportements mentionnés ci-dessus, ne sont pas bien établies théoriquement. Étudier le méandrage de liquides simples pourrait permettre d'approfondir notre compréhension du cas plus complexe de liquides ayant une rhéologie de surface non triviale.

En termes d'applications, le méandrage est par ailleurs un phénomène d'intérêt : il s'agit par exemple d'un phénomène indésirable en enduisage (*coating*), qui peut induire des changements de point de fonctionnement dans les échangeurs de chaleur. Étudier le méandrage de liquides chargés en tensioactifs permet par ailleurs d'approfondir notre connaissance du drainage des mousses, qui sont des objets de première importance dans le contexte industriel.

Le seuil de débit à partir duquel le méandrage se déclenche pour un rivelet d'huile perfluorée a été mis en évidence par Daerr, Eggers et al. 2011. Mais le modèle proposé ne permet pas de comprendre la longueur d'onde caractéristique des instabilités. Surtout, ce modèle prévoit une amplification indiscriminée des longueurs d'ondes arbitrairement petites, ce qui n'est pas physiquement acceptable et ne correspond pas à ce qui est observé expérimentalement. Cela appelle à un raffinement du modèle qui exclurait les petites longueurs d'ondes et ouvrirait la voie à une modélisation non-linéaire des oscillations désordonnées qui sont observées.



Déposition de films (chapitre 3). Le rivelet (objet sombre à gauche) est rectiligne, d'épaisseur constante, et nous le déplaçons transversalement à basse fréquence. Il laisse derrière lui un fin film de liquide, que nous observons en lumière monochromatique.

Instabilité en collier de perles (chapitre 4). En déplaçant le rivelet transversalement à haute fréquence, une instabilité se déclenche, qui couple entre elles des déformations transverses et longitudinales, toutes les deux périodiques en espace.

Instabilité de méandrage spontané (chapitre 5). Au-dessus d'un débit critique, le rivelet exhibe des oscillations sinusoïdales désordonnées, tout en gardant une épaisseur constante.

Les trois principaux phénomènes étudiés au cours de cette thèse.

Contenu de la thèse

Cette thèse est organisée en cinq chapitres : les deux premiers visent à présenter le rivelet sous l'angle expérimental et théorique, les trois suivants explorent les différents axes mentionnés ci-dessus.

Dans le chapitre 1, nous décrivons en détail le dispositif expérimental utilisé pendant cette thèse, de la génération du rivelet à sa détection par analyse d'image. Nous en profitons pour présenter succinctement quelques outils que nous avons développés au cours de cette thèse, et qui, nous l'espérons, pourront être utiles à d'autres chercheurs et chercheuses.

Dans le chapitre 2, nous détaillons la modélisation théorique que nous adoptons pour le rivelet. Nous établissons les équations de base de la dynamique du rivelet, qui seront ensuite utilisées dans les chapitres suivants. Nous terminons par une partie inédite traitant des ondes pouvant se propager sur le rivelet, et de leurs interactions.

Au sein du chapitre 3, nous traitons des films déposés derrière lui par le rivelet lorsqu'il est déplacé de manière contrôlée dans la direction transverse. Ces films sont visualisés en lumière monochromatique ; du fait de leur faible épaisseur, ils produisent des figures d'interférences que nous sommes en mesure de démoduler. À la fin de ce chapitre, nous présentons rapidement l'effet d'oscillations à haute vitesse sur la dynamique des ménisques entourant le rivelet.

Dans le chapitre 4, qui constitue le cœur de ce manuscrit, nous conduisons une investigation détaillée de l'instabilité en collier de perles. Cette instabilité résulte du couplage paramétrique des ondes transverses et longitudinales sur le rivelet, qui se fait par l'intermédiaire d'un forçage acoustique. Nous décrivons expérimentalement le phénomène, et nous proposons un modèle qui rend compte de nombreuses observations expérimentales, comme la condition de résonance triadique, la structure du motif, le seuil d'instabilité, ou le désaccord non-linéaire en fréquence. Les résultats liés à ce phénomène comptent parmi ceux qui m'ont demandé le plus de travail, et dont je suis le plus fier.

Enfin au chapitre 5, plus exploratoire, je présente des résultats encore préliminaires concernant le méandrage spontané, sa modélisation, le mécanisme d'instabilité, et la réponse du méandre à un forçage acoustique localisé.

Après une conclusion générale revenant sur les points clés du manuscrit et présentant des pistes de recherches futures, j'ai placé à la fin de ce travail trois annexes qui précèdent la bibliographie : l'annexe A présente un dispositif de vulgarisation que j'ai développé au cours de ma thèse ; l'annexe B contient un article que j'ai rédigé dans le cadre de l'encadrement de l'équipe de l'université au *French Physicists' Tournament* ; l'annexe C expose quelques-unes des plus belles images du rivelet que j'ai pu prendre.

Note sur les vidéos

Cette thèse traite de dynamique, c'est-à-dire d'objets évoluant au cours du temps dont les comportements ne peuvent être directement imprimés. Nous avons donc adapté tous les phénomènes que nous décrivons à la visualisation en deux dimensions en utilisant différents types de figures : succession d'instantanés, graphes spatio-temporels, coupes de films... Tout le contenu scientifique de cette thèse est ainsi conçu pour être parfaitement compréhensible à la seule lecture de la version papier. De manière complémentaire, de courtes vidéos hébergées en ligne ont été disséminées au fil de la thèse, et sont accessibles via des mosaïcodes (*QR codes*), comme dans l'exemple ci-contre. Sur la version papier, on peut scanner ces codes avec un téléphone intelligent (*smartphone*). Sur support informatique, il suffit de cliquer directement sur l'image pour être redirigé vers la vidéo. Visionner ces courts films reste entièrement optionnel, mais nous l'encourageons : nous pensons que voir directement les phénomènes dynamiques dont il est question permet de mieux les appréhender. Une liste des vidéos et une courte description de chacune d'entre elles, comprenant des précisions sur les conditions expérimentales, est disponible sur une [page web dédiée²](#).



Vidéo : Le rivelet en train de danser ([en savoir plus](#)).

2. www.normalesup.org/~glelay/thesis

1

1

CRÉER ET OBSERVER LE RIVELET

Nous présentons ici le rivelet sous l'angle expérimental. Nous rassemblons dans ce chapitre toutes les informations utiles à qui voudrait reproduire les expériences décrites dans cette thèse. Nous présentons aussi quelques contributions que nous avons rendues disponibles en accès libre et qui, nous l'espérons, pourront être utiles à d'autres.

1.1	Générer le rivelet	10
1.1.1	La cellule	10
1.1.2	L'écoulement	12
1.1.3	Forçage acoustique	13
1.1.4	Le liquide	15
1.2	Interlude : Mesurer une tension de surface avec PyPendantDrop	16
1.2.1	Méthode de la goutte pendante	16
1.2.2	Motivation : dispositif personnalisé et science frugale	18
1.2.3	PyPendantDrop : une solution simple et adaptable pour les mesures frugales de tension de surface	19
1.3	Visualiser le rivelet	20
1.3.1	Méthode d'éclairement	20
1.3.2	Caméras et objectifs	22
1.4	Interlude : Contrôler des caméras avec Limrendir	23
1.4.1	Contexte : Genicam, Aravis et GevCapture	23
1.4.2	Limrendir	23
1.5	Repérer et mesurer le rivelet	25
1.5.1	Détecter le rivelet	25
1.5.2	Représenter graphiquement le rivelet	29
1.5.3	Le rivelet dans l'espace de Fourier	29

Dans ce chapitre nous décrivons les étapes nécessaire à la compréhension des données expérimentales présentées au cours de cette thèse : nous expliquons en 1.1 comment nous générions le rivelet, en 1.3 comment nous l'observons, et en 1.5 comment nous exploitons les images expérimentales pour obtenir des données quantitatives.

En parallèle, nous profitons de ce chapitre pour présenter rapidement deux solutions technologiques que nous avons développées au cours de la thèse : PyPendantDrop (1.2) et Limrendir (1.4).

1.1 Générer le rivelet

1.1.1 La cellule

Toutes nos expériences sont faites dans une cellule de Hele-Shaw, consistant en deux plaques parallèles entre lesquelles le fluide est confiné. La cellule de Hele-Shaw que nous utilisons est remplie d'air, ce qui simplifie grandement sa conception par rapport à une cellule remplie de liquide, qui se doit d'être étanche. Elle est constituée de deux plaques de verre (verre flotté commercial) espacées par des piliers de hauteur contrôlée. Les piliers sont disposés par paire, les éléments d'une paire étant placés en vis à vis selon la largeur de la cellule, chacun d'un côté. Sept paires de ces piliers sont placées au fil de la hauteur de la cellule, régulièrement espacées de sorte que la distance entre deux piliers soit comparable dans les deux directions du plan des plaques. Cette cellule est ensuite placée entre deux mâchoires d'aluminium réalisées sur mesure à l'atelier mécanique du laboratoire (voir figure 1.1 (gauche)). Ces mâchoires permettent d'aligner les plaques, de les serrer, d'ajouter des éléments à la cellule (comme les haut-parleurs servant au forçage acoustique décrit en 1.1.3) et de la manipuler aisément. Les plaques sont pressées l'une contre l'autre, afin de fixer l'espacement (*gap*) de la cellule. La pression est répartie sur la longueur de chaque plaque grâce à un méplat métallique, les points de pression sur lesquels des vis appuient sur le méplat correspondant à la position des piliers (voir figure 1.1 (droite)).

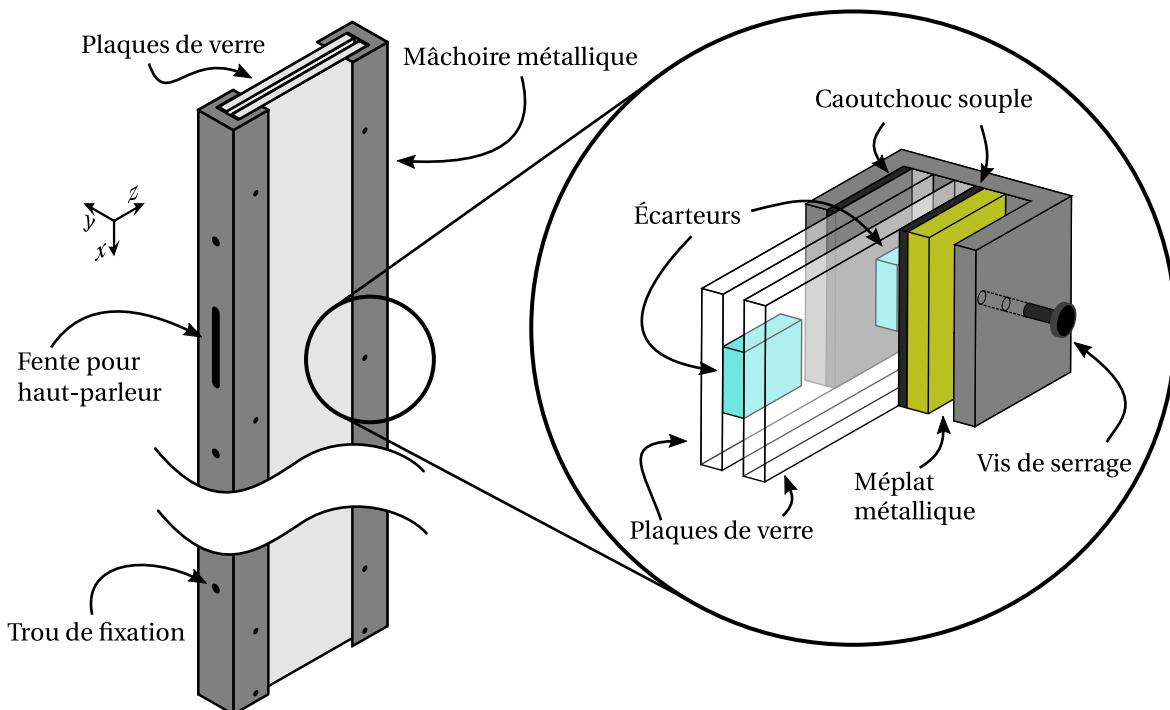


FIGURE 1.1 – (gauche) Les deux plaques de verre formant la cellule sont enserrées entre deux mâchoires mécaniques (en gris) conçues spécialement pour cet usage.

(droite) Grossissement pour visualiser la structure de la cellule. Les plaques de verre, séparées par des écarteurs, sont serrées par des vis appuyant sur un méplat qui répartit la force. Les plaques sont protégées par des bandes de caoutchouc souple.

La taille des plaques de verre est de 1 m par 10 cm par 6 mm. La longueur de la cellule (qui correspond en pratique à sa hauteur, puisqu'elle est placée verticalement lors des expériences) est de 1 m, ce qui correspond à la taille maximale permettant d'observer des évolutions du méandre sur de grandes échelles tout en faisant en sorte qu'il soit possible pour une seule personne de monter, manipuler et démonter le dispositif expérimental. La largeur de 10 cm est choisie grande devant l'extension spatiale caractéristique d'un méandre spontané (de l'ordre du cm), ce qui permet de générer et d'ajuster le rivelet sans que le liquide ne s'échappe sur les bords. Elle est cependant suffisamment réduite pour que le forçage acoustique, proportionnel à l'inverse de la largeur de la cellule, reste efficace. Enfin l'épaisseur des plaques de verre de 6 mm permet au dispositif d'être léger et transportable, tout en assurant sa solidité et surtout sa rigidité.

Les piliers, dont la hauteur détermine l'espacement (*gap*) de la cellule, sont constitués d'un empilement de feuillets de Mylar d'épaisseur connue précisément. Selon les expériences, j'ai utilisé des feuillets d'épaisseur 300 µm et 100 µm. Comme les feuillets sont légèrement compressibles, l'épaisseur réelle de la cellule peut différer de la somme des épaisseurs des feuillets utilisés avec un écart allant jusque 5 %. Pour les expériences les plus récentes, nous avons pu mesurer l'espacement de la cellule directement à l'aide d'une sonde confocale chromatique. La sonde que nous utilisons permet de mesurer les distances entre des interfaces réfléchissant la lumière avec une précision de l'ordre de la dizaine de microns, sur une plage de l'ordre du centimètre. Enfin, pour s'assurer de la constance de l'écartement entre les plaques, nous avons visualisé à travers une lame semi-réfléchissante le motif d'interférences généré sur la cellule vide éclairée par une lampe à vapeur de sodium (voir chapitre 3 pour plus de détail sur ce montage interférométrique). Cette visualisation nous a permis d'observer directement les variations spatiales d'épaisseur typique au niveau de la plaque. À cette occasion, nous avons observé moins d'une alternance entre frange sombre et frange lumineuse par millimètre, ce qui correspond à un gradient d'épaisseur inférieur à 0,1 µm/mm.

L'écartement entre les plaques *b* est nécessairement compris dans une plage réduite. En effet, l'espacement de la cellule doit être en-dessous de la longueur capillaire du liquide (de l'ordre de 1 mm), sinon il devient difficile voire impossible de créer et de maintenir un pont liquide reliant les deux bords de la cellule. Au contraire, une épaisseur en deça de 0,2 mm rend difficile l'injection de fluide à l'intérieur de la cellule, et la perte de charge due au passage dans la pointe d'injection oblige à utiliser de fortes pressions. Le paramètre *b* devant rester dans cette gamme très contrainte (moins d'une décade), il constitue un mauvais paramètre de contrôle : en général, nous le gardons donc fixé. Pour presque toutes les expériences que nous avons conduites, nous avons choisi un écartement *b* entre les plaques de l'ordre de 0,6 mm, qui permet d'injecter facilement du fluide dans la cellule sans avoir de difficulté à créer un pont.

1.1.2 L'écoulement

Pour générer nos écoulements, nous utilisons des pompes volumétriques à engrenages (Ismatec BVP-Z et Cole-Parmer 75211-35), sur chacune desquelles est montée une tête de pompe Micropump. Nous avons utilisé les têtes de pompe de modèles Micropump 81111 (Série GJ, à cavité, débit maximum de 0,91 ml/rev) et Micropump 81282 (Série GB, à sabot de succion, débit maximum de 1,17 ml/rev).

Le fluide part du réservoir principal pour aller dans un tube flexible, puis est injecté à l'intérieur de la cellule. Cette injection peut être faite par une pointe de micropipette biseautée au cutter, ou bien par une aiguille de seringue de diamètre approprié. Le jet initial est brisé par un obstacle centimétrique inséré dans la cellule, dont le rôle est double : réduire la vitesse du fluide à zéro, de manière à la rendre indépendante du débit et du diamètre d'injection, et assurer le mouillage simultané des deux parois. Le liquide forme alors un pont capillaire entre les deux parois et tombe sous l'effet de la gravité.

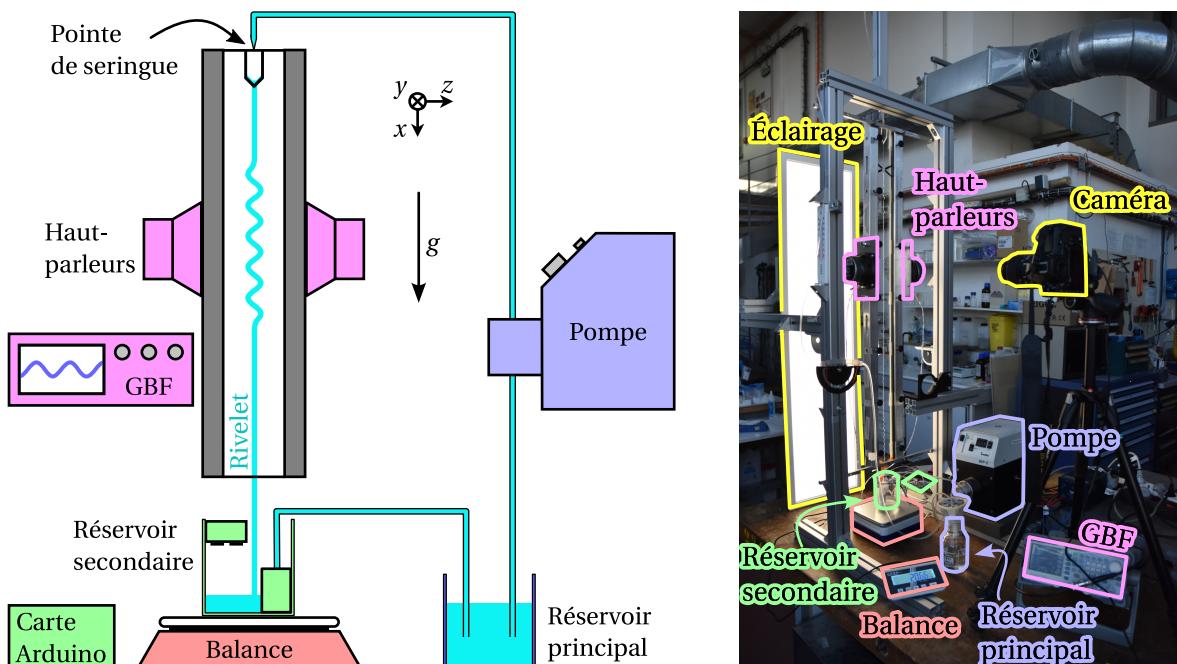


FIGURE 1.2 – Dispositif expérimental.
(gauche) Schéma (pas à l'échelle) représentant les différents éléments utilisés pour générer le rivelet. Les mâchoires en métal sont indiquées par des rectangles gris. Les éléments reliés entre eux par des câbles dans le montage réel sont de la même couleur sur le schéma.
(droite) Photo annotée du dispositif expérimental réel. Le rivelet est visible, il correspond à la fine ligne lumineuse qui descend en oscillant au centre de la cellule.

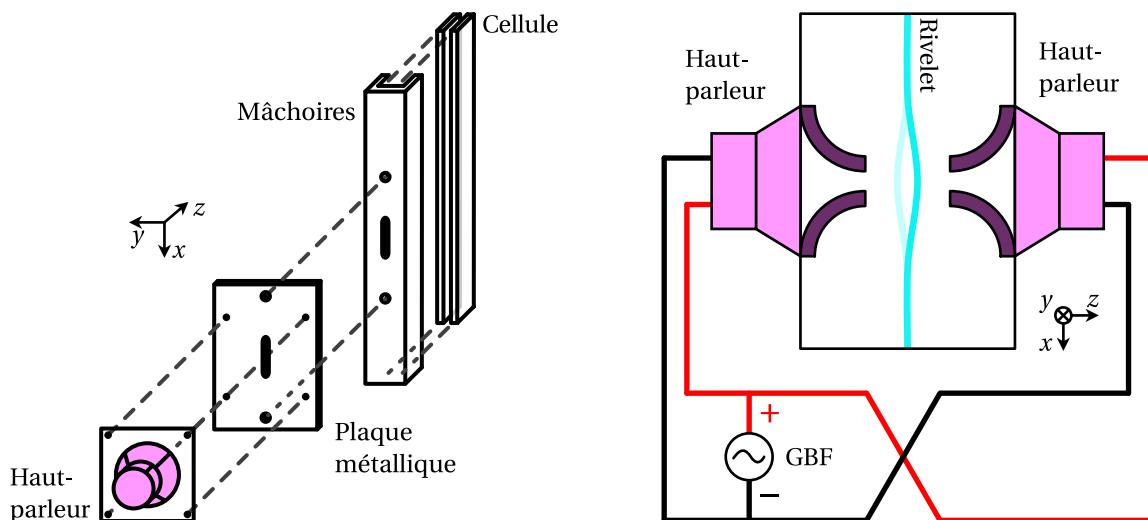
En dessous de la cellule, le liquide est collecté dans un réservoir de récupération placé sur une balance. La masse mesurée par la balance est enregistrée en continu et permet de connaître le débit de liquide injecté avec une précision de l'ordre de 1 %. Le contenu du réservoir de récupération est régulièrement renvoyé vers le réservoir principal, pour éviter que ce dernier ne se vide complètement. Ce processus de régulation du niveau du réservoir de récupération est autonome : cela permet de ne pas avoir à étalonner la masse du bêcher utilisé, et de ne pas risquer de voir le

réservoir déborder lorsque la balance n'est pas utilisée. Un capteur de distance (constitué d'un couple émetteur-récepteur ultrasonore), peu précis mais fiable, est connecté à une carte Arduino qui contrôle une pompe placée au fond du réservoir de récupération. Lorsque le niveau de liquide dans le bac dépasse un certain seuil, une vidange est déclenchée, qui dure jusqu'à ce que le niveau de liquide descende au-dessous d'un second seuil. Lors de la réinjection dans le réservoir principal, le fluide passe au travers d'un filtre (filtre à café) pour éviter les contaminations par d'éventuelles poussières.

1.1.3 Forçage acoustique

En plus d'observer l'écoulement « naturel » du liquide, nous souhaitons être en mesure de le déplacer latéralement. Cette opération est effectuée à l'aide d'un forçage acoustique, au moyen de haut-parleurs disposés sur le côté de la cellule.

Des paires de hauts-parleurs peuvent être fixées symétriquement de manière rigide sur les deux côtés de la cellule. Sur les mâchoires enfermant les plaques de verre, six emplacements ont été prévus, permettant de positionner des couples de hauts parleurs à différents niveaux du rivelet. À chaque emplacement, une fente permet au haut-parleur d'injecter ou d'aspirer de l'air directement à l'intérieur de la cellule, comme montré sur la figure 1.3 (a). Lorsqu'un haut-parleur n'est pas fixé, ces fentes sont bouchées de manière à éviter que des courants d'air dans le laboratoire ne perturbent le rivelet.



(a) Schéma technique montrant comment les haut-parleurs sont fixés à la cellule. Chaque haut-parleur est fixé à une plaque métallique rectangulaire, qui s'adapte aux emplacements prévus sur les mâchoires qui enserrent la cellule.

(b) Les haut-parleurs sont en opposition de phase pour maximiser le déplacement du rivelet. Lorsque les éléments obstruants (en mauve) sont insérés, ils permettent de localiser la déformation du rivelet sur une zone restreinte.

FIGURE 1.3 – Montage des haut-parleurs sur la cellule.

Le signal de commande provient d'un générateur de fonction, ou bien d'un ordinateur via une prise Jack. Il est transmis aux haut-parleurs après être passé par un amplificateur spécialisé conçu au laboratoire, qui permet l'amplification de signaux très basses fréquences (moins

de 10 Hz). Deux haut-parleurs en vis-à-vis sont toujours alimentés par des signaux opposés, cette configuration en *push-pull* permettant de déplacer le rivelet sur une distance maximale, puisqu'il subit une surpression d'un côté et une sous-pression de l'autre¹.

Dans cette configuration de base, les haut-parleurs appliquent un effort réparti sur une grande zone (20–25 cm de haut, symétrique par rapport à la position des haut-parleurs). Dans cette zone, le forçage est d'autant plus faible que l'on s'éloigne des haut-parleurs, et il existe une région cœur, centrée sur l'axe reliant les haut-parleurs, à l'intérieur de laquelle le forçage est quasi-homogène et où le rivelet est déplacé en un seul bloc (les variations d'amplitude du déplacement transverse du rivelet étant inférieures à 10 % entre le centre et les bords de cette zone de forçage homogène). C'est à l'intérieur de cette zone, où l'action des haut-parleurs ne dépend pas (ou peu) de l'espace, que nous observons les phénomènes décrits au chapitre 4.

Dans certains cas, au contraire, nous souhaitons ne déplacer qu'un endroit localisé du rivelet. C'est ce qui se passe au chapitre 3, dans lequel nous utilisons le fait que le forçage dépend de la position verticale, ou bien au chapitre 5, où nous souhaitons perturber une zone très localisée du rivelet. Dans ces cas, nous introduisons à l'intérieur de la cellule des éléments statiques, comme illustré sur la figure 1.3 (b). Ce sont des pièces en plastique conçues à cet usage et imprimées en 3D, qui s'étendent sur tout l'espacement de la cellule dans la direction y . L'air déplacé est alors canalisé par ces obstructions de la cellule, qui permettent de concentrer le flux d'air sur une zone en particulier et donc de ne déplacer le filet que localement (sur une zone dont l'extension dans la direction x est de l'ordre du centimètre). On peut voir des photographies des véritables pièces utilisées pour concentrer le flux d'air sur la vidéo 5.3, en haut des films, à l'endroit où a lieu le forçage.

Nous n'avons pas, au cours de cette thèse, mesuré localement la différence de pression produite par les haut-parleurs. Il faudrait pour cela une sonde de pression précise, locale, pouvant s'insérer dans une cellule de 0,6 mm d'épaisseur sans perturber le flux d'air, et ayant une résolution temporelle importante (jusque 1 kHz); ce dont nous ne disposons pas au laboratoire. Nous n'avons en vérité pas besoin de faire cette mesure directement : une différence de pression induit toujours un mouvement du rivelet, c'est ce dernier que nous mesurons directement avec précision, et que nous utilisons pour quantifier, par exemple, l'intensité du forçage.

L'utilisation de haut-parleurs présente un certain nombre de limitations. Tout d'abord, le nombre d'amplificateurs dont nous disposons ne nous permet d'utiliser qu'un couple de haut-parleurs à la fois, ce qui limite la taille de la zone sur laquelle nous pouvons déplacer le rivelet de manière homogène (au mieux une quinzaine de centimètres). Au contraire, les conditions de pression constante (pression atmosphérique) ne sont appliquées qu'au bord de la cellule : il est donc difficile de ne déplacer qu'une zone très localisée du rivelet avec précision. Les excitations les plus « ponctuelles » que nous sommes arrivés à faire déplaçaient le rivelet sur une extension de plusieurs millimètres dans la direction verticale (x). Enfin, les membranes du haut-parleur ont une extension limitée : au-delà d'un certain seuil, le déplacement des membranes sature, surtout

1. On pourrait aussi imaginer alimenter les haut-parleurs avec un signal symétrique, pour tenter de comprimer le rivelet dans la direction z et ainsi de générer directement des perturbations longitudinales plutôt que transverse. Nos essais en ce sens n'ont pas abouti.

à basse fréquence (< 20 Hz). Une solution pour éviter cette dernière limitation serait d'utiliser à la place des tuyères équipées d'électrovannes injectant de l'air comprimé dans la cellule : jouer sur la pression permettrait alors d'obtenir plus d'amplitude de mouvement.

1.1.4 Le liquide

Pour réaliser les expériences présentées dans cette thèse, nous avons choisi d'utiliser comme liquide une huile Galden® HT135, dont les caractéristiques physico-chimiques pertinentes sont données dans le tableau 1.1. Cette huile cumule plusieurs avantages qui la rendent particulièrement adaptée à nos expériences.

Masse volumique	1,72 g/ml
Viscosité cinématique	1,00 mm ² /s
Tension de surface	17 mN/m
Longueur capillaire	1,0 mm
Indice de réfraction	1,28
Masse moléculaire moyenne	610 Da
Point d'ébullition	135 °C
Pression de vapeur saturante	5,8 mmHg ≈ 7,73 hPa
Constante diélectrique	1,92
Résistivité	$1,5 \times 10^{15} \Omega \text{ cm}$

TABLEAU 1.1 – Données fournies par le vendeur pour l'huile HT135, à 25 °C.

Tout d'abord l'huile HT135 mouille totalement le verre des plaques qui forment la cellule. Cette propriété a été vérifiée et quantifiée de la manière suivante : une goutte de 5,0 µl, déposée à la micropipette sous une boîte de Petri, s'étale en quelques secondes en formant une tache de 9 mm de rayon. Le volume de fluide contenu dans cette tache est probablement surestimé, puisque la boîte de Petri utilisée contenait une atmosphère initialement non-saturée en huile, alors que celle-ci s'évapore aisément. La surface de la goutte ainsi étalée est une portion de sphère, assimilable, étant donné le très faible rapport d'aspect, à une paraboloïde de hauteur h_0 et de rayon r_0 , dont le volume est $V = \pi r_0^2 h_0 / 2$. L'angle au bord d'une telle paraboloïde est alors $\theta = 2h_0/r_0 = 4V/(\pi r_0^3) \approx 0,5^\circ$. Cette méthode, bien que grossière, permet d'estimer que l'angle de mouillage de l'huile sur le verre dans l'air est de moins d'un demi-degré, ce qui confirme la pertinence de la modélisation du mouillage comme total.

L'huile HT135 a le deuxième avantage d'avoir une très faible viscosité. Sa viscosité cinématique est identique à celle de l'eau à 25 °C (1 cSt), et sa viscosité dynamique est un peu plus élevée en raison de sa densité importante de 1,72 kg/l. Cela permet aux écoulements de ce liquide de développer des instabilités d'origine inertie, en particulier le méandrage spontané (décris au chapitre 5). Ainsi, pour un régime de paramètres donné (débit volumique, écartement des plaques), utiliser cette huile permet d'obtenir un « comportement de référence » attendu pour les mélanges eau-surfactants en l'absence d'effets supplémentaires liés aux espèces en solution.

Enfin, cette huile est une PFPE (perfluoropolyéther), ce qui signifie qu'elle est perfluorée : tous les atomes d'hydrogène d'un polymère ont été remplacés par des atomes de fluor (voir figure 1.4). En plus d'augmenter la masse volumique et de diminuer le point de fusion et la viscosité du

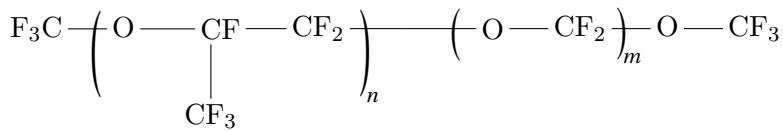


FIGURE 1.4 – Formule générale des perfluoropolyethers Galden®.

liquide, cette transformation le rend à la fois hydrophobe et lipophile. L'huile ne se dilue donc pas dans l'eau, elle est chimiquement stable, et ne se contamine pas aisément. Du point de vue de la sécurité, elle est non toxique et non inflammable.

Pour nos applications numériques, nous nous appuyons en général sur les données fournies par le fournisseur (tableau 1.1). Nous avons pris la précaution de re-mesurer la densité du fluide, sa viscosité, et surtout sa tension de surface, en utilisant la méthode de mesure décrite dans la section suivante.

1.2 Interlude : Mesurer une tension de surface avec PyPendantDrop

Au cours de cette thèse, nous avons développé PyPendantDrop (Le Lay 2024), un outil logiciel de mesure de tension de surface par la méthode de la goutte pendante. Dans cette section, nous rappelons rapidement le fonctionnement de cette technique de mesure, et nous expliquons l'intérêt de notre outil et son fonctionnement.

1.2.1 Méthode de la goutte pendante

La méthode de la goutte pendante permet de mesurer la tension de surface entre deux fluides de densités différentes. En plaçant un des fluides dans un tube capillaire vertical immergé dans l'autre fluide, on peut créer une goutte (pendante si le fluide dans le capillaire est plus lourd que le fluide d'immersion, montante dans le cas contraire) dont la géométrie dépend de la compétition entre gravité et capillarité. En comparant la forme de la goutte observée et le profil prévu par la théorie, il est possible de mesurer la longueur capillaire $\ell_c = \sqrt{\gamma / (\Delta\rho g)}$ entre les deux liquides de différence de densité $\Delta\rho$, et donc de remonter à la tension de surface γ .

Le protocole de mesure peut être séparé en trois étapes indépendantes et présentant chacune des difficultés intrinsèques.

- (i) Il faut tout d'abord créer une goutte adéquate. Cela impose de disposer de quantités suffisantes des fluides en question, placés dans les bonnes conditions thermodynamiques (température, pression, composition chimique contrôlées). La goutte doit ensuite être la plus volumineuse possible, pour augmenter la précision de la mesure, ce qui implique un choix judicieux du capillaire utilisé afin de créer des gouttes de volume important avant leur détachement. La goutte doit enfin être statique, la théorie ne décrivant que le cas des gouttes immobiles : il faut éviter les vibrations et ne pas être dans le régime dynamique où la goutte est en train de se détacher (ou de se former).
- (ii) Il s'agit ensuite de visualiser le plus nettement possible les contours de la goutte. Pour cela, nous travaillons en lumière monochromatique (pour nous affranchir des aberrations

chromatiques), l'éclairage étant réalisé avec une source de lumière collimatée et l'observation étant faite grâce à un objectif télécentrique, ce qui permet de maximiser le contraste au niveau des bords de la goutte. Le capteur de la caméra doit avoir une haute définition et le temps d'exposition doit être choisi pour que le contraste soit maximal sans que le capteur ne sature.

- (iii) Enfin, il faut comparer le profil de la goutte au profil théorique. Il faut d'abord repérer le profil expérimental de la goutte d'après l'image, et trouver le profil théorique qui lui correspond le mieux. Ce dernier est donné par les solutions de l'équation de la goutte axisymétrique(Rotenberg, Boruvka et Neumann 1983) :

$$\frac{-1}{\ell_c^2} \sin \psi = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\psi}{ds} + \frac{\sin \psi}{r} \right) \quad \text{avec} \quad \psi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\psi}{ds}(0) = \frac{\ell_c}{R_0} \quad (1.1)$$

où s est la distance curviline à partir de l'extrémité de la goutte, r est la distance à l'axe de symétrie et ψ est l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale. R_0 est alors le rayon de courbure de la goutte au niveau de l'extrémité, comme montré sur la figure 1.5 (a). Les solutions de cette équation, qui est singulière en $r = 0$, n'ont pas en général de forme analytique simple. L'équation doit donc être intégrée numériquement pour obtenir les profils possibles, ce qui complexifie le processus d'ajustement.

C'est sur le dernier point, purement logiciel, que PyPendentDrop agit.

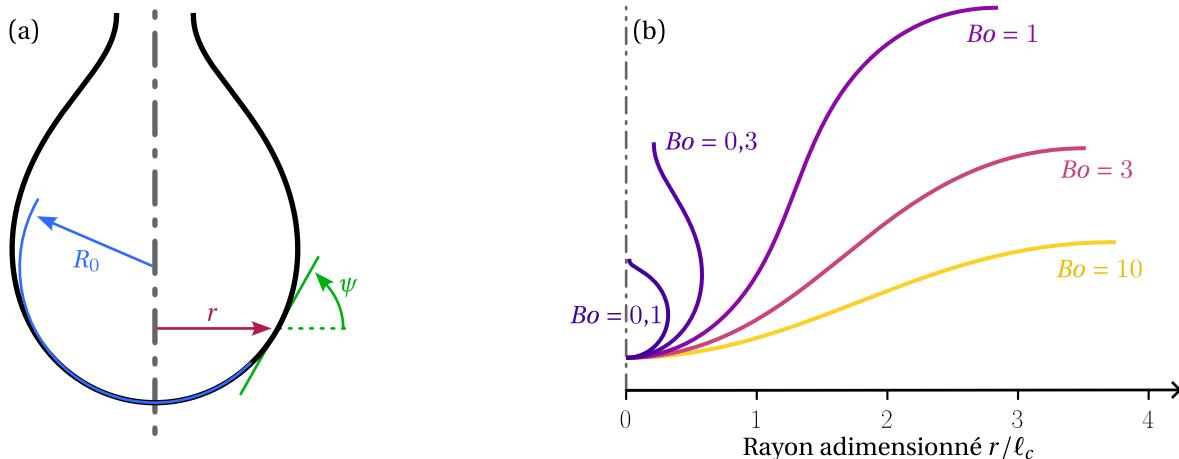


FIGURE 1.5 – Représentation (schématique) d'une goutte pendante. À gauche (a), les notations utilisées, illustrées sur une goutte de nombre de Bond $Bo = 0,25$. À droite (b), plusieurs profils calculés, pour différents nombres de Bond.

La forme de la goutte est entièrement déterminée, à une homothétie près, par une quantité sans dimension, le nombre de Bond

$$Bo = \left(\frac{R_0}{\ell_c} \right)^2 \quad (1.2)$$

qui rend compte du rapport entre le rayon de courbure à l'extrémité de la goutte et la longueur capillaire (ceci découle des propriétés de l'équation (1.1)). Nous avons représenté quelques

profils de gouttes, pour différents nombres de Bond, sur la figure 1.5 (b). La technique de la goutte pendante est la plus efficace pour les nombres de Bond situés entre 0,1 et 10, pour lesquels la forme de la goutte est la plus dépendante de ce paramètre (Berry et al. 2015).

1.2.2 Motivation : dispositif personnalisé et science frugale

Il existe une grande variété d'appareils commerciaux de mesure de tension de surface, qui permettent des mesures de haute précision, et dont certains utilisent la méthode de la goutte pendante. Il y a cependant des situations pour lesquelles l'utilisation de ces appareils commerciaux n'est pas adaptée. On peut les diviser en deux catégories.

- Tout d'abord, lorsque la mesure doit être faite dans un contexte expérimental contraint. C'est le cas lorsque la mesure doit prendre place dans un contexte précis de contrôle de paramètres thermodynamiques (température, humidité), pour lesquels un appareil commercial n'est pas adapté. La mesure peut aussi faire partie d'une routine de travail dans laquelle aucun appareil commercial ne s'intègre convenablement, par exemple si la mesure doit être faite avec un système d'exploitation différent de Windows, si elle doit avoir lieu dans un espace confiné, ou au contraire si l'appareil doit être facilement déplaçable, si les fluides à mesurer ne sont disponibles qu'en petite quantité, etc.
- Ensuite et de manière complémentaire, les appareils commerciaux affichent souvent un prix prohibitif : ils ne sont disponibles en général que dans les laboratoires spécialisés en physique des interfaces ou en physico-chimie. Cela proscrit leur utilisation dans les disciplines où la mesure de tension de surface est utile, mais plus rarement usitée (biologie, géologie, sciences de l'environnement) ; ou bien dans le cadre pédagogique (démonstration de cours, projets étudiants, travaux pratiques). Le coût d'achat de ces appareils, et des contrats d'entretien qui y sont liés, les rendent donc inaccessibles aux laboratoires et aux chercheurs les moins bien dotés financièrement, en particulier au sein des pays en voie de développement.

Par rapport à l'achat d'un appareil commercial, le matériel nécessaire à la réalisation d'une prise de vue correcte (points (i) et (ii) ci dessus) peut être obtenu pour une somme inférieure d'un facteur situé entre 10 et 100, en fonction de la précision recherchée. Il est donc en général intéressant pour des chercheurs ou des enseignants d'en faire l'acquisition, mais il peut être chronophage pour eux d'implémenter eux-mêmes l'étape (iii), qui peut se révéler délicate. Avec PyPendantDrop, nous proposons une solution logicielle d'analyse d'image permettant d'obtenir une mesure précise à partir d'une image expérimentale brute.

1.2.3 PyPendentDrop : une solution simple et adaptable pour les mesures frugales de tension de surface

Il existe déjà plusieurs logiciels permettant, à partir d'une image, de calculer la tension de surface correspondante. Ces logiciels, comme la macro ImageJ *Dropfit* (Gassin 2014) ou bien le logiciel open-source OpenDrop (Berry et al. 2015), ont souvent comme inconvénients d'être monotâches et de fonctionner comme des « boîtes noires », ne permettant par exemple pas à l'utilisateur de modifier lui-même les paramètres qui auraient été mal estimés automatiquement, et lui imposant un protocole rigide.

Le plugin PendentDrop pour ImageJ (Daerr et Mogné 2016) permet de dépasser certains de ces inconvénients. Cependant, il se montre d'une utilisation délicate et ses sous-routines sont écrites dans le langage Java, ce qui rend leur intégration malaisée en dehors du cercle des utilisateurs de macros ImageJ.

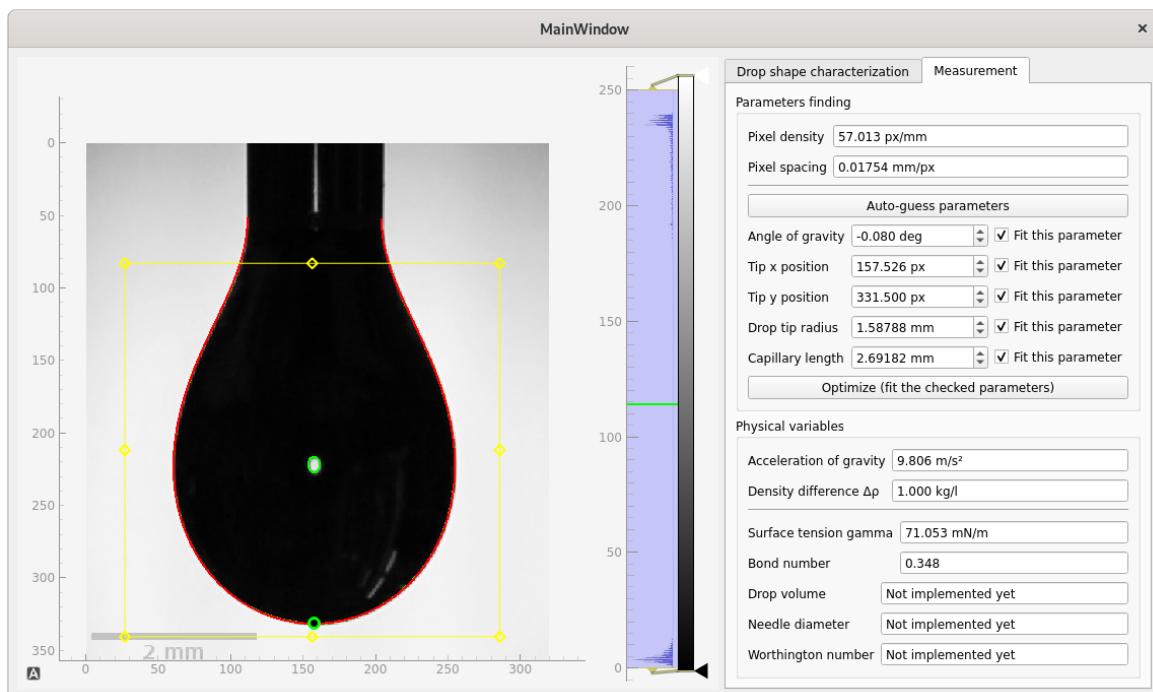


FIGURE 1.6 – Capture d'écran de l'interface graphique de PyPendentDrop. À gauche l'image utilisée. La partie ajustée est contenue dans le rectangle jaune. les contours repérés sont en vert et le contour ajusté est en rouge (les deux sont indiscernables à l'œil nu). À droite, l'espace de gestion des paramètres.

Notre apport consiste à proposer une solution logicielle complète pour la mesure de tension de surface. PyPendentDrop permet tout d'abord d'effectuer des mesures à l'aide d'une interface en ligne de commandes (*CLI*), ou bien en utilisant une interface graphique dédiée (*GUI*, voir capture d'écran figure 1.6), développée en Python avec le cadre (*framework*) Qt.

Mais PyPendentDrop se présente surtout sous la forme d'une bibliothèque Python contenant toutes les fonctions nécessaires pour effectuer une mesure de tension de surface. Cette bibliothèque est conçue pour être simple et utilisable facilement par tous. Nous fournissons à cette fin des scripts d'exemples, et une documentation en ligne extensive. Notre but est de fournir un outil

pratique qui pourrait être exploité dans une grande diversité de cas.

Une mesure typique se déroule en trois étapes : repérage du contour de la goutte, estimation préliminaire des paramètres, et optimisation de ces paramètres grâce à un ajustement non-linéaire. Chaque étape est associée à une fonction Python, documentée en ligne, et les résultats qu'elle renvoie peuvent être visualisés et modifiés si besoin. Les fonctions de cette librairie peuvent donc s'intégrer facilement dans l'environnement de travail numérique d'autres chercheurs et chercheuses.

1.3 Visualiser le rivelet

En cellule de Hele-Shaw, la manière la plus simple d'obtenir des informations sur l'écoulement consiste à observer les interfaces. En général, (presque) toutes les informations nécessaires à la compréhension du système sont contenues dans la position et la géométrie des interfaces liquide-air, au premier rang desquelles figurent les deux ménisques délimitant le pont liquide formé par le rivelet.

1.3.1 Méthode d'éclairage

Pour des raisons de symétrie, nous souhaitons que les images des deux ménisques apparaissent similaires à la caméra. Cela impose de placer la caméra sur le plan de symétrie vertical de la cellule, et de faire en sorte que l'éclairage utilisé soit symétrique par rapport à ce plan. Afin d'observer les deux ménisques, deux principales approches peuvent être utilisées : l'éclairage direct ou indirect.

En éclairage direct, la lumière arrive perpendiculairement aux plaques de verre délimitant la cellule. La lumière passant à travers l'air ou bien à travers le volume du pont liquide est visible directement à la caméra, tandis que la lumière arrivant sur les ménisques (et plus généralement sur un dioptre courbe) sera réfractée et ne sera pas visible. Avec cette technique, les ménisques délimitant le rivelet apparaissent sur l'image comme deux bandes sombres sur un fond lumineux (figures 1.7 (a) et (c)).

En éclairage indirect au contraire, la lumière arrive de toutes les directions exceptée celle perpendiculaire aux plaques : les seuls rayons de lumière arrivant sur la caméra correspondent à ceux qui ont été défléchis par les ménisques. Ces derniers apparaissent donc comme deux bandes lumineuses sur fond sombre (figures 1.7 (b) et (d)).

En éclairage direct, pour disposer d'un contraste optimal, il faut que l'éclairage en arrière-plan soit très uniforme, et que les rayons arrivant sur les ménisques ne parviennent pas à la caméra. Pour cela, les rayons lumineux provenant de la source doivent être le plus perpendiculaire possible par rapport au plan de la cellule, et la caméra doit avoir une ouverture angulaire la plus faible possible.

Au contraire, en éclairage indirect, la pénombre est assurée par l'absence d'éclairage derrière le rivelet, et on cherche à maximiser la lumière reçue par la caméra venant des ménisques. Pour cela, il faut que la caméra ait une ouverture angulaire conséquente, et que la lumière provienne

d'une grande variété d'angles d'incidence.

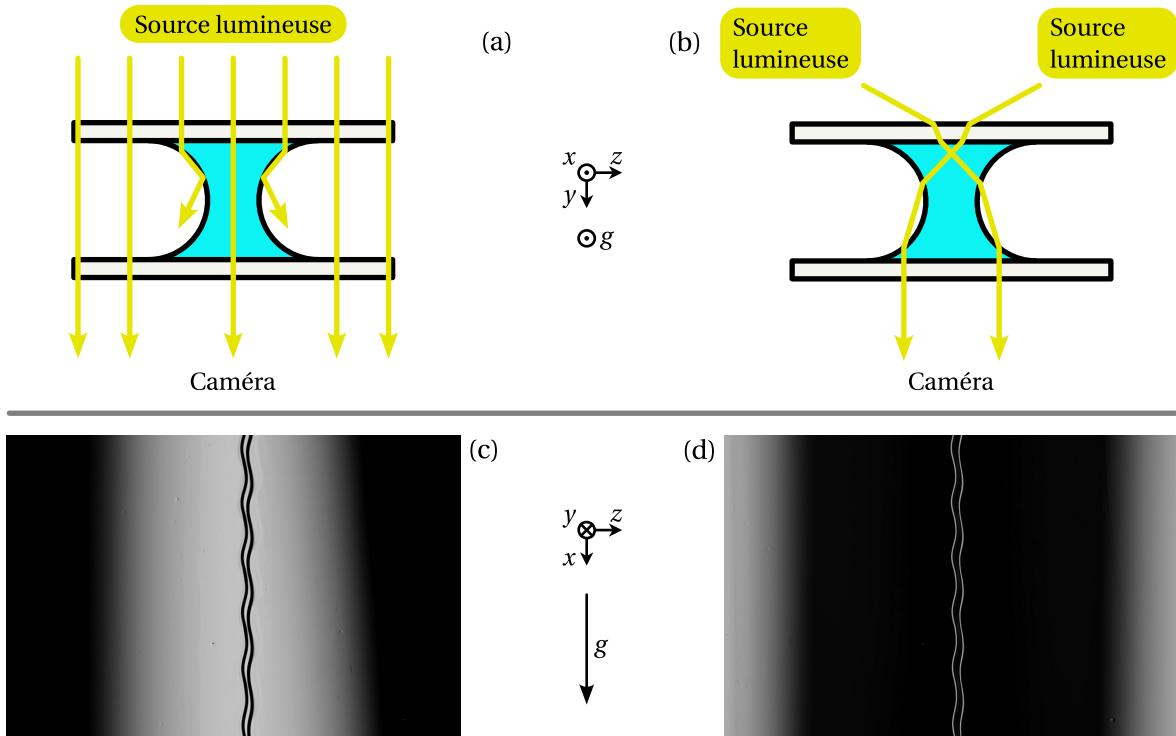


FIGURE 1.7 – (a) Éclairage direct, schéma de principe. La lumière arrive perpendiculaire aux plaques, les rayons arrivant sur les ménisques sont déviés.

(b) Éclairage indirect, schéma de principe. La lumière arrive avec un angle d'incidence important, seuls les rayons déviés par les ménisques sont vus par la caméra.

(c) Éclairage direct, image d'illustration. La lumière vient d'une zone située derrière le rivelet, les ménisques apparaissent sombres sur fond lumineux.

(d) Éclairage indirect, image d'illustration. La lumière vient de zones à droite et à gauche du rivelet, les ménisques apparaissent lumineux sur fond sombre.

Dans cette thèse, on travaillera presque toujours en éclairage indirect, sauf lorsqu'on cherchera à obtenir des effets esthétiques par jeux de lumière, comme dans le cas des images présentées dans la galerie (annexe C). Pour obtenir les données présentées dans les chapitres suivants, nous avons utilisé quatre formes d'éclairage :

- Pour les visualisations grande échelle (sur une échelle plus grande que la dizaine de centimètres), nous utilisons un panneau LED de grande taille $1\text{ m} \times 30\text{ cm}$ placé approximativement 50 cm derrière la cellule. Les bords du panneau sont occultés de manière à limiter les angles d'incidence des rayons lumineux sur les ménisques, tout en assurant un éclairage homogène.
- Pour visualiser le rivelet en mouvement rapide, c'est-à-dire en utilisant des temps d'exposition courts (inférieurs à $50\text{ }\mu\text{s}$), nous utilisons une matrice de LED haute luminosité (Luxeon Flood LXH—MWJE) associée à un diffuseur placé approximativement 50 cm derrière la cellule, ce qui permet de maximiser la luminosité sur une zone spatiale réduite.
- Lorsque nous souhaitons nous assurer que la lumière incidente soit (le plus exactement possible) perpendiculaire aux plaques, nous utilisons un montage constitué d'une LED

haute luminosité devant un diaphragme situé au point focal d'une lentille convergente. Le faisceau incident est alors collimaté, ce qui augmente la visibilité des zones où le film liquide n'a pas une épaisseur constante. C'est cette configuration que nous utilisons pour obtenir les images présentées dans la section 3.5 (chapitre 3).

- Enfin pour éclairer le système avec de la lumière monochromatique, nous utilisons une lampe à vapeur de sodium haute luminosité. Nous fournissons plus de détails sur cette configuration dans la section 3.2.1 (chapitre 3).

1.3.2 Caméras et objectifs

Pour enregistrer les images du rivelet, nous avons utilisé deux caméras.

- Pour les observations « basse fréquence » (moins de 100 images par seconde), nous utilisons une caméra industrielle GigE (AVT Manta G-223B).
- Lorsqu'une résolution temporelle plus importante est souhaitée, nous utilisons une caméra rapide (Chronos 1.4 8GB) qui peut enregistrer jusque 40 000 images par seconde.

Notons que pour l'observation de phénomènes périodiques, nous utilisons parfois une caméra classique avec un très faible temps d'exposition, en décalant légèrement la fréquence d'acquisition et d'excitation. Cela permet de visualiser le système de manière stroboscopique sans subir les contraintes liées à l'utilisation d'une caméra rapide.

Nous montons sur ces caméras deux types d'objectifs :

- En général nous utilisons des objectifs classiques permettant de visualiser le rivelet sur un champ de vision étroit (Fujinon HF50XA-5M, $f = 50 \text{ mm}$), intermédiaire (Fujinon HF25HA-1B, $f = 25 \text{ mm}$) ou large (Kowa LM16JC5MC, $f = 16 \text{ mm}$). Nous choisissons en général d'ouvrir ces objectifs au maximum (nombre d'ouverture minimum), ce qui nous permet d'abaisser le temps d'exposition. En contrepartie, la profondeur de champ est réduite, ce qui n'affecte pas nos observations en raison du faible espacement de la cellule.
- Lorsque nous ne souhaitons pas visualiser que les rayons lumineux orthogonaux aux plaques, avec un champ de vision réduit, nous utilisons un objectif télescope (Myutron MGTL10V ou bien Computar TEC-M55).

Pour toutes les analyses quantitatives, les images utilisées sont exprimées en niveau de gris : la lumière captée par chaque pixel est codée sur 8 bits (un octet), et traduite en une valeur comprise entre 0 et 255 (inclus). Notons qu'au cours du présent travail, nous utilisons systématiquement le terme *luminosité* pour désigner la quantité de lumière capturée pendant l'exposition par un seul pixel de la caméra. Cette quantité est proportionnelle à l'intensité lumineuse locale, exprimée en W/m^2 .

1.4 Interlude : Contrôler des caméras avec Limrendir

1.4.1 Contexte : Genicam, Aravis et GevCapture

En physique macroscopique, il y a souvent intérêt à travailler avec des caméras « industrielles » : ces caméras dites de « vision machine » sont faites pour être intégrées dans des processus automatisés, elles présentent des performances intéressantes pour leur prix, peuvent communiquer avec un ordinateur, et sont disponibles sur une large gamme de spécifications. Cela permet généralement de trouver une caméra rentrant dans le cahier des charges correspondant à l’expérience en cours.

Changer d’expérience implique la plupart du temps de changer de caméra : il est alors souhaitable que ces outils soient le plus interchangeables possible, afin de diminuer au maximum l’inévitable temps d’adaptation. Les caméras d’une marque donnée sont en général livrées avec un logiciel permettant de les utiliser, mais ce dernier est le plus souvent spécifique à cette marque, et disponible uniquement sur le système d’exploitation Windows.

Les fabricants de caméras industrielles se sont pour beaucoup accordés sur le standard *GenICam* (abréviation de *Generic Interface for Cameras*) qui précise les protocoles de communication entre un ordinateur et une caméra. Sur Linux, l’interface de programmation (*API*) Aravis (Aravis Project Team 2025) permet de communiquer avec toutes les caméras industrielles. Cette API est livrée avec Aravis Viewer, un logiciel rudimentaire, permettant seulement d’enregistrer des instantanés. Il est possible d’utiliser les fonctionnalités proposées par Aravis pour créer des applications qui enregistrent des vidéos à des fins scientifiques. C’est ce qui a été fait avec GevCapture (Daerr 2018), un logiciel performant mais peu *user-friendly*, c'est-à-dire dont la prise en main et l’utilisation peuvent se révéler délicate et peu pratique.

1.4.2 Limrendir

Au cours de cette thèse, puisque presque toutes nos acquisitions sont faites avec des caméras industrielles, nous avons cherché à disposer d’une interface avec ces caméras qui soit à la fois universelle, donc s’appuyant sur la librairie Aravis, performante, à la manière de GevCapture, et pratique d’utilisation pour pouvoir en faire un usage quotidien.

À cette fin, nous avons développé le logiciel open-source Limrendir (Le Lay 2023), dont nous montrons une capture d’écran sur la figure 1.8. Ce logiciel utilise la bibliothèque Aravis pour communiquer avec une caméra, GStreamer pour transporter et afficher les images, et l’environnement de travail GTK pour interagir avec l’utilisateur. Il est entièrement écrit en langage C, et son code source compte plus de 4500 lignes².

Sa principale fonctionnalité est de pouvoir enregistrer des vidéos en format .gcv, le format de données utilisé par GevCapture qui est particulièrement adapté à un usage scientifique : chaque acquisition est associée à un fichier video .raw (données brutes), un fichier texte .meta

². La qualité du code lui-même n'est cependant pas impeccable, l'auteur de ces lignes n'étant pas développeur professionnel (et n'y ayant pas passé plus de temps que nécessaire). Il reste peut-être des fuites de mémoire à un ou deux endroits, mais le programme tourne quand même et, comme souvent avec le langage C, la RAM pleure en silence...

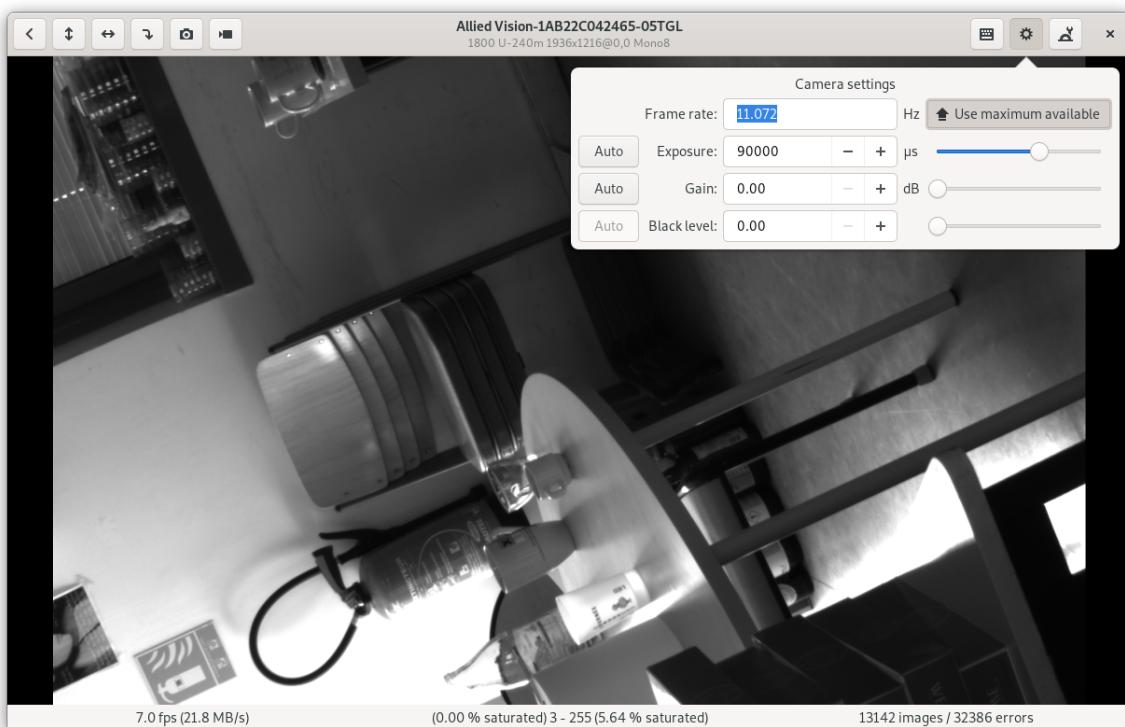


FIGURE 1.8 – Capture d'écran de l'interface utilisateur de Limrendir (affichage de l'image vue par la caméra dans la fenêtre centrale). Le logiciel inclut un certain nombre de fonctionnalités visant à augmenter le confort de l'utilisateur : par exemple, en bas au centre est indiqué la valeur minimum et maximum des pixels composant l'image. Cela permet de contrôler la saturation de caméra pour conserver un contraste optimal.

contenant toutes les métadonnées pertinentes (fréquence d'acquisition, format de l'image, temps d'exposition, etc.), et un fichier texte .stamps indiquant, pour chaque image enregistrée, l'instant donné par l'ordinateur et celui donné par la caméra, ce qui permet de repérer d'éventuelles pertes d'images (*frame loss*) et de les prendre en compte pour effectuer des mesures précises même à partir de films lacunaires.

Limrendir dispose d'une interface utilisateur facile à comprendre et à utiliser. Le logiciel combine les commandes graphiques, pour choisir le temps d'exposition et la fréquence d'acquisition, et les commandes au clavier, qui permettent par exemple de recadrer rapidement le champ de vision. En particulier, il incorpore plusieurs techniques permettant d'optimiser le taux d'acquisition, d'améliorer la précision de la mise au point et d'éviter la saturation du capteur de la caméra.

1.5 Repérer et mesurer le rivelet

1.5.1 Déetecter le rivelet

Déetecter le rivelet sur une image

Une fois les images du rivelet enregistrées sous forme de film, nous traitons automatiquement les vidéos obtenues, dans le but de déterminer la position du rivelet $z(x, t)$ et son épaisseur $w(x, t)$ en fonction de la coordonnée verticale x et du temps t .

Nous utilisons deux procédures distinctes pour repérer le rivelet, en fonction du niveau de détail accessible sur la visualisation. Lorsque les images sont suffisamment agrandies, nous sommes en mesure de discerner et donc de résoudre informatiquement les deux ménisques. Cela permet une mesure précise de la position du rivelet et de son épaisseur, définie comme l'épaisseur de la partie lumineuse, correspondant à l'intérieur du rivelet délimité par les ménisques. Dans ce cas, la procédure suivie est la suivante :

- À partir de l'image brute — figure 1.9 (a) — on obtient l'image raffinée — figure 1.9 (b) (agrandissement par interpolation bilinéaire, lissage gaussien, compensation du vignettage longitudinal, augmentation du contraste par normalisation).
- Pour chaque ligne de l'image raffinée, on repère les deux minima de luminosité qui correspondent aux ménisques (figure 1.9 (c)). La zone lumineuse entre les deux correspond alors à l'intérieur du rivelet
- La position du rivelet est assimilée au barycentre de l'intérieur du rivelet, pondéré par la luminosité (barycentre de la zone grisée sur la figure 1.9 (d)).
- La largeur du rivelet est assimilée à la largeur à mi-hauteur du plateau de luminosité correspondant à l'intérieur du rivelet (figure 1.9 (d)).

En utilisant cette méthode, nous ne mesurons pas l'épaisseur « réelle » du rivelet $w(x, t)$, définie comme la distance entre les deux ménisques dans la direction orthogonale au chemin parcouru, mais plutôt la distance entre les ménisques selon la direction z . La largeur dans la direction horizontale entre deux droites distantes de w , et inclinées par rapport à la verticale d'un angle θ , étant $w/\cos \theta$; dans la limite où les variations relatives d'épaisseur du rivelet sont faibles nous mesurons donc directement la quantité

$$\frac{w(x, t)}{\cos \theta} = w(x, t) \sqrt{1 + (\partial_x z)^2}. \quad (1.3)$$

Nous corrigons systématiquement cette erreur, puisque nous pouvons mesurer expérimentalement la pente de la position du rivelet $\partial_x z$.

Cette technique est précise, mais elle n'est efficace que si les ménisques sont bien résolus. Cela impose une résolution spatiale d'au moins 20 px/mm, ce qui limite l'extension du champ de vision de la caméra dans la direction verticale à 100 mm (correspondant aux 2000 pixels du grand axe de la caméra). Cela convient donc à l'observation d'un rivelet excité acoustiquement sur une fenêtre de cet ordre de grandeur.

Dans d'autres cas au contraire, on souhaite visualiser le rivelet sur l'ensemble de la cellule

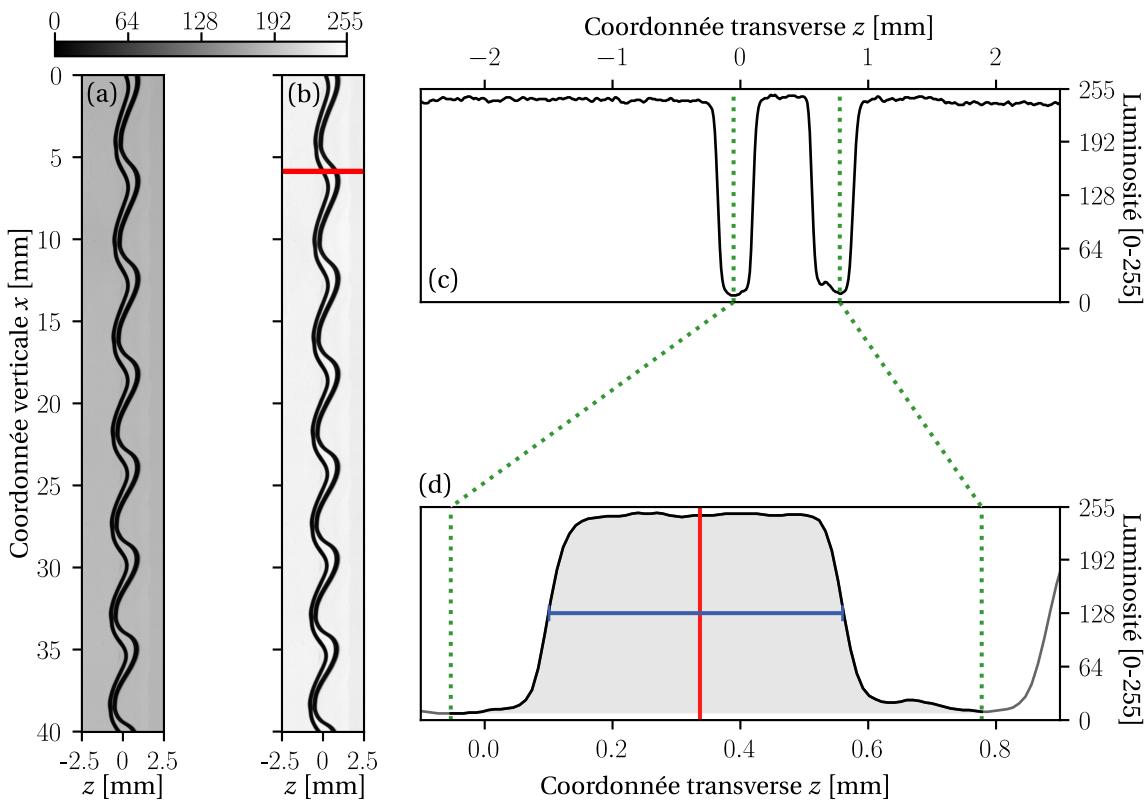


FIGURE 1.9 – Processus du repérage du rivelet dans le cas d'une image suffisamment grossie.

(a) Image brute issue de la caméra. Les bandes sombres correspondent aux ménisques délimitant le rivelet.
(b) Image nettoyée, sur laquelle le contraste est meilleur. La ligne rouge désigne la tranche montrée sur les sous-figures (c) et (d).

(c) Profil de luminosité correspondant à une abscisse z fixée. Les deux puits correspondent aux bandes sombres qui sont les ombres des ménisques. On peut noter que ces ombres ont une extension transverse d'à peu près $b/2 \approx 0,3$ mm, de l'ordre de la taille attendue pour les ménisques.

(d) Profil de luminosité (grossissement au niveau du rivelet). La région grise correspond à ce qui est considéré par l'algorithme comme l'intérieur du rivelet. Le bas de cette région correspond au minimum de luminosité à l'intérieur du rivelet. La barre verticale est placée au barycentre de cet intérieur, assimilé à la position du rivelet z . La largeur de la barre horizontale correspond à la largeur à mi-hauteur de l'intérieur du rivelet, assimilée à l'épaisseur du rivelet w .

(d'extension verticale 1 m). La résolution spatiale est alors fortement diminuée et, avec les objectifs que nous utilisons, il devient parfois impossible de résoudre individuellement les ménisques. Nous utilisons alors une seconde procédure :

- À partir de l'image brute (figure 1.10 (a)), on obtient l'image raffinée (figure 1.10 (b)) (agrandissement par interpolation bilinéaire, lissage gaussien, compensation du vignettage longitudinal, augmentation du contraste par normalisation).
- Pour chaque ligne de l'image raffinée, on repère le minimum de luminosité qui correspond à la position grossière du rivelet (ligne rouge tiretée sur la figure 1.10 (c)). On suppose alors que la tâche correspondant au rivelet est située dans une certaine zone autour de ce minimum.
- Le barycentre de l'ombre du rivelet, pondéré par la pénombre (l'opposé de la luminosité), est alors assimilé à la position précise du rivelet (ligne rouge pleine sur la figure 1.10).

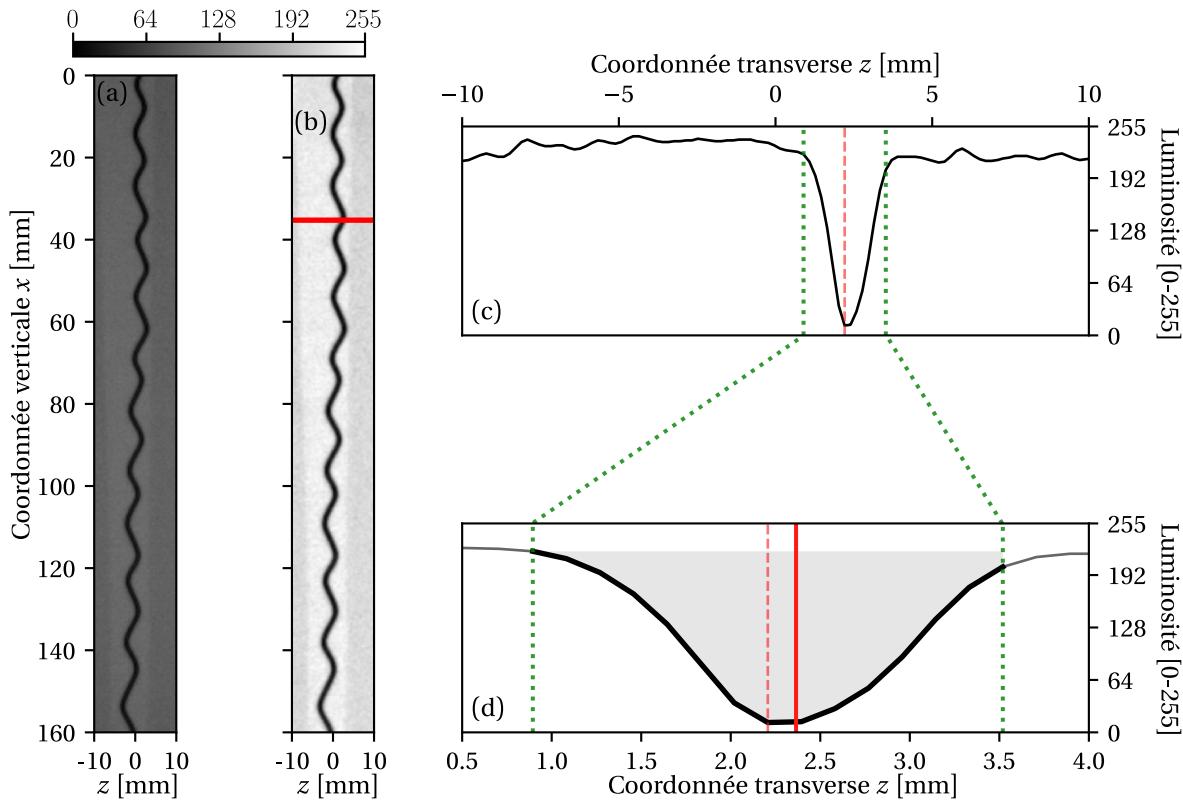


FIGURE 1.10 – Processus du repérage du rivelet dans le cas d'une image prise avec un grand champ.
 (a) Image brute issue de la caméra. L'unique bande sombre correspond au rivelet. Les ménisques ne sont pas résolus individuellement.
 (b) Image nettoyée, sur laquelle le contraste est meilleur. La ligne rouge désigne la tranche montrée sur les sous-figures (c) et (d).
 (c) Profil de luminosité correspondant à une abscisse z fixée. Le puits correspond à la bande sombre qui est l'ombre du rivelet. Cette ombre a une extension de l'ordre du millimètre, correspondant grossièrement à $b + w \approx 1,1$ mm.
 (d) Profil de luminosité (grossissement au niveau du rivelet). La région grise correspond à ce qui est considéré par l'algorithme comme le rivelet. Le haut de cette région correspond à la luminosité médiane sur toute la ligne. La barre verticale tiretée correspond au minimum de luminosité. La barre verticale en trait plein est placée au barycentre de cet intérieur, assimilé à la position du rivelet z .

Cette seconde procédure nous permet de repérer le rivelet avec une précision en-dessous du pixel, et donc de ne pas trop souffrir de la perte de résolution. Cependant, nous ne sommes plus en mesure d'estimer précisément la largeur du rivelet.

Dans les deux cas nous repérons à chaque fois les ménisques sur une image en travaillant ligne par ligne. Cette technique, qui ne serait pas adaptée par exemple dans le cas d'un rivelet présentant des ménisques fortement courbés dans le plan de la cellule, s'est révélée dans notre expérience la plus efficace pour repérer systématiquement le rivelet de façon robuste et précise, même lorsque les données sont entachées d'un bruit important.

Déetecter le rivelet sur un film entier

Pour traiter un film entier, la procédure décrite plus haut est appliquée à chaque image individuellement. Le résultat obtenu correspond alors à une estimation « brute » de $z(x, t)$ et $w(x, t)$, qu'il est encore possible d'améliorer.

Pour gagner en précision, la première étape est un lissage gaussien spatio-temporel des données. Les signaux de position et d'épaisseur sont convolus avec une fonction gaussienne dont l'extension en temps et en espace est choisie suffisamment petite pour ne pas déformer le signal, et suffisamment grande pour éliminer le bruit haute fréquence correspondant aux erreurs de repérage du rivelet.

La position du rivelet présente toujours un « bruit » très basse fréquence : il s'agit d'une dérive linéaire en espace et constante en temps, qui correspond à un défaut d'alignement orientationnel de la caméra par rapport à la verticale. Le rivelet étant soumis à la gravité, sa position moyennée sur le temps est en théorie une droite absolument verticale : si la caméra n'est pas bien alignée, cette droite apparaît légèrement penchée. Nous corrigons cette erreur en ajustant une droite à la moyenne temporelle de la position du rivelet, et en soustrayant cette droite au signal. Ce processus est illustré sur la figure 1.11 (gauche).

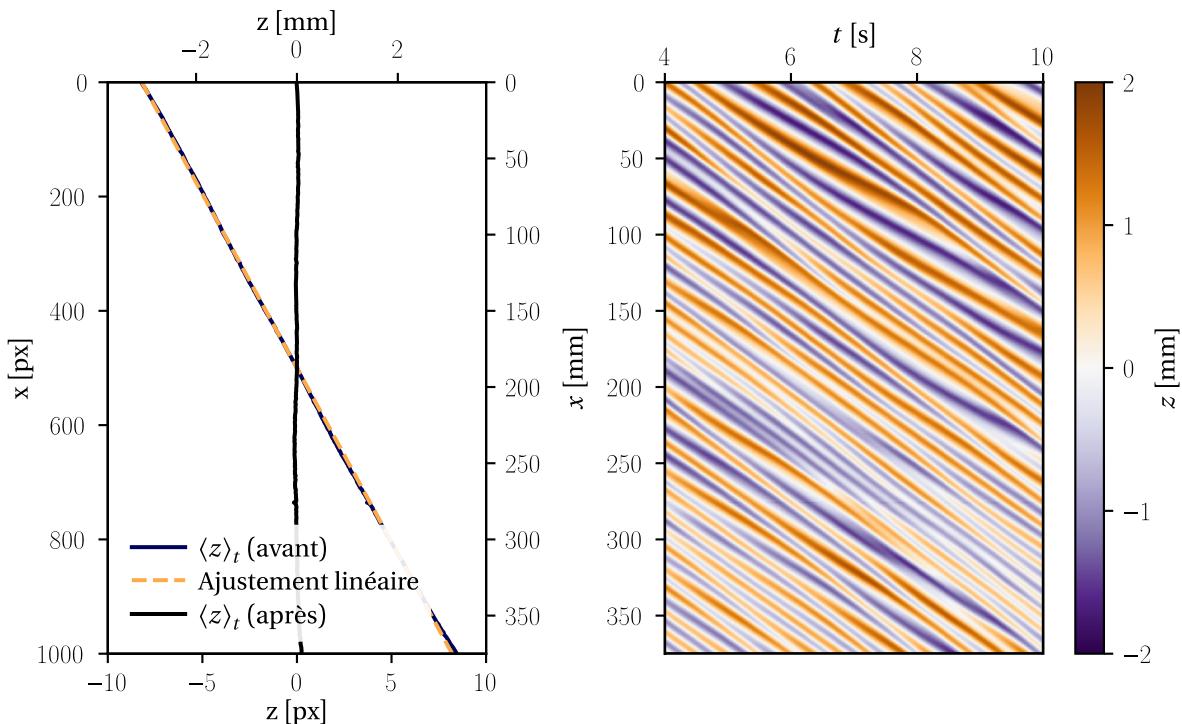


FIGURE 1.11 – Processus du repérage du rivelet dans le cas d'une image prise avec un grand champ. (gauche) Position du rivelet, moyennée sur une longue durée, en fonction de la coordonnée verticale x . En mauve, la valeur initiale. Elle est entâchée d'une pente de l'ordre de 1 %, due à une erreur d'alignement de la caméra de l'ordre de 1°. En tirets la droite utilisée pour rectifier le signal, et en noir la position corrigée. (droite) Diagramme spatio-temporel. En abscisse on lit le temps, et en ordonnée la coordonnée verticale x . L'échelle de couleur représente la position du rivelet dans la direction transverse.

1.5.2 Représenter graphiquement le rivelet

Représenter graphiquement le comportement du rivelet est une gageure, car ce dernier évolue à la fois en espace et en temps. Dans cette thèse, la principale manière que nous avons de représenter le rivelet est l'utilisation de diagrammes spatio-temporels. L'axe des ordonnées représente alors la coordonnée spatiale x , c'est-à-dire la position selon l'axe vertical. L'axe des abscisses représente le temps t . Le déplacement du rivelet, ou bien son épaisseur selon la variable représentée, est indiquée en échelle de couleur. Un exemple de diagramme spatio-temporel représentant la position z du rivelet est proposé sur la figure 1.11 (droite). Un exemple de diagramme montrant l'évolution de l'épaisseur w est donné en haut de la figure 1.13.

Dans les diagrammes spatio-temporels, la coordonnée $x = 0$ est choisie arbitrairement dans le chapitre 4, car elle ne porte pas de signification physique particulière, puisqu'on y étudie des phénomènes qui (en première approximation) sont invariants sous la transformation $x \rightarrow x + x_0$. Dans le chapitre 5, où le comportement du rivelet évolue explicitement avec la coordonnée x , la ligne $x = 0$ est fixée à l'endroit où le rivelet se forme.

1.5.3 Le rivelet dans l'espace de Fourier

Nous utiliserons souvent dans cette thèse la transformée de Fourier (TF), en espace et/ou en temps des données expérimentales à fin de visualisation. Pour une fonction quelconque de l'espace et du temps $f(x, t)$, nous définissons

$$\hat{f}(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{TF en temps}) \quad (1.4)$$

$$\hat{f}(k, t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t) e^{-ikx} dx \quad (\text{TF en espace}) \quad (1.5)$$

$$\hat{f}(k, \omega) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, t) e^{-i(\omega t - kx)} dx dt \quad (\text{TF en espace-temps}). \quad (1.6)$$

Et nous appellerons sans exception tout au long de ce manuscrit x la coordonnée spatiale, k le vecteur d'onde, t le temps et ω la pulsation. Notons que la convention pour la définition de la transformée de Fourier bidimensionnelle (1.6) a été choisie de telle manière que, pour une onde propageante, ω et k soient tous les deux positifs.

La quantité $|\hat{f}|^2$ est appelée par convention densité spectrale d'énergie (même si son unité n'est pas nécessairement celle d'une énergie). Au cours du manuscrit, nous utiliserons surtout la densité spectrale de puissance (qui n'est pas nécessairement une puissance) :

$$S_f(x, \omega) = \frac{1}{T} |\hat{f}(x, \omega)|^2 \quad \text{où } T \text{ est la durée de la mesure} \quad (1.7)$$

$$S_f(k, t) = \frac{1}{L} |\hat{f}(k, t)|^2 \quad \text{où } L \text{ est l'intervalle spatial de mesure} \quad (1.8)$$

$$S_f(k, \omega) = \frac{1}{T L} |\hat{f}(k, \omega)|^2. \quad (1.9)$$

Appliquer brutalement la définition mathématique de la transformée de Fourier (en l'adaptant à nos signaux expérimentaux discrétilisés) ne permet pas de disposer de spectres satisfaisants.

Afin de gagner en précision, nous appliquons systématiquement un fenêtrage (*windowing*) à nos signaux expérimentaux. Nous utilisons dans cette thèse différents fenêtrages selon nos applications : fenêtrage rectangulaire (*boxcar*) pour mesurer des fréquences, à sommet plat (*top hat*) pour mesurer des amplitudes, de Hann, de Hamming ou de Chebychev pour visualiser les spectres. Si il y a lieu, la fenêtre utilisée est systématiquement précisée dans la légende de la figure. Les densités spectrales obtenues sont alors corrigées adéquatement pour ne pas être influencées par le fenêtrage. Nous ajoutons aussi fréquemment des zéros sur les bords de la fenêtre (*zero padding*), afin d'augmenter « visuellement » la résolution, c'est-à-dire d'interpoler correctement les spectres.

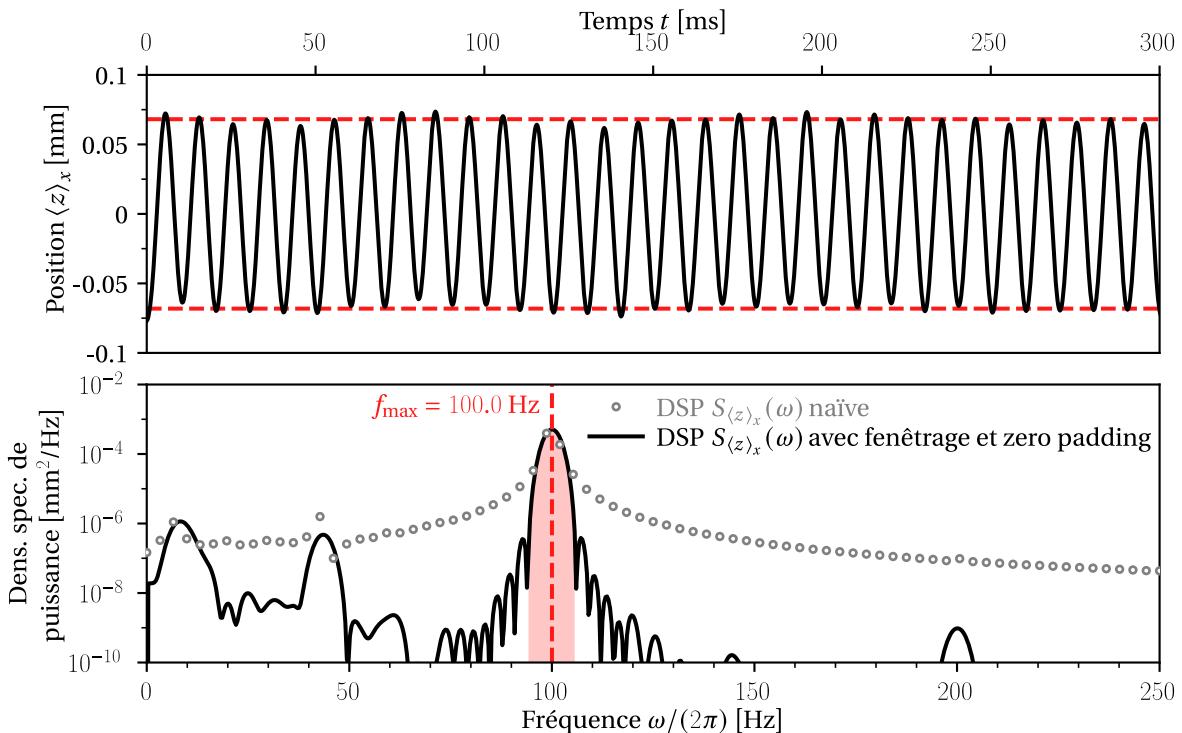


FIGURE 1.12 – (haut) Ligne continue : moyenne spatiale de la position du rivelet $\langle z \rangle_x(t)$ en fonction du temps, pour un rivelet forcé acoustiquement à 100 Hz. Les lignes pointillées indiquent l'amplitude mesurée. (bas) Densité spectrale de puissance associée au signal du dessus. En points gris, la densité calculée sans précaution. En ligne noire, la densité calculée avec fenêtrage de Hann et zero padding. La ligne verticale tiretée indique la fréquence maximale mesurée. La surface rouge sous la courbe s'étend entre $f_{\max} - 6$ Hz et $f_{\max} + 6$ Hz, son aire est de 2.3×10^{-3} mm².

Pour mettre en évidence l'intérêt de ces traitements, nous présentons sur la figure 1.12 un signal temporel assorti du spectre correspondant. Le signal temporel expérimental, montré en haut de la figure, correspond à la moyenne sur l'espace de la position d'un rivelet excité acoustiquement à une fréquence de 100 Hz. Le forçage étant homogène, le rivelet se déplace en bloc, ce qui fait que la grandeur $\langle z \rangle_x$, qui est sa position moyennée selon la direction x , oscille autour de la valeur 0 (la position au repos). En bas de la figure 1.12, nous trouvons la représentation du signal dans l'espace des fréquences temporelles. En points gris, nous avons représenté le résultat d'une estimation « naïve » de la densité spectrale de puissance. En trait noir, nous avons représenté la densité spectrale de puissance calculée en utilisant un fenêtrage de Hann et du zéro-padding :

le résultat est beaucoup plus satisfaisant, affiche un bien meilleur rapport signal/bruit, et nous permet de mieux comprendre la structure du signal.

Pour mesurer avec précision l'amplitude des oscillations de la figure 1.12 (haut), on peut utiliser plusieurs techniques. Par exemple, on peut mesurer la valeur maximale et minimale du signal, mais cela nous rendrait très sensible à une dérive lente du signal, ou bien à un bruit important. Nous pourrions aussi nous appuyer sur la valeur efficace du signal

$$\text{RMS}_{\langle z \rangle_x} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} [\langle z \rangle_x(t)]^2 dt} \quad (1.10)$$

mais cette grandeur est sensible au bruit à haute ou basse fréquence. Nous pourrions enfin utiliser un ajustement non-linéaire de la courbe (*curve fitting*), mais cela nous obligerait à estimer au préalablement l'amplitude, la fréquence et la phase, à connaître précisément la forme du signal recherché (présence d'un décalage, d'une dérive lente...), et ne résout pas le problème de la sensibilité au bruit à des fréquences parasites : l'ajustement par minimisation y est également sensible, d'une manière difficile à contrôler.

Nous choisissons donc, pour mesurer les amplitudes (et les fréquences, et les phases) de signaux oscillants, d'intégrer la densité spectrale de puissance (DSP) autour de la fréquence d'intérêt. En cherchant le maximum local de la DSP, nous avons accès à la fréquence dominante du signal. Nous pouvons alors identifier le voisinage de cette fréquence (qui dépend de la fenêtre utilisée), et intégrer la DSP sur ce voisinage pour avoir une idée de la « puissance » associée. Cette « puissance » (dont l'unité est le carré de l'unité des oscillations, soit ici des mm²) est simplement le carré de la valeur efficace de la composante du signal oscillant à la fréquence d'intérêt : nous avons effectivement filtré le bruit, et nous avons donc accès directement à l'amplitude des oscillations du signal d'intérêt.

Cette technique est particulièrement utile pour mesurer l'amplitude d'un mode spatio-temporel. Pour illustrer cela, observons le signal expérimental en haut de la figure 1.13. L'épaisseur du rivelet, qui est forcé acoustiquement à une fréquence de 100 Hz, prend la forme d'une onde quasi-sinusoïdale qui se propage à une célérité constante (l'explication physique de ce fait est donnée au chapitre 4). Mesurer avec précision la fréquence temporelle et spatiale, la célérité, l'amplitude et la phase d'un tel signal bidimensionnel est un défi, qu'il est possible de relever élégamment en utilisant la densité spectrale de puissance spatio-temporelle du signal. Sur la figure 1.13 (bas), nous montrons la quantité $S_w(k, \omega)$, en fonction de la fréquence spatiale $k/(2\pi)$ et temporelle $\omega/(2\pi)$. Le signal est concentré autour d'une zone localisée : l'emplacement du maximum nous donne accès au nombre d'onde spatial k_{\max} , à la pulsation ω_{\max} , et donc à la célérité $c = \omega_{\max}/k_{\max}$ du signal. En repérant la zone proche du maximum d'intensité du signal (délimitée par une ligne blanche tiretée sur la figure 1.13), qui dépend du fenêtrage utilisé, nous pouvons en outre intégrer la DSP sur cette zone et obtenir ainsi la puissance associée, et donc calculer l'amplitude des oscillations. En affichant la phase de la transformée de Fourier $\arg(\hat{w}(k, \omega))$ plutôt que la densité spectrale de puissance, nous aurions aussi pu avoir accès directement à la phase absolue du signal. C'est ce que nous faisons par exemple en 4.6 (chapitre 4). Au cours

de cette thèse, les mesures d'amplitude et de phase sont réalisées par intégration de la densité spectrale de puissance adéquate.

Pour écrire les scripts réalisant entre autres les opérations décrites dans cette section, nous avons écrit une bibliothèque Python, qui rassemble toutes les fonctions utiles à notre étude (décodage des vidéos, repérage du rivelet par l'une des deux techniques, nettoyage du signal, passage dans l'espace de Fourier, génération de figures, etc). Nous l'avons rendue disponible au public en la mettant en ligne sur la plateforme [GitHub³](#), et des exemples de scripts appliquant les fonctions de cette bibliothèque à des données expérimentales peuvent être trouvés dans un jeu de données que nous avons publié sur la plate-forme de science ouverte Zenodo (Le Lay et Daerr 2025b).

3. github.com/Moryavendil/g2ltk

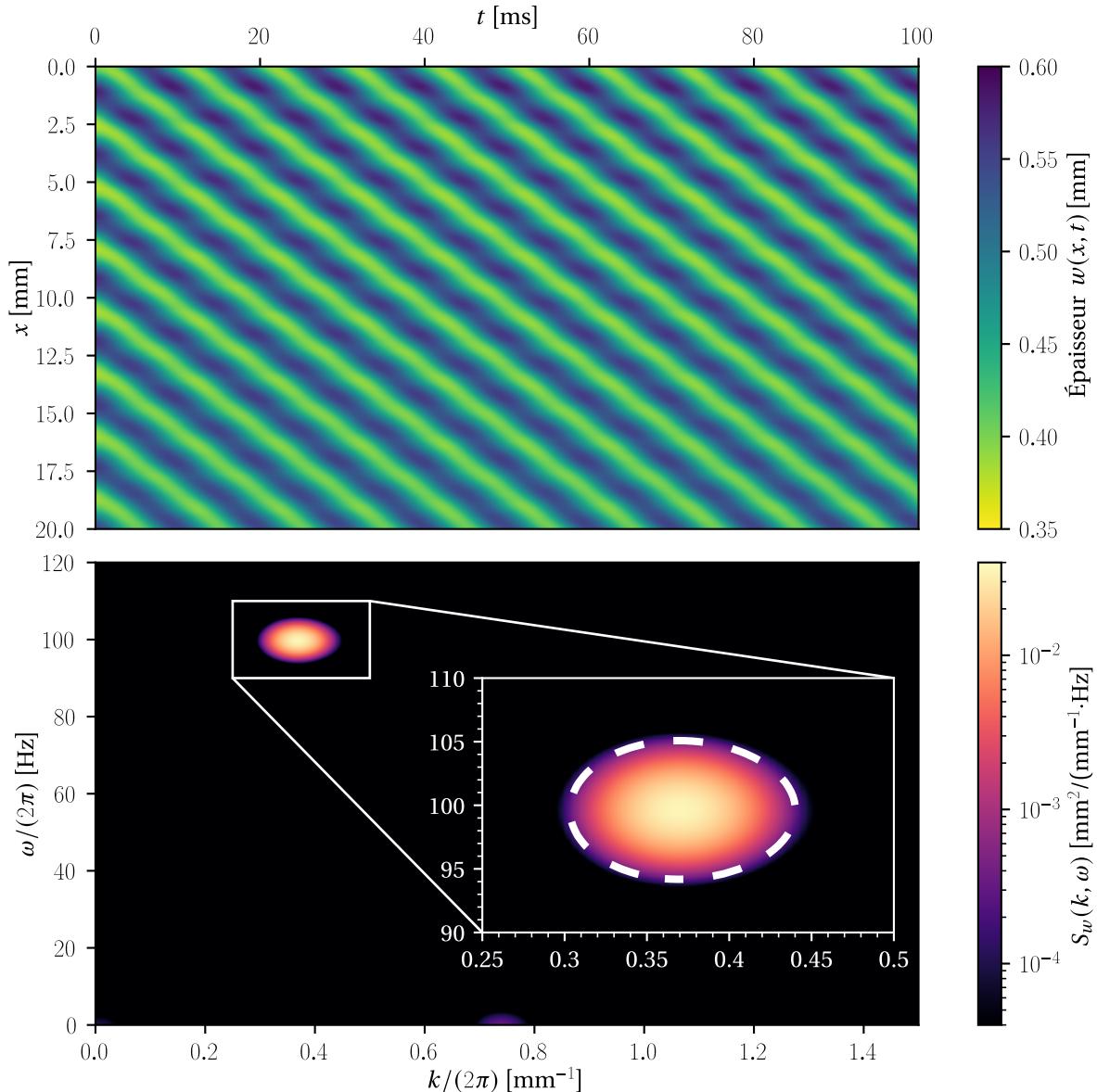


FIGURE 1.13 – (haut) Diagramme spatio-temporel : épaisseur du rivelet $w(x, t)$ (en échelle de couleur) en fonction de l'espace x (ordonnée) et du temps t (abscisse). Ici, l'épaisseur prend la forme d'une onde se translatant à une célérité c constante. (bas) Densité spectrale de puissance de l'épaisseur $S_w(k, \omega)$ (en échelle de couleurs) dans l'espace bidimensionnel de Fourier, où la pulsation temporelle ω est en abscisse et le vecteur d'onde spatial k en ordonnée (fenêtrage de Hamming et zéro-padding). En insert, on a agrandi la partie où le signal est le plus intense. L'aire de la zone entourée de tirets blancs est de $2,21 \text{ mm}^{-1} \text{ Hz}$.

2

MODÉLISATION

Dans ce chapitre, nous nous proposons de présenter, en la détaillant et en la justifiant, la manière dont nous modélisons mathématiquement le comportement du rivelet.

2

2.1	Équations dynamiques	36
2.1.1	Effets hydrodynamiques : termes de volume	37
2.1.2	Effets capillaires : termes de tension de surface	40
2.1.3	Viscosité de ligne de contact	42
2.1.4	Force de pression acoustique	44
2.2	Approche perturbative	45
2.2.1	« Ordre zéro »	45
2.2.2	Approximation linéaire	46
2.2.3	Approche non-linéaire : coordonnées curvilignes	47
2.3	Vagues sur le rivelet	50
2.3.1	Relations de dispersion	50
2.3.2	Approche énergétique	51

Le rivelet est un objet quasi-unidimensionnel complexe, que nous nous proposons ici de modéliser mathématiquement dans le but d'obtenir des systèmes d'équations qui pourront ensuite être exploitées au cours des chapitres suivants.

Nous commençons dans la section 2.1 par expliciter les principales approximations effectuées et par présenter les équations maîtresses régissant le comportement du rivelet. La modélisation du rivelet reprend les ingrédients de Le Lay et Daerr 2025a, inspirés de Daerr, Eggers et al. 2011, que nous détaillons ici en insistant sur l'interprétation physique que l'on peut faire de chacun des termes.

Les équations obtenues étant hautement non-linéaires et intractables en l'état, nous utiliserons par la suite différents régimes d'approximations, qui sont présentés dans la section 2.2.

Enfin, dans la section 2.3 nous présentons les différents types d'ondes qui peuvent se propager sur le rivelet, ce qui nous permettra de mieux comprendre les résultats du chapitre 4.

2.1 Équations dynamiques

Dans cette section, nous donnons les équations maîtresses qui rendent compte de la dynamique du rivelet et nous détaillons la signification physique de chacun des termes qu'elles comportent.

Les notations que nous utilisons, illustrées sur les figure 2.1 (a) et (b), sont les suivantes : nous appelons \hat{x} le vecteur unitaire dirigé verticalement vers le bas, \hat{y} celui perpendiculaire aux murs de la cellule, et \hat{z} le vecteur dans la direction transverse, dirigée par convention vers la droite. Le chemin suivi par le rivelet est noté $z(x, t)$, avec \hat{n} le vecteur normal à ce chemin (par convention orienté dans la même direction que \hat{z}), comme montré sur la figure 2.1 (a). La largeur, ou épaisseur, du rivelet, c'est-à-dire la distance entre les deux ménisques dans la direction orthogonale au chemin, est appelée son épaisseur $w(x, t)$. Enfin, nous appelons σ l'aire de la section transversale du rivelet.

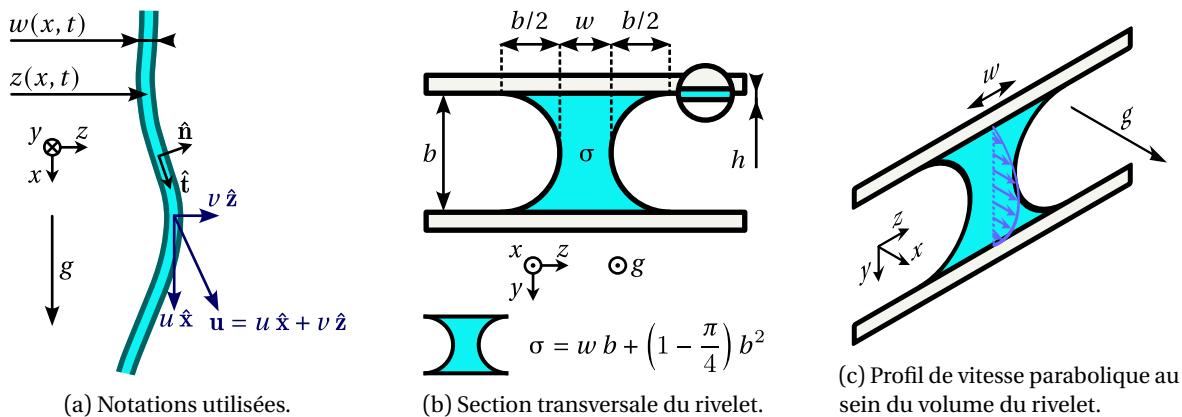


FIGURE 2.1 – Le rivelet sous toutes les coutures.

Nous faisons l'hypothèse que chacune des deux lignes définies par les bords latéraux du rivelet sont peu inclinées par rapport à la verticale, ce qui se traduit mathématiquement par $\partial_x z \ll 1$ (trajet quasi-vertical) et $\partial_x w \ll 1$ (faibles variations relatives d'épaisseur). De plus le rivelet est supposé élancé (*slender*) : comme dans le cas de jets (Eggers et Villermaux 2008), la vitesse à l'intérieur est supposée ne dépendre que de la coordonnée curviligne (l'emplacement le long du chemin) et nous ne considérons pas les variations selon la coordonnée transverse. Le rivelet est donc en pratique traité comme un objet unidimensionnel. Enfin, nous supposons que les ménisques restent toujours à peu près semi-circulaires, de sorte que la masse linéique du rivelet puisse toujours s'écrire $\rho \sigma$, avec $\sigma = w b + b^2 (1 - \frac{\pi}{4})$ la section transversale du rivelet, comme indiqué sur la figure 2.1 (b).

Notre but est d'écrire une équation pour la dynamique du rivelet qui dérive des premiers principes (par opposition à un modèle phénoménologique), qui comprenne tous les ingrédients physiques pertinents, et que l'on cherchera par la suite à simplifier selon diverses configurations pour décrire les comportements observés. Pour cela, on utilise un moyennage des équations de Navier-Stokes selon la profondeur, ou l'espacement, de la cellule (*gap averaging*), donc la direction \hat{y} perpendiculaire aux plaques (Gondret et Rabaud 1997; Plouraboué et Hinch 2002).

Nous intégrons ensuite les équations obtenues en suivant la largeur du rivelet, et en divisant le résultat par la masse volumique du liquide ρ (Daerr, Eggers et al. 2011). L'écoulement est alors décrit par la vitesse bidimensionnelle

$$\mathbf{u} = u \hat{\mathbf{x}} + v \hat{\mathbf{z}} = (u, v)_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}} \quad (2.1)$$

contenue dans le plan de la cellule. L'évolution de cette vitesse est donnée par l'équation dynamique

$$\sigma (\partial_t + \beta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \sigma \mathbf{g} - \sigma \mu \mathbf{u} + \sigma \frac{\Gamma}{b} \nabla \kappa_w + (\Gamma \kappa_z - \mu_{\text{cl}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \Pi) \hat{\mathbf{n}} \quad (2.2)$$

où toutes les notations nouvelles seront expliquées en détail au cours de cette section. Nous ajoutons à cela l'équation de conservation de la masse

$$\partial_t \sigma + \nabla \cdot (\sigma \mathbf{u}) = 0 \quad \text{ou bien} \quad (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \sigma = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (2.3)$$

Le système est finalement clos par la condition aux limites cinématique

$$\frac{dz}{dt} = (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) z = v = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.4)$$

L'équation dynamique (2.2) est au premier abord complexe, comportant huit termes, qui ne sont pas tous immédiats à apprécier. Dans la suite de cette section, nous nous proposons de détailler la signification de chacun des termes de cette équation, et pour cela de les diviser en quatre groupes : les termes de volume, les termes capillaires, les termes de friction de ligne de contact, et le terme de pression acoustique.

2.1.1 Effets hydrodynamiques : termes de volume

$$\sigma (\partial_t + \beta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \sigma \mathbf{g} - \sigma \mu \mathbf{u} + \sigma \frac{\Gamma}{b} \nabla \kappa_w + (\Gamma \kappa_z - \mu_{\text{cl}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \Pi) \hat{\mathbf{n}} \quad (2.2, \text{ rappel})$$

Le rivelet étant un système fluide, la manière naturelle de mettre en équation sa dynamique est d'utiliser les équations de Navier-Stokes. Ces équations permettent d'incorporer directement dans la modélisation l'inertie du fluide, les forces de pression agissant dans le volume et les actions extérieures à distance (ici la gravité).

Puisque nous sommes en cellule de Hele-Shaw, il nous est possible de moyennner ces équations suivant la profondeur de la cellule (selon y). Cela nous permet d'obtenir un système à deux dimensions dans le plan (x, z) . Pour effectuer ce moyennage selon la profondeur (*depth averaging*), nous utilisons le fait que la cellule soit très étroite : les frottements visqueux dominent, et, comme illustré sur la figure 2.1 (c), nous supposons que l'écoulement présente un profil parabolique dans la direction y (écoulement de Poiseuille).

Ce traitement mathématique permet d'aboutir à une équation dynamique semblable à l'équa-

tion de Navier-Stokes bidimensionnelle dans le plan (x, z) , à deux modifications près : le gradient de pression est remplacé par un terme de frottement de volume proportionnel à la vitesse moyenne, dont le facteur de proportionnalité μ est donné par la loi de Darcy, tandis que le terme inertiel non-linéaire est multiplié par un coefficient correctif β .

Le facteur de proportionnalité μ permet de calculer la vitesse moyenne du fluide à l'intérieur du rivelet. Le fluide est mis en mouvement par la gravité, et en régime permanent atteint une vitesse stationnaire $u_0 = g/\mu$.

Dans le cas d'un rivelet d'extension transverse infinie ($w \rightarrow +\infty$), ou bien dont les interfaces seraient des plans orthogonaux aux plaques formant la cellule, la vitesse du fluide à l'intérieur du rivelet suit un profil parabolique, comme illustré sur les figures 2.1 (c) et 2.2 (a). La vitesse moyenne du fluide, soumis uniquement à la pesanteur et aux frottements visqueux avec les parois de la cellule, est alors $u_\infty := \frac{g b^2}{12v}$. Dans ce cas, où l'écoulement est rigoureusement parabolique, le coefficient de dissipation de volume est alors $\mu_\infty := \frac{12v}{b^2}$.

Pour des rivelets d'extension transverse finie, le champ de vitesse à l'intérieur du rivelet est influencée par les conditions aux limites au niveau des ménisques, c'est ce qui est montré sur les figures 2.2 (b), (c), (d) et (e). La vitesse moyenne du fluide dans le rivelet dépend donc de l'épaisseur du rivelet w , ce que nous traduisons mathématiquement par une dépendance du coefficient de dissipation de volume avec l'épaisseur : $\mu = \mu(w)$.

Profil de vitesse : Écoulement de Stokes $\nabla \Delta \mathbf{u} = g \hat{\mathbf{x}}$

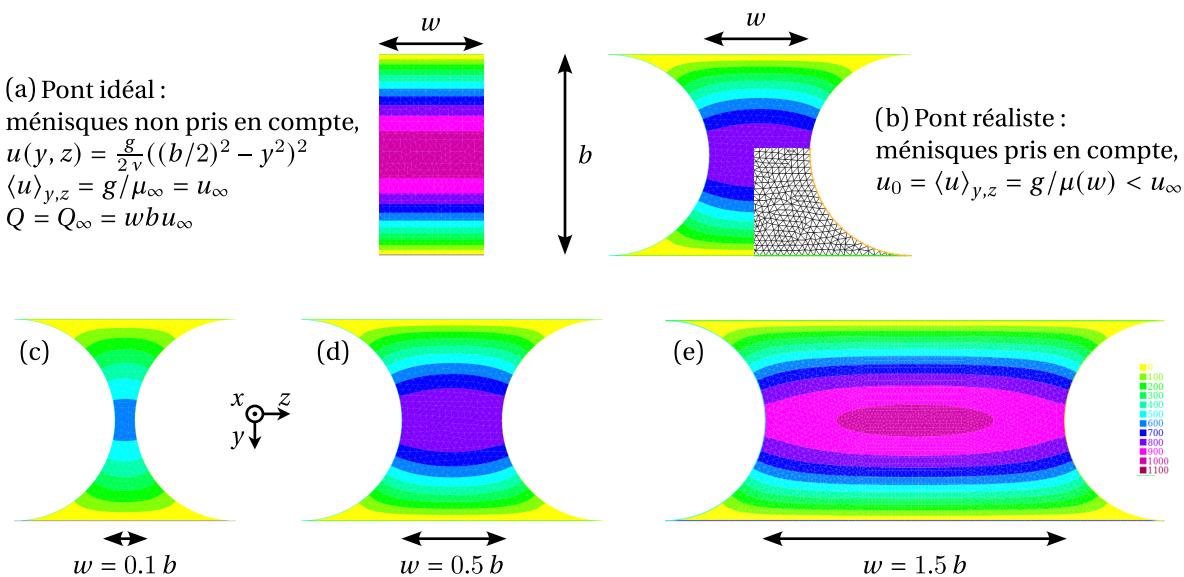


FIGURE 2.2 – Modèles utilisés et dépendance de la vitesse avec la largeur du rivelet. Les profils de vitesses sont calculés avec FreeFEM. La maille triangulaire utilisée est marquée partout par de fins traits blancs (et plus visiblement en (b)). Les distances sont adimensionnées par b , les temps par b^2/v , l'échelle de couleurs indique donc la vitesse locale adimensionnée $\mathbf{u}(y, z) \cdot \hat{\mathbf{x}} b/v$.

(a) Pont « idéal » : pas d'influence des conditions aux limites. Le profil de vitesse est parabolique avec la coordonnée y .

(b) Pont réaliste : solution de l'équation de Poisson pour la géométrie imposée par la capillarité. La maille triangulaire utilisée est montrée sur le quart en bas à droite.

Les trois sous-figures (c), (d) et (e) correspondent à trois différentes épaisseurs de rivelet.

Pour estimer $\mu(w)$, nous avons calculé le débit associé aux différentes épaisseurs de rivelet. Ce calcul est effectué grâce à l'outil de résolution d'équations différentielles partielles par éléments finis FreeFEM (Hecht 2012). Nous utilisons cet outil pour résoudre l'équation de Poisson (l'écoulement étant supposé suivre l'équation de Stokes en première approximation) dans la géométrie du pont imposée par la capillarité. Nous obtenons ainsi le débit $Q(w)$ à travers un pont liquide réel, représenté sur la figure 2.3 (gauche).

Pour les rivelets les plus fins, le débit réel est plus élevé que pour un pont « idéal », car le pont idéal ne prend pas en compte l'écoulement prenant place dans les ménisques. Au contraire, pour les rivelets épais, l'écoulement est moins grand dans un pont réel que dans un pont idéal de même épaisseur w , car la condition aux limites d'absence de contraintes (*stress free boundary condition*) aux interfaces liquide-air ralentit l'écoulement (Drenckhan, Ritacco et al. 2007).

Nous estimons la vitesse moyenne du fluide au sein du rivelet u_0 en divisant le débit total Q par la section transverse σ du pont liquide. La vitesse moyenne obtenue est alors celle représentée sur la figure 2.3 (droite). Elle est toujours inférieure à u_∞ .

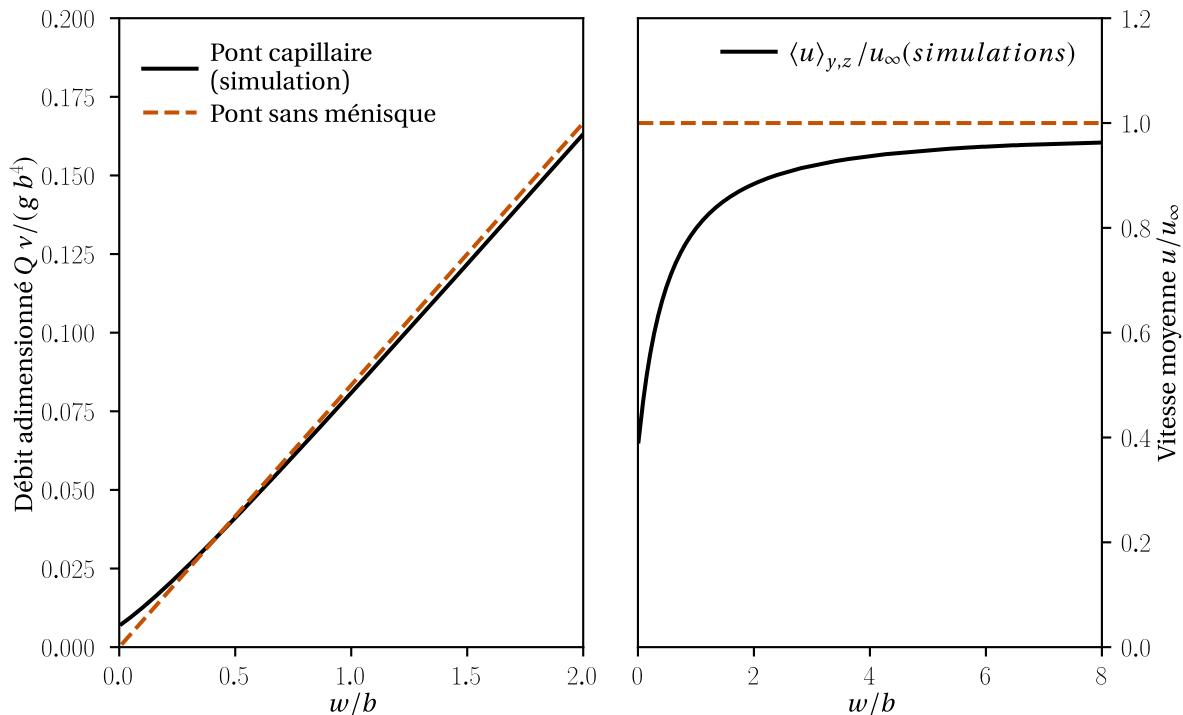


FIGURE 2.3 – Effet des ménisques sur l'écoulement. (gauche) Débit passant à travers un pont capillaire réaliste (trait plein), comparé au débit à travers un pont idéal $Q_\infty = w b u_\infty$ (trait tireté). (droite) Vitesse moyenne dans le pont ($u_0 = \langle u \rangle_{y,z} = \frac{1}{\sigma} \iint_{y,z} u \, d^2\sigma$), pour un pont réaliste (trait plein noir, $\sigma = b w + b^2 (1 - \pi/4)$) et un pont « idéal » (trait tireté, $\sigma = b w$).

Cependant, les simulations présentées ci-dessus s'appuient sur l'hypothèse que l'écoulement suit la loi de Stokes, c'est-à-dire que l'inertie ne joue aucun rôle. En pratique, le nombre de Reynolds associé à l'écoulement $Re = u_\infty b / v$ est de l'ordre de 200 : si nous sommes assurés du caractère laminaire de l'écoulement, nous ne pouvons garantir que le profil soit rigoureusement parabolique partout sur le rivelet (Plouraboué et Hinch 2002). Or le coefficient β dépend du profil de vitesse : il prend la valeur $6/5$ pour un écoulement de Poiseuille au profil parabolique, et 1,

pour un écoulement bouchon (*plug flow*) au profil plat. Nous ne sommes donc pas en mesure de déterminer avec précision la valeur de ce coefficient, qui est toujours d'ordre unité, pour nos expériences. Au cours des calculs qui suivent, nous le prendrons égal à un.

2.1.2 Effets capillaires : termes de tension de surface

$$\sigma (\partial_t + \beta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \sigma g - \sigma \mu \mathbf{u} + \sigma \frac{\Gamma}{b} \nabla \kappa_w + (\Gamma \kappa_z - \mu_{\text{cl}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \Pi) \hat{\mathbf{n}} \quad (2.2, \text{ rappel})$$

Le rivelet étant délimité par des ménisques dont la géométrie est principalement déterminée par la tension de surface, la capillarité joue un rôle prépondérant dans sa dynamique. Elle correspond mathématiquement dans l'équation ci-dessus aux deux termes proportionnels à la quantité

$$\Gamma := \frac{\pi \gamma b}{2 \rho} \quad (2.5)$$

qui rend compte des effets de la tension de surface dans notre système. La manière la plus directe de comprendre les effets de la tension de surface est de considérer la pression capillaire à l'intérieur du rivelet due à la courbure des ménisques. Cette surpression (au sens algébrique, puisqu'elle est en fait négative : le rivelet, dont les interfaces sont incurvées vers l'intérieur, est en sous-pression par rapport à l'extérieur) est donnée par la loi de Laplace, qui relie la courbure d'une interface fluide à la discontinuité de pression y prenant place.

Effet de la courbure dans le plan de la cellule

Considérons d'abord individuellement l'un des ménisques délimitant le rivelet. À l'ordre le plus bas, puisque l'espacement de la cellule est inférieure à la longueur capillaire du liquide, un tel ménisque exhibe une géométrie semi-circulaires dans le plan (y, z) , de courbure $2/b$. Cela implique une sous-pression $P = -\frac{2\gamma}{b}$ dans le liquide par rapport au fluide environnant.

En réalité, l'interface du ménisque dans le plan (y, z) n'est pas exactement un demi-cercle. Le ménisque est légèrement déformé à cause du fait que le tracé de l'interface liquide-air dans le plan de la cellule (x, z) soit courbé, ce qui impose des surpressions supplémentaires, comme montré sur la figure. Le facteur multiplicatif lié à cette correction a été calculé par Park et Homsy 1984 dans la limite des faibles vitesses au premier ordre en ζ , en utilisant la technique des développements asymptotiques correspondants (*matched asymptotic expansions*). Ainsi, considérant une interface liquide-air qui décrit une courbe $\zeta(x)$ dans le plan (x, z) , la sous-pression à l'intérieur du liquide est

$$P = -\frac{2\gamma}{b} \left(1 - \frac{\pi}{4} \frac{b}{2} \partial_{xx} \zeta \right) \quad (2.6)$$

ce qui signifie que la pression à l'intérieur du rivelet est une fonction de la courbure, comme montré sur la figure 2.4 (gauche). Cette surpression, qui dépend explicitement de la courbure des

ménisques dans le plan de la cellule est responsable de deux effets influençant la dynamique du rivelet. Pour les calculer, notons $\zeta_{\pm} = z \pm w/2$ le trajet de chacun des deux ménisques.

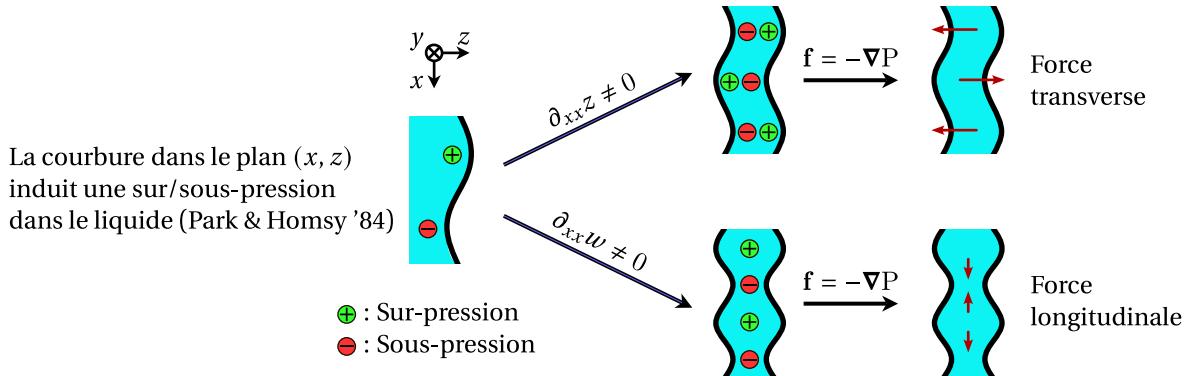


FIGURE 2.4 – Illustration des effets de la capillarité sur le ménisque.

Contribution capillaire transverse

Pour comprendre la contribution $\Gamma \kappa_z \hat{n}$, écrivons la différence entre la surpression due aux deux interfaces de chaque côté du rivelet (au premier ordre en z, w) :

$$\Delta P_{\text{int}} = \frac{\pi \gamma}{4} (\partial_{xx} \zeta_+ - \partial_{xx} (-\zeta_-)) = -\frac{\pi \gamma}{2} \partial_{xx} z \quad (2.7)$$

où le changement de signe de la courbure rend compte de l'inversion des phases liquide \leftrightarrow air. Ces surpressions sont représentées sur la figure 2.4 (à droite en haut). Cela signifie que sur une petite portion de rivelet de longueur $\delta\ell$ dans la direction x , le rivelet subit une force due à la pression de Laplace dirigée selon la normale à son trajet, de norme $b \delta\ell \Delta P_{\text{int}}$. La force linéique correspondante, divisée par la masse volumique du fluide, est bien $\Gamma \kappa_z$. Cette force est très simple à interpréter : elle correspond à une force de rappel capillaire, qui s'oppose à l'augmentation de la surface des ménisques due à la courbure du chemin du rivelet.

Contribution capillaire longitudinale

Pour la contribution en $\sigma \frac{\Gamma}{b} \nabla \kappa_w$, écrivons au premier ordre en z, w la surpression totale à l'intérieur du liquide :

$$P_{\text{int}} = -\frac{4 \gamma}{b} + \frac{\pi \gamma}{4} (\partial_{xx} \zeta_+ + \partial_{xx} (-\zeta_-)) = -\frac{4 \gamma}{b} - \frac{\pi \gamma}{4} \partial_{xx} w. \quad (2.8)$$

C'est la somme d'une sous-pression moyenne et d'une variation de la pression due à une modulation spatiale de l'épaisseur w . Si l'épaisseur du rivelet w vient à varier, cette pression capillaire à l'intérieur du rivelet se met à dépendre de la coordonnée x : elle est donc de gradient non nul. C'est ce mécanisme qui est représenté sur la figure 2.4 (à droite en bas). Ainsi, le rivelet subit une force linéique $-\sigma \nabla P_{\text{int}}$: c'est l'origine de cette contribution. Cette force peut être interprétée comme une force de rappel qui s'oppose aux inhomogénéités d'épaisseur dans le rivelet.

Cette force capillaire longitudinale est à l'origine d'une sorte d'effet « anti Rayleigh-Plateau » : pour le cas d'un cylindre liquide (un jet circulaire), les modulations d'épaisseur dont la longueur d'onde est supérieure au périmètre du jet sont toujours amplifiées, ce qui mène à la déstabilisation du jet et à sa fragmentation en gouttelettes. C'est l'instabilité capillaire de pincement de jet, dite instabilité de Rayleigh-Plateau (Plateau 1873 ; Eggers et Villermaux 2008). Ici, au contraire, un rivelet de largeur constante est linéairement stable vis-à-vis des modulations d'épaisseur. La capillarité agissant comme une force de rappel vers l'état d'équilibre stable $w = w_0$, les éventuelles modulations sont transportées sous forme d'ondes longitudinales et atténuees.

2.1.3 Viscosité de ligne de contact

2

$$\sigma(\partial_t + \beta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \sigma g - \sigma \mu \mathbf{u} + \sigma \frac{\Gamma}{b} \nabla \kappa_w + (\Gamma \kappa_z - \mu_{\text{cl}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \Pi) \hat{\mathbf{n}} \quad (2.2, \text{ rappel})$$

Lorsque le rivelet se déplace dans la direction perpendiculaire à son chemin, l'interface des ménisques dans le plan transverse garde la même géométrie (au moins en première approximation). Cela signifie que chaque point de la surface libre du rivelet se déplace par rapport aux plaques à une vitesse finie. Or la vitesse du fluide est par hypothèse nulle au niveau des parois : cela implique l'existence d'un gradient de vitesse dans la direction y entre la plaque et l'interface. À mesure que le ménisque s'affine, le cisaillement devient de plus en plus important (voir figure 2.5 (gauche)), jusqu'à diverger dans la limite où les ménisques affleurent aux plaques. Il est donc important de prendre en compte le fait que, du fait du mouillage total entre le liquide et les plaques, le rivelet « glisse » toujours sur un film de liquide d'épaisseur h_∞ .

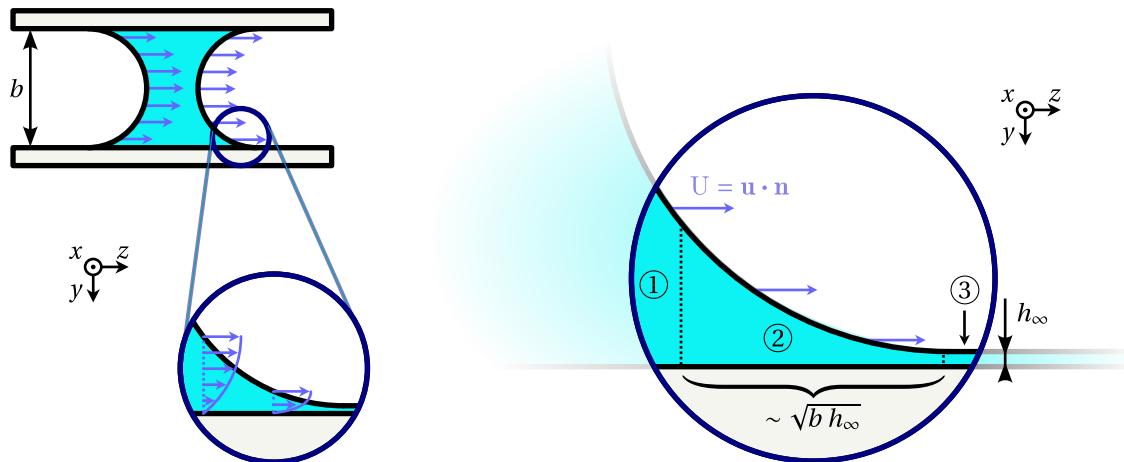


FIGURE 2.5 – Origine de la viscosité liée aux déplacements transverses. Dans le référentiel des plaques, l'interface se déplace dans la direction z à une vitesse finie. La condition de vitesse nulle au niveau des plaques implique un gradient qui diverge alors que l'épaisseur de fluide tend vers 0. Cette divergence est régularisée par l'existence d'un film de pré-mouillage d'épaisseur h_∞ finie.

Pour incorporer dans notre modèle cette augmentation importante de la dissipation dans les parties fines des ménisques en mouvement, il nous faut ajouter un terme correctif dans notre équation. Près des ménisques, la vitesse est essentiellement normale à la ligne de contact (Rio et al.

2005). Ce terme correctif doit donc dépendre de la vitesse normale au chemin $u_n := \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Pour l'estimer en ordre de grandeur, nous utilisons le raisonnement suivant : lorsqu'on intègre le terme de contrainte visqueuse de l'équation de Navier-Stokes dans la direction y , on peut distinguer trois zones (voir figure 2.5 (droite)) :

- La zone ①, centrée sur la position du rivelet $z(x, t)$ et de largeur $w/2$, où le liquide s'étend sur tout l'espacement de la cellule et où l'écoulement est celui de Poiseuille ;
- la zone ②, comprenant les ménisques, où se joue la dissipation ;
- enfin la zone ③, en dehors du rivelet, constituée d'un film microscopique d'épaisseur h_∞ .

Dans la zone ③, la contrainte visqueuse à l'intérieur du film, quasiment immobile, est très faible comparée à celle prenant place dans le rivelet. Cette contribution peut être négligée.

Dans la zone ①, l'écoulement est en première approximation celui de Poiseuille pour une cellule d'épaisseur b , avec une vitesse moyenne selon z notée u_n . La contrainte visqueuse au contact des plaques est alors $\sigma_{yz} = -\rho v \frac{6u_n}{b}$. La force totale par unité de longueur du rivelet exercée par les plaques sur le fluide est $2w \sigma_{yz} = -\rho b w \mu u_n$ avec $\mu = 12v/b^2$: la dissipation visqueuse est décrite par la loi de Darcy discutée précédemment.

Dans la zone ②, La contrainte visqueuse au contact des plaques est $\sigma_{yz} = -\rho v \frac{6u_n}{h(z)}$, où $h(z)$ est l'épaisseur du ménisque à l'abscisse z concernée. Puisque cette contrainte diverge comme $1/h(z)$, la dissipation totale est dominée par celle prenant place dans les parties les plus fines du ménisque, où $h(z)$ est de l'ordre de h_∞ et donc $\sigma_{yz} \approx -\rho v \frac{6u_n}{h_\infty}$. Estimée grossièrement, la taille typique de cette région est de l'ordre de $\sqrt{b h_\infty}$ (c'est la distance sur laquelle l'épaisseur du ménisque, assimilé à un demi-cercle de rayon $b/2$, passe de h_∞ à $2h_\infty$).

Ainsi la force totale (par unité de longueur du rivelet) exercée par les plaques sur le fluide au niveau des quatre endroits où les ménisques sont les plus fins est $4\sqrt{b h_\infty} \sigma_{yz} = -\rho b \mu_{cl} u_n$ avec $\mu_{cl} \sim 2 \mu b^2 \sqrt{\frac{b}{h_\infty}}$ en ordre de grandeur. Un calcul plus rigoureux impliquant l'intégration de la contrainte en faisant varier la hauteur $h(z)$ permet d'obtenir une estimation plus précise du préfacteur, qui reste de l'ordre de l'unité (Cantat 2013 ; Eggers, Limat et Daerr [non publié](#)).

Le point difficile est l'évaluation de la hauteur du film h_∞ dont dépend directement le coefficient μ_{cl} . Théoriquement, cette hauteur n'est pas la même selon que l'on considère le film laissé derrière le rivelet, qui dépend de la vitesse de déplacement du ménisque arrière, ou bien le film déjà formé sur lequel avance le rivelet. Ce dernier est le résultat des mouillages précédents, et en toute rigueur sa hauteur dépend donc localement de l'historique du mouvement du rivelet. Dans le cadre de cette thèse, nous ferons toujours l'hypothèse simplificatrice que le rivelet glisse sur un film dont la hauteur est partout constante, ce qui nous amène à négliger les variations spatiales et temporelles de μ_{cl} . Cette hauteur effective h_∞ est de l'ordre de quelques micromètres. Nous présentons une discussion plus précise de la géométrie des films laissés derrière le rivelet dans le chapitre 3.

2.1.4 Force de pression acoustique

$$\sigma(\partial_t + \beta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \sigma g - \sigma \mu \mathbf{u} + \sigma \frac{\Gamma}{b} \nabla \kappa_w + (\Gamma \kappa_z - \mu_{\text{cl}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \Pi) \hat{\mathbf{n}} \quad (2.2, \text{ rappel})$$

Une différence de pression entre les deux moitiés gauche et droite de la cellule, délimitées par le rivelet, induit une force transverse normale au chemin. Le pont liquide se comporte comme une membrane étanche, qui coupe la cellule en deux parties : comme une membrane, le rivelet est donc sensible à une différence de pression entre les masses d'air qu'il sépare. Cette différence de pression est notée $\Pi(t)$ dans l'équation ci-dessus.

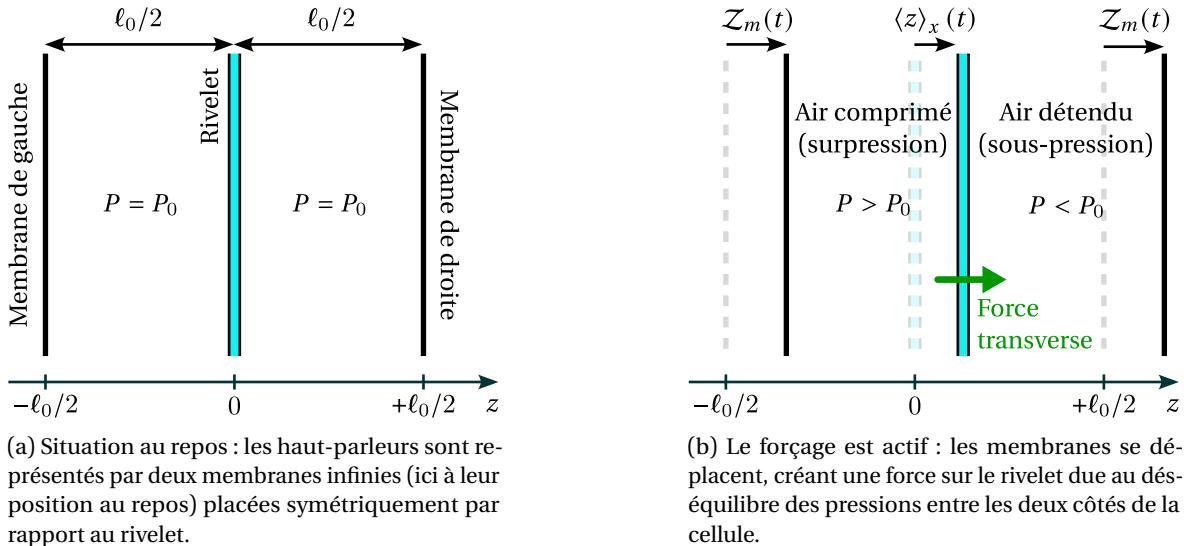


FIGURE 2.6 – Schéma illustratif du modèle de forçage acoustique.

Dans le cadre de cette thèse, la différence de pression gauche-droite est toujours obtenue à l'aide de haut-parleurs disposés de part et d'autre de la cellule, symétriquement par rapport au plan $z = 0$. Afin d'établir un lien entre le signal électrique $u(t)$ envoyé aux haut-parleurs et la différence de pression $\Pi(t)$ ressentie par le rivelet au centre de la cellule, nous utilisons un modèle minimaliste, valable dans le cas d'une excitation homogène en espace (ne dépendant pas de la coordonnée verticale x). Les haut-parleurs sont situés à gauche et à droite de la cellule, qui a une largeur ℓ_0 . Nous modélisons chaque haut-parleur par une membrane rigide, remplissant la cellule dans la direction y et d'extension infinie dans la direction x . Ces membranes se trouvent donc, lorsqu'aucun signal n'est envoyé aux haut-parleurs, aux positions de repos $\pm \ell_0/2$ (la cote $z = 0$ correspondant au centre de la cellule, où se trouve le rivelet). Lorsqu'un signal électrique $u(t)$ est envoyé aux haut-parleurs, cela équivaut dans notre modèle à une mise en mouvement des membranes qui se trouvent alors à la position $\pm \ell_0/2 + \mathcal{Z}_m(t)$, avec $\mathcal{Z}_m(t) \propto u(t)$.

Le mouvement de ces membranes induit un déplacement du rivelet, dont la position transverse moyenne est notée $\langle z \rangle_x(t)$. Le rivelet découpe en effet de manière étanche la cellule en deux compartiments de largeur $\ell_0/2 - \mathcal{Z}_m + \langle z \rangle_x$ (à gauche) et $\ell_0/2 + \mathcal{Z}_m - \langle z \rangle_x$ (à droite). Les pressions à gauche et à droite du rivelet sont alors données par la loi de Boyle-Mariotte. À gauche

du rivelet, on a $P_g = P_0 \frac{\ell_0/2}{\ell_0/2 - \mathcal{Z}_m + \langle z \rangle_x} \approx P_0 + P_0 \frac{\mathcal{Z}_m - \langle z \rangle_x}{\ell_0/2}$ dans la limite des faibles déplacements, avec P_0 la pression de l'air à l'équilibre. On en déduit que le rivelet subit une force dirigée dans la direction z (normale au chemin moyen du rivelet). Cette force par unité de longueur s'écrit $\rho \Pi(t)$, avec

$$\Pi(t) := \frac{4 P_0 b}{\rho \ell_0} (\mathcal{Z}_m(t) - \langle z \rangle_x(t)). \quad (2.9)$$

2.2 Approche perturbative

La résolution complète des équations (2.2) et (2.3) n'est pas possible analytiquement, et même les simuler numériquement par une méthode directe ne nous apporterait pas la compréhension fine du système que nous essayons d'obtenir. Nous allons donc, pour aborder ces équations, procéder par approximations, et écrire chaque variable comme la somme de puissances successives d'un petit paramètre $\epsilon \ll 1$: on a ainsi $a = a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \dots$ pour les différentes variables $a = z, w, u, v, \Pi, \dots$

2.2.1 « Ordre zéro »

En l'absence de forçage acoustique, on définit l'état de référence du rivelet, qui correspond à un filament liquide vertical ($z = z_0 = 0$), de largeur constante ($w = w_0$, et donc de section constante $\sigma = \sigma_0$), et s'écoulant vers le bas ($\mathbf{u} = u_0 \mathbf{e}_x$).

Cet écoulement de base est modifié lorsque le système est sujet à un forçage acoustique, c'est-à-dire lorsque $\Pi_0 \neq 0$. Le trajet du rivelet est alors déplacé de manière homogène (puisque le forçage est invariant en espace), on a alors $z_0 = z_0(t)$ et

$$\sigma_0(\partial_t + \mu)\partial_t z_0 = -\mu_{\text{cl}} \partial_t z_0 + \Pi_0 \quad \text{avec} \quad \Pi_0(t) := \frac{4 P_0 b}{\rho \ell_0} (\mathcal{Z}_m - z_0) \quad (2.10)$$

en utilisant les notations définies à la fin de la section précédente.

2.2.2 Approximation linéaire

On peut ensuite écrire les équations qui décrivent l'évolution de perturbations de faible amplitude par rapport à l'état de référence décrit précédemment. Le système d'équations obtenu à l'ordre le plus bas, c'est-à-dire en considérant uniquement les termes proportionnels à ϵ , est alors :

$$\sigma_1 \partial_t v_0 + \sigma_0 (\partial_t + \beta u_0 \partial_x) v_1 = -\sigma_0 \mu v_1 - \sigma_1 \mu v_0 + \Gamma \partial_{xx} z_1 - \mu_{cl} \partial_t z_1 + \Pi_1 \quad (2.11a)$$

$$\sigma_0 (\partial_t + \beta u_0 \partial_x) u_1 = -\sigma_0 \mu u_1 + \sigma_0 \frac{\Gamma}{b^2} \partial_{xxx} \sigma_1 + (-\mu_{cl} \partial_t z_0 + \Pi_0) (-\partial_x z_1) \quad (2.11b)$$

$$(\partial_t + u_0 \partial_x) \sigma_1 = -\sigma_0 \partial_x u_1 \quad (2.11c)$$

$$v_1 = (\partial_t + u_0 \partial_x) z_1. \quad (2.11d)$$

2

qu'il est possible de combiner de manière à obtenir, avec un petit peu d'algèbre,

$$\sigma_0 (\partial_t + \beta u_0 \partial_x) (\partial_t + u_0 \partial_x) z_1 = -\sigma_0 \mu (\partial_t + u_0 \partial_x) z_1 + \Gamma \partial_{xx} z_1 - \mu_{cl} \partial_t z_1 + \Pi_1 + \sigma_1 (\partial_t + \mu) \partial_t z_0 \quad (2.12a)$$

$$(\partial_t + \beta u_0 \partial_x) (\partial_t + u_0 \partial_x) \sigma_1 = -\mu (\partial_t + u_0 \partial_x) \sigma_1 - \sigma_0 \frac{\Gamma}{b^2} \partial_{xxxx} \sigma_1 - \partial_x z_1 (\partial_t + \mu) \partial_t z_0 \quad (2.12b)$$

Ces deux dernières équations sont des équations de propagation (équations hyperboliques) pour z_1 et σ_1 (ou w_1 , puisque $\sigma_1 = b w_1$). À cet égard, remarquons que prendre en compte que $\beta \neq 1$ a comme unique effet de dissymétriser les ondes propageantes et contra-propageantes, en modifiant la vitesse d'advection des ondes d'un facteur $\frac{\beta+1}{2}$. Ce facteur ne pouvant pas, même dans le cas le plus défavorable, excéder 10 %, nous n'en tiendrons pas compte et supposerons pour la suite que $\beta = 1$. Cette approximation n'a que des effets mineurs et ne remet pas en cause les résultats que nous obtenons (Gondret et Rabaud 1997), en revanche, elle permet de simplifier considérablement les calculs. Considérer $\beta = 1$ permet de mettre plus facilement en évidence la physique intéressante du problème. Cette simplification est donc particulièrement précieuse pour nous, qui écrivons pour la première fois ces équations et dégageons la voie ; mais dans des travaux ultérieurs, il serait intéressant de considérer le cas $\beta \neq 1$.

Le système d'équations (2.12), si il a au moins le mérite d'être linéaire en z_1 et σ_1 , n'en reste pas moins complexe. Par la suite, nous nous placerons dans différents régimes qui permettent d'observer des comportements intéressants. Nous les divisons en deux catégories.

Phénomènes sans variations d'épaisseur ($w_1 = 0$ donc $\sigma_1 = 0$) à basse fréquence (fréquences en jeu inférieures à 10 Hz)

- Rivelet contrôlé par différence de pression (chapitre 3) : Forçage acoustique ($\Pi_0 \neq 0$), débit faible.
- Méandrage spontané (chapitre 5) : Pas de forçage acoustique ($\Pi = 0$), débit important.

Phénomènes « haute fréquence » : fréquences en jeu plus élevées (supérieures à 10 Hz), observation d'ondes longitudinales

- Ondes linéairement indépendantes (section 2.3) : Pas de forçage acoustique ($\Pi = 0$), faible

- dissipation ($\mu \propto \epsilon$)
- Ondes co-amplifiées paramétriquement (chapitre 4) : Faible forçage acoustique ($\Pi \propto \epsilon^2$), faible dissipation ($\mu \propto \epsilon^2$)

2.2.3 Approche non-linéaire : coordonnées curvilignes

Nous souhaitons parfois aller au-delà de l'approximation linéaire, ce qui permet de traiter de phénomènes intrinsèquement non-linéaires, comme le désaccord en fréquence ou la saturation en amplitude, traités à la section 4.4 (chapitre 4).

Dans cette courte sous-section, nous posons les bases nécessaires à un développement des équations à l'ordre trois en ϵ . Nous donnons simplement les idées de départ, sans rentrer dans les détails des calculs, en essayant de rester lisible et de nous cantonner à l'aspect physique du problème. Les calculs complets ont été repoussés à l'annexe 4.D (chapitre 4).

Stratégie

Pour traiter le problème en toute généralité, il est naturel de vouloir délaisser la base (\hat{x}, \hat{z}) , liée au référentiel fixe de la cellule, et de préférer l'utilisation du repère local mobile (\hat{t}, \hat{n}) (repère de Frenet). On définit à cette fin la vitesse tangentielle $u_t := \mathbf{u} \cdot \hat{t}$ et la vitesse normale $u_n := \mathbf{u} \cdot \hat{n}$. Cette projection a l'avantage de découpler naturellement les efforts tangentiels (comme la viscosité de volume) des efforts transverses (comme les efforts de pression). Cependant, projeter directement les équations du mouvement sur cette base amène un nouveau problème : les vecteurs unitaires varient à la fois dans l'espace et dans le temps, et la coordonnée curviligne elle-même varie avec le temps. Cela amène un certain nombre de complications, à la fois au niveau du formalisme mathématique qui devient immédiatement lourd et difficile à manipuler (*bloated*), et dans l'interprétation des équations, qui s'obscurcit très vite. Par exemple, puisqu'au fil du temps la coordonnée curviligne peut se dilater ou se contracter, la correspondance entre les longueurs mesurées le long de la coordonnée curviligne et les longueurs réelles n'est pas assurée, et dans le cas général, elle varie au cours du temps.

Traiter le système dans toute sa généralité imposerait donc l'utilisation d'un arsenal mathématique complexe, et nous préférerons dans ce travail adopter une autre méthode, certainement moins élégante, mais plus efficace pour arriver aux développements qui nous intéressent ici (développement non-linéaire aux ordres deux et trois)¹. Nous proposons donc de toujours projeter les équations du mouvement dans le repère (x, z) , mais en gardant les notions de vitesse tangentielle

1. Nous indiquons ici, en nous appuyant sur notre expérience personnelle, les prérequis nécessaires pour quiconque voudrait se lancer dans la tâche ambitieuse du traitement complet des équations dans le référentiel local : 1) une virtuosité mathématique supérieure à la nôtre; 2) un grand courage, touchant à la témérité; 3) une importante quantité de médicaments contre les migraines.

et normale. Les équations auxquelles nous aboutissons sont les suivantes

$$\sigma(\partial_t + u_t \partial_s)v = -\sigma\mu v + \sigma \frac{\Gamma}{b}(\partial_s \kappa_w) \sin \theta + (\Gamma \kappa_z - \mu_{\text{cl}} u_n + \Pi) \cos \theta \quad (2.13a)$$

$$\sigma(\partial_t + u_t \partial_s)u = \sigma g - \sigma\mu u + \sigma \frac{\Gamma}{b}(\partial_s \kappa_w) \cos \theta + (\Gamma \kappa_z - \mu_{\text{cl}} u_n + \Pi)(-\sin \theta) \quad (2.13b)$$

$$(\partial_t + u_t \partial_s)\sigma = -\sigma \partial_s u_t \quad (2.13c)$$

avec $\partial_s = \cos \theta \partial_x$, θ étant défini comme l'angle que fait le chemin du rivelet avec la verticale. Les équations (2.13a) et (2.13b) sont les projections de l'équation de la dynamique (2.2) selon \hat{z} et \hat{x} , respectivement, et l'équation (2.13c) vient directement depuis l'équation (2.3), qui traduit la conservation de la masse.

2

On peut ensuite effectuer un développement à un ordre arbitraire, en partant du fait que

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\partial_x z}{\sqrt{1 + (\partial_x z)^2}} \\ &= \epsilon \partial_x z_1 + \epsilon^2 \partial_x z_2 + \epsilon^3 \left(\partial_x z_3 - \frac{1}{2} (\partial_x z_1)^3 \right) + O(\epsilon^4) \\ \text{et } \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x z)^2}} \\ &= 1 - \epsilon^2 \frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 - \epsilon^3 \partial_x z_1 \partial_x z_2 + O(\epsilon^4). \end{aligned}$$

Vitesses

Les vitesses dans la base fixe et dans la base locale sont reliées par des relations géométriques simples :

$$u_t = u \cos \theta + v \sin \theta \qquad u = u_t \cos \theta - u_n \sin \theta$$

$$u_n = -u \sin \theta + v \cos \theta \qquad v = u_t \sin \theta + u_n \cos \theta.$$

De ces relations on tire en particulier les deux développements suivants, qui seront utiles plus tard :

$$u_{t0} = u_0 \quad (2.14a)$$

$$u_{t1} = u_1 \quad (2.14b)$$

$$\begin{aligned} u_{t2} &= u_2 - u_0 \frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 + v_1 \partial_x z_1 \\ &= u_2 + \frac{1}{2} u_0 (\partial_x z_1)^2 + \partial_t z_1 \partial_x z_1 \end{aligned} \quad (2.14c)$$

$$\begin{aligned} u_{t3} &= u_3 - u_1 \frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 - u_0 \partial_x z_1 \partial_x z_2 + v_1 \partial_x z_2 + v_2 \partial_x z_1 \\ &= u_3 + u_1 \frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 + u_0 \partial_x z_1 \partial_x z_2 + \partial_t z_1 \partial_x z_2 + \partial_t z_2 \partial_x z_1 \end{aligned} \quad (2.14d)$$

et

$$v_1 = u_{n1} + u_{t0}\partial_x z_1 = (\partial_t + u_0\partial_x)z_1 \quad (2.15a)$$

$$v_2 = u_{n2} + u_{t0}\partial_x z_2 + u_{t1}\partial_x z_1 = (\partial_t + u_0\partial_x)z_2 + u_1\partial_x z_1 \quad (2.15b)$$

$$\begin{aligned} v_3 &= u_{n3} - \frac{1}{2}(\partial_x z_1)^2 u_{n1} + u_{t0}\partial_x z_3 + u_{t1}\partial_x z_2 + u_{t2}\partial_x z_1 - \frac{1}{6}u_{t0}(\partial_x z_1)^3 \\ &= u_{n3} + u_0\partial_x z_3 + u_1\partial_x z_2 + u_2\partial_x z_1 + \frac{1}{2}\partial_t z_1(\partial_x z_1)^2 + \frac{1}{3}u_0(\partial_x z_1)^3. \end{aligned} \quad (2.15c)$$

Courbures

Il reste un point délicat à traiter concernant le traitement non-linéaire des équations : celui de l'expression des courbures.

Jusqu'au second ordre, les courbures effectives du chemin κ_z et du profil d'épaisseur κ_w correspondent sans ambiguïté à la dérivée spatiale au deuxième ordre de la variable adéquate :

$$\begin{aligned} \kappa_{z,1} &= \partial_{xx} z_1 & \kappa_{w,1} &= \partial_{xx} w_1 \\ \kappa_{z,2} &= \partial_{xx} z_2 & \kappa_{w,2} &= \partial_{xx} w_2 \end{aligned}$$

Mais au troisième ordre nous faisons face à une difficulté : le calcul de Park et Homsy 1984, qui sert de base à l'expression de la surpression capillaire en fonction des courbures, ne va pas jusqu'à cet ordre, et n'est donc rigoureusement pas défini au-delà de l'approximation $\kappa_\bullet \approx \partial_{xx}\bullet$. Pour essayer tout de même d'écrire un développement au troisième ordre, nous faisons le choix d'estimer la valeur des courbures au-delà de l'approximation linéaire en les définissant de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \kappa_z &= \frac{1}{2}(\kappa_{\zeta^+} + \kappa_{\zeta^-}) & &= \frac{1}{2} \frac{\partial_{xx}(z + w/2)}{(1 + (\partial_x(z + w/2))^2)^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{\partial_{xx}(z - w/2)}{(1 + (\partial_x(z - w/2))^2)^{3/2}} \\ \text{et } \kappa_w &= \kappa_{\zeta^+} - \kappa_{\zeta^-} & &= \frac{\partial_{xx}(z + w/2)}{(1 + (\partial_x(z + w/2))^2)^{3/2}} - \frac{\partial_{xx}(z - w/2)}{(1 + (\partial_x(z - w/2))^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Cette hypothèse mène au développement au troisième ordre suivant :

$$\begin{aligned} \kappa_{z,3} &= \partial_{xx} z_3 - \frac{3}{2}[(\partial_x z_1)^2 + (\partial_x w_1)^2/4]\partial_{xx} z_1 - \frac{3}{4}(\partial_x z_1)(\partial_x w_1)\partial_{xx} w_1 \\ \kappa_{w,3} &= \partial_{xx} w_3 - \frac{3}{2}[(\partial_x z_1)^2 + (\partial_x w_1)^2/4]\partial_{xx} w_1 - \frac{3}{4}(\partial_x z_1)(\partial_x w_1)\partial_{xx} z_1. \end{aligned}$$

La nature des termes est bonne (nous obtenons tous les termes autorisés par les symétries du problème), mais les préfacteurs exacts diffèrent probablement de ceux qui seraient révélés par une extension du travail de Park et Homsy à l'ordre trois en ϵ .

2.3 Vagues sur le rivelet

Le rivelet peut être vu comme le médium de transmission de deux types d'ondes : les ondes transverses, qui correspondent à une déformation du trajet suivi par le liquide, et les ondes longitudinales, qui correspondent à une modulation de l'épaisseur entre les ménisques. Dans cette section, nous discutons de ces ondes.

2.3.1 Relations de dispersion

Pour établir les relations de dispersion, on considère le cas de faible dissipation, *i.e.* $\mu \sim \epsilon$, et on se place dans la situation sans forçage acoustique ($\Pi = 0$). Nous introduisons la *vitesse capillaire*

$$v_c := \sqrt{\frac{\Gamma}{\sigma_0}} = \sqrt{\frac{\pi b \gamma}{2 \sigma_0 \rho}} \quad (2.16)$$

qui est la vitesse caractéristique associée à la compétition entre capillarité et inertie.

Les équations (2.12) peuvent alors être réécrites sous la forme

$$\mathcal{L}_z z_1 := [(\partial_t + u_0 \partial_x)^2 - v_c^2 \partial_{xx}] z_1 = 0 \quad (2.17a)$$

$$\mathcal{L}_w w_1 := \left[(\partial_t + u_0 \partial_x)^2 + v_c^2 \left(\frac{\sigma_0}{b} \right)^2 \partial_{xxxx} \right] w_1 = 0 \quad (2.17b)$$

où on a défini les opérateurs linéaires de propagation correspondant aux ondes transverse \mathcal{L}_z et longitudinales \mathcal{L}_w . Ces deux types d'ondes se propagent donc de manière linéairement indépendante. Cela traduit le fait qu'elles se propagent par le biais de deux mécanismes différents : les perturbations du chemin sont mues par les gradients de pression capillaire transverse créés par la courbure du chemin, quand les modulations d'épaisseur sont dues aux gradients longitudinaux causés par les inhomogénéités d'épaisseur.

Chaque type d'onde admet deux modes de propagation, ce qui correspond aux relations de dispersion

$$\omega_z^\pm = (u_0 \pm v_c) k_z \quad (2.18a)$$

$$\omega_w^\pm = u_0 k_w \pm v_c \frac{\sigma_0}{b} k_w^2 \quad (2.18b)$$

qui sont représentées sur la figure 2.7.

Les ondes transverses se propagent de façon non-dispersive, tandis que la relation de dispersion des ondes longitudinales (2.18b) comporte un terme quadratique dispersif. Pour chaque type d'ondes, deux branches coexistent : une branche « rapide » pour laquelle la vitesse de phase dans le référentiel du laboratoire est plus importante que la vitesse moyenne de l'écoulement u_0 , et une branche « lente » qui correspond aux vitesses de phase inférieures à u_0 (qui peuvent

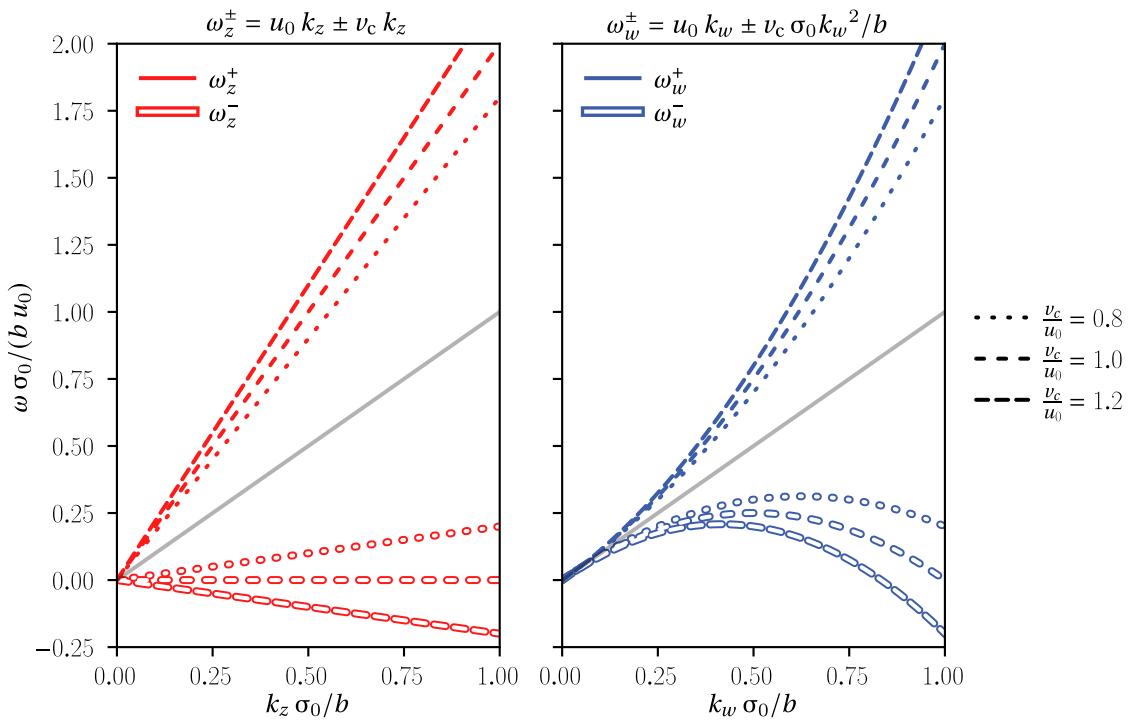


FIGURE 2.7 – Relation de dispersion des ondes transverses (en rouge, à gauche) et longitudinales (en bleu, à droite). Les axes correspondent à la pulsation adimensionnée $\omega \sigma_0 / (u_0 b)$ en ordonnée, et au vecteur d'onde adimensionné $k \sigma_0 / b$ en abscisse. Sur les courbes, les pointillés rendent compte du rapport v_c / u_0 . Le remplissage correspond à la branche considérée : lignes pleines pour la branche + (onde « rapide », de vitesse de phase supérieure à u_0), lignes creuses pour la branche - (onde « lente », de vitesse de phase inférieure à u_0). À chaque fois, la ligne grise correspond à l'advection pure à la vitesse du fluide dans le rivelet, c'est-à-dire à la droite $\omega = u_0 k$.

même être négatives). Notons que la branche « rapide »/« lente » correspond aux vitesses de phase positives/négatives dans le référentiel advecté à la vitesse u_0 , c'est-à-dire à des ondes co/contra-propageantes avec l'écoulement.

2.3.2 Approche énergétique

Nous terminons ce chapitre par une sorte de « complément » tout à fait facultatif : les notations qui sont introduites ici et les équations obtenues ne seront pas reprises dans la suite de ce travail. Le but est de gagner en recul, en profondeur de compréhension et en intuition sur le sujet des ondes se propageant sur le rivelet. Nous proposons à cet effet de développer des analogies avec d'autres systèmes bien connus en physique : corde vibrant transversalement, onde sonore dans un fluide et onde de flexion d'une poutre.

Pour ce faire, dans toute cette partie, on se place dans le référentiel advecté à la vitesse u_0 par rapport au référentiel du laboratoire.

Ondes transverses

Considérons d'abord les ondes transverses. Dans les conditions dans lesquelles nous nous sommes placés, les équations régissant leur propagation se réduisent à

$$\sigma_0 \partial_t v_1 = \Gamma \partial_{xx} z_1 \quad (2.19a)$$

$$v_1 = \partial_t z_1 \quad (2.19b)$$

Que l'on peut réécrire sous la forme

$$\lambda_0 \partial_t v_1 = \partial_x T_1 \quad (2.20a)$$

$$\partial_t T_1 = T_0 \partial_x v_1 \quad (2.20b)$$

2

où $\lambda := \sigma \rho$ est la masse linéique du rivelet, et $T := T_0 \partial_x z$ est la tension dans la direction z , avec $T_0 := \rho \Gamma = \pi \gamma b / 2$ la tension de ligne due à la capillarité.

Cette écriture rend évident le parallèle entre les ondes transverses sur le rivelet et celles qui parcourent une corde vibrante « classique ». Les variables énergétiquement couplées sont ici T_1 (terme d'effort) et v_1 (terme de flux). Le rôle de l'inertie est joué par la masse linéique $\lambda \approx \lambda_0 = \rho \sigma_0$, tandis que le terme de rappel élastique correspond à la tension capillaire T_0 . Il est alors direct de constater que v_1, T_1 (et donc z_1) sont solutions de l'équation de d'Alembert $\mathcal{L}_z \bullet = (\partial_{tt} - v_c^2 \partial_{xx}) \bullet = 0$, où le rôle de la célérité est joué par la vitesse capillaire $v_c = \sqrt{T_0 / \lambda_0} = \sqrt{\Gamma / \sigma_0} = \sqrt{\pi \gamma b / (2 \rho \sigma_0)}$.

On peut donc voir cette propagation comme un échange d'énergie entre

$$\text{densité linéique d'énergie potentielle transverse} \quad e_P^z := \frac{1}{2} \frac{1}{T_0} T^2 = \frac{1}{2} T_0 (\partial_x z)^2$$

$$\text{et densité linéique d'énergie cinétique transverse} \quad e_K^z := \frac{1}{2} \lambda_0 v^2 = \frac{1}{2} \lambda_0 (\partial_t z)^2.$$

Ainsi, la conservation de l'énergie contenue dans une petite portion du rivelet de taille dx permet d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} (e_P^z + e_K^z) + \frac{\partial}{\partial x} J^z = 0 \quad (2.21)$$

où $J^z := T_1 v_1 = T_0 \partial_x z_1 \partial_t z_1$ est le flux d'énergie transportée par l'onde transverse.

Si jamais on décide alors de rétablir la dissipation ($\mu \neq 0$), alors les équations deviennent

$$\lambda_0 \partial_t v_1 = \partial_x T_1 - \lambda_0 \left(\mu + \frac{\mu_{cl}}{\sigma_0} \right) v_1 + \frac{\mu_{cl} u_0}{\sigma_0 v_c^2} T_1 \quad (2.22a)$$

$$\partial_t T_1 = T_0 \partial_x v_1 \quad (2.22b)$$

et l'énergie n'est plus conservée : on a maintenant

$$\frac{\partial}{\partial t} (e_P^z + e_K^z) + \frac{\partial}{\partial x} J^z = -2 \left(\mu + \frac{\mu_{cl}}{\sigma_0} \right) e_K^z + \frac{\mu_{cl} u_0}{\sigma_0 v_c^2} J^z \quad (2.23)$$

où on voit l'apparition de deux nouveaux termes : un terme de drain correspondant aux frottements, purement dissipatif puisqu'il est toujours négatif, qui diminue en permanence l'énergie totale du système ; et un terme source d'amplification qui apporte de l'énergie au système : c'est ce terme qui est responsable du méandrage spontané traité au chapitre 5.

Ondes longitudinales

Considérons maintenant les ondes longitudinales. Dans les conditions dans lesquelles nous nous sommes placés, les équations régissant leur propagation se réduisent à

$$\partial_t u_1 = \frac{\Gamma}{b} \partial_{xxx} w_1 \quad (2.24a)$$

$$\partial_t w_1 = -\frac{\sigma_0}{b} \partial_x u_1. \quad (2.24b)$$

Que l'on peut réécrire sous la forme

$$\lambda_0 \partial_t u_1 = -\partial_x f_1 \quad (2.25a)$$

$$\partial_t \lambda_1 = -\lambda_0 \partial_x u_1 \quad (2.25b)$$

où $f_1 = -\frac{\sigma_0 \Gamma}{b^2} \partial_{xx} \lambda_1 = -\left(\frac{\sigma_0}{b}\right)^2 \frac{T_0}{\lambda_0} \partial_{xx} \lambda_1$ est la force pressante agissant transversalement sur le rivelet, et où $\lambda_1 = \rho \sigma_1$ représente les variations de la masse linéique $\lambda = \rho \sigma$ avec l'épaisseur $\sigma = \sigma_0 + \epsilon \sigma_1 + \dots$

Cette écriture est à rapprocher de celle d'une onde sonore se propageant dans un fluide contenu dans un tuyau de section S : la masse linéique λ_1 est alors analogue à la masse linéique du fluide ρS , tandis que la force pressante f_1 correspond aux actions de pression $P S$. La grandeur d'effort est donc ici la force pressante f_1 , tandis que la grandeur de flux correspond à la vitesse longitudinale u_1 . Le rôle de l'inertie est joué par la masse linéique λ_0 , et le rôle de l'élasticité par la compressibilité complexe du rivelet

$$\chi(k) := \frac{-1}{\lambda_0} \frac{\partial \lambda}{\partial f} \Big|_{\lambda_0} = \frac{b^2}{T_0 \sigma_0^2 (-ik)^2} = \frac{1}{T_0 (\sigma_0 k/b)^2} \quad (2.26)$$

où on a utilisé le formalisme complexe $\partial_x \leftrightarrow \times(-ik)$ avec k le vecteur d'onde. Ainsi u_1, f_1 (et donc λ_1, w_1) sont solution de l'équation $\mathcal{L}_w \bullet = (\partial_{tt} + (\sigma_0/b)^2 v_c^2 \partial_{xxxx}) \bullet = 0$. Par analogie avec les ondes sonores, la vitesse de phase est en effet $v_\phi = \sqrt{1/(\chi \lambda_0)} = v_c \sigma_0 k/b$ qui dépend de la fréquence. On obtient une propagation dispersive, formellement analogue à celle des ondes transverses de flexion dans les poutres.

On peut aussi voir cette propagation comme un échange d'énergie entre

$$\text{densité linéique d'énergie potentielle longitudinale} \quad e_P^w := \frac{1}{2} \chi f_1^2$$

$$\text{et densité linéique d'énergie cinétique longitudinale} \quad e_K^w := \frac{1}{2} \lambda_0 u_1^2.$$

Ainsi, la conservation de l'énergie contenue dans une petite portion du rivelet de taille dx

permet d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} (e_P^w + e_K^w) + \frac{\partial}{\partial x} J^w = 0 \quad (2.27)$$

où $J^w := f_1 u_1 = T_0 \partial_x z_1 \partial_t z_1$ est le flux d'énergie transporté par l'onde longitudinale. Ajouter les frottements visqueux permet d'obtenir les équations

$$\lambda_0 \partial_t u_1 = -\partial_x f_1 - \lambda_0 \mu u_1 \quad (2.28a)$$

$$\partial_t \lambda_1 = -\lambda_0 \partial_x u_1. \quad (2.28b)$$

Ce qui amène à une modification de l'équation énergétique

$$\frac{\partial}{\partial t} (e_P^w + e_K^w) + \frac{\partial}{\partial x} J^w = -2 \mu e_K^w \quad (2.29)$$

qui correspond bien au fait que les oscillations d'épaisseur sont toujours atténuées.

Couplage entre ondes

Pour comprendre le couplage entre les ondes transverses et longitudinales, on peut considérer la situation où le système est forcé acoustiquement à grande amplitude ($\Pi = \Pi_0 \neq 0$). Les équations sont alors

$$\lambda_0 \partial_t v_1 = \partial_x T_1 - \lambda_0 \left(\mu + \frac{\mu_{\text{cl}}}{\sigma_0} \right) v_1 + \frac{\mu_{\text{cl}} u_0}{\sigma_0 v_c^2} T_1 + \lambda_1 \mathcal{A}_0 \quad (2.30a)$$

$$\partial_t T_1 = T_0 \partial_x v_1 \quad (2.30b)$$

$$\lambda_0 \partial_t u_1 = -\partial_x f_1 - \lambda_0 \mu u_1 - \frac{b}{\sigma_0 v_c^2} T_1 \mathcal{A}_0 \quad (2.30c)$$

$$\partial_t \lambda_1 = -\lambda_0 \partial_x u_1 \quad (2.30d)$$

avec le coefficient de couplage $\mathcal{A}_0 = (\partial_t + \mu)v_0$.

Les équations de conservation de l'énergie deviennent alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \lambda_0 v^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{T_0} T^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (v T) = - \left(\mu + \frac{\mu_{\text{cl}}}{\sigma_0} \right) (\lambda_0 v^2) + \frac{\mu_{\text{cl}} u_0}{\sigma_0 v_c^2} (v T) - \mathcal{A}_0 \lambda_0 \chi (v f) \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \lambda_0 u^2 + \frac{1}{2} \chi f^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (u f) = -\mu (\lambda_0 u^2) - \frac{\mathcal{A}_0 b}{\sigma_0 v_c^2} (u T) \quad (2.32)$$

que l'on peut interpréter aisément. Dans les membres de gauche, on distingue clairement l'évolution temporelle et le transport de l'énergie; dans les membres de droites, on voit d'une part la dissipation, et d'autre part les échanges énergétiques possibles entre les différentes ondes, par le biais des couplages croisés amenés par le forçage acoustique.

3

FILM DÉPOSÉ PAR UN RIVELET EN MOUVEMENT

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux conséquences du mouvement transverse du rivelet par forçage acoustique. Lorsqu'il est déplacé latéralement, le rivelet d'une part dépose un fin film de liquide derrière lui, et d'autre part voit les ménisques qui le délimitent se déformer. La plupart des résultats liés à l'étude des films déposés (sections 3.2 à 3.4) a été publiée dans un article paru dans le journal Physics of Fluids, en juin 2025 (Le Lay et Daerr 2025c). Toutes les données présentées dans ces parties, ainsi que les programmes informatiques permettant leur analyse, ont été déposées dans un répertoire en libre accès (Le Lay et Daerr 2025b).

3

3.1	Principe et motivations	56
3.1.1	Films minces et enduisage contrôlé	56
3.1.2	Analyse d'image	58
3.1.3	Déposition à haute accélération	58
3.1.4	Dissipation de ligne de contact	59
3.2	Mesure interférométrique d'épaisseur de film	60
3.2.1	Montage expérimental	60
3.2.2	Méthodes numériques	61
3.3	Drainage d'un film liquide	65
3.3.1	Évolution spatio-temporelle	65
3.3.2	Drainage du film déposé : théorie	67
3.3.3	Drainage du film déposé : mesures	69
3.4	Déposition périodique d'un film	72
3.4.1	Mesure de la vitesse du rivelet	72
3.4.2	Mesure de l'épaisseur des films	72
3.4.3	Comparaison entre vitesse de déposition et hauteur du film	74
3.4.4	Lien avec la théorie de LLD	76
3.4.5	Vitesse de drainage	77
3.5	Déformation du rivelet à haute fréquence	80
3.5.1	Visualisation d'un rivelet oscillant	80
3.5.2	Mouvements rapides du rivelet	83
	Conclusion du chapitre 3	87

Dans ce chapitre, nous présentons des mesures interférométriques de l'épaisseur des films laissés derrière le rivelet lorsqu'il est en mouvement. En déplaçant le rivelet acoustiquement, nous enduisons les plaques de verre formant la cellule d'un très fin film de liquide. En observant le système avec une lumière monochromatique, nous voyons des franges d'interférences dues à la très faible épaisseur des films, que nous sommes en mesure de démoduler afin d'accéder à géométrie précise de l'interface.

Le présent chapitre est structuré en cinq parties. Tout d'abord, dans la section 3.1, nous présentons le contexte dans lequel s'inscrit cette étude et nous exposons les motivations qui ont été les nôtres pour effectuer ce travail; puis dans la section 3.2, nous exposons notre méthode expérimentale, qui diffère des méthodes utilisées dans le reste du manuscrit. Par la suite, nous nous intéressons aux conséquences de trois types de mouvements différents du filet liquide. Dans la section 3.3, nous examinons les films produits par un mouvement rapide et soudain du filet. Ce mouvement brusque laisse derrière le filet un film initialement épais, dont nous pouvons suivre l'évolution sur de longues durées. Dans la section 3.4, nous étudions les films laissés par des filets adoptant un mouvement périodique relativement lent. Cela nous permet de souligner que nous sommes en mesure créer des films hautement reproductibles avec une géométrie précisément contrôlée. Enfin dans la section 3.5, qui ne contient que des résultats inédits, nous discutons du cas des rivelets déplacés périodiquement à haute vitesse ou à haute fréquence. Nous décrivons alors et expliquons la déformation importante subie par les ménisques à la suite de ces mouvements rapides. Dans la conclusion de ce chapitre, nous revenons sur les résultats principaux et nous proposons des pistes d'amélioration et d'approfondissement.

3

3.1 Principe et motivations

Nous présentons ici quatre raisons qui ont motivé le choix des expériences présentées dans la suite de ce chapitre : nous proposons une méthode originale d'enduisage contrôlé; nous mettons à disposition de la communauté une technique de mesure de films fins avec une excellente résolution dans le domaine spatial comme temporel; nous ouvrons la voie de l'exploration d'enduisage à haute accélération; enfin, nous gagnons des informations relatives à la dissipation de ligne de contact à laquelle est soumis le rivelet.

3.1.1 Films minces et enduisage contrôlé

L'entraînement de fluide par un substrat en mouvement est un phénomène d'intérêt dans de nombreux contextes, en particulier celui de l'enduisage/ du revêtement (*coating*) de solides par une fine couche de liquide. De l'isolation des fils électriques à la modification des propriétés optiques de surfaces du verre, le contrôle de l'épaisseur et de l'uniformité de cette épaisseur de fluide est d'importance cruciale. Exercer ce contrôle permet aussi de créer des films inhomogènes texturés, par exemple en contrôlant les instabilités apparaissant en présence d'évaporation (Deegan et al. 1997; Berteloot et al. 2012). Dans les écoulements confinés, la transition d'entraînement gouverne la pression nécessaire pour générer des écoulements multiphasiques tels que les bulles

de Taylor (*Taylor bubbles*), en raison de la forte dissipation visqueuse dans les ménisques déplacés. Ce type d'écoulements apparaît dans de nombreuses applications, y compris l'étude et la conception de dispositifs microfluidiques (Baroud, Gallaire et Dangla 2010), la conception de collecteurs de condensats (*Slugcatchers*) dans l'industrie pétrolière¹ (Osipov 2017), ou la prévention de l'obstruction des voies respiratoires dans le contexte biomédical (Grotberg 2011; Baudoin et al. 2013). Enfin, les écoulements multiphasiques sont d'un intérêt particulier dans l'étude des échanges de masse vapeur–liquide dans les caloducs (*heat pipes*) (X. Zhang et Nikolayev 2021). Dans ce domaine, les films minces oscillants ont suscité une attention croissante en tant que moyen efficace d'améliorer le transport dans les échangeurs thermiques à capillarité (*capillary driven heat exchangers*) (J. Zhang, Hou et Sun 1998; Nikolayev 2021), et nécessitent une compréhension de leur évolution dans des systèmes non stationnaires tels que les caloducs à boucle (*loop heat pipes*) (Launay et al. 2007).

Le dispositif expérimental présenté dans cette thèse, qui permet de générer un rivelet liquide et de le déplacer grâce à des pressions acoustiques, peut aussi être vu comme un dispositif de déposition de films d'épaisseur contrôlée. Dans cette section, nous explorons donc ce système sous l'angle de l'enduisage non uniforme à large plage dynamique, et nous montrons que nous sommes en mesure de créer des films qui peuvent être modulés à l'échelle sub-micronique en épaisseur, et à l'échelle sub-millimétrique dans la direction du mouvement du ménisque. Le rivelet étant étendu spatialement dans la direction verticale, il permet de déposer un film sur une aire importante. En réglant la pression à droite et à gauche du rivelet, on contrôle son déplacement, et donc l'épaisseur du film déposé. Il est ainsi possible de moduler le film à deux niveaux :

- d'abord une modulation temporelle, où en changeant en fonction du temps la différence de pression entre les bords du rivelet, on peut déposer un film ayant un profil arbitraire;
- ensuite une modulation spatiale, où en modifiant le flux d'air injecté dans la cellule, on peut changer localement la pression exercée sur le rivelet en fonction de la coordonnée x et générer ainsi des surfaces texturées en deux dimensions.

Dans ce cadre, le rivelet constitue un système particulièrement intéressant, notamment en raison de son épaisseur réduite, qui diminue d'autant la quantité de liquide nécessaire à l'enduisage. Peu massif, le rivelet ne nécessite pas de grande différence de pression pour être déplacé, et cette faible inertie le rend sensible à des évolutions rapides de la pression imposée. Cette caractéristique est à contraster avec le déplacement d'un important volume de fluide par un autre (Saffman et Taylor 1958; Tabeling, Zocchi et Libchaber 1987), ou avec des configurations utilisant le mouvement du substrat.

1. Il est possible pour les curieux d'observer un grand nombre de ces *slugcatchers* sur des images satellites, grâce au travail méticuleux (mais dont les motivations restent pour nous mystérieuses) de l'utilisateur wikipedia DirfD, qui en a recensé plus d'une centaine : [wikipedia.org/wiki/Slugcatcher](https://en.wikipedia.org/wiki/Slugcatcher).

3.1.2 Analyse d'image

Afin de visualiser et de mesurer quantitativement les caractéristiques des films déposés, plusieurs techniques sont utilisées dans la littérature. La visualisation optique directe du système permet uniquement d'observer le ménisque, qui réfracte fortement la lumière, mais empêche les mesures sur le film lui-même (Lips et al. 2010). L'épaisseur d'un film très mince peut être mesurée avec précision en un point, ou bien par spectrométrie du signal réfléchi (Snoeijer 2008; Fourgeaud et al. 2017), ou bien en mesurant le déplacement des points de focalisation d'un laser (Youn, Han et Shikazono 2018). Des profils entiers peuvent alors être capturés en déplaçant la sonde ponctuelle, à condition que l'évolution du film soit périodique ou stationnaire. Alternativement, le profil du film peut être reconstruit en analysant la distorsion optique d'un fil (Snoeijer et al. 2006) ou d'une grille (Gurfein et al. 1991; Fourgeaud et al. 2017) vue à travers l'interface, avec une résolution spatiale limitée par l'espacement de la grille. La visualisation des franges d'interférence unidirectionnelles pour différentes longueurs d'onde (Zheng et al. 2002) permet aussi de mesurer le profil du film. Il est courant que plusieurs de ces techniques soient combinées afin de cumuler leurs avantages.

Dans cette section, nous suivons l'évolution du film à l'aide d'une technique de mesure interférométrique pour étudier la structure et la dynamique du film déposé avec une excellente résolution à la fois spatiale et temporelle. La précision des profils obtenus est telle que nous sommes en mesure de quantifier la contribution des écoulements induits par la tension de surface, qui dépendent de la dérivée spatiale du quatrième ordre, et de la comparer au drainage gravitationnel. Nous sommes également capables de vérifier que la loi d'échelle de Landau-Levich-Dejarguin (LLD) (Landau et Levich 1942; Derjaguin 1943; Cantat 2013) pour l'épaisseur du film reste valable même lorsque le ménisque accélère depuis un état statique jusqu'à sa vitesse maximale sur une distance caractéristique faible, de l'ordre de la taille du ménisque. Pour encourager l'utilisation de cette technique de mesure, et pour que les méthodes que nous avons utilisées soient accessibles au reste de la communauté, tous les scripts et toutes les méthodes numériques employées pour acquérir, visualiser, analyser, débruiter et quantifier les données expérimentales ont été stockées en ligne au sein un jeu de données accessible librement depuis la plateforme Zenodo (Le Lay et Daerr 2025b). Nous espérons que ces codes informatiques commentés, associés à des instructions d'utilisation, permettront à d'autres de se servir de cette technique sans avoir à essuyer les écueils auxquels nous avons été confrontés.

3.1.3 Déposition à haute accélération

En plus des intérêts technologiques et techniques évoqués précédemment, nous pensons que le dispositif présenté ici pourrait être utilisé pour comprendre finement deux effets responsables d'écart à la loi d'échelle LLD pour les mouvements rapides, à savoir les influences comparées de l'inertie et de la couche limite visqueuse (Quéré 1999).

D'une part, dans le cas de substrats extraits d'un bain, l'inertie du fluide conduit à une divergence de l'épaisseur du film déposé (de Ryck et Quéré 1996). En effet, lorsque la pression dynamique $\rho |\mathbf{u}|^2$ dépasse la chute de pression capillaire dans la région du ménisque dynamique,

de l'ordre de $\sim \gamma/r$ où r est le rayon de courbure du ménisque, cette dernière ne peut plus empêcher la masse liquide d'entrer dans la zone du film, dont l'épaisseur tend alors à diverger. Cette transition est donc contrôlée par le nombre de Weber $We = \rho |\mathbf{u}|^2 r / \gamma$.

D'autre part, la couche limite visqueuse du fluide entraîné s'amincit avec l'augmentation de la vitesse dans le cas de substrats extraits d'un bain (de Ryck et Quéré 1994), ou avec une accélération plus forte dans notre configuration. La force due à l'accélération du fluide, d'ordre $\rho |\ddot{\mathbf{u}}|$, est alors compensée par la force visqueuse d'ordre $\rho \nu |\mathbf{u}|/\delta^2$ avec δ l'épaisseur de la couche limite. Cela devrait *diminuer* l'épaisseur du film déposé, qui suivrait alors une loi en $\sqrt{\nu |\mathbf{u}| / |\ddot{\mathbf{u}}|}$ dans notre cas.

Les deux phénomènes, divergence et amincissement, sont observés successivement dans le cas de substrats extraits d'un bain (Quéré 1999), où le principal paramètre de contrôle (la vitesse) régit les deux transitions. Dans le système présenté ici, en imposant par exemple au rivelet un mouvement sinusoïdal d'amplitude A et de pulsation ω , il est possible de contrôler la vitesse $|\mathbf{u}| \sim A\omega$ et l'accélération du fluide $|\ddot{\mathbf{u}}| \sim A\omega^2$. Le nombre de Weber $We \approx \rho b A^2 \omega^2 / (2\gamma)$ et l'épaisseur de la couche limite $\sqrt{\nu/\omega}$ sont donc contrôlables indépendamment, ce qui devrait permettre d'explorer des régimes où l'un des effets domine tandis que l'autre ne joue pas de rôle significatif. On s'attend en particulier à ce que l'effet dû à l'amincissement de couche limite visqueuse domine lorsqu'elle atteint l'ordre de grandeur de la demi-épaisseur de la cellule $b/2$, c'est à dire pour $\omega \gtrsim 4\nu/b^2 \approx 11$ rad/s, tandis que le nombre de Weber devient important lorsqu'il est d'ordre unité, soit pour $A\omega \gtrsim \sqrt{4\gamma/(\rho b)} \approx 260$ mm/s. En contrôlant indépendamment l'amplitude A et la fréquence ω du mouvement, on peut donc choisir de se placer dans un régime où l'un de ces deux effets domine l'autre.

3.1.4 Dissipation de ligne de contact

Comme on l'a mentionné au chapitre 2, la dynamique du rivelet est très fortement influencée par la dissipation due au déplacement transverse des ménisques. Le mouvement d'un ménisque entraîne en effet une importante dissipation due au gradient de vitesse qui augmente au fur et à mesure que l'épaisseur de fluide s'affine. Cette dissipation dépend crucialement de l'épaisseur de la couche liquide sur laquelle le rivelet avance (pour le ménisque avançant) et de celle que le rivelet laisse derrière lui (pour le ménisque reculant). Comprendre le phénomène de dépôt de film permet d'estimer la hauteur des films laissés derrière le rivelet, et donc d'estimer l'importance de la dissipation dans la dynamique du filet liquide.

Dans notre cas, nous avons choisi, comme indiqué en 2.1.3, de modéliser cette dissipation par une force de frottement proportionnelle à la vitesse de déplacement transverse des ménisques. Le coefficient de proportionnalité de cette force est alors de l'ordre de $\mu b^2 \sqrt{\frac{b}{h_\infty}}$, où h_∞ est la hauteur effective des films sur lesquels le rivelet glisse. Les expériences montrées dans le présent chapitre nous permettront donc d'évaluer la pertinence de cette approximation, et d'estimer un ordre de grandeur de h_∞ .

3.2 Mesure interférométrique d'épaisseur de film

3.2.1 Montage expérimental

Pour générer un film liquide sur les plaques, nous utilisons le dispositif décrit au chapitre 1. Le rivelet, dans ce chapitre toujours composé d'huile perfluorée HT 135 (indice optique $n = 1,28$), est déplacé par un gradient de pression imposé par les haut-parleurs, qui peuvent être assortis de composants qui permettent de focaliser le flux d'air. Lors de son déplacement, les ménisques délimitant le rivelet déposent derrière eux de très minces films liquides sur les deux plaques (voir fig. 3.1), qui constituent le principal objet d'étude de ce chapitre. En modifiant le signal envoyé aux haut-parleurs, le mouvement du rivelet peut être contrôlé avec précision. Cela permet un dépôt déterministe et reproductible de films liquides sur les plaques.

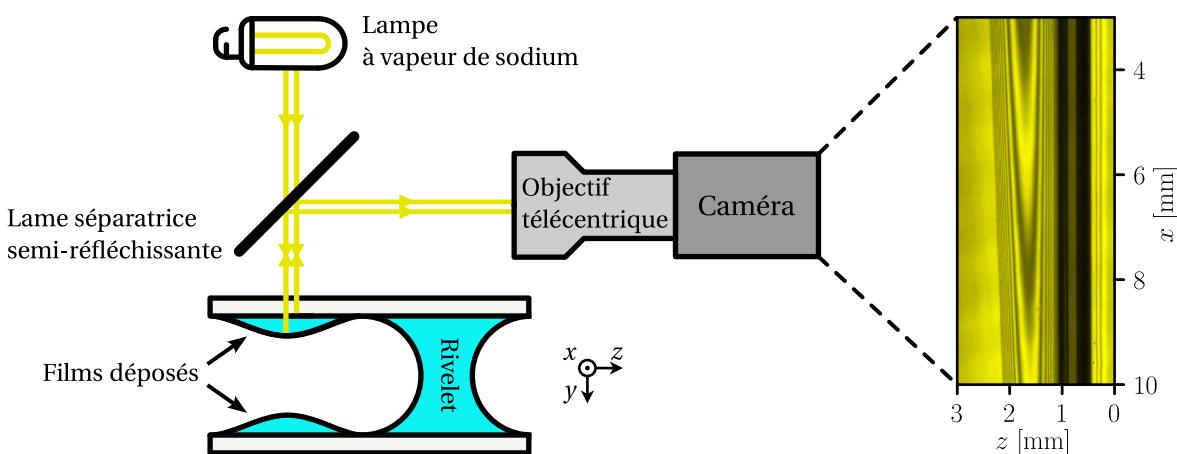


FIGURE 3.1 – Montage de visualisation interférométrique (les proportions ne sont pas à l'échelle). Le rivelet est déplacé sous l'effet du forçage (ici de la gauche vers la droite), et dépose derrière lui une fine couche de liquide sur les plaques. Les franges qui résultent des interférences entre les rayons lumineux réfléchis sont observées par une caméra. Une image expérimentale typique est présentée sur la droite : on y voit le rivelet (à droite, qui apparaît comme une longue bande noire) et les franges correspondant au film déposé, à sa gauche.

Mesurer avec précision la géométrie d'un film aussi mince (pas plus épais que $10 \mu\text{m}$) ainsi que son évolution temporelle constitue un défi expérimental. Pour adopter une convention univoque, par la suite nous appellerons systématiquement *hauteur*, et noterons $h(x, z, t)$, l'extension spatiale dans la direction y (qui correspond également à la profondeur, ou épaisseur) du film. Les films présentent un rapport d'aspect extrêmement élevé, leur hauteur étant environ mille fois plus petite que leur extension transversale (selon z) et longitudinale (selon x).

Pour maximiser la résolution spatiale dans toutes les directions tout en maintenant une haute définition temporelle, nous utilisons une méthode interférométrique. Cela permet de mesurer des variations microscopiques de l'épaisseur du film sur une échelle spatiale macroscopique dans les directions x et z , tout en résolvant temporellement tous les phénomènes d'intérêt. Nous utilisons un éclairage monochromatique (lampe à vapeur de sodium haute pression, longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$) pour visualiser le film. La lumière réfléchie par les interfaces verre-huile et huile-air est combinée au niveau du capteur de manière à générer une figure d'interférence,

que nous observons à l'aide d'une lame séparatrice semi-réfléchissante et d'une caméra, comme illustré sur la fig. 3.1.

Les séquences expérimentales d'images sont enregistrées par une caméra AVT Manta G-223B, contrôlée par le logiciel libre Limrendir (voir section 1.4), et sur laquelle est montée un objectif télécentrique qui permet de sélectionner uniquement la lumière arrivant perpendiculairement à la surface du verre. La faible profondeur de champ (0,43 mm, donnée constructeur) de cet objectif (Myutron MGTL10V) nous permet de nous focaliser sélectivement sur le film déposé sur la plaque la plus proche de la caméra. La lumière rétrodiffusée par la plaque la plus éloignée et par les interfaces externes verre-air de la cellule de Hele-Shaw apparaît alors floue et ne contribue donc qu'à un signal de base uniforme. Notons que pour toutes les images présentées dans cette section, le schéma de couleurs (*colormap*) a été choisi pour offrir un bon contraste visible entre les franges d'interférence sombres et claires. Habituellement, les films que nous obtenons présentent une section transversale ($h(z)$) ressemblant à une moitié d'ellipse très aplatie (avec un rapport d'aspect élevé, de l'ordre de 1000/1), et dont la hauteur $h_{\max}(z)$ varie très lentement avec la coordonnée x (avec des pentes très faibles, de l'ordre de 10^{-4}).

Les images obtenues consistent en une succession de franges d'interférence claires et sombres, correspondant à des lignes de niveau « iso-hauteur » du film. Puisque la topographie du film est encodée dans les franges, il est possible de démoduler le signal de luminosité pour retrouver le profil de hauteur du film.

3.2.2 Méthodes numériques

Transformée de Hilbert

La principale méthode numérique utilisée dans ce chapitre repose sur la transformée de Hilbert. Avant de détailler les résultats obtenus en utilisant cette technique sur des données réelles, nous nous proposons d'expliquer son principe de fonctionnement, illustré sur la figure 3.2.

Considérons un signal expérimental réel $s(t)$ du temps t , qui peut être toujours vu comme le produit d'une fonction d'amplitude $A(t)$ et du cosinus d'une phase $\phi(t)$, on peut donc écrire

$$s(t) = A(t) \cos \phi(t) = \frac{1}{2}A(t)e^{i\phi(t)} + \frac{1}{2}A(t)e^{-i\phi(t)} \quad (3.1)$$

en utilisant la formule d'Euler pour le cosinus. Un exemple de signal où A et ϕ sont non-triviaux est montré sur la figure 3.2 (a). Le but et l'intérêt de la transformation de Hilbert est de séparer les informations d'amplitude et de phase, qui sont mélangées dans le signal original.

La transformée de Fourier de ce signal est une fonction $\hat{s}(f)$ de la fréquence f , et l'hermiticité de la transformée de Fourier assure alors que $\hat{s}(-f) = \hat{s}(f)^*$, où \bullet^* est le conjugué de la quantité \bullet . De la même manière qu'une onde stationnaire peut être vue comme la somme de deux ondes de même amplitude se propageant dans des directions opposées, on peut en quelque sorte toujours décomposer un signal oscillant en deux composantes complexes dont la phase varie de manière monotone.

Faire une transformée de Hilbert consiste, à partir d'un signal expérimental, à calculer sa

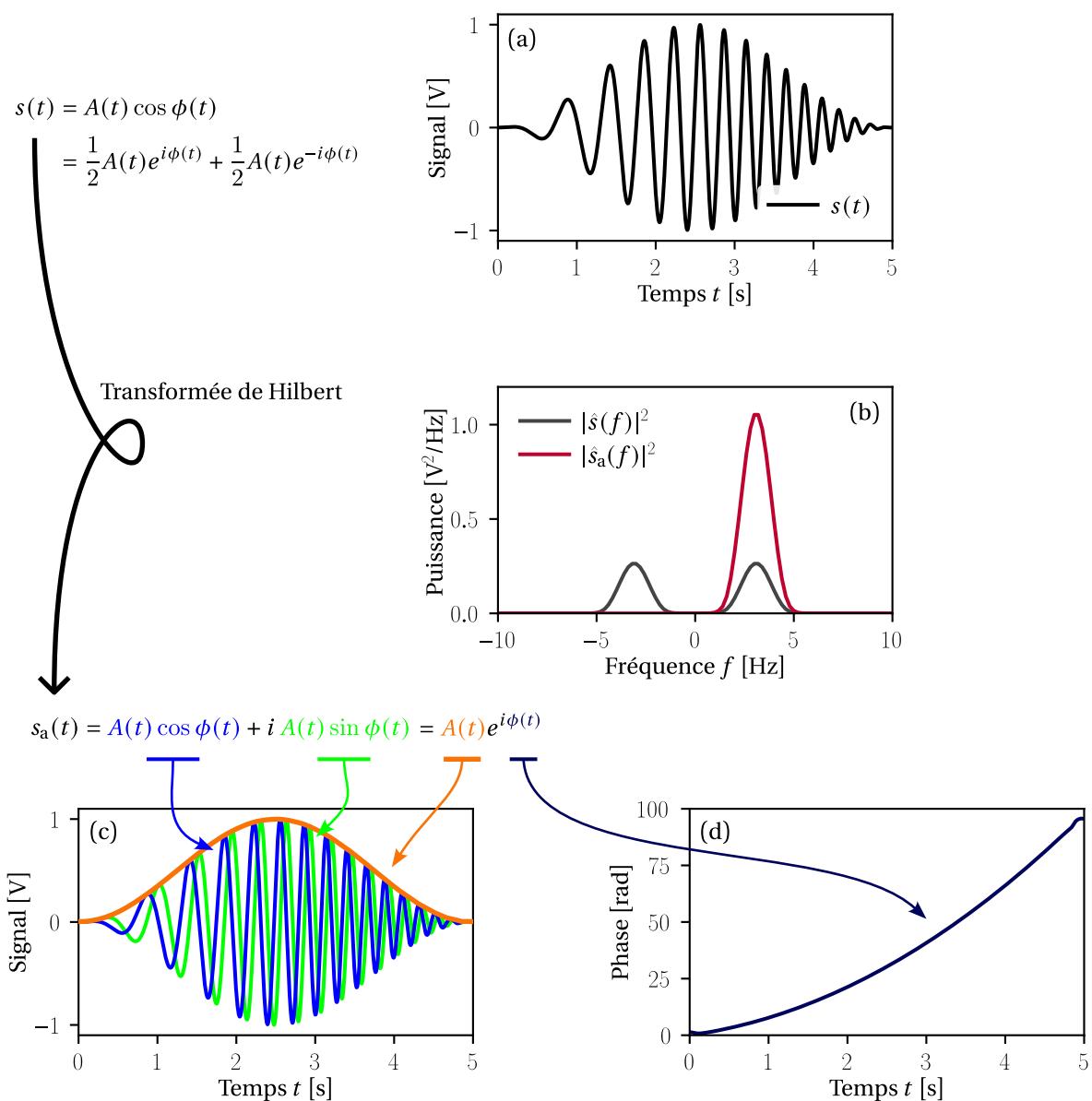


FIGURE 3.2 – Illustration du principe de fonctionnement de la transformée de Hilbert.

transformée de Fourier, et à appliquer un masquage qui brise la symétrie par rapport au point $f = 0$: les composantes correspondant aux fréquences négatives sont annulées, tandis que les composantes correspondant aux fréquences positives sont multipliées par deux afin de conserver l'énergie totale du signal. Cette transformation est illustrée sur la figure 3.2 (b) : par rapport au signal de référence (gris), le spectre du signal transformé (rouge sombre) est dissymétrique.

Le résultat de la transformée de Fourier inverse de ce signal masqué correspond au signal dit analytique $s_a(t)$, qui s'exprime

$$s_a(t) = A(t)e^{i\phi(t)} = A(t) \cos \phi(t) + i A(t) \sin \phi(t) \quad (3.2)$$

et qui n'est donc plus une fonction réelle du temps. On remarque que la partie réelle du signal analytique correspond alors au signal réel original (courbe bleue sur la figure 3.2 (c)), et la partie

imaginaire à un signal en quadrature de phase avec le signal original (courbe verte sur la figure 3.2 (c)).

Mieux encore, la norme du signal analytique $|s_a(t)|$ correspond à l'amplitude de l'enveloppe du signal original $A(t)$ (courbe orange sur la figure 3.2 (c)). Enfin, et c'est ce qui est le plus intéressant pour nous dans cette partie, la phase du signal analytique $\arg s_a(t)$ correspond directement à la phase du signal original, pour peu que celle-ci soit monotone (courbe sur la figure 3.2 (d)).

Bien sûr, appliquer la transformée de Hilbert à des signaux expérimentaux réels se révèle souvent plus complexe que ce qui est montré sur cette explication pédagogique. En particulier, l'attribution d'une évolution du signal d'origine à une variation de phase ou bien une variation d'amplitude n'est pas toujours univoque, surtout pour les signaux d'amplitude faible (proche de zéro), à la phase non-monotone ou bien fortement bruités. Les composantes basses fréquences, notamment le décalage à l'origine (*offset*), doivent être corrigés pour que la transformée ait l'effet escompté. La transformée de Hilbert, comme celle de Fourier sur laquelle elle s'appuie, suppose implicitement que le signal est périodique (avec une période correspondant à la taille de la fenêtre temporelle). Cela peut poser des problèmes en cas de discontinuité aux bords, et il peut être nécessaire de symétriser le signal avant de le transformer. Enfin, la phase obtenue, définie à un signe près, est en réalité comprise entre 0 et 2π . Il faut donc la « dérouler » (*unwrap*) pour obtenir la phase absolue, tâche qui peut se révéler délicate si les variations de phase sont non-monotones. Un exemple de transformation de Hilbert sur un signal réel est visible par exemple plus bas, sur la figure 3.10.

La transformée de Hilbert est adaptable en deux dimensions, à condition de choisir une direction par rapport à laquelle définir les fréquences « positives » et « négatives ». Une telle direction est forcément arbitraire, et il n'est pas toujours possible d'en trouver une qui permette de rendre compte avec fidélité de tout le signal. Le dépliement de la phase sur un plan est, lui aussi, plus complexe qu'en une dimension.

Démodulation du signal d'interférences

Les variations de luminosité sur l'image correspondent à des variations de hauteur du film, que nous pouvons donc déduire quantitativement en utilisant une transformée de Hilbert, comme le montre la figure 3.3. Dans ce travail, la procédure que nous utilisons pour trouver le profil de hauteur du film repose sur les quatre étapes suivantes :

1. Le signal est d'abord nettoyé en supprimant le bruit non significatif : les composantes haute fréquence correspondant au bruit au niveau du capteur de la caméra, et les composantes basse fréquence correspondant au bruit de fond et à la perte de contraste due à la proximité des franges ;
2. La phase instantanée du signal résultant est obtenue, typiquement par transformée de Hilbert (c'est-à-dire en masquant de manière appropriée la transformée de Fourier du signal), ou en détectant les points/lignes extrema en luminosité, qui correspondent aux franges claires ou sombres ;

3. La phase résultante est déroulée (ou dépliée, en anglais *unwrapped*), de sorte que le point de phase 0 corresponde à l'absence (hauteur nulle) de film;
4. L'information de phase est convertie en information de hauteur en utilisant la condition d'interférence.

Une illustration du résultat de ce processus est visible sur la figure 3.3.

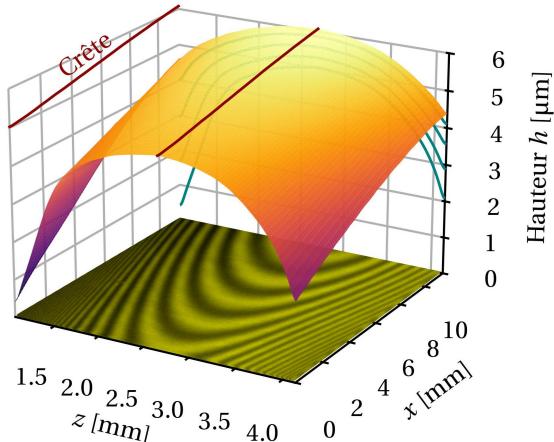


FIGURE 3.3 – Profil de hauteur d'un film liquide typique en fonction des coordonnées longitudinale (x) et transverse (z). Sur cette image illustrative, l'origine des axes est arbitraire. La ligne de crête est représentée par une ligne rouge sombre. Quelques sections transverses prises à des coordonnées x différentes sont projetées au fond de l'image, en bleu. Notons que les échelles en x et z sont différentes : le film est en vérité allongé dans la direction longitudinale. Les origines des axes x et z sont arbitraires.

3

En effet, la luminosité d'une frange dépend de la valeur de la différence de phase entre les rayons lumineux interférants $\Phi = 2\pi \frac{2h}{\lambda}$, où $\lambda = \lambda_0/n$ est la longueur d'onde de la lumière dans le liquide. Entre deux franges de luminosité opposée, la différence de hauteur correspond donc à une différence de phase $\Phi = \pi$. Cela correspond à $h_0 := \lambda/4 \approx 117$ nm. Nous pouvons ainsi mesurer des variations de hauteur correspondant à un dixième de micron sur des échelles spatiales allant de 10 μm (distance entre les centres de deux pixels adjacents avec un grossissement de l'objectif de 1,0) à 20 mm (champ de vision entier de la caméra, correspondant à 2000 pixels). Il est alors possible de suivre l'évolution de la géométrie du film entier sur des échelles de temps arbitrairement courtes (ou longues) en modifiant la fréquence d'acquisition de la caméra (ou la durée d'acquisition).

Tous les codes sources et routines d'analyse utilisés pour obtenir les figures présentées dans ce chapitre, ainsi que toutes les données brutes pertinentes, sont disponibles dans un dépôt en accès libre contenant tous les détails et instructions nécessaires (Le Lay et Daerr 2025b).

3.3 Drainage d'un film liquide

Dans cette section, nous mesurons les caractéristiques d'un film liquide généré par un mouvement rapide du rivelet. Cela nous permet de mettre en lumière la précision des mesures obtenues avec notre méthode, et nous montrons par exemple que grâce à une haute définition à la fois spatiale et temporelle, nous sommes en mesure d'expliquer quantitativement l'évolution de la géométrie du film en fonction du temps.

3.3.1 Évolution spatio-temporelle

Lorsque le rivelet est soumis à un mouvement brusque, il laisse derrière lui un film au profil transverse relativement tranchant, à cause du changement rapide de vitesse de dépôt pendant le mouvement. Nous sommes en mesure de suivre l'évolution temporelle de ce film, en mesurant les changements de ses propriétés géométriques avec le temps. Lors de la relaxation, la géométrie du film évolue de deux manières : sa section transverse s'aplatit, et la hauteur de sa ligne de crête diminue en raison du drainage du liquide. Dans ce chapitre, nous appelons « crête » la courbe $h_c(x, t)$ formée par tous les maxima de hauteur du film le long de la direction transverse. Une illustration de ce concept est donnée figure 3.3, où la crête est représentée en rouge foncé.

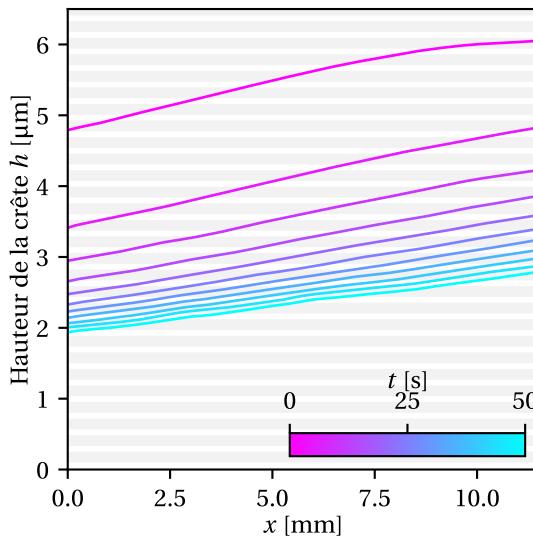


FIGURE 3.4 – Évolution de la hauteur de crête h_c en fonction de l'espace (axe des abscisses) pour différents instants espacés de 5 secondes (échelle de couleur). Les bandes horizontales blanches et grises ont une épaisseur (et un espacement) de $h_0 = \lambda/4$, correspondant à un déphasage de $\pi/2$ et donc au passage d'une frange sombre à une frange brillante. Elles permettent d'estimer le nombre de franges visibles en suivant la ligne de crête dans la direction longitudinale à un instant donné.

Pour les expériences présentées dans cette section, nous avons imposé un mouvement brusque au rivelet en le soumettant à une marche de pression brutale, ce qui a forcé un mouvement rapide et saccadé dans une direction. Le rivelet étant alors immobile, nous observons ensuite la figure d'interférence produite par les films liquides laissés derrière lui par le rivelet. En démodulant les images obtenues par la caméra, il devient possible de mesurer la hauteur de la crête du film liquide $h_c(x, t)$ en fonction de l'espace et du temps. Sur la figure 3.4, nous avons

représenté h_c en fonction de x , pour différents temps t . Comme on peut le constater, le film est drainé petit à petit, et la hauteur de sa crête diminue à mesure que le temps avance. Notons que la hauteur de crête présente une pente $\partial_x h_c$ non nulle : c'est la signature du fait que la vitesse du mouvement du rivelet, et donc l'épaisseur du film déposé, soit plus importante à certains endroits qu'à d'autres.

Grâce à la haute définition temporelle permise par notre méthode, nous pouvons aller encore plus loin et pousser la mesure de la hauteur de crête à sa limite en visualisant sur un seul graphe l'ensemble du champ $h_c(x, t)$. Ceci est réalisé en relevant le signal lumineux le long de la ligne de crête à chaque image avec une fréquence d'acquisition élevée (50 images/s). La luminosité le long de la ligne de crête en fonction du temps et de l'espace est représentée sur la figure 3.5 (gauche).

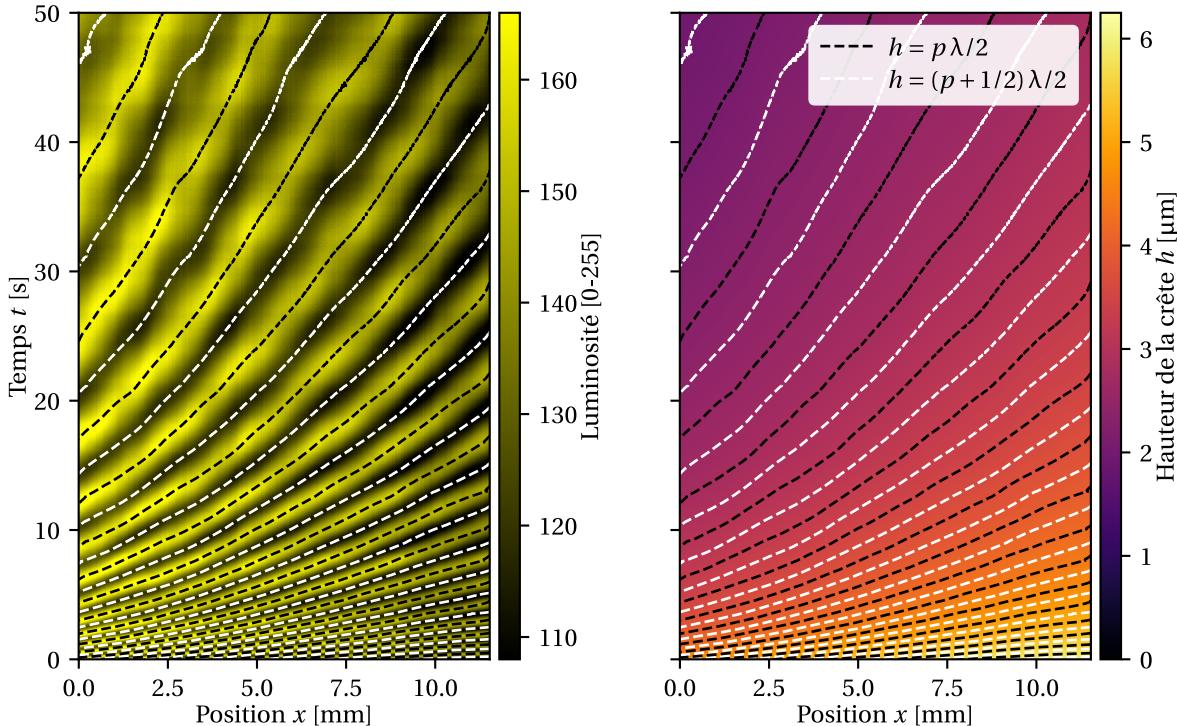


FIGURE 3.5 – Évolution spatio-temporelle de la hauteur de crête $h_c(x, t)$.

(gauche) : Signal expérimental, c'est-à-dire luminosité mesurée le long de la ligne de crête.
 (droite) : Profil de hauteur reconstruit en déroulant la phase du signal de gauche, obtenue grâce à une transformée de Hilbert bidimensionnelle. Les lignes pointillées noires correspondent aux lignes de niveau $h = p \lambda/2$ calculées par rapport au profil de hauteur de gauche pour tous les entiers p . Cela devrait correspondre sur le graphe de droite à un déphasage $\Delta\Phi = 2p\pi$, donc à une interférence constructive (frange brillante). Les lignes pointillées blanches correspondent aux lignes de niveau $h = (p + 1/2)\lambda/2$ calculées par rapport au profil de hauteur de gauche pour tous les entiers p . Cela devrait correspondre sur le graphe de droite à un déphasage $\Delta\Phi = p\pi$, donc à une interférence destructive (frange sombre).

Il est alors possible d'exploiter cette information de luminosité : en utilisant une transformée de Hilbert bidimensionnelle, nous pouvons retrouver la phase du signal analytique correspondant. La phase instantanée $\Phi(x, t)$ du signal nous permet alors de reconstruire l'intégralité du profil de hauteur de crête, grâce à la relation $h = \lambda, \Phi/(4\pi)$. Les résultats de ce processus d'extraction de hauteur sont présentés sur la figure 3.5 (droite). Sur ce graphe, nous avons tracé sur le profil de hauteur spatio-temporel les lignes de niveau correspondant à $h_c = N h_0$, avec N un entier pair

(lignes noires en pointillés) ou impair (lignes blanches en pointillés). Ces lignes de niveaux, calculées à partir du signal de hauteur reconstruit, sont aussi celles qui sont tracées sur la même figure, à gauche. Comme on peut le vérifier visuellement, ces niveaux correspondent bien aux franges d'interférence claires et sombres, ce qui est attendu puisqu'ils correspondent respectivement aux conditions d'interférence constructive (lignes noires) et destructive (lignes blanches) pour la lumière réfléchie. Nous pouvons alors envisager d'utiliser cette information pour comprendre quantitativement le mécanisme d'évolution de la hauteur.

3.3.2 Drainage du film déposé : théorie

Nous venons de montrer qu'il nous était possible d'accéder expérimentalement à de nombreuses grandeurs délicates à mesurer, telles que le profil de hauteur de crête $h_c(x, z, t)$, sa pente $\partial_x h_c$ et même son évolution temporelle $\partial_t h_c$. Nous montrons dans cette section que nous pouvons relier quantitativement ces variables, confirmant ainsi la pertinence et la précision de nos mesures.

L'évolution temporelle de la hauteur $h(x, z, t)$ du film est régie par l'équation des films minces pour un fluide newtonien sans cisaillement de surface sur un substrat vertical (Craster et Matar 2009; Kalliadasis et al. 2012; Cantat 2013). Elle s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \Phi_{\text{evap}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{q} = \frac{h^3}{3\rho\nu} [\nabla(\gamma\nabla^2 h) + \rho g] \quad (3.3)$$

où, en plus des variables déjà introduites \mathbf{q} représente le flux volumique local de fluide, et Φ_{evap} le flux évaporatif. Le flux de fluide \mathbf{q} peut être séparé en deux contributions, dues à la capillarité et à la gravité. Puisque la surface extérieure du film est courbée, il existe une pression capillaire à l'intérieur du liquide $\gamma\nabla^2 h$, dont le gradient est responsable d'un écoulement capillaire. Et, puisque le film est déposé sur une surface verticale, la force volumique gravitationnelle ρg induit un écoulement gravitaire.

Pour appliquer cette équation aux films qui nous intéressent dans cette étude, on peut effectuer plusieurs simplifications. Tout d'abord, dans notre système, la hauteur du film varie toujours plus fortement dans la direction transverse que dans la direction de l'écoulement (*streamwise*) — les valeurs typiques mesurées de la pente dans la direction transverse étant de l'ordre de $3 \cdot 10^{-3}$, à comparer à $5 \cdot 10^{-5}$ dans la direction verticale. Cela nous permet de négliger les dérivées spatiales selon la direction verticale ∂_x par rapport aux dérivées partielles d'ordre similaire selon la direction transverse ∂_z . De plus, en s'appuyant sur la constatation expérimentale que l'atmosphère dans le canal n'est renouvelée que lentement, nous pouvons raisonnablement considérer que l'air à l'intérieur de la cellule est saturé en vapeur du liquide. Cela est confirmé par le fait que nous observons régulièrement que certains films extrêmement minces (moins de $0,5 \mu\text{m}$ d'épaisseur) présents dans le champ de vision ne disparaissent pas durant le temps d'une expérience, ce qui ne serait pas le cas si l'évaporation jouait un rôle important. Ainsi, puisque de plus nous ne chauffons pas notre système, l'évaporation Φ_{evap} peut être considérée comme négligeable dans notre cas. Et comme nous nous intéressons à l'évolution de la hauteur de la crête $h_c(x, t)$, pour laquelle

$\partial_z h = 0$ (par définition), on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{g}{\nu} \frac{\ell_c^2 h^3}{3} \frac{\partial^4 h}{\partial z^4} - \frac{g}{\nu} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{à } h = h_c \quad (3.4)$$

où l'on a introduit la longueur capillaire $\ell_c := \sqrt{\gamma/(\rho g)}$. La variation de hauteur du film au niveau de la crête est la somme de deux contributions, liées aux écoulements d'origines physiques différentes que nous avons introduites précédemment : capillarité et gravité. Le second terme de l'équation (3.4) correspond à l'advection du profil de crête, caractérisée par sa pente $\partial_x h$, due à l'écoulement gravitaire de type Poiseuille dans le film. Le premier terme représente le drainage du fluide vers les bords (ou le centre) du film lorsqu'il y a un excès (ou un déficit) de courbure à la crête. Il dépend du « *tranchant* » $\partial_{zzzz} h|_{h_c}$ de la crête, qui est la grandeur géométrique rendant compte de l'évolution spatiale du rayon de courbure de l'interface. Notons que nous utilisons ici le néologisme *tranchant* pour pallier l'absence, à notre connaissance, de terme standard pour désigner la dérivée quatrième par rapport à l'espace. Cette grandeur peut s'écrire $\partial_{zzzz} h = \epsilon/(R L^2)$, où R est le rayon de courbure, L la longueur caractéristique sur laquelle évolue la courbure ; et ϵ est égal à -1 s'il y a un excès de masse au centre du film (le profil transverse est « plus pointu » qu'une parabole), ou bien à $+1$ si la masse est répartie principalement sur les bords du film, c'est-à-dire si le film est « plus plat » qu'une parabole.

La prédominance de l'un ou l'autre de ces termes peut être déterminée en utilisant un nombre sans dimension comparant capillarité et gravité, assimilable à un nombre de Bond :

$$Bo = \frac{3 |\partial_x h|}{\ell_c^2 h |\partial_{zzzz} h|} = |\partial_x h| \frac{3R}{h} \left(\frac{L}{\ell_c} \right)^2. \quad (3.5)$$

Pour faciliter l'évaluation de ce nombre, on peut exprimer R géométriquement : la section transversale du film est à-peu-près une portion de cercle de hauteur H , de demi-largeur L et de rayon R , d'où la relation $L = R \sin \theta \approx R\theta$ où $\theta \ll 1$ est le demi angle d'ouverture du cône qui contient notre profil lorsque vu depuis le centre de courbure. On a aussi $h = R(1 - \cos \theta) \approx R\theta^2/2 \approx L^2/(2R)$, soit au final $R \approx L^2/(2h)$. En prenant des valeurs expérimentales typiques, on peut considérer une hauteur de film de $h = 3 \mu\text{m}$ et une demi-extension transverse du film de $L = 0,3 \text{ mm}$, ce qui donne $R \approx 15 \text{ mm}$. Cela fournit une valeur typique attendue pour le *tranchant* de $|\partial_{zzzz} h| \approx 1/(R L^2) \approx 1/\text{mm}^3$.

On peut alors estimer le nombre de Bond typique pour nos expériences, pour lesquelles le gradient de hauteur longitudinal $|\partial_x h_c|$ est de l'ordre de 10^{-4} , et nous obtenons alors $Bo \approx 10^{-1}$: l'écoulement devrait être dominé par la capillarité. Cependant, cette estimation en ordre de grandeur est particulièrement fragile et il faut s'en méfier : par exemple, le nombre de Bond dépend de la valeur de L considéré à la puissance quatre, alors que l'estimation que nous en faisons est très grossière. Il est donc nécessaire, pour conclure sans ambiguïtés, de mesurer expérimentalement avec précision les propriétés géométriques du film afin de déterminer quel effet domine vraiment le drainage du film.

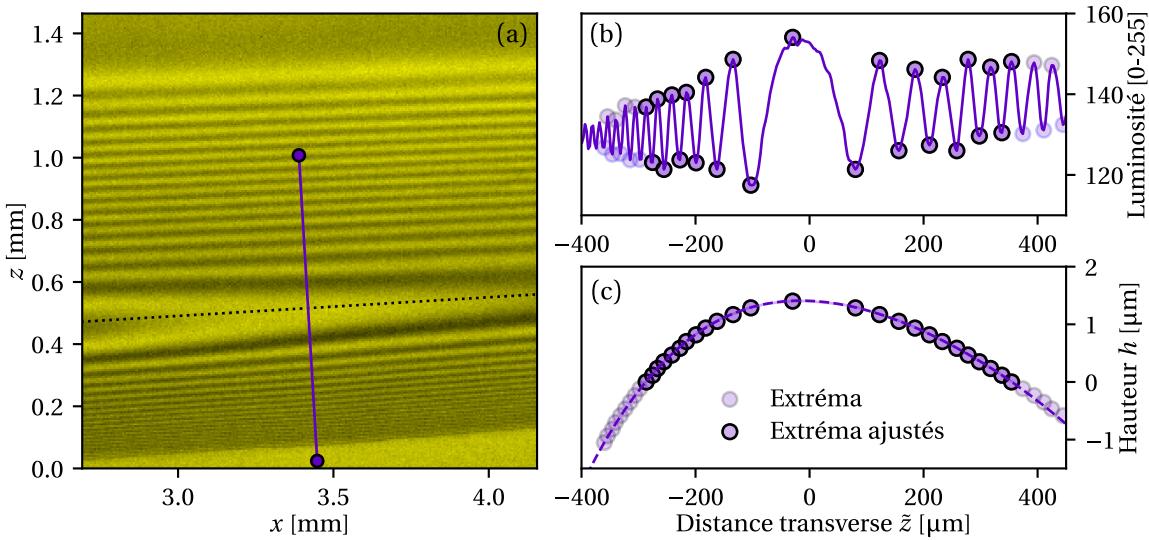


FIGURE 3.6 – Protocole de mesure du tranchant en un point de la crête. (a) Sur l'image expérimentale, on repère la ligne transverse à la crête, le long de laquelle on va échantillonner la luminosité. (b) Le signal de luminosité en fonction de la coordonnée transverse. Les extrema sont repérés par des cercles remplis. (c) Profil de hauteur reconstruit (à un décalage vertical arbitraire près). La ligne pointillée correspond à l'ajustement par un polynôme d'ordre quatre, effectué sur les extrema pris en compte (ici les 24 extrema les plus proche du centre). Les extrema sur le bord servent de témoins pour estimer la pertinence de l'ajustement et éviter le surajustement (*overfitting*).

3.3.3 Drainage du film déposé : mesures

La mesure de $\partial_x h_c$ est directe, simple, et précise, puisqu'elle revient à mesurer l'espacement des franges d'interférences le long de la crête. La mesure du *tranchant* $\partial_{zzzz} h$, en revanche, est beaucoup plus délicate, car elle nécessite l'estimation de la dérivée quatrième d'un signal expérimental. Il est toujours difficile d'estimer de manière précise et surtout fiable une dérivée d'ordre aussi élevé sur un signal réel, et donc bruité. Grâce à la grande précision de la méthode interférométrique, nous sommes capables d'extraire une mesure significative de cette grandeur ainsi que de son incertitude, comme présenté dans la figure 3.6.

Pour ce faire, considérant un point sur la ligne de crête, nous opérons une coupe transverse de l'image, dans la direction orthogonale à celle de la ligne de crête (figure 3.6 (a)). Le profil de luminosité obtenu est alors typiquement similaire à celui montré à la figure 3.6 (b) : les franges sont de moins en moins écartées au fur et à mesure que l'on s'éloigne du point central. Notons par ailleurs l'asymétrie des franges, qui témoigne du fait que le déplacement effectué par le rivelet pour générer ce film était lui-même asymétrique dans le temps (l'accélération était plus intense que la décélération). Nous pouvons alors repérer les maxima et les minima de luminosité, et en déduire le profil complet de hauteur dans la direction transverse par transformée de Hilbert. La partie du film la plus proche du centre (correspondant aux maxima repérés en symboles pleins) est alors ajustée par un polynôme d'ordre quatre. Nous montrons sur la figure 3.6 (c) le résultat de cet ajustement, qui est cohérent même en considérant les points qui n'ont pas été considérés pour l'ajustement : c'est une manière pour nous de vérifier que l'ajustement obtenu n'est pas absurde. Cette même mesure est répétée plusieurs fois par image, pour en vérifier la pertinence

et la fiabilité, comme montré sur la figure 3.7.

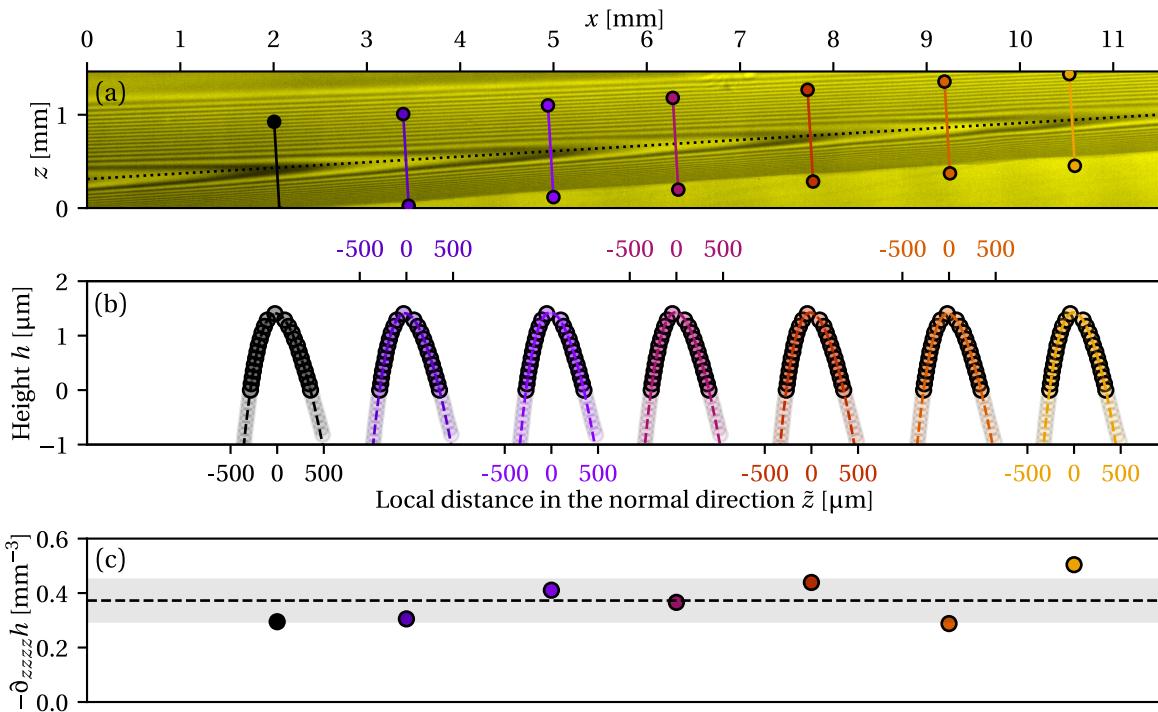


FIGURE 3.7 – Mesure du tranchant sur toute une image. (a) Le long de la ligne de crête, on choisit les extrema de luminosité pour y mesurer le tranchant. (b) Pour chaque point, le protocole de la figure 3.6 est appliqué, et le profil reconstruit est ajusté par un polynôme d'ordre quatre (lignes pointillées). (c) Valeurs obtenues pour la dérivée quatrième du profil de hauteur en fonction de la coordonnée transverse. Puisque nous disposons de plusieurs mesures, nous sommes en mesure d'attribuer une incertitude statistique à la valeur du tranchant obtenue (zone grise).

Pour chaque image d'intérêt, nous effectuons automatiquement autant de mesures de tranchant qu'il y a de franges (brillantes ou sombres) sur la ligne de crête. Cela nous permet d'obtenir une mesure de cette grandeur moyennée sur toute l'image, et d'en estimer l'incertitude, comme visible sur la figure 3.7 sur laquelle on voit les sept profils de hauteur reconstruits, les ajustements correspondants, et les valeurs de tranchant qui en sont déduites. Ce processus nous permet d'obtenir une valeur précise pour cette grandeur qui n'est pas d'accès immédiat. Pour l'image montrée figure 3.7, le tranchant mesuré est de $-0,5/\text{mm}^3$, ce qui est du même ordre de grandeur que l'estimation grossière que nous avions faite plus haut de $1/\text{mm}^3$.

À partir de ces mesures, nous sommes à même de calculer l'ordre de grandeur des deux termes du membre de droite de l'équation (3.4) : le drainage gravitaire, lié au gradient longitudinal (figure 3.8 (b)), et le drainage capillaire, lié au tranchant (figure 3.8 (c)). Et, puisque notre résolution temporelle le permet, nous pouvons également mesurer directement $\partial_t h$ avec une précision comparable, afin de vérifier nos prédictions. La comparaison entre la mesure directe de la diminution de hauteur et les effets calculés dus à la capillarité et à la gravité est visible sur la figure 3.8 (d).

Comme on peut le voir sur la figure 3.8 (d), dans le cas du film issu d'un mouvement brusque comme étudié dans cette section, l'effet dominant dans la diminution de la hauteur de crête est la capillarité (barres rouges), ce qui est cohérent avec l'estimation grossière du nombre de Bond

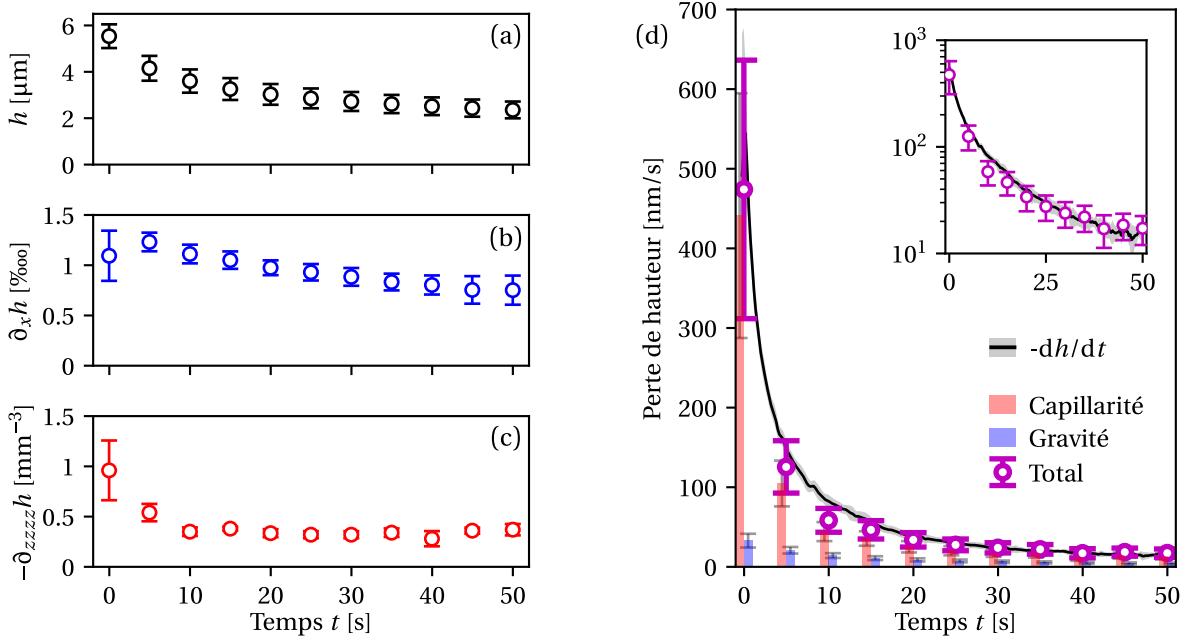


FIGURE 3.8 – (a), (b), (c) : hauteur moyenne, pente dans la direction longitudinale, et tranchant pour la direction transverse, pour une portion de film en cours de drainage, en fonction du temps.

(d) Perte de la hauteur du film au niveau de la crête en fonction du temps. La contribution de la capillarité correspond aux barres rouges (sur la gauche), et celle de la gravité aux barres bleues (sur la droite). Les points violet correspondent au drainage total correspondant à la somme des deux contributions. La ligne noire correspond à la mesure directe de $\partial_t h_c$. En insert : même données en échelle semi-logarithmique, montrant que l'accord est excellent même pour de faibles débits.

faite plus haut. En effet, l'excès de courbure au centre du film pousse le fluide vers les bords, ce qui diminue la hauteur du film au niveau de la crête.² Cela s'ajoute au drainage gravitationnel dû au fait que le film est déposé sur une plaque verticale (barres bleues). La somme des deux contributions est indiquée par des symboles violets, qui reproduisent bien les résultats de la courbe noire, correspondant à la mesure directe de $\partial_t h_c$, accessible à chaque instant grâce à la résolution temporelle élevée.

La méthode que nous utilisons permet donc de mesurer avec précision les caractéristiques spatiales d'un film, de suivre son évolution dans le temps y compris pour des vitesses de retrait très faibles, de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres par seconde, et d'identifier les mécanismes physiques sous-jacents responsables de ces phénomènes.

2. La situation opposée, où un déficit de courbure au centre pousse le liquide vers l'intérieur, peut aussi être observée expérimentalement, par exemple lors de l'étude du drainage d'un fluide sur une plaque verticale étroite (Xue et Stone 2022).

3.4 Déposition périodique d'un film

Un autre intérêt de notre dispositif est la capacité de choisir les caractéristiques initiales du film déposé en contrôlant le mouvement imposé au rivelet. En effet, puisque les films sont déposés par les ménisques situés aux bords du rivelet, déplacer ce dernier à une vitesse contrôlée conduit à la déposition d'un film de hauteur déterministe. Dans cette section, nous déplaçons périodiquement le rivelet d'avant en arrière dans la direction transverse, à l'aide de haut-parleurs placés sur les côtés de la cellule. En mesurant indépendamment la vitesse de déposition et l'épaisseur du film, nous confirmons que nous pouvons comprendre et prédire la hauteur du film résultant de ce mouvement.

3.4.1 Mesure de la vitesse du rivelet

Comme la lumière incidente est fortement réfractée par les ménisques situés sur les côtés du rivelet, la luminosité y est minimale — seule la lumière réfléchie sur les premières interfaces de verre (air-verre et verre-huile) atteint la lentille — si bien que les ménisques apparaissent comme des bandes sombres sur les images expérimentales, comme visible sur la figure 3.9 (a). La luminosité est légèrement plus élevée dans la région centrale du rivelet, qui reçoit également de la lumière en provenance de la plaque arrière hors foyer, mais elle reste plus faible qu'à l'extérieur du rivelet, où des réflexions supplémentaires sur les interfaces huile-air à fort contraste optique contribuent au signal lumineux.

Pour une position x donnée et à un temps t , en observant le profil de luminosité (figure 3.9 (b)), on peut déterminer le centre du rivelet dont la position est notée, dans ce chapitre uniquement, $z_c(x, t)$. Cela est réalisé par un algorithme ajustant un profil idéalisé heuristique aux données expérimentales de luminosité. En appliquant cette méthode à différentes images, nous sommes capables de suivre l'évolution temporelle de $z_c(x, t)$, montrée sur la figure 3.9 (c). Cela nous permet de mesurer expérimentalement l'amplitude du mouvement et la vitesse instantanée du rivelet. Le rivelet ayant une largeur approximativement constante, cette vitesse de déplacement du centre correspond à la vitesse de déposition des ménisques, qui dicte la hauteur du film déposé.

3.4.2 Mesure de l'épaisseur des films

Lorsqu'on observe le profil de luminosité pour une coordonnée x donnée, on peut également identifier la zone sur laquelle le film s'étend. Cela correspond à la zone grisée dans la figure 3.10 (haut). Notons que près du ménisque du rivelet, l'intensité lumineuse chute et les franges d'interférence ne sont plus résolues, en raison de la forte pente de l'interface. La mesure du profil de hauteur dans cette région requiert un système caméra/objectif avec une ouverture numérique et une résolution spatiale plus importantes que celles que nous utilisons.

Nous utilisons ensuite un algorithme pour détecter les maxima et minima de luminosité, c'est-à-dire les positions des franges claires et sombres résultants des interférences constructives et destructives. Pour obtenir la phase, on peut associer à chaque extrémum un déphasage de π et représenter le résultat en fonction de la coordonnée transverse, comme illustré en figure 3.10 (bas).

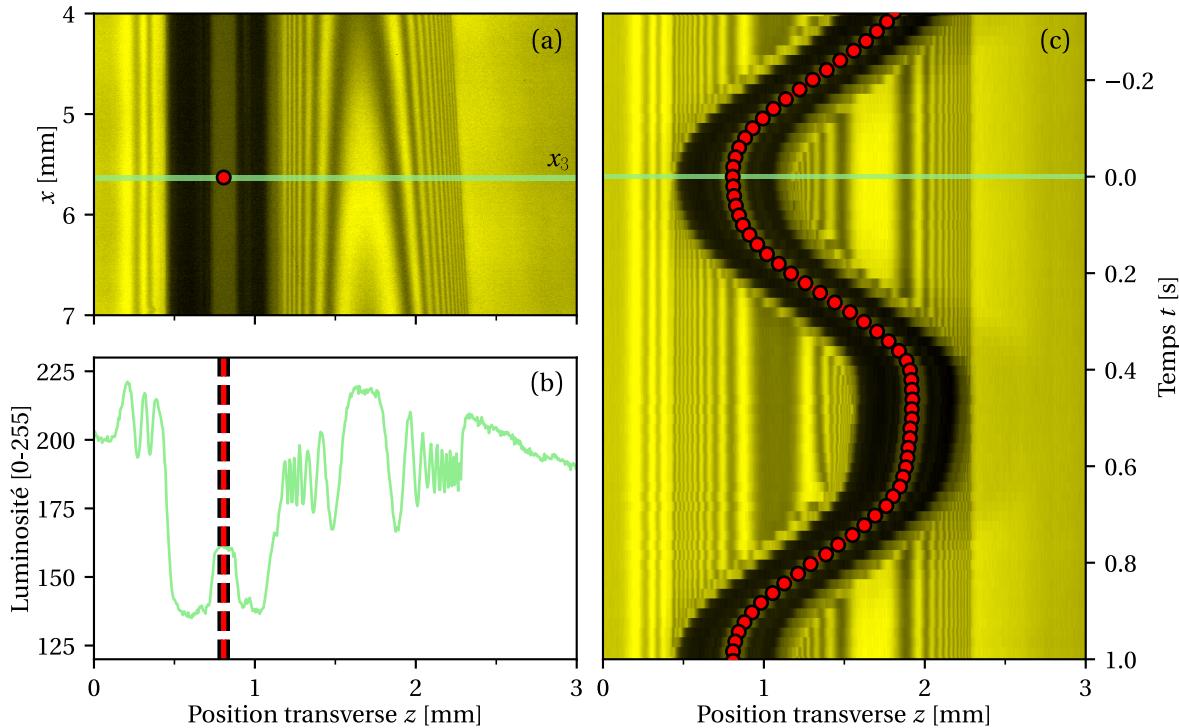


FIGURE 3.9 – Mesure de la position du rivelet. (a) : Image expérimentale prise à $t = 0$. Le rivelet est vu comme deux bandes sombres, entourant une zone peu lumineuse. Le film qu'il a laissé derrière lui est visible sur sa droite. Un point rouge marque la position du centre du rivelet $z_c(x = x_3, t = 0)$. (b) : Profil de luminosité pour $x = x_3$. La position du rivelet, repérée automatiquement, est marquée de tirets verticaux rouges et noirs. (c) : Tranches d'images expérimentales en $x = x_3$ prises à différents instants, en fonction du temps (en ordonnée). La position du centre du rivelet $z_c(x = x_3, t)$ correspond aux points rouges. Au fur et à mesure du mouvement, la position (et la vitesse) du rivelet varient de façon périodique, avec ici une période de 1 s.

Enfin, il est possible d'obtenir des informations sur la hauteur même dans les zones intermédiaires entre franges claires et sombres, c'est-à-dire avec une résolution « sous-frange ». Pour cela, on construit un signal analytique à l'aide de la transformée de Hilbert du signal de luminosité. La phase locale de ce signal permet ensuite de calculer un profil interpolé, représenté par une courbe continue dans la fig 3.10 (bas). Cela permet une mesure spatialement bien résolue de la hauteur du film h . Notons l'échelle de l'axe horizontal de la figure 3.10 (bas) : on utilise la distance relative au centre du rivelet $z - z_c(x, t)$, ce qui permet de comparer de manière pertinente les profils à différentes positions x .

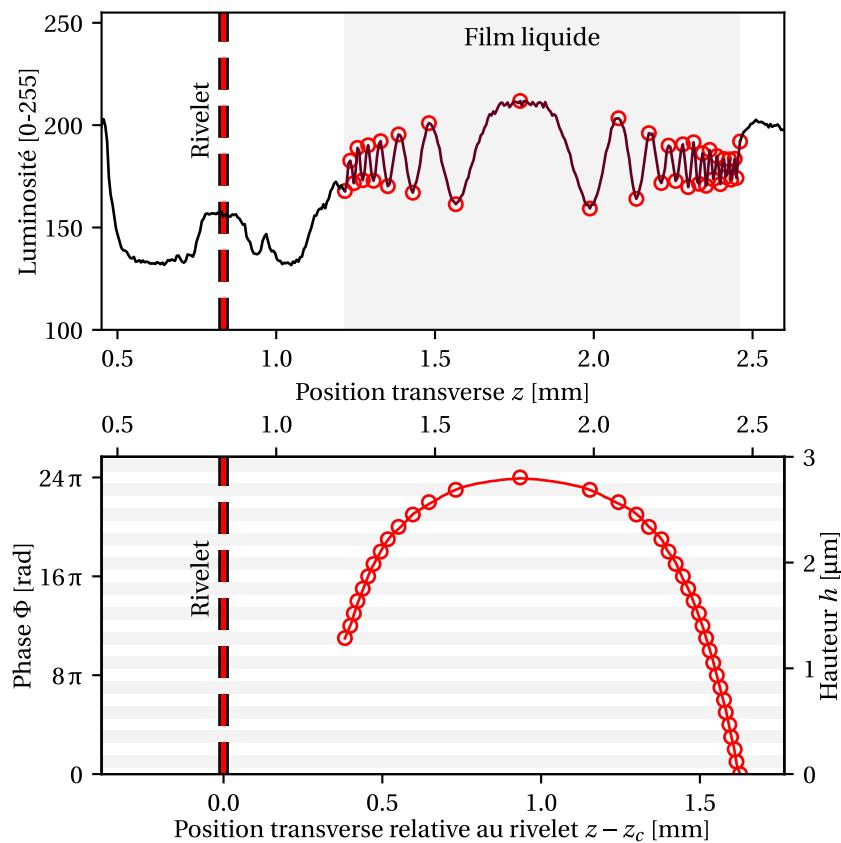


FIGURE 3.10 – Démodulation du signal optique pour retrouver le profil de hauteur du film.
 (haut) : Le signal lumineux obtenu expérimentalement, en fonction de la position z . La zone sur laquelle s'étend le film liquide est grisée. Des cercles rouges repèrent les extrema locaux. La position du rivelet, repérée automatiquement, est marquée de tirets verticaux rouges et noirs.
 (bas) : Profil de Hilbert reconstruit à l'aide de la transformée de Hilbert. Sur la zone du film, le signal de luminosité est transformé de manière à obtenir sa phase (échelle des ordonnées sur la gauche). Cette information de phase est convertie en hauteur grâce à la condition d'interférence (échelle des ordonnées sur la droite).

3.4.3 Comparaison entre vitesse de déposition et hauteur du film

Pour les expériences présentées dans cette section, nous utilisons des éléments statiques dans la cellule, conçus pour concentrer le flux d'air généré par les haut-parleurs dans une région particulière, comme expliqué dans la section 1.1.3 et illustré sur la figure 1.3 (droite). Cela crée un forçage inhomogène, où le déplacement du rivelet dépend de la coordonnée x . Puisque l'amplitude du mouvement du rivelet dépend de l'espace, il en va de même pour la vitesse à laquelle il se déplace, et donc pour la hauteur du film qu'il dépose. Une illustration montrant ce phénomène est présentée figure 3.11 (a) : plus l'on avance avec la coordonnée x , plus le mouvement du rivelet a été ample, plus la zone sur laquelle le film est déposé est large. Sur cette même figure, on voit l'image de référence ($t = 0$) à partir de laquelle on extrait le profil de hauteur $h(z)$ pour différentes positions $x_{1,2,\dots}$. Comme dans la figure 3.10, les cercles vides correspondent à des franges sombres ou claires, et les lignes pleines aux phases des signaux analytiques obtenus par transformée de Hilbert. On peut remarquer que sur la figure 3.11 (b), les sommets des profils sont décalés d'un quart de longueur d'onde les uns par rapport aux autres.

Cela s'explique par le fait que les positions $x_{1,2,\dots}$ sélectionnées se trouvent alternativement sur des franges d'interférence centrales sombres et claires.

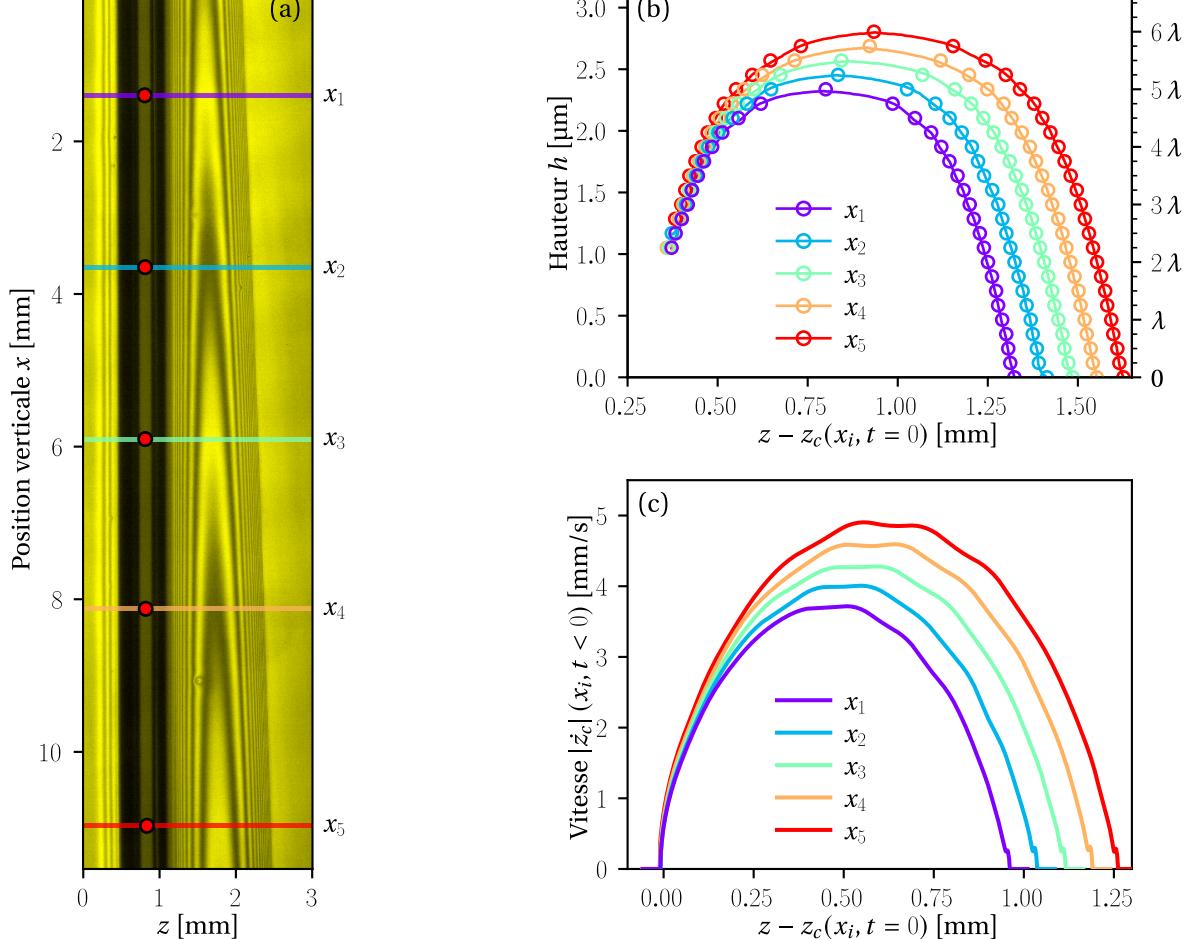


FIGURE 3.11 – Comparaison entre vitesse de déplacement et hauteur du film. (a) : Image expérimentale de référence, à $t = 0$. Le rivelet correspond aux deux bandes sombres à gauche, à sa droite on voit les franges d'interférences sur toute la zone où s'étend le film. Cinq positions $x_{1,2,\dots}$ sont considérées, marquées par des traits de couleur. Elles sont choisies aux endroits où la luminosité de la frange centrale est extrémale. La position du rivelet à ces positions est marquée par un cercle rouge. (b) Hauteur des films liquides en fonction de la distance au centre du rivelet. On a représenté la hauteur des films, reconstruite à partir des franges d'interférences, pour différentes positions. En dessous d'une distance de 340 μm du centre, la hauteur de film n'est plus définie : le ménisque commence. (c) : Vitesse du rivelet en fonction de l'espace. Sur ce graphe, on montre la vitesse qu'avait le centre du rivelet $z_c(x_i, t)$ au moment (dans le passé) où le centre du rivelet était à la position considérée. Les ondulations des courbes sont dues au bruit inhérent à la reconstruction de cette fonction et à son interpolation.

La figure 3.11 (c) montre une représentation paramétrique de la vitesse selon z du centre du rivelet $z_c(t)$ en fonction de sa position $z_c(x, t)$ au cours du temps, pour les temps antérieurs à l'image de référence : $-T/2 < t < 0$, avec T la période du mouvement. On observe en comparant les figures 3.11 (b) et (c) qu'aux positions x où le rivelet se déplaçait plus rapidement dans la direction transverse, il a déposé un film plus épais : ce sont aussi les positions x où le mouvement du rivelet a été de grande amplitude, puisque la période du mouvement est fixée. Les courbes de vitesse et d'épaisseur semblent bien se superposer les unes aux autres, la différence principale

étant que la hauteur semble plus « aplatie » au sommet : cela est dû au fait que l'exposant de la loi reliant la hauteur déposée à la vitesse soit inférieur à un, comme nous le verrons plus tard.

Il faut aussi noter que la vitesse est mesurée au centre du rivelet, alors que le film est déposé au niveau du bord du ménisque, les deux axes horizontaux des figures 3.11 (b) et (c) ne correspondent donc pas exactement : les courbes de hauteur et de vitesse sont décalées l'une par rapport à l'autre. Ce décalage correspond à la distance entre le centre du rivelet et le point où le film se détache du ménisque. Nous mesurons ce décalage à $(340 \pm 10) \mu\text{m}$, ce qui est cohérent avec le fait que les ménisques sont des arcs de cercle de rayon $300 \mu\text{m}$ (l'espacement de la cellule étant ici $b = 0,6 \text{ mm}$), et que la distance entre les deux ménisques est de l'ordre de $100 \mu\text{m}$: la distance attendue entre le centre du rivelet et le point de déposition est donc d'à peu près 350 microns.

3.4.4 Lien avec la théorie de LLD

Nous souhaitons maintenant établir un lien quantitatif entre la vitesse de déplacement du rivelet et la hauteur du film déposé. Cette situation est analogue au problème de Landau-Levich-Derjaguin (LLD) de déposition de film par un ménisque statique sur une plaque en mouvement (Landau et Levich 1942 ; Derjaguin 1943 ; Cantat 2013) ; à la différence que dans notre cas, puisque le liquide est confiné entre deux plaques, la courbure du ménisque n'est pas déterminée par la gravité, mais par la géométrie de la cellule. Pour caractériser la vitesse de l'interface mobile, nous introduisons donc le nombre capillaire $Ca := \rho v |z_c| / \gamma$, qui rend compte de la compétition entre la viscosité du fluide et la tension de surface ; et nous normalisons la hauteur du film déposé par le rayon de courbure du ménisque statique $b/2$, de sorte que l'on s'intéresse à $h^* := h/(b/2)$.

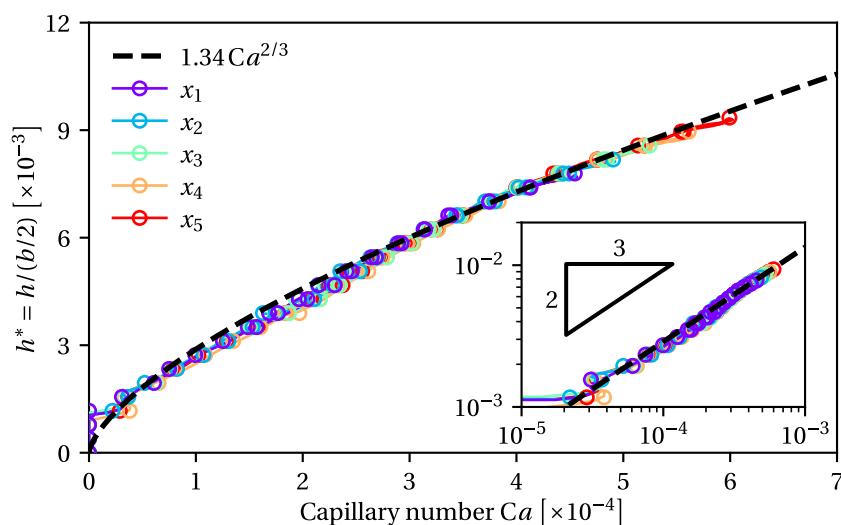


FIGURE 3.12 – Hauteur adimensionnée du film déposé par un mouvement périodique, en fonction du nombre capillaire associé à la vitesse de déplacement du ménisque au moment du dépôt. La ligne noire tiretée correspond à la prédition de Landau-Levich-Derjaguin. En insert : même données en échelle logarithmique.

La théorie LLD prévoit alors que la hauteur du film liquide déposé devrait être donnée par $h^* = 1.34 Ca^{2/3}$. Nous représentons sur la figure 3.12 la hauteur adimensionnée en fonction du nombre capillaire, ainsi que la loi d'échelle de LLD avec le préfacteur prédit par la théorie.

Nous trouvons un accord excellent entre nos mesures expérimentales et la prédiction de LLD, confirmant notre capacité à générer des films de hauteur déterministe en contrôlant la vitesse du rivelet.

3.4.5 Vitesse de drainage

Un dernier point à considérer est la stabilité des films générés dans le temps. Dans la section 3.3, nous avons étudié un film généré par un mouvement brusque du rivelet. Cela impliquait une reconfiguration très rapide de la géométrie du film, avec une hauteur diminuant à des vitesses de l'ordre de 100 nm/s. Pour les données présentées dans cette section, le rivelet adopte un mouvement bien plus lent et régulier, avec une amplitude qui varie très lentement selon la coordonnée x . En conséquence, le drainage est attendu, et observé, comme étant bien plus lent.

Pour mesurer cette vitesse de drainage, nous proposons ici d'utiliser une technique différente de celle employée à la section 3.3, plus adaptée aux très faibles vitesses. Plutôt que d'obtenir le champ entier $h_c(x, t)$ et d'en évaluer la dérivée temporelle, on peut utiliser la corrélation du signal de luminosité le long de la ligne de crête entre différents instants : c'est ce qui est illustré sur la figure 3.13. Cette technique permet d'aboutir à une excellente précision, même lorsque la vitesse de déplacement des franges est très faible. Sur les images considérées ici, cette vitesse est de l'ordre de 100 $\mu\text{m}/\text{s}$, soit à peu près la moitié d'un pixel par image prise. Surtout, cette mesure ne peut se faire que sur des temps courts (ici autour d'un quart de seconde) pendant lesquels le film évolue sans être recouvert par le rivelet, qui se meut de façon périodique. Mesurer une telle vitesse avec précision est donc une gageure.

On considère uniquement des images prises à des instants consécutifs pendant lesquels le ménisque mobile est éloigné de la ligne de crête, de sorte que celle-ci évolue uniquement par drainage. Les profils de luminosité le long de la ligne de crête (montrée sur la figure 3.13 (a)) sont alors repérés : ils sont représentés en fonction de l'espace pour différents temps sur la figure 3.13 (b). On peut alors calculer la corrélation entre les profils pris à des temps différents, comme sur la figure 3.13 (c) : cette corrélation est maximale pour un certain décalage, qui correspond au déplacement des franges sur l'intervalle de temps considéré. Sur la figure 3.13 (d), on montre la vitesse (c'est à dire le décalage spatial divisé par l'intervalle de temps séparant les images) en fonction du décalage temporel. Pour de faibles décalages, la mesure est peu précise, mais peut être répétée ; pour des décalages temporels longs, la mesure est plus précise, mais moins de réalisations sont accessibles. Nous associons donc chaque estimation à un poids proportionnel au décalage temporel, ce qui nous permet d'estimer une vitesse moyenne associée à une incertitude (ligne rouge sur la figure 3.13 (d)).

En répétant cette mesure à chaque fois que le rivelet est loin du film (ces instants correspondent aux points cyan sur la figure 3.14 (gauche)), nous obtenons un ensemble de mesures de vitesse de drainage, représenté sur la figure 3.14 (droite). La diminution de hauteur à la crête est estimée pour ce jeu de données à $(9 \pm 1) \text{ nm/s}$: être en mesure d'accéder avec précision à de telles quantités, avec une excellente résolution temporelle, à l'aide d'une méthode d'observation macroscopique, témoigne en faveur de la précision de notre technique de mesure.

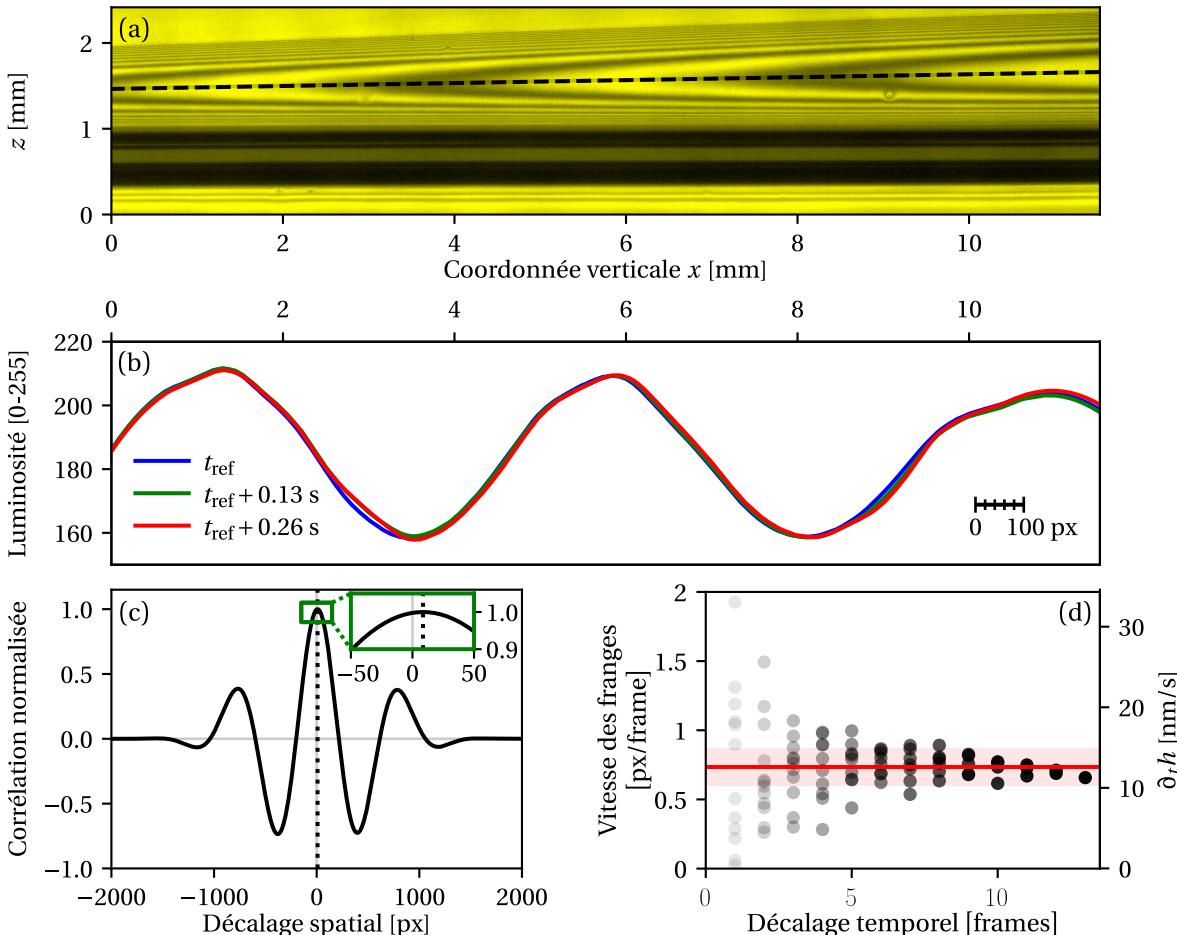


FIGURE 3.13 – Mesure de la vitesse des franges par corrélation.

- (a) : Image expérimentale. La ligne de crête du film est repérée par une ligne noire en tirets.
- (b) : Luminosité le long de la ligne de crête pour différents instants. En 0,25 secondes, les franges bougent d'à peu près 9 pixels, soit moins 0,5 % de la largeur de l'image.
- (c) : Fonction de corrélation entre deux profils de luminosité. Le maximum de corrélation est repéré par un trait vertical pointillé. Notons que la corrélation présente des maxima locaux vers ± 850 px : c'est la périodicité approximative du profil de luminosité. En insert : agrandissement près du maximum.
- (d) : Vitesse de déplacement des franges en fonction de l'écart temporel considéré. La valeur moyenne (pondérée par le décalage temporel) est montrée en rouge, avec l'incertitude associée. L'échelle des ordonnées à gauche donne la correspondance entre vitesse de déplacement des franges et décroissance de la hauteur.

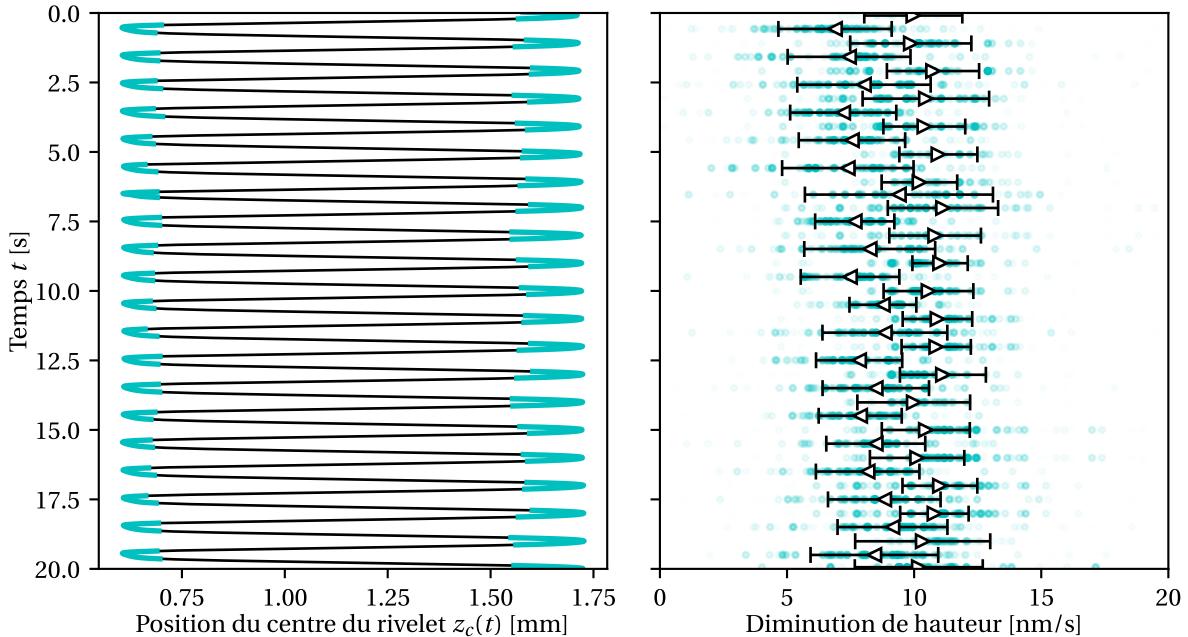


FIGURE 3.14 – Diminution de la hauteur des films à cause du drainage pour un mouvement du rivelet périodique.

(gauche) En trait noir : position du rivelet en fonction du temps. En cyan : les instants où le rivelet se déplace lentement, et est loin de la crête du film qu'il vient de former, qui sont ceux pendant lesquels on peut mesurer l'effet du drainage.

(droite) Diminution de la hauteur au niveau de la crête du film $\partial t h_c$ en fonction du temps. À chaque fois que le rivelet ralentit d'un côté, on effectue une mesure sur le film de l'autre côté. Les résultats de ces mesures sont montrés sur la figure : la vitesse moyenne est indiquée par des triangles pleins (l'orientation rend compte de quel film, droit ou gauche, est mesuré). Les points cyan représentent les mesures individuelles de vitesse pour différents décalages temporels. La transparence rend compte du décalage temporel entre les images, comme sur la figure 3.13 (d).

3.5 Déformation du rivelet à haute fréquence

Dans ce chapitre, nous nous sommes jusque-là intéressés aux films déposés par le ménisque arrière du rivelet. Un problème lié, que nous nous proposons de discuter succinctement dans cette section, est celui de la déformation des ménisques lors du mouvement du rivelet. Lorsque le fluide se déplace, les ménisques sont nécessairement déformés. L'étude effectuée dans les parties précédentes repose sur l'hypothèse que cette déformation est faible, et que les ménisques restent quasiment semi-circulaires. Mais que se passe-t-il lorsque l'on impose au rivelet un mouvement rapide / à haute fréquence ?

3.5.1 Visualisation d'un rivelet oscillant

Puisque nous cherchons ici à visualiser des déformations importantes et non plus à faire des mesures précises sur des objets fins, nous abandonnons le montage interférométrique et revenons à la configuration classique décrite à la section 1.3. Pour visualiser les faibles déformations des ménisques, nous augmentons la sensibilité de notre montage en utilisant comme source de lumière une LED ponctuelle, dont la lumière est colimatée par une lentille convergente de grand diamètre, et nous recueillons la lumière grâce à un objectif télécentrique. Dans un premier temps, nous fermons au maximum le diaphragme de l'objectif, ce qui opère une sélection drastique sur les angles autorisés : seuls les rayons lumineux parallèles à l'axe optique arrivent jusqu'au capteur de la caméra, et l'observation d'une ombre sur l'image indique alors une interface inclinée d'un angle potentiellement très faible.



Vidéo 3.1 : Rivelet déplacé rapidement, objectif à faible ouverture. ([en savoir plus](#)).

Des instantanés représentant des images typiques observées avec ce montage, où le rivelet est déplacé de manière homogène avec une amplitude comparable pour trois fréquences différentes, sont montrés sur la figure 3.15. Pour interpréter ces images, on peut se référer à la figure 3.16 (d), qui représente l'allure de l'interface pour la première ligne d'images (et la dernière, une demi-période plus tard). Le rivelet laisse derrière lui un film, qui d'abord croît en épaisseur (quand le rivelet accélère), puis devient plus fin (lorsque le rivelet décélère), formant une bosse, de plus en plus haute à mesure que la vitesse de dépôt augmente. À faible fréquence d'excitation (1 Hz, c'est-à-dire la fréquence typique utilisée pour recueillir les données de la section 3.4) et faible vitesse de déplacement du rivelet, on ne voit que les ménisques, en noir : les films sont si peu inclinés qu'ils ne modifient pas sensiblement le chemin de la lumière. À une fréquence plus élevée (10 Hz) et donc une vitesse de déplacement du rivelet plus importante, les parties les plus inclinées des films générés deviennent visibles. Ce sont les bords des films, près des positions extrêmales des ménisques à droite et à gauche, et près des ménisques lorsqu'ils sont en mouvement. À haute fréquence (50 Hz) et grande vitesse de déplacement, les films deviennent si pentus que la seule portion visible est le sommet plat du film, visible à droite du rivelet sur les deux premières images, et à gauche sur les deux dernières (puisque le rivelet a changé de côté).

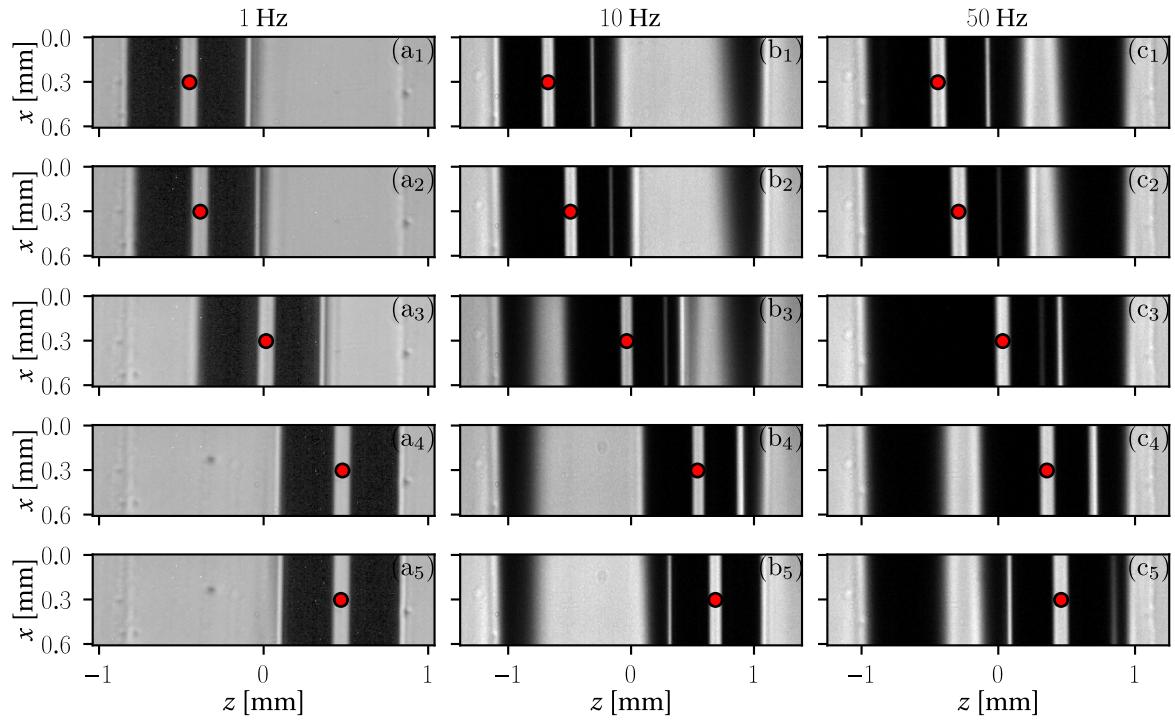


FIGURE 3.15 – Pour trois fréquences d'excitations (1, 10, et 50 Hertz) correspondant aux trois colonnes (a_i , b_i et c_i , respectivement), on trouve cinq images espacées temporellement d'un huitième de période de la fréquence de forçage (il y a donc une demi-période entre les images du haut et celles du bas). La position du rivelet est à chaque fois marquée d'un point rouge.

3

Au fur et à mesure que l'accélération du rivelet augmente, les pentes des films déposés deviennent de plus en plus inclinées. Une estimation grossière, en supposant que la loi de Landau-Levich-Derjaguin est valable, nous permet d'estimer que les films deviennent noirs sur l'image à partir d'une pente de l'ordre de 5×10^{-2} mm/mm.

On observe en outre sur la figure 3.15 deux effets surprenants. Tout d'abord, au fur et à mesure que la vitesse de déplacement augmente, les ménisques des deux côtés du rivelet deviennent asymétriques lors du mouvement (ceci est surtout visible sur les images (b₃), (b₄) et (c₄), mais reste difficile à voir à cause de l'ombre des films). De plus, on observe sur certaines images des lignes brillantes, parfois plus lumineuses que les parties non mouillées par le rivelet. Sur la figure 3.16, on trouve des illustrations visant à expliquer ces deux effets.

Lorsque le rivelet se déplace transversalement à une vitesse V sous l'effet du forçage, les interfaces des ménisques qui le délimitent cessent d'être semi-circulaires et sont légèrement déformées. On s'attend à ce que ces déformations restent faibles lorsque le nombre capillaire $Ca = \rho V / \gamma$ est petit : pour les expériences de la figure 3.15, il varie entre 3×10^{-4} et $1,5 \times 10^{-2}$, ce qui devrait assurer l'hémisphéricité des interfaces. Mais si l'huile que nous utilisons a une faible viscosité, elle a aussi une forte inertie, étant presque deux fois plus lourde que l'eau : le nombre de Weber $We = \rho V^2 b / (4 \gamma)$ vaut respectivement 3×10^{-4} , 7×10^{-2} et 0,7 pour les trois expériences montrées sur la figure 3.16 et n'est donc plus négligeable. C'est donc selon nous l'inertie du fluide qui explique la déformation observée.

Il y a deux types d'effets optiques faisant apparaître certaines parties du rivelet brillantes.

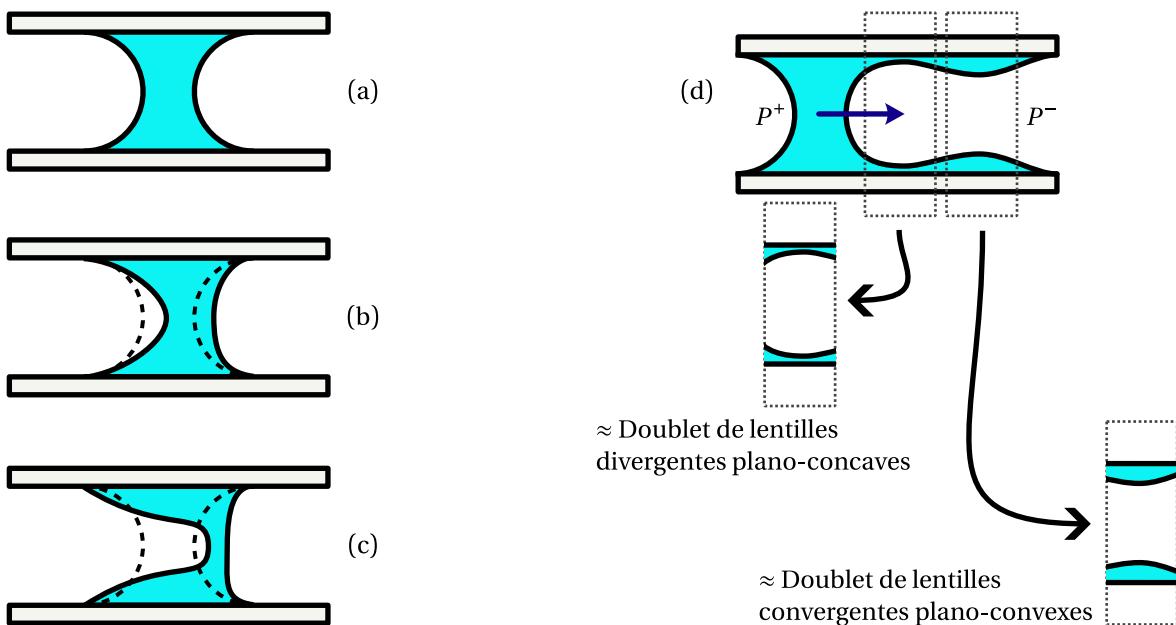


FIGURE 3.16 – (gauche) Illustrations schématiques expliquant l’asymétrie des ménisques lorsque le rivelet est en mouvement rapide. (a) Situation de référence, rivelet immobile. Les interfaces des ménisques sont semi-circulaires. (b) Le rivelet est en mouvement : les ménisques sont légèrement déformés. Le ménisque du côté de l’air en surpression est plus enfoncé, celui du côté de l’air en sous-pression est aplati. (c) Situation hypothétique : À très haute vitesse, le rivelet est tellement déformé que l’air pénètre profondément à l’intérieur, formant un « doigt » à la Saffman–Taylor. Cette situation, qui se traduirait par une partie centrale du rivelet plus fine, n’est pas observée expérimentalement.

(d) Explication des aberrations lumineuses visible sur les figures 3.15 (b_i) et (c_i). Les interfaces des films peuvent former des structures concaves ou convexes, ayant des propriétés optiques différentes.

3

D’une part, une fine ligne d’éblouissement (*glare line*) est toujours visible sur les bords du pont liquide, elle est due à une réflexion sur la surface semicirculaire des ménisques, qui peut être retrouvée par traçage des rayons optiques (*raytracing*) (van der Net et al. 2007; Atasi et al. 2018).

D’autre part, en dehors des ménisques, d’autres lignes lumineuses apparaissent, nous nous appuyons sur le raisonnement suivant pour les expliquer : à chaque endroit, l’interface eau-huile est ou bien plate, ou bien pentue. Si la pente locale dépasse 5×10^{-2} , la lumière est réfractée et n’atteint pas la caméra : ces portions apparaissent donc sombres. Si elle est plate, alors en fonction de la courbure du film à cet endroit, la couche de liquide peut se comporter ou bien comme une lentille convergente (surface convexe) ou bien comme une lentille divergente (surface concave). Les maxima d’épaisseur se comportent donc comme des doublets de lentilles minces convergentes plano-convexes, espacées de b et dont la vergence dépend du profil d’épaisseur et donc de la vitesse du rivelet ; et de même pour les creux du film, assimilables à des doublets de lentilles divergentes, comme montré sur la figure 3.16.

Si l’on appelle R le rayon de courbure typique des films, qui est toujours au minimum de l’ordre du centimètre (voir l’estimation réalisée en 3.3.2), alors la distance focale de ces lentilles sera $f' = R/(n-1) \gtrsim 60$ mm. L’écartement des plaques b , faisant office de distance entre deux lentilles, étant petit devant cette distance focale³, on peut considérer les lentilles comme accolées. Cela

3. Plus précisément, le critère $b/(2f'n) \ll 1$ donné par la formule de Gullstrand est vérifié, puisque nous avons

nous permet d'estimer une borne supérieure pour la vergence de ces lentilles : $|V| \lesssim 30$ dioptries (à titre de comparaison, les lunettes d'une personne ayant une acuité visuelle de 1/10 ont une vergence de 3 dioptries). Ces « lentilles de fluide » peuvent donc modifier substantiellement le chemin optique parcouru par la lumière, et déplacent ainsi la position virtuelle de la source : dans certains cas (que nous n'avons pas caractérisés plus avant), elles sont donc en mesure de concentrer la lumière sur l'objectif.

Dans la suite de cette section, nous souhaitons nous concentrer sur le comportement des ménisques et ne plus visualiser le film : nous travaillerons donc avec un objectif au diaphragme ouvert, ce qui diminue sa sensibilité angulaire. Seuls les pentes les plus importantes, correspondant aux ménisques, sont alors visualisés.

3.5.2 Mouvements rapides du rivelet

Comme précédemment, nous excitons le rivelet de manière homogène et nous visualisons les ménisques avec un objectif télécentrique. Nous montrons dans la figure 3.17 (gauche) le profil de luminosité typique obtenu, en fonction du temps (en ordonnée). Le rivelet est déplacé alternativement vers la droite et la gauche, de manière sinusoïdale. Nous sommes alors en mesure de repérer la position des bords intérieurs et extérieurs de chaque ménisque, comme montré sur la figure, en traits pleins.

Nous définissons la *position du centre*, $c(t)$, correspondant à la moyenne de la position des bords intérieurs, et la *position des ménisques*, $m(t)$, correspondant à la position moyenne des bords extérieurs. La position du centre correspond à l'emplacement réel du centre de masse du volume de fluide contenu dans la partie centrale du pont liquide (entre les deux ménisques), tandis que la position des ménisques correspond à la position où serait ce centre si jamais les ménisques n'étaient pas déformés. Comme on le voit sur la figure 3.17 (centre), ces deux positions ne sont pas nécessairement confondues : si elles ont une amplitude de déplacement comparable, elles ne sont pas toujours en phase : à 100 Hz (fréquence correspondant à la figure 3.17), $m(t)$ est en effet en retard sur $c(t)$.

Les quantités $c(t)$ et $m(t)$ ne peuvent être interprétées physiquement sans ambiguïté que sous la condition que la quantité de liquide contenue respectivement dans l'intérieur du pont et dans les ménisques ne change pas. C'est le cas, comme nous le montrons sur la figure 3.17 (droite) : malgré les oscillations, l'épaisseur de la partie centrale (courbe orange) et la somme des épaisseurs optiques des ménisques (courbe violette) restent constantes au cours de l'expérience. En revanche, comme le montrent les courbes bleues, l'aire d'un ménisque individuel varie : au cours du mouvement, les ménisques semblent grandir et rétrécir, mais la quantité de liquide partagée entre les deux reste la même, et la partie centrale garde la même taille, comme nous le montrons sur le schéma 3.16 (b).

Deux questions viennent alors naturellement : quels paramètres régissent d'une part la défor-

ici $b/(2f n) \lesssim 0,04$.



Vidéo 3.2 : Déformation des ménisques et déphasage volume-bords. ([en savoir plus](#)).

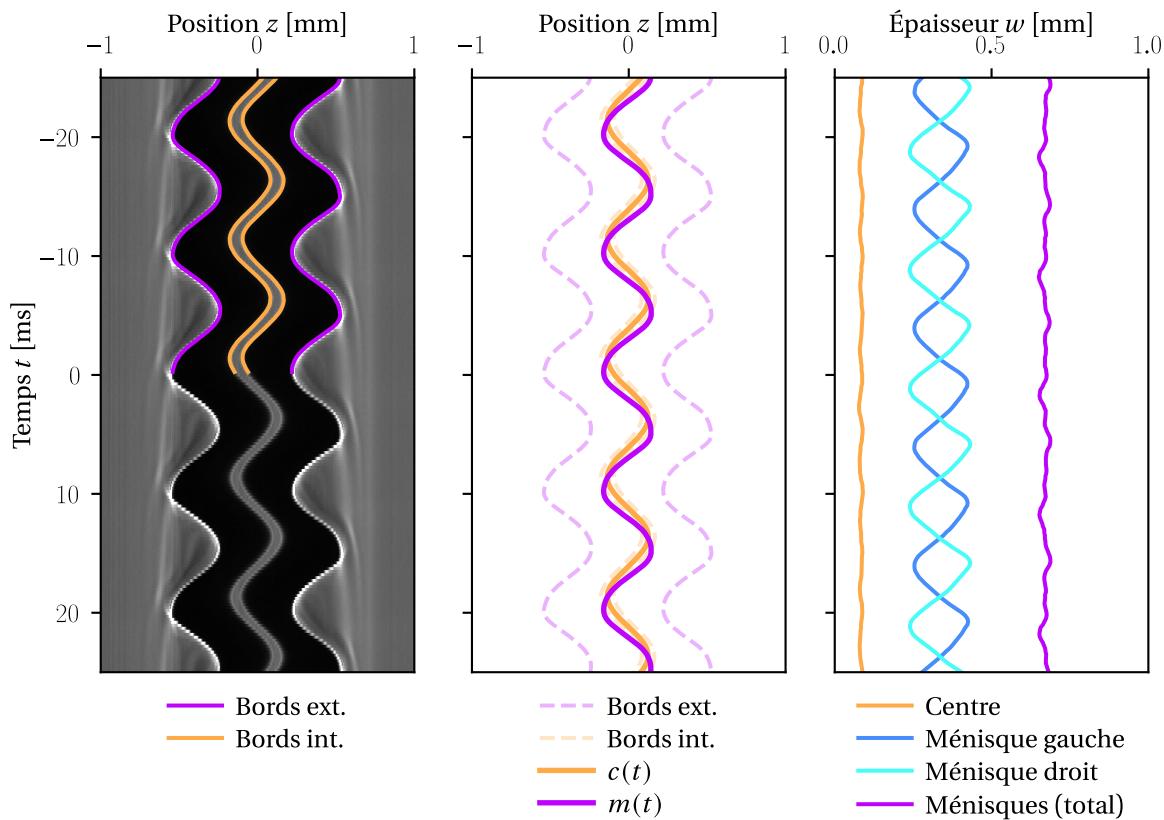


FIGURE 3.17 – Oscillations d'un rivelet déplacé à 100 Hz. (gauche) : Tranche (le long de la coordonnée z , pour un x donné) des images expérimentales en fonction du temps. Dans la partie supérieure, les bords des rivelets, repérés automatiquement, sont indiqués en lignes pleines. L'ouverture de l'objectif ayant été modifiée par rapport aux images 3.16 (c_i), prises à la même fréquence, on ne voit plus les bords des films liquides. (centre) : En pointillés : les bords intérieurs et extérieurs des ménisques. En trait plein : les positions du centre $c(t)$ et des ménisques $m(t)$. (droite) : Épaisseur de la partie centrale du rivelet (orange), des ménisques gauche et droit (bleu clair et foncé), et somme des épaisseurs des ménisques (violet).

3

mation de l'aire apparente des ménisques, et d'autre part le déphasage entre la position du centre et celle des ménisques ?

Déformation des ménisques

Une première observable d'intérêt est la déformation des ménisques, c'est-à-dire le changement de leur taille apparente sur l'image. Pour la quantifier, nous définissons

$$\mathcal{D} = \frac{\langle (w_g - \langle w_g \rangle)^2 \rangle}{\langle w_g \rangle^2} + \frac{\langle (w_c - \langle w_c \rangle)^2 \rangle}{\langle w_c \rangle^2} \quad (3.6)$$

appelée déformation des ménisques, où l'on a noté $w_g(t)$ l'épaisseur projetée (apparente) du ménisque gauche, et $w_c(t)$ celle du ménisque droit. Cette quantité vaut donc 0 si les ménisques ne sont pas du tout déformés, et 1 si jamais la déformation est telle que l'épaisseur d'un des ménisques s'annule pendant que l'autre double de taille.

La déformation des ménisques est due à la vitesse du déplacement du rivelet, qui crée une compétition entre capillarité et viscosité et/ou inertie, en fonction de la situation. On s'attend donc

a priori à une relation monotone entre \mathcal{D} et la vitesse typique de déplacement du rivelet V . Pour de faibles déformations ($\mathcal{D} \ll 1$), cette relation ne doit pas changer de forme avec la vitesse, on peut ainsi supposer un comportement en loi de puissance. Aller au-delà de cette prédiction et tenter d'expliquer cette loi de puissance nécessiterait d'établir un modèle plus précis qui interrogerait la géométrie de la déformation des ménisques, ce qui sortirait du cadre de la présente étude. En regardant la figure 3.19, on constate en effet que sur deux décades, la déformation semble varier linéairement avec la vitesse de déplacement, notre prédiction est donc vérifiée.

Déphasage des ménisques par rapport au volume

Pour quantifier la phase entre la position des ménisques et celle du centre du rivelet, nous utilisons la densité spectrale d'interaction (c'est-à-dire la transformée de Fourier de la corrélation croisée, ou cohérence, entre les deux grandeurs) : près avoir calculé les transformées de Fourier $\hat{c}(f)$ et $\hat{m}(f)$ de la position du centre et des ménisques, respectivement, nous nous intéressons à la quantité $C = \hat{m} \times \hat{c}^*$. La phase de cette grandeur, prise à la fréquence à laquelle oscille le rivelet (à savoir la fréquence de forçage), nous donne alors le déphasage entre elles, plus précisément l'avance de phase (donc l'opposé du retard de phase) de $m(t)$ par rapport à $c(t)$, comme illustré sur la figure 3.18.

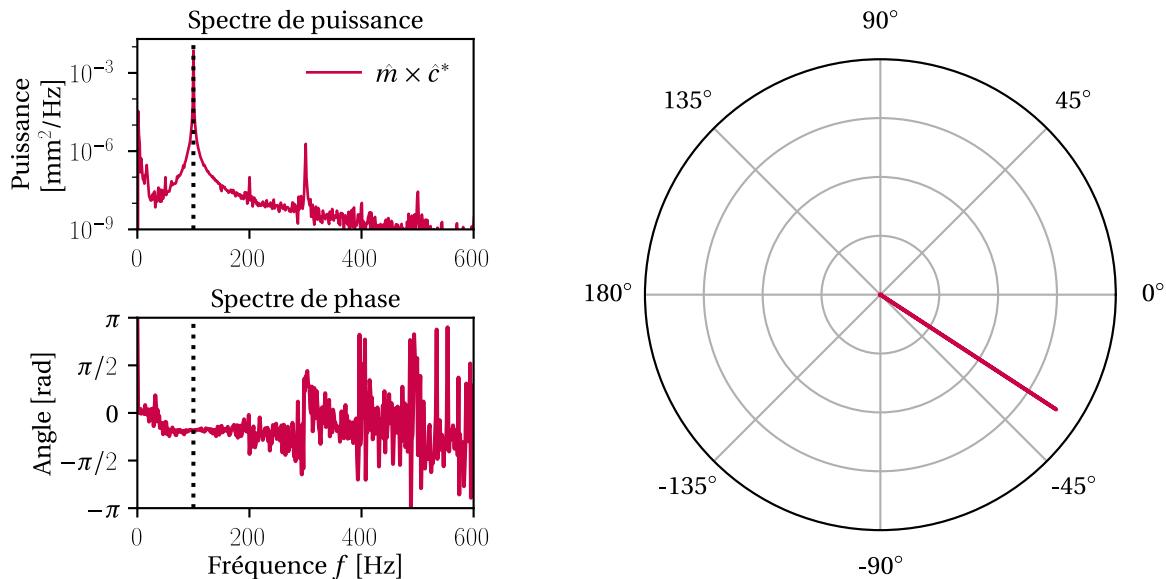


FIGURE 3.18 – Déphasage entre le centre et les ménisques d'un rivelet excité à 100 Hz. (a) Densité spectrale de puissance (proportionnelle à l'amplitude) de la densité spectrale d'interaction C en fonction de la fréquence. Les signaux sont bien sinusoïdaux à la fréquence d'excitation. (b) Spectre de phase de la densité spectrale d'interaction C en fonction de la fréquence. (c) Visualisation directe de la densité spectrale d'interaction : l'angle représente la phase, et la distance au centre l'amplitude. On voit un signal intense autour de -30° qui indique directement la phase relative des signaux.

Pour expliquer la relation entre le retard de phase et la fréquence d'excitation, on peut utiliser un raisonnement énergétique. Intéressons-nous à un des ménisques délimitant une portion de rivelet d'extension L dans la direction x , comme montré sur la figure 3.20 (gauche). On appelle s la longueur curviligne du ménisque dans le plan (y, z), et l'énergie capillaire associée à l'interface est

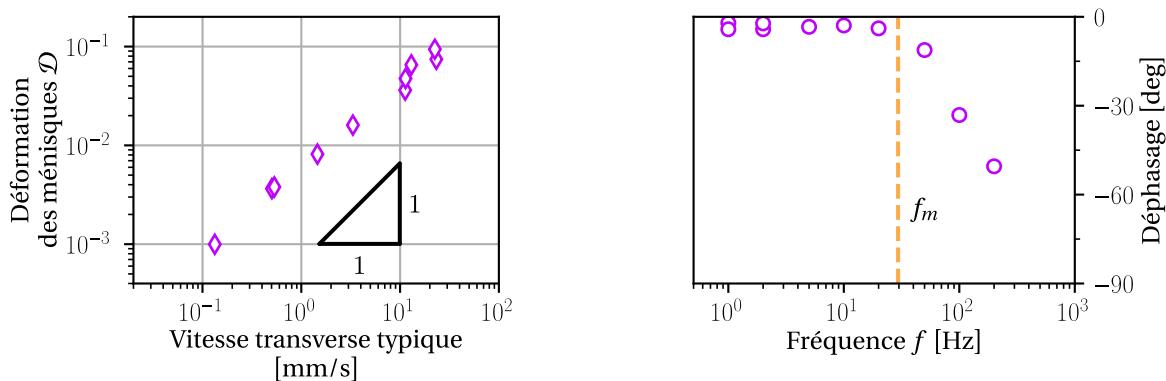


FIGURE 3.19 – (gauche) Déformation des ménisques en fonction de la vitesse transverse typique des rivelets. Cette vitesse correspond au produit de la fréquence d'excitation et de l'amplitude du déplacement. (droite) Déphasage entre la position des ménisques et celle du centre. La ligne tiretée verticale correspond à la fréquence f_m , calculée d'après la formule (3.8). Notons que trouver le bon paramètre pour décrire chaque phénomène est loin d'être trivial, et que les paramètres de contrôle (vitesse et fréquence) ne sont pas équivalents : dans le jeu de données utilisé ici, l'amplitude du mouvement, et donc la vitesse varie avec la fréquence de manière non-monotone. En particulier, les courbes de déformation en fonction de la fréquence et de déphasage en fonction de la vitesse ne sont pas monotones.

$\gamma L s$. Au repos, le ménisque est un demi-cercle de rayon $b/2$, et sa longueur curviligne vaut donc $s_0 = \pi b/2$: l'énergie capillaire est alors $\gamma L s_0$. Considérons maintenant une petite déformation du ménisque, quantifiée par une distance caractéristique de déformation algébrique δz , comme par exemple celle montrée sur la figure 3.20 (droite).

3

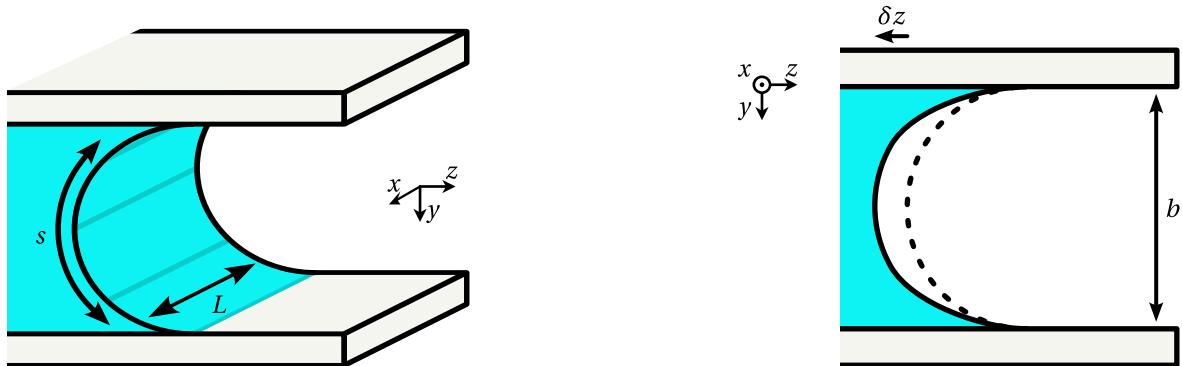


FIGURE 3.20 – (gauche) Demi-pont liquide. (droite) Ménisque déformé.

On peut exprimer la nouvelle longueur transverse, pour de petites déformations $\delta z \ll s_0$, sous la forme :

$$s \approx s_0 \left(1 + c_1 \frac{\delta z}{s_0} + \frac{c_2}{2} \frac{\delta z^2}{s_0^2} \right). \quad (3.7)$$

Le coefficient c_1 est nécessairement nul, car la géométrie semi-circulaire, pour laquelle $s = s_0$, est un état d'équilibre dans le cas statique, et correspond donc à un minimum d'énergie capillaire. Le fait que cet équilibre soit stable et n'évolue pas spontanément, indique en outre que le coefficient c_2 est de signe positif. Déterminer l'expression exacte de c_2 nécessiterait de modéliser complètement la déformation du rivelet, ce qui est au-delà de nos ambitions pour cette

discussion : nous le supposeront simplement ici d'ordre unité.

L'énergie capillaire associée à l'interface liquide-air devient alors $\gamma L s = \frac{1}{2} \kappa \delta z^2$, ce qui correspond à une énergie potentielle liée à une force de rappel effective $\kappa = 2\gamma \frac{L}{\pi b}$. Dans le même temps, si on considère que la masse de fluide déplacée correspond à celle contenue dans le ménisque, c'est-à-dire au premier ordre $m = \rho L(4 - \pi)b^2/2$, alors l'énergie cinétique associée à la déformation de l'interface s'écrit $\frac{1}{2}m(\dot{\delta}z)^2$, où un point dénote la dérivée par rapport au temps.

Dans ce modèle-jouet, si on admet que la viscosité joue simplement un rôle d'amortissement, δz va effectuer des oscillations harmoniques amorties à la fréquence

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi(4 - \pi)\rho b^3}} \approx 30 \text{ Hz.} \quad (3.8)$$

Autrement dit, le ménisque joue un rôle de passe-bas : pour les fréquences de forçage inférieures à f_m , la déformation peut être considérée comme instantanée, tandis qu'au-delà de f_m , un déphasage est mesurable entre le mouvement du volume à l'intérieur du pont et la déformation des ménisques. Les données expérimentales, montrées sur la figure 3.20 (droite), vont dans ce sens : le déphasage est de zéro jusqu'à une fréquence de l'ordre de f_m , puis un retard de phase est mesurable entre la position du centre et celle des ménisques. Notons que l'on peut aussi voir f_m comme la fréquence fondamentale des ondes capillaires déformant le ménisque dans le plan (y, z) .

3

Conclusion du chapitre 3

Dans ce chapitre, nous avons exploré le sujet des films laissés derrière le rivelet lorsqu'il se déplace sur les plaques.

Nous avons d'abord montré que nous étions capable de mesurer les caractéristiques géométriques de films minces avec une excellente résolution spatio-temporelle, grâce aux mesures interférométriques et à la transformée de Hilbert qui permet d'en exploiter le plein potentiel. Nous pouvons ainsi mesurer l'épaisseur d'un film dans toute la région visible par la caméra, là où le film est faiblement incliné. Cette mesure est instantanée, ce qui permet de suivre l'évolution spatio-temporelle de ces films avec une résolution limitée uniquement par les capacités de la caméra. Grâce à ces mesures précises, nous pouvons par exemple prédire la diminution de hauteur d'un film et l'attribuer à la combinaison d'effets capillaires et gravitaires.

Nous avons ensuite utilisé ces techniques afin de montrer qu'en contrôlant la vitesse de déplacement du rivelet, on contrôle l'épaisseur du film déposé, qui est prédictive par la théorie classique de Landau-Levich-Derjaguin, ouvrant ainsi la voie à une méthode alternative de déposition de films texturés.

Nous avons constaté dans ce chapitre que l'épaisseur des films laissés derrière lui par le rivelet dépendait de sa vitesse à la puissance $2/3$ (loi d'échelle de LLD). Cette loi de puissance étant inférieure à un, les films sont relativement « plats » près des maxima, comme on le constate par exemple sur la figure 3.11, ce qui renforce la pertinence de l'approximation présentée au chapitre 2

et utilisée abondamment dans les chapitres suivants, qui consiste à traiter le rivelet comme s'il avançait sur un film de hauteur effective uniforme h_∞ . Nos techniques interférométriques nous ont en outre permis d'estimer directement h_∞ , qui est de l'ordre de quelques microns pour les mouvements employés dans ce chapitre. Surtout, nous sommes maintenant en mesure d'estimer la valeur de h_∞ en connaissant seulement la vitesse transverse typique de déplacement, en utilisant la loi de Landau-Levich-Derjaguin.

Enfin, en revenant à des méthodes de visualisation d'optique classique, nous avons observé des rivelets se déplacer à haute vitesse et à haute fréquence, et nous avons montré les effets comparés, qui ne se réduisent pas l'un à l'autre, de ces deux paramètres : la vitesse de déplacement du rivelet contrôle l'asymétrie des ménisques, tandis que la fréquence du mouvement contrôle le déphasage entre ménisques et volume central.

Il existe bien sûr des limites aux méthodes que nous avons utilisées. Concernant la mesure d'épaisseur des films par exemple, une acquisition d'images plus rapide que la nôtre nécessiterait une source lumineuse monochromatique puissante et continue. La méthode interférométrique impose un compromis entre la précision sur la mesure de hauteur et la capacité à explorer les régions à forte pente du film. En effet, l'utilisation de lumière de petite longueur d'onde améliore la résolution verticale, mais au prix de franges très fines dans les zones inclinées du film. Résoudre optiquement de telles franges exige une excellente résolution spatiale, qui n'est pas toujours disponible. À l'inverse, l'utilisation de lumière de grande longueur d'onde permet d'observer une plus grande portion du film, au prix d'une moindre précision dans les zones plates.

3

Il existe également des moyens d'améliorer la technique de déposition présentée ici, ou de l'adapter à l'étude d'autres situations. Concernant la génération des films, l'utilisation d'un rivelet fluide confiné impose la géométrie de Hele-Shaw avec deux plaques. Il serait toutefois possible d'adapter cette étude à un rivelet s'écoulant sur une seule plaque, ou en utilisant des gouttelettes glissantes. Pour déplacer le rivelet, nous utilisons des haut-parleurs, qui ont une course limitée. Les remplacer par des buses contrôlées par des électrovannes injectant de l'air comprimé permettrait une amplitude de mouvement plus grande et un contrôle spatial plus fin du déplacement. L'utilisation d'une plaque chauffée et le renouvellement de l'air dans la cellule permettraient également d'introduire un nouvel élément physique dans le problème, l'évaporation, ce qui pourrait être utile pour durcir le film déposé ou améliorer les échanges thermiques dans des applications industrielles (Pagliarini, Iwata et Bozzoli 2023).

L'analyse que nous avons fait des rivelets oscillant rapidement pourrait être poussée plus loin : la compréhension des aberrations lumineuses observée reste qualitative, et il reste à construire une relation théorique pour expliquer la loi d'échelle entre déformation et vitesse. Il faudrait dans ce régime de mouvement rapide s'intéresser aux films qui sont déposés (à notre connaissance, aucune étude expérimentale n'a encore exploré le problème d'entraînement avec un ménisque accéléré), car, si le nombre capillaire reste faible, le nombre de Weber conséquent laisse imaginer que l'épaisseur des films ne soit plus donnée par la théorie de LLD.

4

DÉSTABILISATION PARAMÉTRIQUE D'UN RIVELET FORCÉ ACOUSTIQUEMENT

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'instabilité paramétrique en « collier de perles » qui se déclenche lorsque le rivelet est déplacé rapidement de manière homogène dans la direction transverse à l'écoulement. Une partie du travail présenté ici a été publié dans une lettre au journal Physical Review Letters, en janvier 2025 (Le Lay et Daerr 2025a, annexe 4.C), et certains résultats nouveaux (sections 4.3 et 4.4) sont aussi inclus dans un article actuellement en cours de revue par les pairs au Journal of Fluid Mechanics (Le Lay et Daerr en revue).

4.1	Contexte et motivation	91
4.1.1	Forçage externe, interne, paramétrique	91
4.1.2	Instabilité de Faraday et couplage paramétrique entre ondes	94
4.1.3	Forçage additif, déstabilisation paramétrique?	95
4.2	La danse du rivelet	96
4.2.1	Condition d'apparition	96
4.2.2	Une instabilité génératrice de motifs	98
4.3	Résonance triadique et co-amplification	100
4.3.1	Formulation mathématique du problème	100
4.3.2	Arguments de symétrie	103
4.3.3	Condition de résonance	104
4.3.4	Interprétation physique du mécanisme de l'instabilité	105
4.4	Développement(s) non-linéaire(s)	109
4.4.1	Formulation adimensionnée	109
4.4.2	Seuil d'instabilité	110
4.4.3	Structure du motif	111
4.4.4	Désaccord non-linéaire et saturation	113
4.5	Rupture du rivelet	117
4.5.1	Cassage à haut forçage	117
4.5.2	Seuil de rupture	118
4.5.3	Trains de gouttes	119
4.6	Visualisation dans l'espace de Fourier	121
	Conclusion du chapitre 4	124
	Annexes du chapitre 4	126
Annexe 4.A	Un autre point de vue sur le verrouillage de phase	127
Annexe 4.B	Expériences de trempe	129
Annexe 4.C	Article paru dans Physical Review Letters	131
Annexe 4.D	Dérivation des équations aux ordres deux et trois	138

Comme mentionné au chapitre 1, nous sommes en mesure, expérimentalement, de déplacer le rivelet transversalement de manière homogène. Si ce déplacement excède un certain seuil, qui dépend de la fréquence, alors le rivelet adopte un motif spatio-temporel complexe, comme illustré sur la vidéo 4.1. Cette instabilité, que nous avons découverte (Le Lay et Daerr 2025a), se manifeste par l'amplification simultanée d'une onde transverse et d'une onde longitudinale, qui sont verrouillées en phase et qui partagent la même périodicité spatiale. Le principal objectif de ce chapitre est de décrire expérimentalement et d'expliquer théoriquement les caractéristiques de cette instabilité, de spécifier les conditions dans lesquelles elle se développe, de comprendre son mécanisme, et d'identifier la manière dont elle croît puis sature dans le régime non-linéaire.

Nous commençons, dans la section 4.1, par donner quelques éléments de contexte utiles pour la suite, puis nous soulignons quelques caractéristiques originales de l'instabilité que nous étudions ici. Dans la section 4.2, nous proposons une description expérimentale qualitative du phénomène et des conditions dans lesquelles on l'observe; puis dans la section 4.3 nous identifions le mécanisme physique d'amplification, et nous explicitons la condition mathématique qui sélectionne la longueur d'onde du motif. Dans la section 4.4, nous analysons ensuite en détail la croissance du motif, en calculant le seuil d'excitation, les amplitudes relatives des ondes interagissantes et le mécanisme de saturation. Dans la section 4.5, nous expliquons la rupture du rivelet lorsqu'il est déplacé rapidement, et nous discutons de l'amplitude maximale de forçage avant rupture du rivelet. Dans la dernière section (4.6), nous montrons comment le puissant formalisme de Fourier permet de projeter un éclairage nouveau sur le phénomène et sur les résultats qui ont précédé. Enfin, dans la conclusion de ce chapitre, nous revisitons les observations expérimentales à la lumière de notre analyse, avant de proposer un bref résumé et plusieurs pistes qui nous semblent prometteuses pour de futures recherches.

Pour ne pas alourdir ce chapitre, quatre sections ont été placées en annexes. Nous recommandons particulièrement la lecture des deux premières : dans l'annexe 4.A nous proposons une interprétation alternative de la condition de verrouillage de phase, excellemment vérifiée expérimentalement, et dans l'annexe 4.B, nous illustrons une manière d'utiliser l'instabilité afin de mesurer des paramètres du système. Nous avons reproduit dans l'annexe 4.C un article au sein duquel nous proposons une autre vision de l'instabilité en collier de perles, et des mesures complémentaires. La dernière annexe, 4.D, contient les calculs nécessaires au développement à l'ordre trois en ϵ des équations dynamiques. Il a été nécessaire d'y réduire localement la taille de la police, pour que certaines égalités puissent tenir sur une seule page.



Vidéo 4.1 : Instabilité en collier de perles ([en savoir plus](#)).

4.1 Contexte et motivation

4.1.1 Forçage externe, interne, paramétrique

Pour sonder un système physique, on peut l'observer directement et étudier son évolution spontanée. Mais souvent, il se révèle instructif d'appliquer un forçage, ou excitation (nous utilisons ces deux mots de manière synonyme), c'est-à-dire d'imposer une variation temporelle contrôlée à un élément du système, et d'observer la réponse obtenue au niveau d'une observable. L'étude de cette réponse permet alors de gagner en compréhension sur les caractéristiques du système en question. Dans la plupart des cas (on ne considère ici que des systèmes déterministes dits faiblement non-linéaires, c'est-à-dire où les effets des non-linéarités peuvent être considérés de façon perturbative), on peut classer le forçage imposé au système dans une des trois catégories suivantes : le forçage peut être externe, ou bien interne, ou bien paramétrique (Nayfeh et Mook 1979).

Un forçage **externe**, ou additif, correspond mathématiquement à l'addition d'un nouveau terme, variant avec le temps, dans le système dynamique d'intérêt. Mathématiquement, on obtient alors une équation inhomogène au sens des équations différentielles, c'est-à-dire contenant un terme (le forçage) non proportionnel à la variable d'intérêt. C'est par exemple le cas d'une masse accrochée à un ressort dont on déplacerait le point d'accroche (la masse est alors soumise à une force oscillante), ou bien d'un tuyau dans lequel on soufflerait (on impose alors des oscillations de vitesse à l'entrée du tuyau). Un forçage externe génère en général une réponse linéaire en l'excitation, c'est-à-dire que la réponse du système possède les mêmes composantes spatio-temporelles que l'excitation : un forçage à la fréquence ω_f amène une réponse à la même fréquence ω_f .

Pour certaines fréquences de forçage externe, le système peut présenter une réponse particulièrement importante : on parle alors de fréquence de résonance du système. Cela se produit le plus souvent lorsque la fréquence de l'excitation correspond à une fréquence propre au système. La réponse résonante ou non d'un système excité additivement ne dépend donc que de l'accord entre la fréquence de forçage et la fréquence de résonance la plus proche.

Un exemple d'équation correspondant à un système forcé additivement est

$$\mathcal{L}u = F \cos(\omega_f t) \quad (4.1)$$

où u est la variable d'intérêt, \mathcal{L} est un opérateur linéaire, F est l'amplitude du forçage et ω_f est sa pulsation. En choisissant $\mathcal{L} = \partial_{tt} + \omega_p^2$, l'équation obtenue est celle d'un oscillateur harmonique de fréquence propre ω_p , ce qui correspond à l'exemple du ressort cité plus haut. En prenant $\mathcal{L} = \partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}$, nous obtenons l'équation correspondant au cas du tuyau où c représente la célérité des ondes sonores.

Le plus souvent, la résonance d'un système excité de manière externe sature en raison d'effets dissipatifs : au-delà d'une certaine amplitude, la dissipation devient trop importante pour que la réponse continue de croître, et son amplitude atteint alors un palier, pour lequel la quantité d'énergie fournie au système par le forçage est égale à la quantité perdue à cause des effets

dissipatifs.

Mentionnons le cas, moins connu, du forçage **interne** : c'est la situation où un système possède plusieurs fréquences qui lui sont propres ω_i avec $i = 1, 2, 3, \dots$ (par exemple, une tige oscillante ou bien une plaque vibrante), et où la relation suivante est vérifiée (Sridhar 1975; Nayfeh et Mook 1979) :

$$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + \cdots + n_k \omega_k \approx 0 \quad (4.2)$$

où les n_i sont des entiers. Dans ce cas, le fait que les fréquences de certains modes propres entretiennent entre elles des rapports algébriques simples leur permet d'échanger de l'énergie. Ces échanges d'énergie entre modes propres ayant des fréquences commensurables permettent par exemple d'exciter des modes de fréquence différentes de la fréquence d'excitation, en jouant sur les transferts d'énergie internes au système. Ces échanges d'énergie permettent notamment de modifier la durée de vie d'un mode, en l'allongeant ou en la diminuant. Imaginons par exemple un système vibrant selon un mode k fortement amorti : grâce à une résonance interne, l'énergie associée à ce mode peut être transférée à un mode k' , peu amorti. Après avoir transité un certain temps par le mode k' , l'énergie est retransférée au mode k par résonance interne : l'amplitude de celui-ci est alors supérieure à ce qu'elle aurait été en l'absence de résonance interne, et sa durée de vie a donc été artificiellement allongée grâce à ce mécanisme (Nayfeh et Mook 1979).

Les interactions résonantes entre modes qui caractérisent le forçage interne sont spécifiques au système, elles dépendent de ses caractéristiques intrinsèques (par exemple géométriques dans le cas de tiges ou de plaques) et, en particulier, elles sont *indépendantes* de la fréquence d'excitation : lors d'une résonance interne, c'est un mode propre qui est excité, dont la fréquence propre associée est dans le cas général sans relation avec la fréquence d'excitation. Indiquons dès maintenant que non seulement le système que nous étudions dans cette thèse ne possède pas de modes propres pour les déformations sinusoïdales ou les modulations d'épaisseur, mais que de plus les phénomènes que nous rapportons dépendent explicitement de la fréquence d'excitation. La notion de résonance interne n'est pas pertinente pour nous ici et ne permet donc pas de décrire l'instabilité que nous observons¹.

4

Enfin, un forçage **paramétrique**, ou multiplicatif, correspond à la modulation dans le temps d'un des paramètres du système, c'est-à-dire d'une quantité qui apparaît multipliée à une des variables dans les équations représentatives du problème. Mathématiquement, on obtient alors une équation homogène au sens des équations différentielles, où l'un des termes proportionnels à la variable d'intérêt varie dans le temps. C'est par exemple le cas lorsqu'un pendule voit sa longueur varier au cours du temps (la fréquence propre du pendule change alors en fonction du temps), ou bien lorsqu'une corde mise sous tension entre deux points en voit une se mouvoir longitudinalement (la tension de la corde change alors, et les fréquences qui lui sont propres aussi). Un forçage paramétrique provoque en général une réponse à une fréquence différente de celle de l'excitation. Souvent, cette fréquence de réponse correspond à la moitié de la fréquence

1. Comme nous le verrons plus tard, nous observons bien des échanges d'énergie entre différentes composantes de notre système, mais ces interactions faiblement non-linéaires entre ondes qui se propagent dans l'espace et le temps ne sont pas assimilables à des résonances internes.

d'excitation : un forçage à la fréquence ω_f amène une réponse à la fréquence moitié $\omega_f/2$. C'est ce qui se passe dans le cas des exemples donnés dans ce paragraphe².

Lorsque la fréquence moitié de l'excitation est proche d'une fréquence résonante du système, il est possible d'obtenir une réponse résonante plus ou moins importante en fonction de la différence entre les fréquences (on parle de désaccord, en anglais *detuning*) mais aussi de l'amplitude du forçage, à la différence d'un système excité additivement. Les régions de l'espace des paramètres du forçage qui déclenchent une réponse résonante sont appelées langues de résonance, ou langues d'Arnold.

L'équation correspondant au cas du pendule dont la longueur est modifiée périodiquement est l'équation de Hill

$$\partial_{tt}u + \Omega^2(t)u = 0 \quad (4.3)$$

où Ω^2 est une fonction du temps. On considère le plus souvent le cas perturbatif où $\Omega^2 = \omega_p^2(1 + \epsilon f(t))$ avec $\epsilon \ll 1$. Deux cas particuliers sont remarquables : en appelant ω_f la fréquence de forçage, alors le cas $f(t) = \cos(\omega_f t)$ donne l'équation de Mathieu, tandis que prendre $f(t) = \text{sgn}(\cos(\omega_f t))$ amène à l'équation de Meissner. Ces deux équations se ressemblent et présentent des solutions aux propriétés proches. Il nous semble intéressant de noter que les solutions générales de l'équation de Mathieu, qui est abondamment étudiée, ne sont pas connues analytiquement, tandis qu'il est très simple d'obtenir celles de l'équation de Meissner, bien moins populaire (Soutif 1970). C'est, à notre avis, un exemple notable du fait qu'en physique non-linéaire, les choix inspirés de la physique linéaire (utiliser une fonction oscillant sinusoïdalement) ne sont pas toujours les plus pertinents.

Notons que la résonance d'un système excité de manière paramétrique ne sature pas toujours en raison d'effets dissipatifs, mais peut être limitée à cause du désaccord non-linéaire intrinsèque (Godrèche et Manneville 1998). En effet, dans le cas d'un système décrit par l'équation de Mathieu par exemple, au fur et à mesure que les oscillations croissent, la fréquence, qui dépend de l'amplitude, s'écarte de la fréquence de résonance ; et ce jusqu'à arriver à la frontière de la langue de résonance, ce qui arrête la croissance de l'instabilité. C'est ce mécanisme qui est responsable de la saturation en amplitude.

2. À la condition, pour la corde vibrée, qu'elle soit rigide. Pour une corde élastique de module d'Young faible, mue par le déplacement longitudinal d'un de ses points d'accroche, des comportements plus complexes sont observés (Devaud et Hocquet 2017; Duval et al. [en revue](#)).

4.1.2 Instabilité de Faraday et couplage paramétrique entre ondes

Les forçages paramétriques conduisent souvent à des comportements complexes et non-linéaires : ceci est notamment illustré en mécanique des fluides par l'instabilité de Faraday exhibée par un fluide dont le conteneur est oscillé verticalement (Faraday 1831 ; Douady 1990 ; Kumar et Tuckerman 1994). Ici, le paramètre multiplicatif modulé est l'accélération de la gravité.

En faisant vibrer un liquide dans la direction de la pesanteur, on peut en effet générer des instabilités secondaires (Fauve, Douady et Thual 1991 ; Daudet et al. 1995 ; Tufillaro, Ramshankar et Gollub 1989), des interactions entre modes non triviales (Residori, Guarino et Bortolozzo 2007), des motifs partiellement stationnaires avec un forçage localisé (Moisy et al. 2012), des motifs spatio-temporels complexes (W. S. Edwards et Fauve 1994), des écoulements moyens (Guan et al. 2023), on peut aussi empêcher la coalescence de gouttes (Couder et al. 2005), ou encore stabiliser paramétriquement des configurations fluides instables (Apffel et al. 2020).

Un cas en particulier se révèle pertinent pour notre étude. Il s'agit du cas d'un conteneur très fin dans une direction et allongé dans l'autre, par exemple un conteneur en forme d'anneau, dont la différence entre les rayons des parois serait faible devant le rayon moyen. Dans ce cas, il devient possible de voir l'instabilité de Faraday comme le résultat de l'interaction constructive entre deux ondes de surface contrapropageantes couplées par le forçage. En appelant x la direction dans laquelle s'étend le conteneur, on peut alors écrire la déformation de la surface sous la forme

$$\zeta(x, t) = A(T) e^{i(\omega_A t - k_A x)} + B(T) e^{i(\omega_B t + k_B x)} + \text{c.c.} \quad (4.4)$$

où $A(T)$ et $B(T)$ sont les amplitudes lentement variables des ondes propageantes et contrapropageantes, qui varient avec une échelle de temps lente T , et où c.c. signifie « complexe conjugué ». Les équations d'évolution de ces amplitudes sont alors

$$\partial_T A = -\lambda A + F B^* - (\beta|A|^2 + \gamma|B|^2) A \quad (4.5a)$$

$$\partial_T B = -\lambda B + F A^* - (\gamma|A|^2 + \beta|B|^2) B \quad (4.5b)$$

où F représente l'amplitude du forçage qui s'exprime $F e^{i\omega_f t} + \text{c.c.}$, et où \bullet^* désigne le complexe conjugué de la quantité \bullet (Douady, Fauve et Thual 1989 ; Godrèche et Manneville 1998). Le coefficient d'amortissement λ a une partie réelle positive, traduisant l'atténuation linéaire des ondes de surface.

Ici, les ondes sont couplées entre elles paramétriquement, par le biais du forçage F . Si aucune des deux ondes, considérée individuellement, n'est amplifiée directement par le forçage, celui-ci leur permet d'interagir et de se renforcer l'une et l'autre symétriquement, donnant naissance à un motif d'ondes stationnaires typique de l'instabilité de Faraday. Notons que ce couplage ne peut avoir lieu que si les interactions sont résonantes, c'est-à-dire si les conditions de résonance

spatiale et temporelle sont réunies :

$$k_f = 0 = k_A - k_B \Rightarrow k_A = k_B \quad \text{et donc} \quad \omega_A = \omega_B \quad (4.6)$$

$$\omega_f = \omega_A + \omega_B \Rightarrow \omega_A = \omega_B = \frac{\omega_f}{2}. \quad (4.7)$$

On retrouve bien la condition de résonance à la fréquence moitié de l'équation de Mathieu.

Il existe plusieurs systèmes en physique où des ondes sont couplées paramétriquement, permettant leur amplification commune : en plus des ondes de Faraday en cellule de Hele–Shaw (Douady, Fauve et Thual 1989 ; J. Li, X. Li et Liao 2019 ; Bongarzone et al. 2023), citons les ondes internes dans des bassins à profondeur variable (De Szoëke 1983 ; Benilov 1987), l'instabilité elliptique dans les écoulements en rotation (Kerswell 1993 ; Le Bars, Cébron et Le Gal 2015 ; Lemasquerier et al. 2017 ; Le Bars et Lecoanet 2020), ou même, en dehors de la mécanique des fluides, les modes biphoton dans les oscillateurs paramétriques optiques (Amon, Nizette et al. 2003 ; Amon, Suret et al. 2009).

4.1.3 Forçage additif, déstabilisation paramétrique ?

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'instabilité en collier de perle exhibée par le rivelet lorsqu'il est forcé acoustiquement. Cette instabilité nous paraît originale à plusieurs égards, nous proposons donc pour finir cette introduction de présenter quelques-unes de ses caractéristiques qui nous ont le plus intrigué, nous motivant à l'étudier en profondeur.

Tout d'abord, cette instabilité se manifeste pour toutes les fréquences sur un intervalle de deux décades, entre une dizaine de hertz et quelques kilohertz, ce qui est assez large pour un système macroscopique. Cette large plage d'existence nous indique que l'instabilité n'est pas liée à un mode résonnant propre au système.

Alors que le forçage ne dépend pas de la position verticale et n'apporte pas de longueur caractéristique au problème, les deux quantités affectées par l'instabilité, soit la déformation sinuueuse du chemin suivi par le rivelet et la modulation de son épaisseur, partagent la même longueur d'onde finie, dont l'origine est donc nécessairement dynamique. Autre caractéristique originale, l'introduction d'une échelle de temps caractéristique (la fréquence du forçage) dans le système en donne naissances à deux autres qui en sont distinctes (les pulsations des ondes transverses et longitudinales).

Dans notre système, les déformations sinuueuses et les modulations d'épaisseur sont toutes deux atténuées en l'absence de forçage. Lorsque l'instabilité se présente, elles croissent simultanément, et disparaissent ensemble après l'arrêt du forçage. Ces modes de déformation du rivelet n'entrent donc jamais en compétition, contrairement à ce qui est observé dans l'étude d'autres systèmes hydrodynamique minces comme les jets (Eggers et Villermaux 2008) ou bien des feuilles liquides (Villermaux et Clanet 2002). L'interaction constructive entre ces ondes prend la forme d'un couplage triadique résonant non-linéaire entre les deux ondes co-amplifiées et la réponse linéaire au forçage (ceci sera détaillé plus loin). Un tel mécanisme « en saute-mouton », où chaque onde amplifie l'autre en s'appuyant sur le forçage, évoque les exemples déjà connus

cités précédemment, à ceci près que, dans notre système, les ondes co-amplifiées sont de nature différente : si elles ont comme origine commune l'existence d'une pression capillaire, les ondes longitudinales et transverses présentent des mécanismes de propagation distincts, ne sont pas atténuées de la même manière, et sont régies par des relations de dispersion différentes (comme décrit au chapitre 2).

Enfin, il faut noter que nous appliquons au rivelet un forçage acoustique externe, ou additif (comme on l'a montré au chapitre 2), il se traduit mathématiquement par l'ajout d'un terme supplémentaire dans l'équation du mouvement. Ce forçage, homogène dans l'espace et harmonique dans le temps, induit naturellement une réponse linéaire du rivelet possédant les mêmes caractéristiques spatio-temporelles. On peut voir la réponse à ce forçage homogène comme une onde longitudinale particulière, de longueur d'onde infinie et de même fréquence temporelle que le forçage. Une telle onde n'est évidemment pas située sur la relation de dispersion : en conséquence, elle est atténuée, et n'est observée expérimentalement qu'à cause du forçage.

Cependant, cette réponse linéaire au forçage additif agit dans le système de manière équivalente à un paramètre multiplicatif qui peut coupler paramétriquement les ondes longitudinales et transverses dans le rivelet. Lorsque le forçage est suffisamment intense, cela conduit à la déstabilisation paramétrique à première vue paradoxale d'un système pourtant forcé de manière additive.

Après avoir, nous l'espérons, éveillé la curiosité et l'intérêt de notre lectorat, plongeons sans plus attendre dans l'étude de l'instabilité en collier de perles.

4.2 La danse du rivelet

4.2.1 Condition d'apparition

Plaçons-nous dans la situation où le débit est en-dessous du seuil de méandrage spontané Q^*c c'est à dire que, en l'absence de forçage, le rivelet s'écoule verticalement, en ligne droite. On observe expérimentalement que cet état de base est très robuste. Cela s'explique par le fait que les perturbations transverses comme longitudinales sont toutes deux amorties. Les équations dynamiques, présentées à la section 4.3 et suivantes, montrent en effet que dans ce régime les ondes longitudinales et transverses sont linéairement atténuées. Expérimentalement, cela est confirmé par le fait que lorsqu'une perturbation quelconque est imposée au rivelet, puis est laissée à évoluer, son amplitude décroît exponentiellement en un temps caractéristique de l'ordre de quelques dizaines de millisecondes (voir, dans l'annexe 4.B, les figures 4.15 et 4.16 et la vidéo 4.7).

Appliquons maintenant un forçage acoustique additif, homogène dans l'espace et harmonique dans le temps, à ce rivelet (la configuration expérimentale est rappelée sur le schéma de la figure 4.1 (gauche)). Si l'amplitude du forçage dépasse un certain seuil, dépendant de la fréquence, un motif commence à apparaître, comme on peut le voir sur la vidéo 4.2. L'état de base devient alors instable et le rivelet adopte une géométrie intrigante, les ménisques formant un motif en « collier de perles » qui combine les deux types d'ondes. Ce motif évolue à la fois dans l'espace et dans le temps, comme on le voit sur la figure 4.1 (droite). Au fur et à mesure du temps, la

composante transverse du motif (la sinuosité du chemin suivi par le fluide) se déplace à une certaine vitesse, et la composante longitudinale (les variations d'épaisseur du rivelet) à une autre. En plus de cela, on observe toujours la réponse moyenne du rivelet au forçage acoustique : en observant la figure 4.1 (droite), on voit que l'ensemble du rivelet se déplace tantôt à gauche ($\omega_0 t = \pi/2$), tantôt à droite ($\omega_0 t = 3\pi/2$) du trait rouge, placé à la position d'équilibre où le rivelet se trouve en l'absence de forçage. La combinaison de ces effets donne naissance à des oscillations hypnotiques.

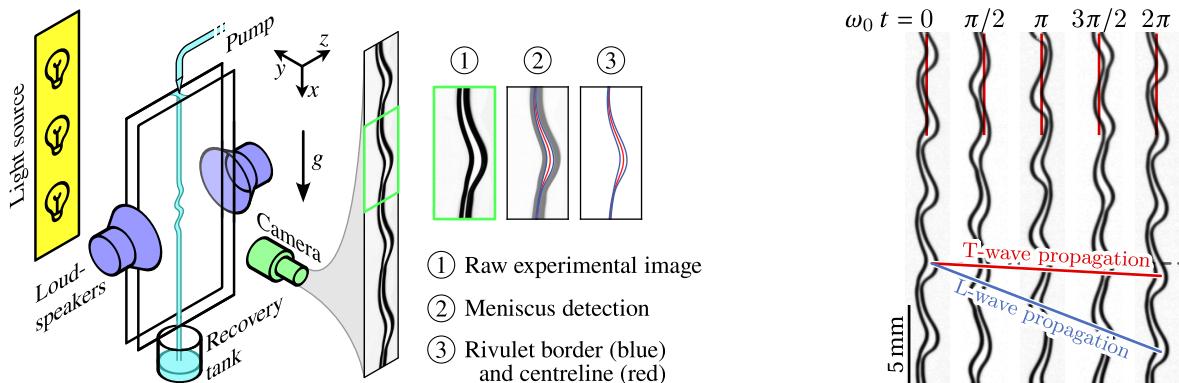


FIGURE 4.1 – (gauche) Dispositif expérimental, et décomposition du rivelet en une composante transverse (chemin suivi) et une composante longitudinale (distance entre les ménisques). (droite) Arrêts sur image tous les quarts de la période d'excitation. Fréquence d'excitation $\omega_0/(2\pi) = 50$ Hz, écartement des plaques $b = 0,6$ mm, débit volumique $Q = (46 \pm 1)$ mm³/s. Les expérimentateur(ice)s les plus aguerri(e)s peuvent même déduire la fréquence de l'excitation en observant seulement les imperfections de cette acquisition : le bruit de fond de l'image varie avec une période double de celle du phénomène, à cause de l'éclairage parasite de la salle par des néons alimentés en 50 Hz alternatif.

Nous conseillons fortement de voir le phénomène en vidéo, pour mieux l'appréhender : la vidéo 4.3 montre un exemple de réalisation. Nous avons aussi mis en ligne des films expérimentaux sur [YouTube³](#) ou bien sur le [site d'Université Paris Cité⁴](#).

L'instabilité se développe aussi dans le cas $Q > Q^*$ (débit volumique supérieur au seuil de méandrage spontané). Dans ce cas, il y a une compétition entre les méandres spontanés et l'instabilité décrite dans ce chapitre. Pour un forçage suffisamment important, les méandres spontanés disparaissent complètement et sont remplacés par le collier de perle. Cette configuration ne sera pas traitée dans ce chapitre, mais elle est traitée dans l'article ??, reproduit dans l'annexe 4.C.



Vidéo 4.2 : Naissance de l'instabilité ([en savoir plus](#)).

3. youtube.com/shorts/ORSPYyi6tTo.

4. u-paris.fr/une-instabilite-parametrique-inedite-dans-un-simple-filet-deau.

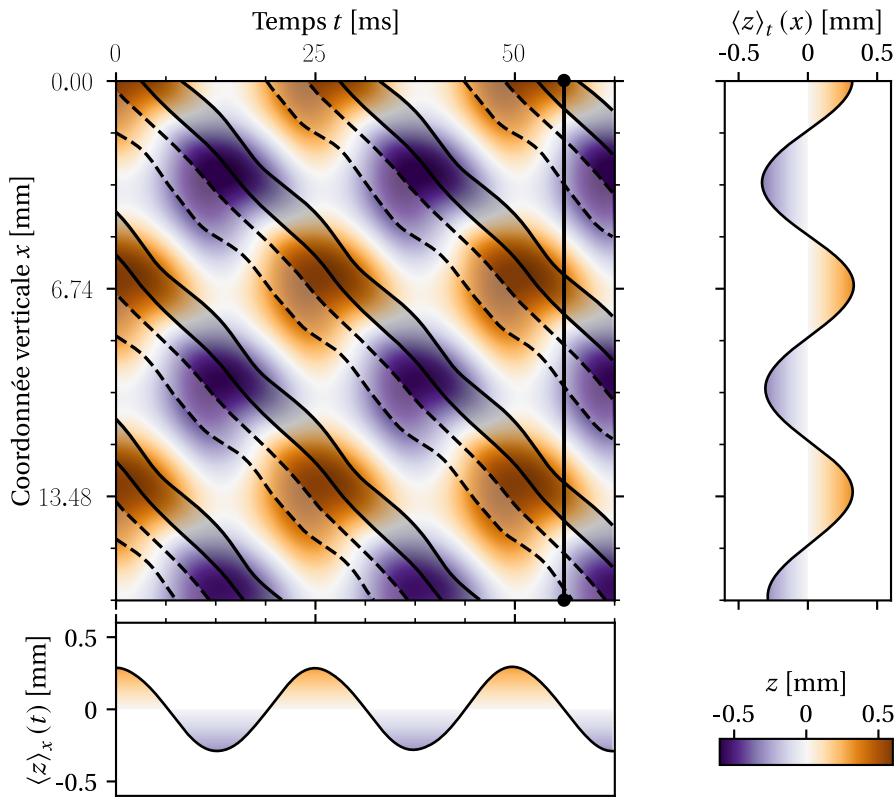


FIGURE 4.2 – Représentation spatio-temporelle de la position expérimentale $z(x, t)$ du rivelet en fonction du temps et de l'espace. (centre) : Position z du rivelet (échelle de couleur) en fonction du temps t et de la position x . Cette position est (approximativement) la somme de fonctions indépendantes, respectivement du temps et de l'espace : $z(x, t) \approx z_1(x) + z_2(t)$. Les régions diagonales rendent compte de l'épaisseur du rivelet w : les zones sombres délimitées par des lignes pleines correspondent aux régions où le rivelet est le plus épais, tandis que les zones claires délimitées par des lignes pointillées correspondent aux régions où il est le plus mince (voir figure 4.3). (haut) : Position du rivelet moyennée sur une période temporelle $\langle z \rangle_t(x) = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} z(x, t) dt \approx z_1(x)$, en fonction de l'espace. Les graduations sont espacées de $\lambda = 2\pi/k = 6,74$ mm. (droite) : Position du rivelet moyennée sur une longueur d'onde $\langle z \rangle_x(t) = \frac{1}{\lambda} \int_{(\lambda)} z(x, t) dx \approx z_2(t)$, en fonction du temps. Les graduations sont espacées de $T_0 := 2\pi/\omega_0 = 25,0$ ms. Fréquence d'excitation $\omega_0/(2\pi) = 40$ Hz, écart entre les plaques $b = (0,58 \pm 0,02)$ mm, débit volumique $Q = (25,6 \pm 0,9)$ mm³/s.

4

4.2.2 Une instabilité génératrice de motifs

On décompose l'information accessible (la position des ménisques) en deux contributions : la position (le chemin suivi par le rivelet) $z(x, t)$ et l'épaisseur (l'écartement entre les ménisques) $w(x, t)$. On peut alors représenter directement l'évolution spatio-temporelle de ces deux quantités, ce qui est fait sur les figures 4.2 et 4.3.

Le signal spatio-temporel $z(x, t)$ peut être vu comme la somme de deux contributions : il y a d'abord une réponse au forçage, qui oscille en temps, et des oscillations transverses, dépendant notamment de l'espace. Le forçage étant une fonction harmonique du temps, homogène en espace, il génère une réponse linéaire de la part du chemin suivi par le rivelet, qui partage ses caractéristiques spectrales (fréquences temporelles et spatiales). On peut y avoir accès en affichant la moyenne spatiale du rivelet $\langle z \rangle_x$ en fonction du temps : c'est ce qui est fait sur la figure 4.2 (haut) : on voit que la position moyenne du rivelet est bien une fonction sinusoïdale du temps,

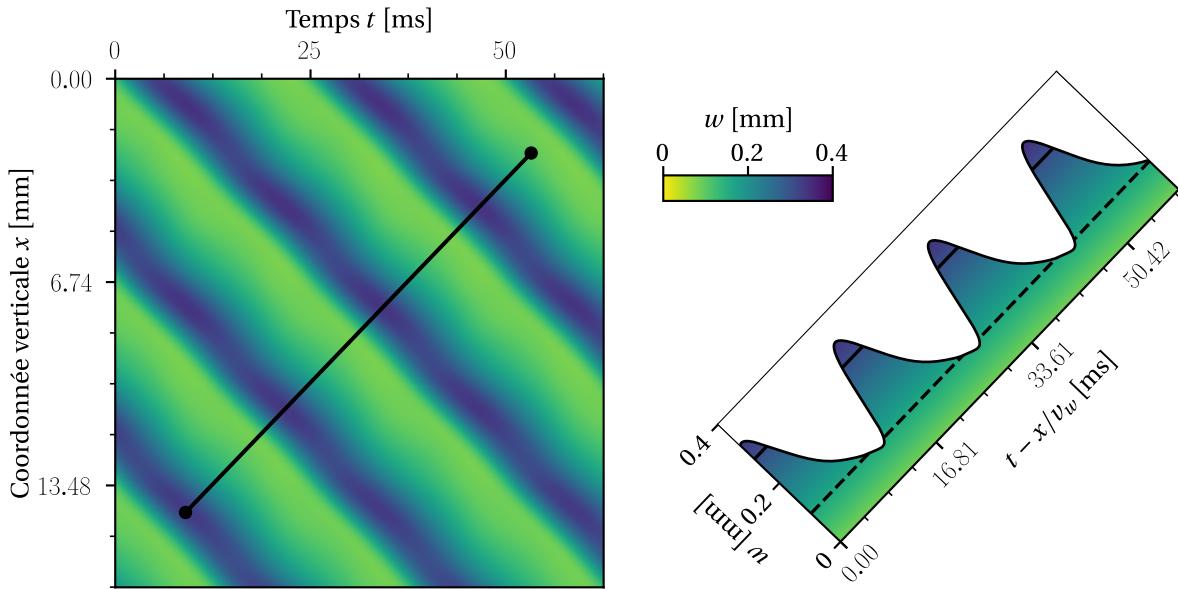


FIGURE 4.3 – Représentation spatio-temporelle de la largeur expérimentale $w(x, t)$ du rivelet en fonction du temps et de l'espace. (gauche) : Largeur w du rivelet (échelle de couleur) en fonction du temps t et de la position x . (droite) : Largeur du rivelet interpolée le long de la ligne noire représentée sur le graphe de gauche. Les lignes pleines et pointillées correspondent aux largeurs délimitant respectivement les zones sombres et claires de la figure 4.2. L'abscisse correspond à une position contre-advectée $x - v_w t$, avec $v_w = 270 \text{ mm/s}$ la vitesse de phase des ondes longitudinales. Les graduations sont espacées de $\sqrt{\lambda^2 + (v_w T_0)^2}$. Écart entre les plaques $b = (0,58 \pm 0,02) \text{ mm}$, débit volumique $Q = (25,6 \pm 0,9) \text{ mm}^3/\text{s}$, fréquence d'excitation $\omega_0/(2\pi) = 40 \text{ Hz}$.

oscillant à la fréquence de forçage.

Le rivelet présente également des oscillations longitudinales, lesquelles, comme illustré sur la figure 4.3, sont une fonction de $x - v_w t$, où la quantité $v_w = \omega_w^+ / k_w = u_0 + v_c \sigma_0 k_w / b$ est la vitesse de phase dans le référentiel du laboratoire des ondes longitudinales rapides prédictes par la relation de dispersion (2.18b).

L'observation de ce motif original amène plusieurs interrogations qui nous ont motivé à entreprendre l'étude de ce phénomène. Par exemple, outre la question évidente de l'origine physique de cette instabilité, une des caractéristiques les plus frappantes du motif généré est que, bien que les perturbations transverses et longitudinales se propagent à des vitesses différentes, elles partagent une longueur d'onde spatiale commune. L'existence de cette longueur d'onde spatiale, très bien définie, peut paraître surprenante : l'excitation étant homogène, aucune échelle de longueur n'est imposée au système. L'origine de cette longueur d'onde doit donc être dynamique. On observe aussi que la phase entre les motifs transverses et longitudinaux est déterministe : pour caricaturer, sur la figure 4.2, les extrêmes de la position z et de l'épaisseur w ne sont jamais confondus. L'amplitude de saturation des motifs en z et w n'est pas expliquée non plus, pas plus que le rapport entre les amplitudes de ces différentes perturbations. Toutes ces observations pointent vers le fait que les deux ondes sont manifestement couplées, mais la nature de ce couplage n'est pas évidente *a priori*.



Vidéo 4.3 : Motif de l'instabilité. ([en savoir plus](#)).

4.3 Résonance triadique et co-amplification

4.3.1 Formulation mathématique du problème

Afin de comprendre l'instabilité et le motif qu'elle génère, nous écrivons un développement non-linéaire des équations régissant le comportement du rivelet, en utilisant un développement multi-échelles (Nayfeh 2008). Nous introduisons ainsi une échelle de temps lente $\tilde{T} = t/\epsilon^2$, avec $\epsilon \ll 1$ un petit paramètre tel que $|\partial_x z| \sim \epsilon$. Nous supposons que la dissipation est faible, c'est-à-dire que l'on peut redimensionner la variable μ , qui représente la viscosité dans notre système, en écrivant $\mu =: \epsilon^2 \mu$ (et donc $\mu_{\text{cl}} =: \epsilon^2 \mu_{\text{cl}}$). Enfin, on s'intéresse ici au cas du forçage faible, c'est-à-dire que nous supposons que la différence de pression imposée par les haut-parleurs $\Pi(t)$ est d'ordre ϵ^2 .

Comme nous l'avons montré à la section 2.3, à l'ordre ϵ les équations du problème rendent simplement compte de la propagation non-atténuée d'ondes transverses et longitudinales. Ces équations s'écrivent

$$\mathcal{L}_z z_1 = 0 \quad (4.8a)$$

$$\mathcal{L}_w w_1 = 0 \quad (4.8b)$$

c'est-à-dire qu'au premier ordre $z(x, t) = \epsilon \tilde{Z} e^{i(\omega_z t - k_z x)} + \text{c.c.}$ et $w(x, t) = \epsilon \tilde{W} e^{i(\omega_w t - k_w x)} + \text{c.c.}$. Comme précédemment, c.c. signifie *complexe conjugué*, le couple (ω_z, k_z) satisfait la relation de dispersion des ondes transverses (2.18a), tandis que (ω_w, k_w) satisfait la relation de dispersion des ondes longitudinales (2.18b).

À l'ordre ϵ^2 , les équations s'écrivent :

$$\sigma_0 \mathcal{L}_z z_2 = \mathcal{N}_z(z_1, w_1, u_1) + \Pi(t) \quad (4.9a)$$

$$\mathcal{L}_w w_2 = \mathcal{N}_w(z_1, w_1, u_1) \quad (4.9b)$$

où $\mathcal{N}_z(z_1, w_1, u_1)$ et $\mathcal{N}_w(z_1, w_1, u_1)$ sont des fonctions quadratiques non-linéaires, dont l'expression est donnée en annexe 4.D; et $\Pi(t) = \tilde{\Pi} e^{i\omega_0 t} + \text{c.c.}$ est l'oscillation de pression imposée extérieurement, homogène dans l'espace et harmonique dans le temps, d'amplitude $\tilde{\Pi}$. Les termes non-linéaires $\mathcal{N}_z(z_1, w_1, u_1)$ et $\mathcal{N}_w(z_1, w_1, u_1)$ ne contiennent aucune contribution pouvant résonner avec z_1 et w_1 : on peut s'en convaincre ou bien en regardant directement les expressions explicites, ou bien en invoquant des arguments de symétrie.

Les équations (4.9) se réduisent donc à :

$$\sigma_0 \mathcal{L}_z z_2 = \tilde{\Pi} e^{i\omega_0 t} + \text{c.c.} \quad (4.10a)$$

$$w_2 = 0 \quad (4.10b)$$

le forçage ajoute alors une contribution additive au motif transverse :

$$z(x, t) = \epsilon \tilde{Z} e^{i(\omega_z t - k_z x)} + \epsilon^2 \tilde{F} e^{i(\omega_0 t - 0 x)} + \text{c.c.} \quad \text{et} \quad w(x, t) = \epsilon \tilde{W} e^{i(\omega_w t - k_w x)} + \text{c.c.}$$

Le terme proportionnel à $\epsilon^2 \tilde{F}$ dans l'expression de $z(x, t)$ correspond donc à la réponse linéaire au forçage. La connaissance de l'opérateur \mathcal{L}_z permet d'écrire une expression explicite pour \tilde{F} , définie par $\tilde{F} := -\tilde{\Pi}/(\sigma_0 \omega_0^2)$.

À l'ordre ϵ^3 , l'élimination des termes non-résonants mène aux équations d'amplitude suivantes, où \tilde{T} est la variable temporelle lente définie plus haut :

$$2\partial_{\tilde{T}}\tilde{Z} = -\mu \left(1 + \varepsilon_z \frac{\mu_{\text{cl}}}{\sigma_0 \mu} \left(\frac{u_0}{v_c} + \varepsilon_z\right)\right) \tilde{Z} - i\varepsilon_z \frac{b \omega_0^2}{\sigma_0 v_c k_w} \tilde{F}^* \tilde{W} \\ + 7ik^3 u_0 |\tilde{Z}|^2 \tilde{Z} + ik^3 v_c \left(-\varepsilon_z \frac{5}{4} + \frac{4\varepsilon_w b}{k \sigma_0}\right) |\tilde{W}|^2 \tilde{Z} \quad (4.11a)$$

$$2\partial_{\tilde{T}}\tilde{W} = -\mu \tilde{W} - i\varepsilon_w k_w \omega_0 \left(\frac{\omega_0}{k_w v_c} - \varepsilon_w \sigma_0 k_z/b\right) \tilde{F} \tilde{Z} \\ - 2i\varepsilon_w \frac{\sigma_0}{b} k_w^2 v_c |k_z \tilde{Z}|^2 \tilde{W} + i \left(k_w \frac{u_0 b^2}{\sigma_0^2} - \varepsilon_w \frac{3}{2} \frac{\sigma_0}{b} v_c k_w^4\right) |\tilde{W}|^2 \tilde{W} \quad (4.11b)$$

où \bullet^* désigne le conjugué complexe de la quantité \bullet , et où les $\varepsilon_{z,w}$ doivent être remplacés respectivement par $+1$ ou -1 , selon la branche de propagation considérée ($\varepsilon_w = \pm 1$ pour ω_w^\pm , et de même pour ε_z). Les étapes principales menant à l'obtention (quelque peu fastidieuse) des équations (4.11) sont consultables dans l'annexe 4.D.

En réalité, nous avons obtenu quatre couples d'équations possibles, selon les valeurs de ε_z et ε_w . Il convient maintenant de déterminer quelles valeurs ces « indicateurs de branches » doivent adopter pour pouvoir décrire le phénomène qui nous intéresse. En chemin, nous prendrons aussi le temps d'expliciter l'interprétation physique que l'on peut faire des différents termes, ce qui peut aider à développer une plus grande familiarité avec ces équations, avant de plonger dans ses conséquences mathématiques.

Le membre de gauche traduit simplement l'évolution temporelle lente des amplitudes des ondes transverses et sinusoïdales. Le membre de droite se compose de trois types de termes : amortissement linéaire dissipatif, couplage non-linéaire croisé, et non-linéarités d'ordre trois, dans cet ordre.

Termes d'amortissement

Pour les ondes longitudinales, l'amortissement linéaire est toujours le même, tandis que pour les ondes transverses, il dépend de la branche considérée. Pour illustrer cette différence d'amortissement, considérons le cas $u_0 = v_c$: lorsque $\varepsilon_z = -1$ (branche ω_z^-) le coefficient multiplicatif du terme linéaire est $-\mu$, tandis que la branche $\varepsilon = +1$ (branche ω_z^+) est sujette à une atténuation beaucoup plus importante, avec un coefficient $-\mu(1 + 2\mu_{\text{cl}}/(\sigma_0 \mu))$. Une des branches est donc soumise à des frottements beaucoup plus importants que l'autre. Expliquons physiquement cette dépendance de la dissipation avec la vitesse de phase.

De manière générale, puisque le rivelet est mince, la dissipation due au déplacement des ménisques transverses domine la dissipation dans le volume : $\mu_{\text{cl}} \gg \sigma_0 \mu$, la majeure partie de la perte d'énergie vient du « frottement » des ménisques sur les plaques de verre qui délimitent la cellule. Une onde sur la branche ω_z^- se déplace à la vitesse $u_0 - v_c$ dans le référentiel du laboratoire,

donc par rapport aux plaques. Cette vitesse est très faible (par rapport à u_0 ou v_c , qui sont du même ordre de grandeur), les ménisques sont alors quasiment immobiles par rapport aux plaques et frottent très peu. Au contraire si on considère une onde sur la branche ω_z^+ , le rivelet glisse sur les plaques à la vitesse $u_0 + v_c$ dans le référentiel du laboratoire, et les ménisques sont déplacés rapidement par rapport aux plaques, ce qui est coûteux énergétiquement. La branche ω_z^+ est donc fortement amortie : cela est cohérent avec le fait que les ondes transverses ω_z^+ ne sont jamais observées expérimentalement. Pour la suite, nous ne considérerons que le cas $\varepsilon_z = -1$.

Termes non-linéaires

Les termes les plus intéressants des équations (4.11) sont sans doute les termes de couplage croisé, qui impliquent une interaction entre les ondes transverses et longitudinales. Le signe de chaque terme de couplage non-linéaire est crucial pour le mécanisme d'amplification, et ne peut être obtenu que par une dérivation rigoureuse des équations. L'interaction entre ondes transverses et longitudinales n'est constructive que si le produit des deux termes de couplage est de signe positif, dans le cas contraire, cette interaction ne fait qu'augmenter l'amortissement des deux ondes. Pour qu'une instabilité apparaisse, il faut donc que $(-i\varepsilon_z)(-i\varepsilon_w) = +1$, i.e. $\varepsilon_z \varepsilon_w = -1$ (en supposant $\omega_0 > v_c \sigma_0 k^2 / b$, ce qui est toujours vérifié dans la gamme de paramètres accessibles expérimentalement). Comme on a déterminé plus haut que $\varepsilon_z = -1$, cela impose que la branche amplifiée par l'instabilité soit nécessairement $\varepsilon_w = +1$.

En regardant la figure 4.2, on peut confirmer que la prédiction $(\varepsilon_z, \varepsilon_w) = (-1, +1)$ est bien vérifiée expérimentalement : on voit que $\omega_w > \omega_z$, c'est-à-dire, puisque la longueur d'onde est la même, $v_z = \omega_z / k_z \ll v_w$.

Notons que la forme du terme de couplage témoigne du fait que l'instabilité est paramétrique, puisque la réponse au forçage \tilde{F} agit comme un paramètre multiplicatif couplant les deux ondes. Le fait que la réponse linéaire à un forçage additif extérieur intervienne de manière multiplicative dans les équations d'amplitude participe à l'originalité de cette instabilité. Ce couplage entre deux ondes médié par un forçage extérieur est analogue au couplage croisé entre ondes progressives et régressives dans l'instabilité de Faraday dans un bain annulaire (Douady, Fauve et Thual 1989).

Les derniers termes du membre de droite des équations (4.11) sont des termes de désaccord non-linéaire. En effet, en l'absence d'amortissement non-linéaire, ces termes sont associés à un préfacteur purement imaginaire, traduisant le fait que lorsque l'amplitude des ondes croît, leur fréquence se décale en conséquence. Ces termes de désaccord peuvent être responsables de la saturation non-linéaire des instabilités paramétriques, car ils décalent la fréquence d'oscillation et la déplacent hors de la résonance.

4.3.2 Arguments de symétrie

On peut remarquer que la forme générale des équations (4.11) aurait pu être devinée à partir d'arguments de symétrie uniquement. Pour le montrer, faisons le raisonnement suivant : on suppose que les équations d'évolution à l'ordre trois en ϵ pour \tilde{Z} et \tilde{W} ne contiennent que des termes en \tilde{Z} , \tilde{W} , \tilde{F} et leurs conjugués complexes. Nécessairement ces termes doivent être compatibles avec les invariances et symétries du problème.

Considérons l'invariance par translation dans le temps du problème, c'est-à-dire le fait que l'ensemble des équations (en incluant la définition de la forme mathématique du forçage) ne doit pas changer lorsqu'on applique la transformation $t \rightarrow t + t_0$. Cette transformation correspond, en termes de nos variables, au changement de phase $\tilde{Z}, \tilde{W}, \tilde{F} \rightarrow \tilde{Z}e^{i\phi}, \tilde{W}e^{i\phi+i\psi}, \tilde{F}e^{i\psi}$ avec $\phi = \omega_z t_0$ et $\psi = \omega_0 t_0$. Les équations d'évolution à l'ordre trois, pour être invariantes sous cette transformation, doivent alors nécessairement être de la forme :

$$\partial_{\tilde{T}} \tilde{Z} = a \mu \tilde{Z} + b \tilde{F}^* \tilde{W} + c \tilde{Z}^2 \tilde{Z}^* + d \tilde{W} \tilde{W}^* \tilde{Z} \quad (4.12a)$$

$$\partial_{\tilde{T}} \tilde{W} = a' \mu \tilde{W} + b' \tilde{F} \tilde{Z} + c' \tilde{Z} \tilde{Z}^* \tilde{W} + d' \tilde{W}^2 \tilde{W}^* \quad (4.12b)$$

où les préfacteurs a, b, c, d, a', b', c' et d' sont des nombres complexes *a priori* quelconques. Cette forme est bien la même que celle des équations (4.11).

Mieux encore : le fait que le problème doive respecter la symétrie de réflexion espace-temps $x, t \rightarrow -x, -t$ impose la phase (le caractère réel ou imaginaire) des préfacteurs. En effet, cette symétrie correspond aux transformations $\tilde{Z}, \tilde{W}, \tilde{F} \rightarrow \tilde{Z}^*, \tilde{W}^*, \tilde{F}^*$, $\tilde{T} \rightarrow -\tilde{T}$, et $\mu \rightarrow -\mu$ (la dissipation étant un processus irréversible). Sous l'effet de cette transformation, les équations (4.12) deviennent alors

$$\partial_{\tilde{T}} \tilde{Z} = a^* \mu \tilde{Z} - b^* \tilde{F}^* \tilde{W} - c^* \tilde{Z}^2 \tilde{Z}^* - d^* \tilde{W} \tilde{W}^* \tilde{Z} \quad (4.13a)$$

$$\partial_{\tilde{T}} \tilde{W} = a'^* \mu \tilde{W} - b'^* \tilde{F} \tilde{Z} - c'^* \tilde{Z} \tilde{Z}^* \tilde{W} - d'^* \tilde{W}^2 \tilde{W}^* \quad (4.13b)$$

et l'identification terme à terme entre les équations nous apprend que a et a' sont nécessairement réels, tandis que les autres coefficients sont des imaginaires purs, ce qui correspond bien à la nature des coefficients dans les équations (4.11).

On peut remarquer que problème possède par ailleurs d'autres invariances et symétries, mais qui ne peuvent rien nous apprendre de plus à ce stade. Par exemple, l'invariance par translation dans l'espace $x \rightarrow x + x_0$ est brisée par l'instabilité et doit donc être respectée par les équations : elle correspond à la transformation $\tilde{Z}, \tilde{W}, \tilde{F} \rightarrow \tilde{Z}e^{i\phi}, \tilde{W}e^{i\phi}, \tilde{F}$ avec $\phi = kx_0$. Si on ne prend en compte que cette invariance à la place de celle par translation dans le temps pour chercher la forme des équations, on obtient un système similaire à (4.12) avec deux termes en plus, $e \tilde{F} \tilde{W}$ dans la première équation et $e' \tilde{F}^* \tilde{Z}$ dans la seconde. En effet, l'invariance selon l'espace seule ne permet pas de discriminer entre \tilde{F} et son complexe conjugué \tilde{F}^* .

Pour conclure, énumérons deux autres propriétés du système liées aux invariances et symétrie : l'inversion haut-bas $x, g \rightarrow -x, -g$, qui est une symétrie générale du système, et la symétrie miroir $z \rightarrow -z$, qui est brisée par l'instabilité : nous nous en servirons plus tard.

4.3.3 Condition de résonance

Puisque les équations (4.11) résultent de l'élimination des termes séculaires, on comprend que le terme de couplage ne peut être pris en compte que si une certaine condition de résonance est satisfaite. La résonance, ou la condition d'accord de fréquence, signifie que l'interaction entre les ondes doit être résonante pour qu'elles puissent échanger de l'énergie, et donc potentiellement s'amplifier mutuellement.

Ce comportement est assimilable à une interaction faiblement non-linéaire résonante à trois ondes, où une relation algébrique doit être satisfaite entre les ondes pour que l'interaction triadique ait lieu (Simmons 1969; Martin, Simmons et Wunsch 1972; Phillips 1981; Hammack et Henderson 1993). Ce mécanisme est celui qui permet, par exemple, de comprendre la structure de motifs générés par des interactions non-linéaires entre ondes de surface gravito-capillaires (Mcgoldrick 1965; Moisy et al. 2012; Haudin et al. 2016). Nous montrons dans l'annexe 4.A que nous pouvons réécrire les équations de notre système de manière à mettre particulièrement en valeur cette interaction triadique.

Ici, les ondes en interaction sont une onde transverse, une onde longitudinale, et la contribution $\tilde{F}e^{i\omega_0 t} + \text{c.c.}$ à $z(x, t)$ (réponse linéaire au forçage), que l'on peut considérer comme une onde transverse de nombre d'onde spatial nul.

La condition de résonance s'écrit donc mathématiquement

$$\omega_w - \omega_z = \pm\omega_0 \quad (4.14a)$$

$$k_w - k_z = \pm 0 \quad (4.14b)$$

puisque les fréquences temporelles et spatiales doivent toutes deux correspondre pour que la résonance ait lieu.

Les équations (4.14) imposent une condition nécessaire à l'existence du terme de couplage croisé, et donc à l'instabilité. Elles ont des implications directes sur les caractéristiques du motif. L'équation (4.14b) fournit une explication théorique au fait que les ondes transverses et longitudinales partagent le même nombre d'onde, et donc la même longueur d'onde spatiale. L'équation (4.14a) prédit une relation déterministe entre les différentes fréquences. La quantité $\omega_0 = \omega_w - \omega_z$ peut prendre deux valeurs, selon la valeur du produit $\epsilon_- \epsilon_+$. Les résultats des mesures sont représentés sur la figure 4.4. Ils montrent un excellent accord avec notre prédition, selon laquelle les modes excités sont les modes ω_w^+, ω_z^- .

Notons que la structure de ces équations explique aussi de manière simple pourquoi il est possible d'observer l'instabilité sur une très large gamme de fréquences d'excitation. En effet, la courbe $\omega_0 = \omega_w^+ - \omega_z^-$ en fonction de k est une bijection de \mathbb{R} sur lui-même : pour chaque fréquence d'excitation ω_0 , il existe un nombre d'onde k pour lequel la condition de résonance peut être satisfaite. Il reste cependant des limitations expérimentales : nous n'avons pas pu observer l'instabilité avec des fréquences inférieures à 10 Hz, car dans de telles conditions la longueur d'onde devient comparable à la taille sur laquelle le forçage est homogène; et pour les fréquences au-dessus de quelques kilohertz le rivelet est fragile et casse très facilement, comme nous le

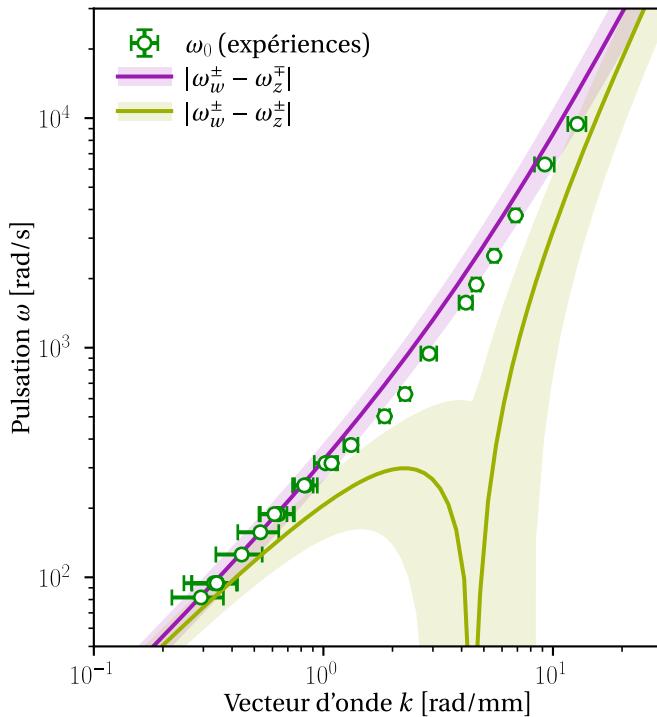


FIGURE 4.4 – Relation entre k et ω_0 . Les symboles correspondent aux mesures expérimentales du vecteur d'onde $k = 2\pi/\lambda$ (qui est le même pour les ondes transverses et longitudinales). Expériences réalisées avec un espacement de cellule $b = 0,6$ mm et un débit volumique $Q = (26 \pm 1)$ mm³/s. Les lignes correspondent à $|\omega_w^+ - \omega_z^-| = kv_c(1 + k\sigma_0/b)$, c'est-à-dire $\varepsilon_z \varepsilon_w = -1$ (violet) et $|\omega_w^+ - \omega_z^+| = kv_c|1 - k\sigma_0/b|$, c'est-à-dire $\varepsilon_z \varepsilon_w = +1$ (ocre). Les courbes sont calculées sans ajustement, en utilisant les valeurs expérimentales des paramètres. La prédition théorique est que l'instabilité correspond aux modes ω_w^+ , ω_z^- instables (courbe violette). Notons que les points expérimentaux tombent souvent légèrement à droite de la courbe, c'est-à-dire que les vecteurs d'onde k sont de norme plus grande que prévu : cela s'explique par le fait que les points ont été pris dans une situation où l'instabilité a une amplitude finie pour laquelle un désaccord non-linéaire est mesurable (voir section 4.4.4).

montrons plus bas à la section 4.5.

4.3.4 Interprétation physique du mécanisme de l'instabilité

Nous voilà à présent en possession d'équations pour décrire notre phénomène, et nous avons même réussi à identifier, parmi les quatre paires possibles, le couple de branches qui est déstabilisé. Mais, à notre sens, disposer d'équations n'est que de peu d'intérêt si l'on reste incapable de leur attribuer du sens, et d'identifier à quel phénomène physique chacun des termes se rattache. En particulier, si on a maintenant bien identifié que le caractère instable du motif est lié aux termes de couplages paramétriques $\tilde{F}^* \tilde{W}$ et $\tilde{F} \tilde{Z}$ des équations (4.11), il nous reste à en donner une interprétation physique simple. Nous proposons donc dans cette section une compréhension qualitative « avec les mains » des effets physiques représentés par les termes de couplage non-linéaires responsables de la déstabilisation du rivelet.

Une caractéristique intéressante de l'instabilité en collier de perles est qu'aucun des deux types d'ondes présent dans le motif final n'est instable en soi en l'absence de forçage, et que le forçage n'amplifie directement aucune des perturbations. Il arrive souvent dans l'étude des objets minces

(*slender objects*) que le chemin suivi ou le profil d'épaisseur soient déstabilisés, par exemple lors dans les cas des jets (Eggers et Villermaux 2008; Mikhaylov et Wu 2020) ou de nappes (Crapper et al. 1973; Villermaux et Clanet 2002); généralement un mode devient instable seul, ou deux ou plusieurs modes deviennent instables, se disputent l'énergie, et le mode à la croissance la plus rapide l'emporte. Au contraire, dans le système étudié ici, le forçage ne joue qu'un rôle d'intermédiaire, son seul rôle étant de coupler deux types d'ondes différentes qui n'interagiraient pas en l'absence de forçage. Les deux termes de couplage dans les équations (4.11a) et (4.11b) sont des représentations mathématiques des deux façons dont les ondes longitudinales et transverses peuvent s'influencer mutuellement, ce que nous illustrons sur les figures 4.5 et 4.6.

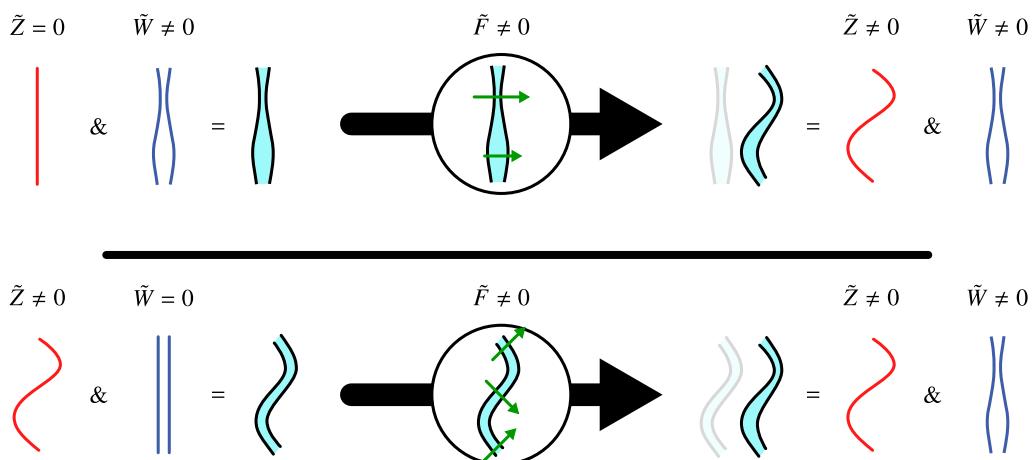


FIGURE 4.5 – Schéma illustrant le mécanisme d'amplification croisée. La longueur des flèches vertes représente l'amplitude du déplacement localement imposé au rivelet.
 (haut) Déformation du chemin emprunté par le fluide due à une répartition de masse variable dans l'espace sur le rivelet.
 (bas) Changement dans le profil de largeur dû au chemin non rectiligne du rivelet.

Notons que, telles que les forces sont dessinées, les déformations transverses et longitudinales s'amplifient mutuellement. Si les directions des flèches vertes sont inversées mais que la sinuosité reste la même, ce qui correspond à un changement de signe de la force tout en restant dans le référentiel mobile avec la sinuosité, *i.e.* la transformation (4.15); alors l'interaction reste constructive uniquement si la modulation de largeur est déplacée d'une demi-longueur d'onde vers le bas, c'est-à-dire que (4.16) doit être vérifiée.

4

Le terme $\tilde{F}^* \tilde{W}$ dans l'équation (4.11a) qui gouverne l'évolution temporelle du chemin \tilde{Z} traduit le fait qu'un rivelet de largeur non uniforme verra son chemin se déformer lorsqu'il est déplacé transversalement sous l'effet du forçage, comme illustré sur la figure 4.5 (haut). En effet, si un rivelet présentant des modulations de largeur est déplacé transversalement, alors les parties les plus épaisses du rivelet, ayant plus d'inertie, seront moins mobiles que les parties plus fines, qui contiennent une plus petite masse de liquide. Comme différentes parties du rivelet, ayant des masses différentes, se déplacent transversalement sur des longueurs différentes, cela conduit à une déformation du chemin suivi par le rivelet. Suivant ce raisonnement, il est clair que la périodicité spatiale de la déformation du chemin sera la même que celle des modulations de largeur : cela correspond à la condition (4.14b) (les deux ondes partagent la même longueur d'onde).

Le terme $\tilde{F}\tilde{Z}$ dans l'équation (4.11b) qui gouverne l'évolution temporelle de la largeur \tilde{W}

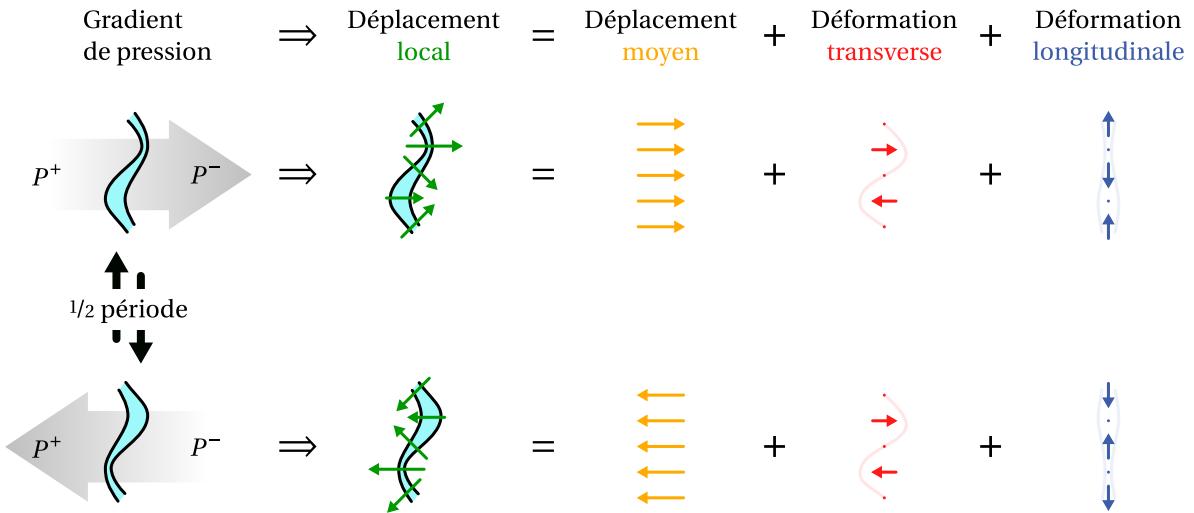


FIGURE 4.6 – Schéma illustrant l'effet du forçage sur le rivelet. Le forçage acoustique que nous utilisons consiste en un gradient de pression autour du rivelet oscillant sinusoïdalement, c'est-à-dire dont le signe change toutes les demi périodes. Ce gradient de pression déplace les éléments du rivelet. Ce déplacement se fait selon la normale à la surface, et il est d'autant plus intense que le rivelet est fin, i.e. que son inertie est faible. On peut décomposer le déplacement total du rivelet en trois contributions : un déplacement moyen (correspondant à la réponse linéaire au forçage \tilde{F}), une déformation transverse (qui amplifie la sinuosité \tilde{Z}), et une déformation longitudinale (qui amplifie la modulation d'épaisseur \tilde{W}). On constate qu'intrinsèquement, ces dernières perturbations partagent la même longueur d'onde, ce qui correspond à la relation (4.14b). On constate aussi que, pour que les interactions restent constructives lorsque la pression change de sens, la perturbation longitudinale doit se déplacer d'une demi-longueur d'onde par rapport à la perturbation transverse en une demi-période : cela correspond à la relation (4.14a).

représente le fait qu'un rivelet présentant un chemin courbé verra son profil de largeur évoluer lorsqu'il est déplacé sous l'effet du forçage, comme illustré sur la figure 4.5 (bas). Considérons un rivelet présentant un chemin courbé périodiquement, déplacé comme une membrane sous l'effet d'une pression différentielle entre ses deux côtés. Aux endroits où la courbure est du même signe que la force de déplacement due à la pression, le fluide s'accumule, poussé depuis le haut et le bas et concentré par un mouvement convergent, et le rivelet s'épaissit. À l'inverse, aux endroits où la courbure est de signe opposé à la force de pression, les forces induisant un écoulement divergent : ces endroits seront appauvris en fluide et s'aminciront. Comme précédemment, ce raisonnement permet de comprendre que la périodicité spatiale de la modulation de largeur reflétera celle de la courbure du chemin, validant une fois encore qualitativement la condition (4.14b).

Enfin, considérons les mêmes mécanismes exposés dans les deux paragraphes précédents, mais une demi-période de forçage plus tard. Cela correspond à un changement de signe de la force de pression / du déplacement transversal : formellement, cela est associé à la transformation

$$t \rightarrow t + \pi/\omega_0 \quad \tilde{\Pi} \rightarrow -\tilde{\Pi} \quad \tilde{F} \rightarrow -\tilde{F} \quad \tilde{Z} \rightarrow \tilde{Z} e^{i\pi\omega_z/\omega_0} \quad \tilde{W} \rightarrow \tilde{W} e^{i\pi\omega_w/\omega_0}. \quad (4.15)$$

Le mécanisme d'amplification de l'onde longitudinale conduira à une modulation de largeur de signe opposé par rapport à la situation précédente (car la pression a changé de signe). Comme on le voit sur la figure 4.6, pour que le mécanisme complet fonctionne, cela doit coïncider avec l'action du mécanisme d'amplification sinusoïdale, ce qui nécessite que le motif de modulation de

largeur soit déplacé d'une demi-longueur d'onde par rapport au motif sinueux : formellement, cela correspond à la transformation

$$\tilde{W} \rightarrow -\tilde{W} e^{i\pi\omega_z/\omega_0} = \tilde{W} e^{i\pi(\omega_z \pm \omega_0)/\omega_0}. \quad (4.16)$$

Ainsi, pour que le mécanisme fonctionne en tout temps, le système doit vérifier $\omega_w = \omega_z \pm \omega_0$: c'est précisément la condition de résonance (4.14a). Les deux conditions de résonance peuvent donc être comprises qualitativement en observant l'interprétation physique du mécanisme d'amplification : deux effets différents se combinent pour former le cycle complet d'amplification.

Une question qui découle immédiatement de cette démonstration est : quelle est l'importance relative de ces deux effets pour le déclenchement et la croissance de l'instabilité ? Cette question, et d'autres, trouvent leur réponse dans la section suivante.

4.4 Développement(s) non-linéaire(s)

4.4.1 Formulation adimensionnée

Afin de rendre les calculs mathématiques qui suivent plus concis, nous effectuons quelques changements de variables qui visent à rendre le système d'équations sans dimension. Le choix de l'échelle de temps est évident et correspond à $2/\mu$, le temps typique d'amortissement de l'onde longitudinale en l'absence de forçage. Comme échelle de longueur, nous choisissons la quantité $\ell := \mu\sqrt{\sigma_0 v_c / (b \omega_0^3)}$, dont l'interprétation deviendra claire au cours de la sous-section suivante. Ainsi, nous définissons

$$T := \mu \tilde{T} / 2 \quad F := \tilde{F} / \ell \quad Z := \tilde{Z} / \ell \quad W := \tilde{W} / \ell \quad (4.17)$$

ce qui nous permet d'écrire le système sous une forme compacte adimensionnée :

$$\partial_T Z = -\eta Z + i\phi F^* W + i(\alpha_{ZZ}|Z|^2 + \alpha_{ZW}|W|^2)Z \quad (4.18a)$$

$$\partial_T W = -W - i\frac{1}{\phi} F Z + i(\alpha_{WZ}|Z|^2 + \alpha_{WW}|W|^2)W \quad (4.18b)$$

avec $\phi := \frac{1}{u_0 k} \sqrt{\frac{b \omega_0 v_c}{\sigma_0}}$; $\eta := 1 - \frac{\mu_{cl}}{\sigma_0 \mu} \left(\frac{u_0}{v_c} - 1 \right)$; et les préfacteurs de désaccord α_{XX} sont définis comme suit :

$$\alpha_{ZZ} := 7 \Xi (k\sigma_0/b)^3 \quad \alpha_{ZW} := 4 \Xi (k\sigma_0/b)^2 \left(1 + \frac{5}{16} (k\sigma_0/b) \right)$$

$$\alpha_{WZ} := 2 \Xi \frac{v_c}{u_0} (k\sigma_0/b)^4 \quad \alpha_{WW} := \Xi k\sigma_0/b$$

où $\Xi := \frac{b^2 \mu u_0 v_c}{\omega_0^3 \sigma_0^2} = \frac{u_0 b^3 \ell^2}{\mu \sigma_0^3}$ caractérise la force du désaccord en fréquence (*frequency detuning*).

Le coefficient sans dimension ϕ traduit l'efficacité relative des deux effets participant à la co-amplification : l'augmentation de la sinuosité due à la répartition inégale de la masse, et le changement du profil d'épaisseur dû à la courbure du chemin (voir la section 4.3.4 pour plus de détails sur l'interprétation physique de ces termes). Il quantifie ainsi l'asymétrie du mécanisme d'instabilité : les rivelets très fins dans lesquels le fluide coule lentement (bas débit) présentent $\phi \gg 1$ et sont principalement instables à cause de la déformation du chemin due à l'hétérogénéité de la largeur, tandis que les rivelets épais et dans lesquels l'écoulement est rapide (haut débit) présentent $\phi \ll 1$ et sont principalement instables à cause de la concentration du fluide induite par la courbure le long du rivelet. Pour toutes les expériences présentées dans cette étude, on a $\phi > 1$, ce qui signifie que l'étape principale d'amplification dans le mécanisme est le mouvement différentiel du chemin dû à l'inertie spatialement inhomogène du rivelet.

Le coefficient η rend compte de la différence entre l'atténuation des ondes transverses et celle des ondes longitudinales. Pour toutes les expériences présentées au sein de ce chapitre, on a $u_0 \lesssim v_c$ et donc $\eta \lesssim 1$. Cependant, il est important de noter que lorsque la vitesse u_0 devient supérieure à la valeur seuil $v_c(1 + \sigma_0 \mu / \mu_{cl})$, le coefficient η devient négatif et les ondes transverses

sont auto-amplifiées et deviennent instables. C'est l'instabilité de méandrage spontané, qui sera étudiée dans le chapitre suivant. En pratique il est possible d'exciter acoustiquement le rivelet dans ce régime, ce qui aboutit à une compétition entre les instabilités, mais cette interaction complexe n'est pas encore très bien comprise. Elle dépasse le cadre de la présente étude et devra faire l'objet de recherches ultérieures : dans la suite de ce chapitre, on considérera toujours $\eta > 0$.

4.4.2 Seuil d'instabilité

Nous nous posons maintenant la question de la détermination du seuil de l'instabilité : à partir de quelle amplitude de forçage le rivelet se déstabilise-t-il ?

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce chapitre, nous supposerons $|Z| \sim \epsilon'$ et $|W| \sim \epsilon'$, avec $\epsilon' \ll 1$ un petit paramètre. Nous définissons le vecteur $|U\rangle := \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix}$ qui condense en une notation concise l'information sur l'état dans lequel se trouve notre système. Nous empruntons la notation bra-ket à nos collègues de mécanique quantique, car elle est particulièrement utile pour traiter des problèmes d'algèbre linéaire.

Ainsi, puisque $\|U\| \sim \epsilon' \ll 1$, les équations (4.18a) et (4.18b) peuvent être simplifiées en

$$\partial_T |U\rangle = \mathbf{L} |U\rangle \quad \text{avec} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} -\eta & i\phi F^* \\ -i\frac{1}{\phi}F & -1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

au premier ordre en ϵ' .

La trace de la matrice \mathbf{L} est $\text{tr}(\mathbf{L}) = -(1 + \eta) < 0$. Puisqu'elle est la somme des valeurs propres de \mathbf{L} , nous pouvons en conclure qu'il existe toujours au moins un mode qui est amorti linéairement. Le déterminant vaut $\Delta(\mathbf{L}) = \eta - |F|^2$, il correspond au produit des valeurs propres de \mathbf{L} . L'instabilité se développe si et seulement si un mode est amplifié linéairement, c'est-à-dire si l'une des valeurs propres de \mathbf{L} a une partie réelle positive. Cela n'est le cas que si $\Delta(\mathbf{L})$ est négatif, ce qui arrive lorsque le forçage dépasse un seuil critique égal à η en unités sans dimension. L'instabilité en collier de perles se développe donc si et seulement si la condition

$$|F|^2 > |F_c|^2 := \eta \quad \Leftrightarrow \quad |\tilde{F}| > |\tilde{F}_c| := \sqrt{\eta} \ell = \sqrt{\eta} \mu \sqrt{\frac{\sigma_0 v_c}{b \omega_0^3}} \quad (4.20)$$

4

est remplie. L'interprétation de ℓ est maintenant claire : elle correspond au déplacement transverse typique nécessaire pour développer l'instabilité. Cela nous donne une loi d'échelle pour l'amplitude critique du forçage : $|\tilde{F}_c| \propto (\omega_0)^{-3/2}$. Cette loi d'échelle est montrée sur la figure 4.7 et est vérifiée expérimentalement. Fait intéressant, la valeur du préfacteur obtenue par ajustement optimal est $33,7 \text{ mm Hz}^{-3/2}$, ce qui ne correspond pas au préfacteur théorique calculé à partir de la formule analytique (4.20), de $(16,4 \pm 3,3) \text{ mm Hz}^{-3/2}$. Cela pourrait être dû à la difficulté inhérente à la mesure délicate de $|\tilde{F}_c|$. Le fait que la valeur d'ajustement soit presque exactement un facteur 2 au-dessus du résultat théorique pourrait aussi indiquer une erreur algébrique dans nos calculs, même si nous n'avons pas pu la détecter après avoir redérivé nos résultats plusieurs fois.

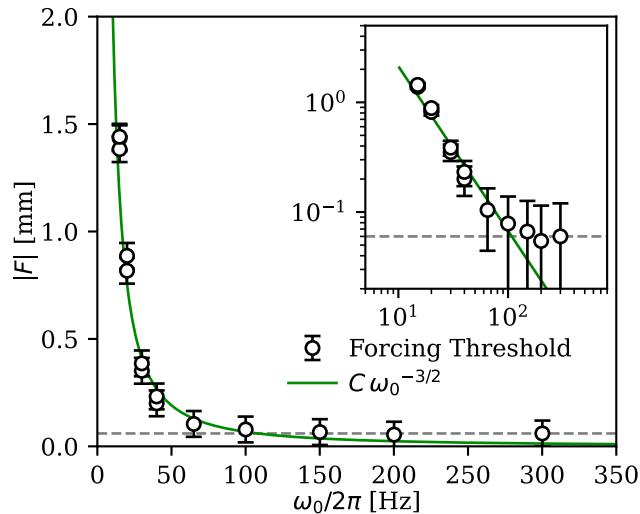


FIGURE 4.7 – Déplacement transverse au seuil de l’instabilité en fonction de la fréquence d’excitation. Expériences réalisées avec un écart $b = 0,6$ mm et un débit volumique $Q = (26 \pm 1)$ mm³/s. Les points noirs correspondent aux mesures expérimentales. La ligne grise en pointillés représente la limite de résolution de notre méthode de mesure, elle correspond à $1/5^{\text{e}}$ de l’espacement entre deux points représentés par des pixels voisins. La ligne verte pleine correspond à une loi de puissance d’exposant $-3/2$, le facteur multiplicatif étant ajusté pour représenter au mieux les données. Encart : mêmes données en échelle double logarithmique.

4.4.3 Structure du motif

Après avoir identifié le seuil de forçage au-delà duquel l’instabilité se développe, nous nous tournons maintenant vers l’étude du motif lui-même. Nous cherchons pour cela à comprendre la structure du mode le plus instable qui croît, et à la comparer au motif observé dans les expériences.

Pour ce faire, nous nous plaçons au voisinage du seuil d’instabilité, en supposant $F = F_c + \epsilon'^2 \delta F$ avec $|F_c| = \sqrt{\eta}$ et ϵ' le petit paramètre introduit au début de cette section. Cela nous permet de décomposer la matrice d’évolution en

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \epsilon'^2 \delta \mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1 & i\phi F_c^* \\ -i\frac{1}{\phi} F_c & -1 \end{pmatrix} + \epsilon'^2 i \begin{pmatrix} 0 & \phi \delta F^* \\ -\frac{1}{\phi} \delta F & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

La matrice \mathbf{L}_0 est diagonalisable et possède deux valeurs propres, $\lambda_0 = 0$ (qui correspond à un mode neutre, car nous nous sommes placé au seuil de l’instabilité) et $\lambda_- = -2$. À ces valeurs propres sont associés deux vecteurs propres correspondant

$$|V_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |F_c|^2/\phi^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -iF_c/\phi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |V_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi^2|F_c|^2}} \begin{pmatrix} -i\phi F_c^* \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

qui sont de norme 1 pour le produit scalaire standard $\langle P|Q \rangle = P^\dagger Q$ où P^\dagger représente l’adjoint, ou trans-conjugué, de P .

Le vecteur propre $|V_0\rangle$ correspond à un mode neutre de l’opérateur \mathbf{L}_0 . C’est le mode qui est amplifié (puis sature) lorsqu’on est juste au dessus du seuil d’instabilité. Ainsi, au premier ordre en ϵ' , on peut écrire le vecteur $|U\rangle$ sous la forme $|U\rangle = \epsilon' A |V_0\rangle$ avec A l’amplitude sans dimension

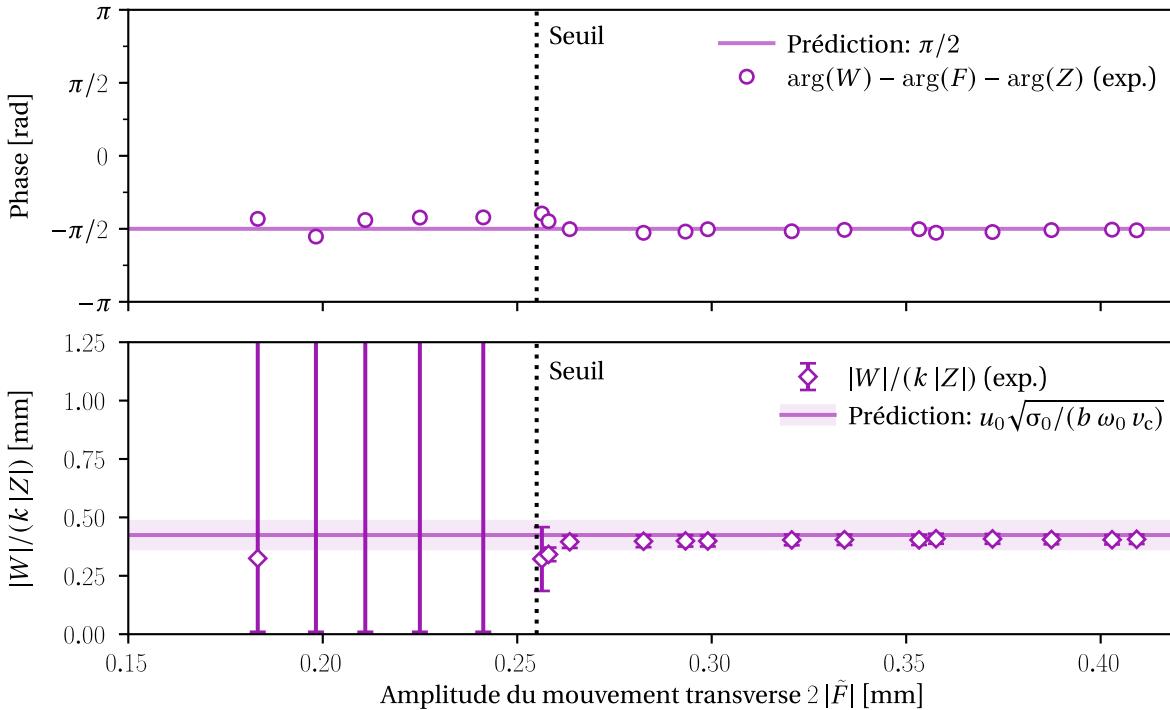


FIGURE 4.8 – Structure du mode combiné. À chaque fois, les points discrets correspondent aux mesures expérimentales, les lignes continues horizontales aux prédictions théoriques, et la ligne verticale pointillée au forçage à partir duquel l'instabilité se déclenche. Épaisseur de la cellule $b = (0,58 \pm 0,02)$ mm, débit volumique $Q = (25,6 \pm 0,9)$ mm³/s, fréquence d'excitation $\omega_0/(2\pi) = 40$ Hz.

(haut) : Phase relative des ondes en fonction de l'amplitude du mouvement transverse. Il existe des points de mesure en-dessous du seuil où l'on observe encore un motif faible (voir discussion section 4.4.4).

(bas) : Lien entre l'amplitude relative des ondes transverses et longitudinales en fonction de l'amplitude du mouvement transverse. Les points en-dessous du seuil sont associés à une forte incertitude expérimentale, puisque les amplitudes associées sont très faibles (voir figure 4.9).

du motif.

4

Le vecteur $|V_0\rangle$ contient donc toute l'information sur la structure du motif généré. En particulier, en utilisant que $|U\rangle = \epsilon' A |V_0\rangle = \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix}$, on peut écrire la relation suivante entre les amplitudes adimensionnées Z et W :

$$W = -i \frac{F_c}{\phi} Z \quad (4.23)$$

où ici le facteur ϕ traduit le fait que puisqu'un mécanisme est plus efficace que l'autre, alors une des ondes aura aussi une amplitude plus grande. En effet, dans le motif expérimental (figures 4.2 et 4.3), on observe que les ondes transverses ont une amplitude plus grande que les ondes longitudinales, ce qui est cohérent avec le fait que le facteur ϕ est toujours supérieur à 1 dans les expériences présentées dans cette thèse.

L'équation (4.23) contient toutes les informations sur la structure du motif d'instabilité. En

prenant l'argument et la norme de cette identité, on peut alors écrire

$$\arg W = \arg Z + \arg F - \frac{\pi}{2} \quad (4.24a)$$

$$\text{et } |W| = |Z|/\phi = k|Z| u_0 \sqrt{\sigma_0/(b \omega_0 v_c)} . \quad (4.24b)$$

L'équation (4.24a) prédit la phase relative entre l'onde longitudinale, l'onde transverse et la réponse au forçage. Les arguments de Z , F et W correspondent à trois degrés de liberté du système. Puisque toute paire de ces grandeurs peut être arbitrairement modifiée en redéfinissant les origines de l'espace (par la transformation $x \rightarrow x + x_0$) et du temps (par la transformation $t \rightarrow t + t_0$), la relation (4.24a) constraint complètement le système. Comme on peut le voir sur la figure 4.8 (haut), la relation (4.24a) est vérifiée expérimentalement avec une excellente précision. Notons que la signature de cette relation de phase peut être observée directement sur le motif. Par exemple, sur la figure 4.2, les lignes extrémiales de w (centre des zones sombres ou claires dans le graphique central, correspondant à $\arg(W) \equiv 0[\pi]$) ne se confondent jamais avec les endroits où z est extrémal (c.-à-d. où $\arg(Z) + \arg(F) \equiv 0[\pi]$). Sur la même figure, en observant attentivement les intersections entre extrema de w , extrema et zéros de Z (graphique du haut), et extrema et zéros de F (graphique de droite), on retrouve la relation (4.24a). Dans l'annexe 4.A, nous proposons une dérivation alternative de cette relation de phase entre les différentes grandeurs.

De manière complémentaire, la relation (4.24b) prédit l'amplitude relative entre les deux ondes formant le motif. Les normes de Z , F et W correspondent à trois degrés de liberté du système. L'amplitude de F est directement imposée par le forçage, et l'amplitude globale du motif $|A|$ dépend des effets de saturation non-linéaires qui sont décrits plus bas. Ainsi l'équation (4.24b) ferme le système et détermine complètement la géométrie du motif. Comme on peut le voir sur la figure 4.8 (bas), cette relation est excellemment vérifiée par les expériences.

Afin de caractériser tout à fait l'instabilité, il nous reste encore à comprendre la saturation de l'amplitude du motif A , ce qui fait l'objet de la sous-section suivante.

4.4.4 Désaccord non-linéaire et saturation

Nous abordons maintenant des effets plus fins dus aux termes non-linéaires : le désaccord de fréquence et la saturation en amplitude. Pour ce faire, nous laissons l'amplitude A varier selon une échelle de temps lente $\tau = T/\epsilon'^2$, de sorte que les équations (4.18a) et (4.18b) puissent s'écrire, jusqu'au troisième ordre en ϵ' , sous la forme

$$\partial_\tau |U\rangle = (\mathbf{L}_0 + \epsilon'^2 \delta \mathbf{L}) |U\rangle + i \begin{pmatrix} \alpha_Z & 0 \\ 0 & \alpha_W \end{pmatrix} \epsilon'^2 |A|^2 |U\rangle \quad (4.25)$$

où nous avons défini α_z tel que

$$\epsilon'^2 |A|^2 \alpha_Z := \alpha_{ZZ} |Z|^2 + \alpha_{ZW} |W|^2 = \epsilon'^2 |A|^2 \frac{\alpha_{ZZ} + \alpha_{ZW} |F_c|^2 / \phi^2}{1 + |F_c|^2 / \phi^2}$$

et de même pour α_W .

Nous développons de même le vecteur $|U\rangle$ en puissances de ϵ' : $|U\rangle = \epsilon' |U_1\rangle + \epsilon'^2 |U_2\rangle + \epsilon'^3 |U_3\rangle + \dots$. L'équation (4.25) au premier ordre donne le résultat familier $|U_1\rangle = A(\tau) |V_0\rangle$. En allant à l'ordre supérieur, nous cherchons maintenant à caractériser l'évolution de A en fonction de τ . À l'ordre 2, l'équation conduit à $|U_2\rangle = |0\rangle$, tandis que le développement au troisième ordre donne

$$\partial_\tau A |V_0\rangle = \mathbf{L}_0 |U_3\rangle + A\delta\mathbf{L} |V_0\rangle + i|A|^2 A \begin{pmatrix} \alpha_Z & 0 \\ 0 & \alpha_W \end{pmatrix} |V_0\rangle \quad (4.26)$$

qu'on peut réécrire sous la forme

$$\mathbf{L}_0 |U_3\rangle = |N\rangle \quad (4.27)$$

$$\text{avec } |N\rangle := \partial_\tau A |V_0\rangle - iA \begin{pmatrix} 0 & \phi\delta F^* \\ -\frac{1}{\phi}\delta F & 0 \end{pmatrix} |V_0\rangle - i|A|^2 A \begin{pmatrix} \alpha_Z & 0 \\ 0 & \alpha_W \end{pmatrix} |V_0\rangle. \quad (4.28)$$

La condition de non-résonance, ou condition de solvabilité, correspond ici au fait que $|N\rangle$ doit être orthogonal au noyau de l'opérateur \mathbf{L}_0^\dagger . La démonstration de ce résultat peut être résumée par le raisonnement simple suivant : une forme faible de l'égalité $\mathbf{L}_0 |U_3\rangle = |N\rangle$ est que tout vecteur $|P\rangle$ doit vérifier $\langle P|N\rangle = \langle P|\mathbf{L}_0|U_3\rangle = \langle U_3|\mathbf{L}_0^\dagger|P\rangle$. En particulier, si $|P\rangle \in \ker(\mathbf{L}_0^\dagger)$, c'est-à-dire si $\mathbf{L}_0^\dagger|P\rangle = 0$, alors $\langle P|N\rangle = 0$, ce qui implique que $|P\rangle$ est orthogonal à $|N\rangle$. Mathématiquement, ceci correspond à l'alternative de Fredholm (Reed et Simon 2013).

Le noyau de \mathbf{L}_0^\dagger est engendré par le vecteur $|W_0\rangle$, qui est le vecteur propre de \mathbf{L}_0^\dagger de norme unité associé à la valeur propre nulle, c'est à dire

$$|W_0\rangle := \frac{1}{\sqrt{1 + \phi^2 F_c^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\phi F_c \end{pmatrix}$$

(qui ressemble étroitement à $|V_0\rangle$, puisque \mathbf{L} est proche d'être hermitien). La condition $\langle W_0|N\rangle = 0$ amène l'équation d'amplitude suivante :

$$(1 + |F_c|^2)\partial_\tau A = A(F_c^* \delta F + F_c \delta F^*) + i|A|^2 A(\alpha_Z + \alpha_W |F_c|^2) \quad (4.29)$$

Cette équation présente un terme d'amplification ainsi qu'un désaccord non-linéaire, mais pas de saturation de l'amplitude. Contrairement à d'autres systèmes paramétriques tels que le pendule paramétrique décrit par l'équation de Mathieu, la dérive en fréquence ne provoque pas un écart à la résonance. Cela s'explique par le fait que, bien que le désaccord non-linéaire déplace les fréquences par rapport aux valeurs d'équilibre $F = F_c$, le système s'adapte en modifiant la longueur d'onde du motif afin de préserver les conditions de résonance (4.14b) et (4.14a). Cette auto-adaptation du système peut évoquer le cas d'une masselotte pouvant se déplacer le long d'une corde vibrante, ce qui lui permet de rester à la résonance, ou dans sa version continue, d'un film de savon pouvant adapter sa répartition de masse en fonction de la fréquence d'excitation, de manière à toujours être en résonance (Boudaoud, Couder et Ben Amar 1999a; Boudaoud, Couder et Ben Amar 1999b)

Pour que l'équation d'amplitude ait une solution bornée, il est nécessaire d'ajouter des termes d'ordre supérieur dans l'équation (4.29). Pour obtenir les expressions exactes de ces termes, il faut passer par le pénible et incertain développement des équations à l'ordre cinq (!). Cependant, il existe un moyen d'obtenir la forme générale des termes qu'il convient d'ajouter, à des facteurs multiplicatifs près : il suffit de considérer des expressions qui respectent les symétries du problème. En particulier, la symétrie $x \rightarrow x + x_0 \Rightarrow A \rightarrow Ae^{i\varphi}$ impose que le terme supplémentaire soit de la forme $A^n A^{*m}$ avec $n = m + 1$. Ajouter dans l'équation (4.29) le terme d'ordre le plus faible respectant cette symétrie conduit à écrire l'ansatz

$$(1 + |F_c|^2) \partial_\tau A = A(F_c^* \delta F + F_c \delta F^*) + i|A|^2 A(\alpha_Z + \alpha_W |F_c|^2) - \gamma |A|^4 A \quad (4.30)$$

où γ est un nombre complexe, dont la partie réelle est positive afin que le dernier terme assure la saturation.

Nous écrivons maintenant $A(\tau)$ sous la forme polaire $R(\tau)e^{i\Omega\tau}$ avec $R > 0$. Les équations d'évolution pour R et Ω sont alors :

$$\partial_\tau R = (F - F_c)R - \frac{\text{Re}(\gamma)}{2}R^5 \quad (4.31a)$$

$$\Omega = \frac{\alpha_Z + \alpha_W}{2}R^2 - \frac{\text{Im}(\gamma)}{2}R^4 \approx \frac{1}{2}(\alpha_Z + \alpha_W)R^2 \quad \text{pour } R \ll 1 \quad (4.31b)$$

où, sans perte de généralité, nous avons redéfini l'origine des temps pour avoir $\arg F = \arg \delta F = \arg F_c = 0$.

Nous avons donc accès, avec le couple d'équations (4.31), à deux caractéristiques non-linéaires du comportement du rivelet : la saturation en amplitude, et le désaccord en fréquence/nombre d'onde.

L'équation (4.31a) prévoit qu'au-dessus du seuil ($F > F_c$), l'amplitude du motif instable $|A| = R$ croît exponentiellement, jusqu'à être limitée par un terme de saturation en R^5 . La valeur finale, saturée, de l'amplitude est alors proportionnelle à $\sqrt[4]{F - F_c}$: cette dépendance est bien compatible avec nos observations expérimentales, comme nous le montrons sur la figure 4.9 (bas).

La correspondance imparfaite entre notre modèle et les données expérimentales de saturation peut être au moins partiellement expliquée par le fait que l'excitation a lieu dans une zone finie. Près du seuil, la longueur sur laquelle l'instabilité se développe diverge. Comme notre système est de taille finie, nous n'observons donc pas l'instabilité pleinement développée sous la forme rigoureusement décrite par notre modèle. L'accord s'améliore à mesure que l'amplitude d'excitation s'éloigne du seuil.

L'équation (4.31b), elle, prévoit que les fréquences (adimensionnées) des deux ondes augmentent toutes les deux d'une quantité $\Omega \sim R^2 \propto \sqrt{F - F_c}$. Afin que ω_z et ω_w restent proches de leurs relations de dispersion respectives, tout en vérifiant la condition de résonance, la longueur d'onde du motif doit également être modifiée. Dans le régime $k \ll b/\sigma_0$, on peut écrire $\omega_w \approx u_0 k$. Ainsi, la longueur d'onde est modifiée d'une quantité $K \approx \Omega/u_0$. Cela prédit un déplacement $k - k_0 \propto \sqrt[3]{F - F_c}$ qui, comme on peut le voir sur la figure 4.9 (haut), décrit bien les observations expérimentales.

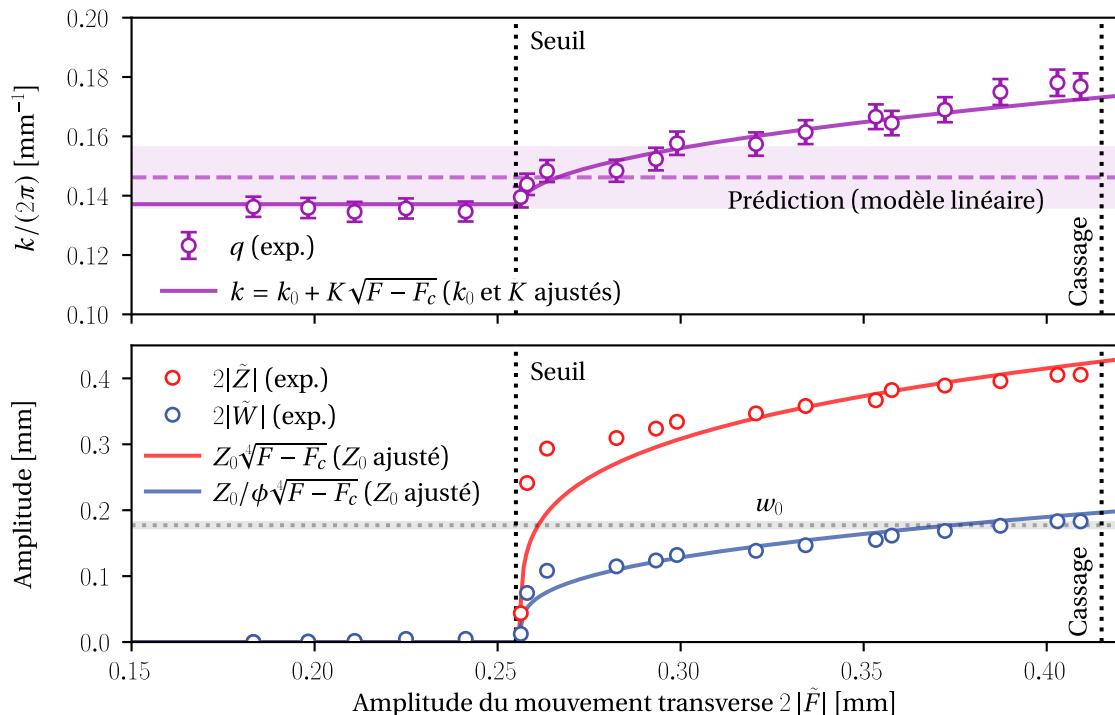


FIGURE 4.9 – Désaccord non-linéaire et saturation. Les cercles correspondent toujours aux mesures expérimentales. Épaisseur de la cellule $b = (0,58 \pm 0,02)$ mm, débit $Q = (25,6 \pm 0,9)$ mm^3/s , fréquence d'excitation $\omega_0/(2\pi) = 40$ Hz.

(haut) : Désaccord de fréquence spatiale en fonction de l'amplitude de la réponse au forçage. La prédition linéaire est cohérente avec la longueur d'onde d'instabilité à amplitude nulle. La ligne pleine correspond à la fonction $k \rightarrow k_0 + K\sqrt{F - F_c}$ où les valeurs de k_0 et K sont celles qui ajustent au mieux les données.

(bas) : Évolution de l'amplitude de l'instabilité en fonction de l'amplitude de la réponse au forçage. Les symboles correspondent aux données expérimentales. Sous le seuil ($\tilde{F}_c \approx 0,255$ mm), les valeurs des demi-amplitudes dimensionnées \tilde{Z} et \tilde{W} sont très proches de zéro. Les lignes pleines correspondent à la fonction $\tilde{Z}, \tilde{W} \rightarrow Z_0\sqrt{F - F_c}, Z_0/\phi\sqrt{F - F_c}$ où la valeur de Z_0 est celle qui ajuste au mieux les données.

4.5 Rupture du rivelet

4.5.1 Cassage à haut forçage

Sur la figure 4.9, l'instabilité cesse d'exister au-delà d'une certaine amplitude d'excitation. Cela est dû à la rupture du rivelet : au-delà d'une amplitude de mouvement critique, et donc à partir d'une certaine amplitude de forçage, le rivelet finit par se rompre. Des images expérimentales illustrant ce phénomène sont montrées sur la figure 4.10 et les vidéos 4.4 et 4.5, où l'on voit le rivelet se casser au point où il est le plus fin. La brisure arrive à peu près à l'instant où la vitesse transverse du rivelet (vers la droite) est la plus forte.

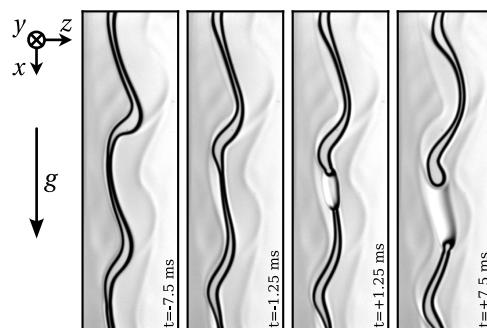


FIGURE 4.10 – Images expérimentales illustrant la fragmentation du rivelet (fréquence d'excitation : 20 Hz), issues de la vidéo 4.4. À $t = 0$, le rivelet est rompu en deux. Après l'événement, on voit la partie supérieure se rétracter pour créer une goutte, tandis que la partie inférieure est tirée vers le bas par l'importante tension de ligne.

Lorsque le rivelet se rompt, il est divisé en deux parties distinctes. La dynamique aux premiers instants (les toutes premières millisecondes) est totalement dominée par la capillarité. En effet, la cassure crée deux nouvelles surfaces qui ont une courbure très élevée dans le plan (x, z), de l'ordre de $1/w_0$, alors que la courbure dans ce plan était précédemment de l'ordre de $1/\lambda$, où $\lambda \gg w_0$ est la longueur d'onde du motif. Les deux parties du rivelet se rétractent donc, éloignant le fluide du point où la cassure s'est effectuée. Cette dynamique peut être rapprochée de celle de la rupture d'autres structures liquides élancées comme les films (Podgorski, Flesselles et Limat 1999), les nappes (Sünderhauf, Raszillier et Durst 2002 ; Savva et Bush 2009 ; Thete et al. 2016) ou les jets (Eggers 1997).



Vidéo 4.4 : Fragmentation (basse fréquence) ([en savoir plus](#)).

4

Dans la partie supérieure, le fluide proche du point de rupture remonte dans un premier temps, poussé par la capillarité, formant une goutte qui est depuis le haut par le fluide apporté par l'écoulement moyen. Cette goutte tombe dans un deuxième temps, sous l'effet combiné de la gravité et de l'apport de quantité de mouvement depuis la partie supérieure du rivelet. La partie inférieure du rivelet se rétracte aussi et tombe rapidement vers le bas. Elle forme une goutte, qui grossit moins vite puisque l'écoulement moyen est cette fois vers le bas.

Entre ces deux morceaux du rivelet, l'air peut circuler entre les moitiés droite et gauche de la cellule. Cela signifie que l'excitation acoustique devient extrêmement inefficace, car le rivelet ne

sépare plus les deux moitiés de manière étanche : la membrane est rompue. Cela se voit bien sur la vidéo 4.5, où juste après la cassure l'efficacité du forçage acoustique baisse brutalement, puis se rétablit loin de la goutte au fur et à mesure qu'elle descend. En effet, lorsque la partie supérieure du rivelet reconstitue l'étanchéité entre les parties gauche et droite de la cellule, la propriété de membrane du rivelet est restaurée et l'excitation devient de nouveau efficace : l'instabilité croît de nouveau, puis le rivelet se rompt, ce processus se répétant périodiquement.

4.5.2 Seuil de rupture

Le rivelet se rompt lorsque les deux ménisques latéraux bordant le filament liquide entrent en contact l'un avec l'autre. Cela se produit lorsque la largeur locale du rivelet atteint 0 : en l'absence de tensioactifs qui pourraient assurer une tension de disjonction à même de stabiliser un fin film de liquide, le pont liquide ne peut exister avec une épaisseur nulle (ou quasi-nulle), et il casse alors brutalement. D'après notre modèle, l'épaisseur du rivelet est donnée par

$$w(x, t) = w_0 + |2 \tilde{W}| \cos(\omega_w t + k_w x + \arg(\tilde{W})). \quad (4.32)$$

La rupture du rivelet est inévitable lorsque l'épaisseur w devient nulle, donc lorsque l'amplitude des oscillations de largeur $|2 \tilde{W}|$ atteint la largeur au repos w_0 . Cette explication semble confirmée par les données expérimentales, montrées sur la figure 4.9 : le seuil de rupture (indiqué par une ligne pointillée verticale noire) se produit lorsque $2\tilde{W} \approx w_0$. Expérimentalement, avec comme fluide l'huile perfluorée HT 135, nous n'observons jamais de variations de largeur d'amplitude significativement supérieure à la largeur au repos.

Nous nous sommes alors posé la question suivante : y-a-t-il une dépendance simple de l'amplitude de forçage maximale avec l'amplitude de forçage ? Le modèle que nous avons élaboré ne nous permet pas directement de faire de prédition théorique sur ce point, puisque nous ne connaissons pas *a priori* la dépendance du terme de saturation avec la fréquence de forçage. Peut-être qu'un argument dimensionnel permettrait de répondre à cette question. Dans le doute⁵, nous avons mesuré l'amplitude de forçage critique à laquelle le rivelet se brise en fonction de la fréquence, obtenant les résultats montrés sur la figure 4.11.



Vidéo 4.5 : Fragmentation (haute fréquence) ([en savoir plus](#)).

Sur cette figure, on voit que le déplacement transverse minimal nécessaire à casser le rivelet diminue avec la fréquence d'excitation : cela n'est guère surprenant, puisque le seuil de déclenchement de l'instabilité diminue lui aussi avec la fréquence. Les points semblent s'aligner à peu près selon une relation du type loi de puissance d'exposant -1 , justifiant selon nous d'incorporer cette courbe dans le présent travail, mais si loi d'échelle il y a, son origine physique n'est pas claire pour nous.

5. Nous avons agi selon une devise de western, adaptée à la sauce expérimentale : mesurer d'abord, poser les questions après.

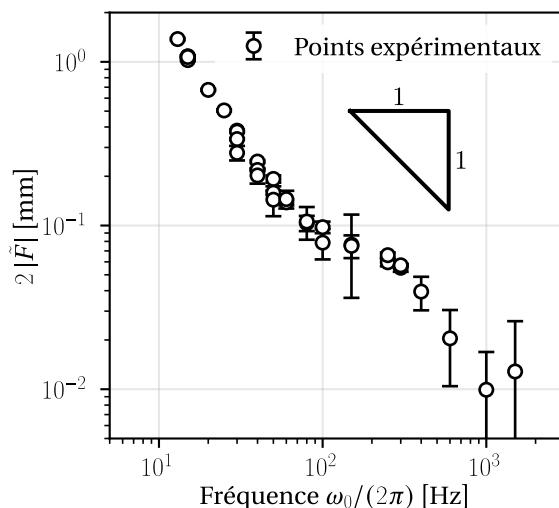


FIGURE 4.11 – Amplitude de mouvement transverse du rivelet juste avant la rupture pour différentes fréquences d'excitation. Expériences réalisées avec une cellule d'épaisseur $b = 0,6$ mm et un débit volumique $Q = (26 \pm 1)$ mm³/s. La courbe a été obtenue en mesurant la réponse linéaire à l'excitation \tilde{F} à l'amplitude maximale de l'excitation, juste avant la rupture. Elle est présentée en échelle double logarithmique, une loi de puissance d'exposant -1 est donnée comme guide.

4.5.3 Trains de gouttes

Pour terminer cette section autour de la fragmentation du rivelet, mentionnons que forcer le rivelet de manière très intense permet de créer des séquences de gouttes de taille contrôlable. En effet, en jouant sur l'intensité du forçage, nous sommes en mesure de contrôler la périodicité de la fragmentation du rivelet, qui est un processus déterministe. Le rythme de brisure du rivelet impose alors la taille des filaments de liquides créés qui, si ils sont suffisamment petits, prennent la forme de gouttes. Nous sommes ainsi en mesure de fragmenter notre rivelet en une suite de plusieurs gouttes qui tombent dans la cellule les unes derrière les autres.

Cette fragmentation pourrait avoir des applications en recherche ou bien dans l'industrie, par exemple dans le domaine de la microfluidique, où la génération déterministe de gouttes de taille contrôlée est un enjeu important. De nombreuses adaptations au niveau expérimental seraient alors nécessaire : il faudrait utiliser des plaques plus rapprochées, et des fréquences d'excitation plus importantes. La gravité risque de devenir insuffisante pour générer un écoulement de base aux petites échelles, qui devra plutôt consister en un jet dû à une surpression en amont de l'excitation acoustique. Les haut-parleurs ne pouvant délivrer d'importantes différences de pression, et étant de plus en plus difficiles à adapter à mesure que le système diminue en taille, il faudra probablement les remplacer par des buses à air comprimé.

Si l'on revient à notre système macroscopique mû par la gravité, notons qu'un train de petites gouttes n'est pas nécessairement stable : si une goutte un peu plus grosse que les autres est formée, elle sera plus lourde, descendra plus vite, et rejoindra alors la goutte devant elle avec qui elle pourra coalescer. Ce processus est visible sur la figure 4.12, tirée de la vidéo 4.6. Ce mécanisme



Vidéo 4.6 : Fragmentation (gouttes) ([en savoir plus](#)).

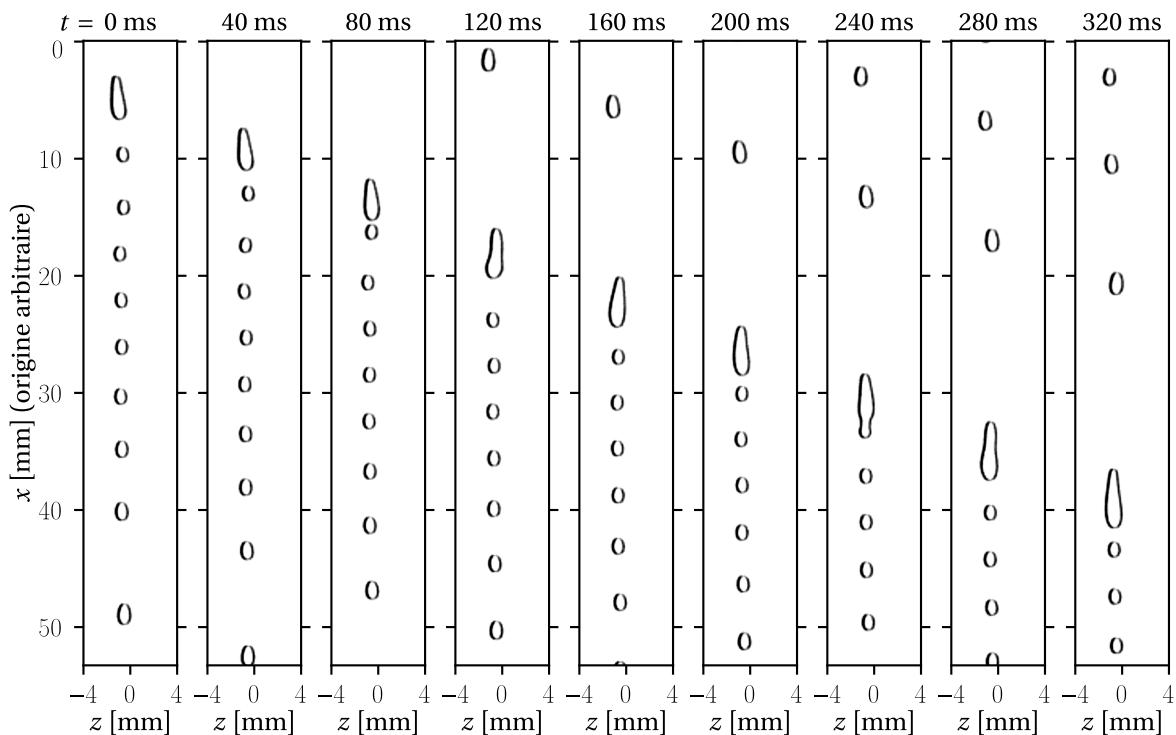


FIGURE 4.12 —

a certainement une limite : au-delà d'une certaine taille, il serait étonnant que la vitesse d'un segment de rivelet dépende de sa longueur. Un train de gouttes régulières est donc certainement possible, à partir d'une certaine taille qui reste à déterminer.

Il existe plusieurs études sur le mouvement de gouttes (ou de bulles) dans des cellules de Hele-Shaw, traitant par exemple de la dynamique de ces objets (Okumura 2018), de leur coalescence (Dolganov, Spiridenko et Zverev 2024), de la montée de bulles d'air dans un fluide visqueux (Shukla et al. 2019), ou de la vitesse de gouttes poussées par une pression extérieure (Reichert, Cantat et Jullien 2019). Le plus souvent, ces études utilisent des canaux très étroits en vue d'applications microfluidiques, de faibles différences de densité, ou bien des fluides très visqueux. Ici, du fait de la largeur de la cellule (quasiment la taille capillaire), de l'importante différence de densité ($\Delta\rho = 1,72 \text{ kg/l}$) et de la faible viscosité des fluides utilisés, nos gouttes sont particulièrement rapides, et déformées par rapport à un cercle.

Surtout, la dynamique des gouttes que nous observons est fortement dépendante de l'historique des gouttes précédentes : puisque les gouttes se déplacent rapidement (vitesses longitudinales de l'ordre de u_∞ , soit 300 mm/s), elles laissent derrière elles un film épais, sur lequel il est avantageux d'avancer pour les prochaines gouttes, étant donné que les frottements visqueux diminuent avec la hauteur du film de prémoillage. Il y a donc une compétition entre descendre verticalement selon la gravité, ou bien suivre un chemin voisin déjà tracé, et on peut observer plusieurs occurrences de ce conflit sur la vidéo 4.6.

De plus, lorsque les gouttes descendent sur une partie sèche des plaques, elles perdent le fluide qu'elles laissent derrière elles dans leur traînée. Cela peut amener les gouttes à diminuer en rayon, jusqu'à ce que leur rayon de courbure dans le plan des plaques (x, z) excède le rayon de

courbure des ménisques $b/2$. À ce moment, la surpression capillaire draine le fluide hors de la goutte, qui rétrécit de plus en plus jusqu'à s'annihiler en un film épais invisible sur les images. Cette disparition des très petites gouttes est visibles à plusieurs instants sur la vidéo 4.6.

4.6 Visualisation dans l'espace de Fourier

Avant de conclure notre étude de l'instabilité en collier de perles, nous voudrions d'abord dans cette courte section mettre en avant le fait que plusieurs caractéristiques clés du système peuvent être retrouvées, comprises et visualisées de manière claire et concise en utilisant une représentation des signaux expérimentaux dans l'espace des fréquences.

Condition de résonance dans l'espace dual

L'évolution de la géométrie du rivelet due à l'instabilité est à première vue assez complexe. En effet, le motif généré est la somme de trois contributions de natures différentes (transversale ou longitudinale), et aux caractéristiques spatiales et temporelles distinctes. Il suffit pour le constater de regarder les figures 4.2 et 4.3 qui, malgré nos efforts les plus sincères, sont assez chargées et nécessitent du temps pour être comprises entièrement. Une manière de démêler toutes les contributions différentes du motif est de représenter les données expérimentales dans l'espace des fréquences plutôt que dans l'espace réel. Nous présentons sur les figures 4.13 et 4.14 une telle représentation, où les transformées de Fourier de la position et de la largeur du rivelet sont à chaque fois montrée en fonction des fréquences temporelles (en ordonnée) et spatiales (en abscisse). La raison pour laquelle ce passage par l'espace dual est intéressant est que chaque signal étant (approximativement) périodique, il est représenté dans l'espace de Fourier par une paire de points localisés, symétriques par rapport au point $(\omega, k) = (0, 0)$. Cela permet une représentation concise des données : sur ces figures, chaque onde constituant le motif correspond à un point (ou une paire de points pour les fonctions uniquement du temps).

Sur la figure 4.13 (gauche), on peut voir les signaux correspondant aux trois différentes ondes composant le motif. Les deux points rouges alignés sur la ligne verticale $k = 0$ représentent les deux composantes fréquentielles de la réponse linéaire de la trajectoire à l'excitation $\tilde{F}e^{i\omega_0 t} + \tilde{F}^*e^{-i\omega_0 t}$. Le point rouge à $k \neq 0$ correspond à l'onde transverse déformant le chemin suivi par le rivelet, placé le long de la relation de dispersion $\omega_z^-(k)$; il correspond au signal $\tilde{Z}e^{i(\omega_z^- t - k_z x)} + \text{c.c.}$. Le point bleu correspond à l'onde longitudinale modulant la largeur du rivelet, placé le long de la relation de dispersion $\omega_w^+(k)$; il correspond au signal $\tilde{W}e^{i(\omega_w^+ t - k_w x)} + \text{c.c.}$. Sur la figure 4.13 (droite), on retrouve les mêmes points que sur le graphique de gauche, avec la même intensité mais avec des couleurs différentes. Sur ce graphique, les couleurs représentent maintenant la phase des signaux, elles correspondent respectivement à l'argument de \tilde{F} (points sur $k = 0$), de \tilde{Z} (point sur la relation de dispersion des ondes transversales), et de \tilde{W} (point sur la relation de dispersion des ondes longitudinales).

En regardant simplement la figure 4.13, on peut directement constater et interpréter les propriétés fondamentales de l'instabilité en collier de perles. Le motif est formé de trois contributions :

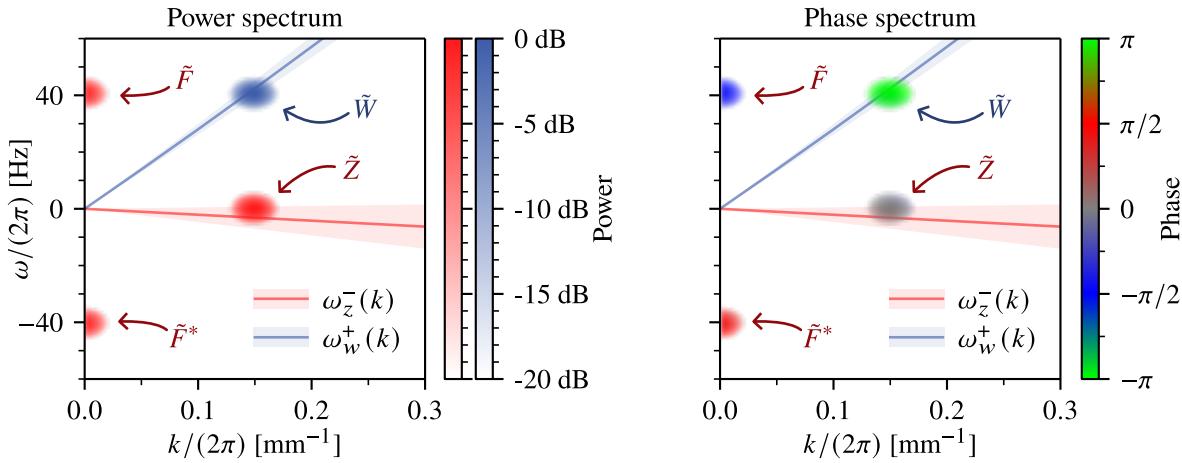


FIGURE 4.13 – Données expérimentales : chemin (z) et largeur (w) du rivelet, représentés dans l'espace de Fourier. Les lignes pleines représentent les relations de dispersion des ondes transversales (en rouge) et longitudinales (en bleu). Les deux graphiques ont été obtenus après ajout de zéro (zero padding) du signal expérimental. (gauche) Spectre de puissance de $\hat{z}(k, \omega)$ (signal rouge) et $\hat{w}(k, \omega)$ (signal bleu). Pour les deux signaux, l'intensité de la couleur correspond à une échelle allant d'une valeur de référence de 0 dB (correspondant à la valeur la plus intense de ce signal) à -20 dB. (droite) Spectre de phase de $\hat{z}(k, \omega)$ et $\hat{w}(k, \omega)$. La teinte de la couleur correspond à la phase du signal, tandis que l'intensité de la couleur représente l'amplitude du signal. Comme pour le graphique de gauche, l'échelle de couleur s'estompe vers le blanc en-dessous de 20 dB du signal de référence. Épaisseur de la cellule $b = (0,58 \pm 0,02)$ mm, débit volumique $Q = (25,6 \pm 0,9)$ mm 3 /s, fréquence d'excitation $\omega_0/(2\pi) = 40$ Hz.

une réponse spatialement homogène ($k = 0$) à l'excitation, une onde transversale et une onde longitudinale. Les deux ondes propagatives sont alignées sur la même ligne verticale, ce qui correspond à la condition d'interaction résonante (4.14b) ($k_w = k_z$), et la distance verticale entre les deux correspond à la fréquence d'excitation $\omega_0/(2\pi) = 40$ Hz : il s'agit tout simplement de la condition (4.14a) ($\omega_w = \omega_z + \omega_0$). Avec cette représentation dans l'espace dual, la condition de résonance (4.14) adopte donc immédiatement une signification simple et visuelle.

En utilisant la représentation de Fourier, nous sommes capables de tracer à la fois l'amplitude et la phase des signaux qui nous intéressent. En calculant le contenu énergétique des différents pics montrés sur la figure 4.13 (gauche), nous pouvons mesurer les amplitudes $|\tilde{F}|$, $|\tilde{Z}|$ et $|\tilde{W}|$. Les résultats de ces mesures sont montrés, pour différentes amplitudes d'excitation, dans les figures 4.8 (bas) et 4.9 (bas). Mais la représentation de Fourier nous donne aussi accès à la phase absolue de chaque signal. C'est ce qui est montré sur la figure 4.13 (droite) : les points colorés correspondent aux mêmes signaux que sur le graphique de gauche, mais les couleurs représentent maintenant la phase du signal. On peut, par exemple, vérifier cela en constatant que $\arg(\tilde{F}) = -\pi/2 = -\arg(\tilde{F}^*)$. Nous pouvons ainsi vérifier visuellement que la condition (4.24a) sur la structure du motif est vérifiée : sur la figure 4.13, on observe que $\arg(\tilde{F}) \approx -\pi/2$, $\arg(\tilde{Z}) \approx 0$ et donc

$$\arg(\tilde{W}) = \arg Z + \arg F - \frac{\pi}{2} \quad (4.33)$$

$$= -\pi/2 + 0 - \pi/2 \quad (4.34)$$

$$= -\pi \quad (4.35)$$

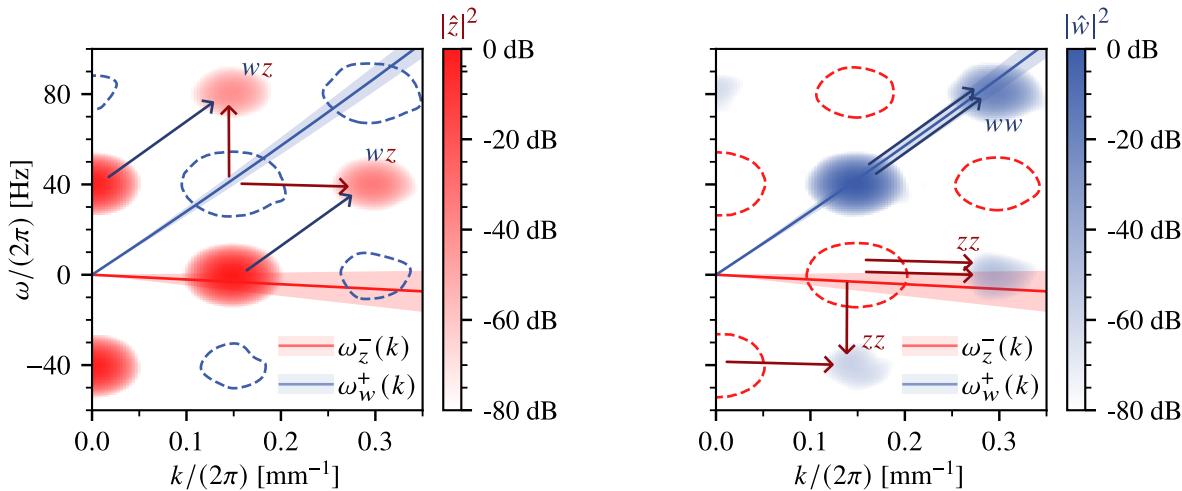


FIGURE 4.14 – Données expérimentales : chemin (z) et largeur (w) du rivelet, représentés dans l'espace de Fourier. Les lignes pleines représentent les relations de dispersion des ondes transversales (rouge) et longitudinales (bleu). Pour les deux signaux, l'intensité de la couleur correspond à une échelle allant d'une valeur de référence de 0 dB (correspondant à la valeur la plus intense de ce signal) à -80 dB. Les deux graphiques ont été obtenus après ajout de zéro (zero padding) et fenêtrage de Chebychev (pour réduire les fuites spectrales) du signal expérimental. (gauche) Spectre de puissance de $\hat{z}(k, \omega)$. Les lignes pointillées bleues entourent les zones où le spectre de puissance de $\hat{w}(k, \omega)$ est concentré (voir graphique de droite). (droite) Spectre de puissance de $\hat{w}(k, \omega)$. Les lignes pointillées rouges entourent les zones où le spectre de puissance de $\hat{z}(k, \omega)$ est concentré (voir graphique de gauche). Épaisseur de la cellule $b = (0,58 \pm 0,02)$ mm, débit volumique $Q = (25,6 \pm 0,9)$ mm³/s, fréquence d'excitation $\omega_0/(2\pi) = 40$ Hz (mêmes conditions que fig 4.13).

L'amplitude et la phase du spectre de Fourier peuvent ainsi être reliées quantitativement aux propriétés mathématiques du motif dérivées de notre modèle.

Visualisation des modes forcés

Sur la figure 4.14, nous avons tracé les spectres de puissance des mêmes signaux que dans la figure 4.13, mais en abaissant cette fois le seuil d'estompage vers le blanc, qui passe de -20 dB à -80 dB. Cela permet de visualiser des signaux expérimentaux plus faibles, correspondant à des modes secondaires non-résonants. Ces modes sont excités par des interactions non-linéaires entre les déplacements transversaux z (représentés par des flèches rouges), et les modulations longitudinales w (flèches bleues). En raison de la symétrie miroir $z \rightarrow -z$ du système, l'équation d'évolution pour w peut contenir des termes d'auto-couplage proportionnels à z^2 et w^2 , mais jamais de termes croisés zw . Pour la même raison, l'équation d'évolution de z ne peut contenir que des termes croisés de la forme wz . Cette condition de symétrie sélectionne donc les interactions non-linéaires possibles entre les modes, et explique entièrement les spectres observés sur la figure 4.14, comme l'indiquent les flèches colorées représentant les contributions responsables des signaux visibles. Ces modes forcés, dont la réponse est d'autant plus faibles qu'ils sont éloignés de la relation de dispersion, sont excités par des interactions résonantes entre modes primaires de plus grande amplitude. On peut rapprocher ce phénomène de la résonance triadique hors de la relation de dispersion observée dans le cas des ondes de surface (Cazaubiel et al. 2019).

Notons enfin que l'absence de signal dans z aux coordonnées ($\omega = \pm 2\omega_0$, $k = 0$) sur la

fig. 4.14 (gauche) montre que l'excitation est sinusoïdale dans le temps : on n'observe pas d'harmoniques d'ordre supérieur à un.

L'utilisation de la représentation de Fourier permet donc à la fois d'effectuer des mesures précises, et de comprendre visuellement plusieurs caractéristiques clés du système et leurs conséquences, comme la condition de résonance, la structure du motif, ou la symétrie sous-jacente régissant les interactions possibles entre différentes ondes.

Conclusion du chapitre 4

Nous avons dans ce chapitre étudié l'instabilité en collier de perles affectant les rivelets liquides dans une cellule de Hele-Shaw soumis à une excitation acoustique homogène extérieure. Lorsqu'on impose une excitation additive homogène au rivelet, sa réponse linéaire consiste en un mouvement transverse homogène en espace à la même fréquence temporelle. Ce mouvement agit comme couplage entre ondes transversales et longitudinales, qui peuvent s'accroître mutuellement si une relation algébrique entre les caractéristiques des ondes et de l'excitation est vérifiée. Au-delà d'un certain seuil, cette interaction de coopération entre les ondes domine l'amortissement, et une instabilité formatrice de motifs (*pattern-forming instability*) se développe. Nous parvenons à comprendre ce seuil et à rendre compte quantitativement de sa dépendance en fréquence. Notre modèle nous permet de comprendre en détail la structure de ce motif, en particulier le rapport d'amplitude et la phase relative entre ondes longitudinales et transverses. Les développements non-linéaires expliquent le désaccord spatial (*spatial detuning*) observé dans les mesures, et l'ajout d'un terme heuristique compatible avec les symétries du système permet d'expliquer la saturation de l'amplitude du motif. Nous présentons des données et un argument quantitatif pour expliquer la rupture du rivelet à forte amplitude d'excitation. Enfin, nous avons montré que nous sommes en mesure de retrouver presque toutes les caractéristiques du motif en représentant nos données dans l'espace de Fourier, ce qui aide à visualiser de façon simple et concise la manière dont le système expérimental respecte les contraintes mathématiques prédites par notre modèle.

4

Il existe plusieurs pistes pour améliorer les résultats présentés dans cette étude. Le principal inconvénient de notre système expérimental est la taille finie de l'excitation acoustique. Pouvoir déplacer le rivelet de façon homogène sur une plus grande étendue spatiale améliorera la précision des mesures sur les amplitudes $|\tilde{Z}|$, $|\tilde{F}|$ et $|\tilde{W}|$ ainsi que sur les nombres d'onde k_z et k_w . Cela permettrait aussi probablement d'étendre la fenêtre d'observation de cette instabilité vers des fréquences plus basses. Comme mentionné au chapitre 1, cela est réalisable en utilisant plusieurs haut-parleurs, en phase entre eux, de chaque côté de la cellule. Les membranes des haut-parleurs utilisés ont aussi une plage de mouvement limitée sur laquelle la réponse est linéaire, limitant l'amplitude d'excitation que nous pouvons générer. L'utilisation de buses à air pressurisé permettrait d'explorer une gamme de pressions plus étendue, permettant par exemple le développement de l'instabilité à des fréquences d'excitation plus faibles. Sur le plan théorique, la différence d'un facteur $2,05 \pm 0,10$ entre le facteur mesuré et celui prédict pour la loi de puissance du seuil d'instabilité décrite à la section 4.4.2 pourrait être due à une erreur d'algèbre qui aurait

échappé à nos efforts les plus sincères.

Perspectives

Nous proposons de finir ce chapitre par quelques perspectives, en présentant trois différentes directions possibles pour de futures recherches que nous pensons à la fois accessibles, au sens où elles nécessiteraient seulement de légères modifications du montage pour être observées, et, d'après notre expérience avec ce système, potentiellement fructueuses.

Premièrement, on peut remarquer en regardant les figures 4.13 et 4.14 que le signal associé à \tilde{Z} semble se situer sur la ligne horizontale $\omega = 0$, plus que sur la ligne rouge représentant la relation de dispersion attendue. Cela pourrait indiquer un phénomène de verrouillage de fréquence : pour une certaine plage de paramètres, le système s'écarteraient des relations de dispersion linéaires afin de vérifier $(\omega_z, \omega_w) = (0, \omega_0)$. Cela est mis en évidence par le fait que, comme montré dans l'insert de la figure 3 de Le Lay et Daerr 2025a (reproduit dans l'annexe 4.C), la fréquence temporelle des ondes longitudinales ω_z semble nulle en-dessous d'un certain seuil. L'origine physique de ce phénomène de verrouillage de fréquence, qui briserait l'invariance galiléenne du mécanisme d'amplification présenté à la section 4.3.4, est inconnue.

Deuxièmement, plusieurs pistes d'investigation, qui n'ont pas été explorés dans notre étude, nous semblent particulièrement intéressantes, ouvrant peut-être la voie à de nouveaux comportements à expliquer. Par exemple, en utilisant des amplitudes d'excitation plus grandes que celles que nous avons explorées, on peut raisonnablement s'attendre à l'apparition d'instabilités secondaires, pouvant induire une dérive du motif. En particulier, le mode $(\omega = 2\omega_w, k = 2k_w)$ est naturellement excité par le système, et il se situe (approximativement) sur la relation de dispersion $\omega_w(k_w)$: il pourrait donc résonner et conduire à une instabilité secondaire. De même, en rajoutant un bruit à l'amplitude (Residori, Berthet et al. 2001 ; Berthet et al. 2003), la fréquence (Zautkin, Orel et Cherepanov 1983), ou la phase (Pétrélis, Aumaître et Fauve 2005) de l'excitation paramétrique, il est probablement possible d'amplifier, d'inhiber ou de modifier les caractéristiques de l'instabilité. Plus généralement, notre système présente une analogie profonde avec l'instabilité de Faraday, aujourd'hui bien comprise, et on peut donc espérer appliquer la riche phénoménologie des ondes de paramétriques de surface aux rivelets liquides. L'utilisation de techniques analytiques, numériques et expérimentales, ayant fait montre de leur efficacité dans l'étude des ondes de Faraday, pourrait être une manière particulièrement puissante d'explorer et de comprendre la dynamique du rivelet. Notons que pour explorer des amplitudes d'excitation beaucoup plus élevées, il faudra rendre le rivelet plus résistant à la rupture. Cela peut être réalisé de deux manières : ou bien (a) en utilisant un rivelet plus épais sans augmenter le débit, ce qui peut être réalisé en diminuant l'espacement de la cellule b et/ou en augmentant la viscosité du fluide, ou bien (b) en évitant la rupture lorsque w atteint zéro, c'est-à-dire dans la limite où le rivelet devient un film reliant les bords de Plateau sur les parois (Drenckhan, Ritacco et al. 2007), afin d'autoriser les rivelets de « largeur négative », ce qui peut être réalisé en remplaçant l'huile par un mélange eau-tensioactif. Nous présenterons en conclusion un exemple approfondissant cette piste.

Enfin, avec un montage amélioré, il pourrait se révéler intéressant d'utiliser une excitation

acoustique aux caractéristiques spatiotemporelles différentes de celle employée dans cette étude (excitation monochromatique en temps et homogène en espace ($\omega = \pm\omega_0, k = 0$)). En modulant l'excitation à la fois dans le temps et dans l'espace, par exemple en utilisant une excitation avec deux composantes fréquentielles ou plus, on pourrait exciter plusieurs ondes simultanément et observer leurs interactions. En utilisant une excitation à spectre continu en fréquences, on pourrait observer un continuum d'ondes interagissant de manière faiblement non-linéaire, et échangeant de l'énergie, et donc possiblement une cascade entre échelles. Le résultat pourrait être décrit avec précision par la théorie de la turbulence d'ondes quasi-1D, qui a déjà été observée expérimentalement pour les ondes gravito-capillaires (Ricard et Falcon [2021](#)).

Annexe 4.A Un autre point de vue sur le verrouillage de phase

Développons ici succinctement une autre manière de voir la condition de verrouillage de phase entre les composantes Z (onde transverse), W (onde longitudinale) et F (réponse linéaire au forçage). Nous partons pour cela des équations adimensionnées (4.18) :

$$\begin{aligned}\partial_T Z &= -\eta Z + i\phi F^* W + i(\alpha_{ZZ}|Z|^2 + \alpha_{ZW}|W|^2)Z \\ \partial_T W &= -W - i\frac{1}{\phi} F Z + i(\alpha_{WZ}|Z|^2 + \alpha_{WW}|W|^2)W\end{aligned}$$

On peut maintenant chercher des équations d'évolution pour les normes $|Z|^2$ et $|W|^2$ des amplitudes, qui sont alors

$$\begin{aligned}\partial_T |Z|^2 &= Z \partial_T Z^* + Z^* \partial_T Z \\ &= -\eta Z Z^* - \eta Z^* Z + (i \phi F^* W) Z^* + (i \phi F^* W)^* Z + 0 \\ &= -2\eta |Z|^2 + 2\phi \operatorname{Re}(i F^* W Z^*) \\ \text{et } \partial_T |W|^2 &= W \partial_T W^* + W^* \partial_T W \\ &= -W W^* - \eta W^* W + \left(-i\frac{1}{\phi} F Z\right) W^* + \left(-i\frac{1}{\phi} F Z\right)^* W + 0 \\ &= -2|W|^2 + 2\frac{1}{\phi} \operatorname{Re}(-i F Z W^*)\end{aligned}$$

soit finalement

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{2} |Z|^2 \right) = -\eta |Z|^2 + \phi \operatorname{Re}(i F^* W Z^*) \quad (4.36a)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{2} |W|^2 \right) = -|W|^2 + \frac{1}{\phi} \operatorname{Re}(i F^* W Z^*) . \quad (4.36b)$$

Les équations (4.36) ont une structure qui permet de mettre particulièrement en évidence le mécanisme de l'interaction à trois ondes : l'évolution temporelle de l'amplitude des ondes est le résultat d'une compétition entre l'atténuation linéaire et une interaction non-linéaire. Ce dernier terme, proportionnel à chacune des amplitudes et dépendant de la phase combinée des ondes, est très similaire à celui présent dans les équations dynamiques décrivant la résonance triadique pour des ondes gravito-capillaires (Simmons 1969, équations (32) et (33)), ou encore pour des ondes internes (Martin, Simmons et Wunsch 1972, équation (B14)).

On peut en déduire que les amplitudes des ondes ne peuvent croître que si un certain accord de phase entre elles, associé à la condition

$$\operatorname{Re}(i F^* W Z^*) > 0$$

est vérifiée, et même que le taux de croissance sera maximal si la quantité $i F^* W Z^*$ est située sur

la partie positive de l'axe des réels. Autrement dit,

$$\arg(i F^* W Z^*) = 0 \quad (4.37)$$

$$\frac{\pi}{2} - \arg F + \arg W - \arg Z = 0 \quad (4.38)$$

$$\arg W = \arg Z + \arg F - \frac{\pi}{2}. \quad (4.39)$$

ce qui correspond précisément à la condition (4.24a). La relation de phase entre les différentes quantités est donc imposée : c'est celle qui permet de maximiser la croissance du motif.

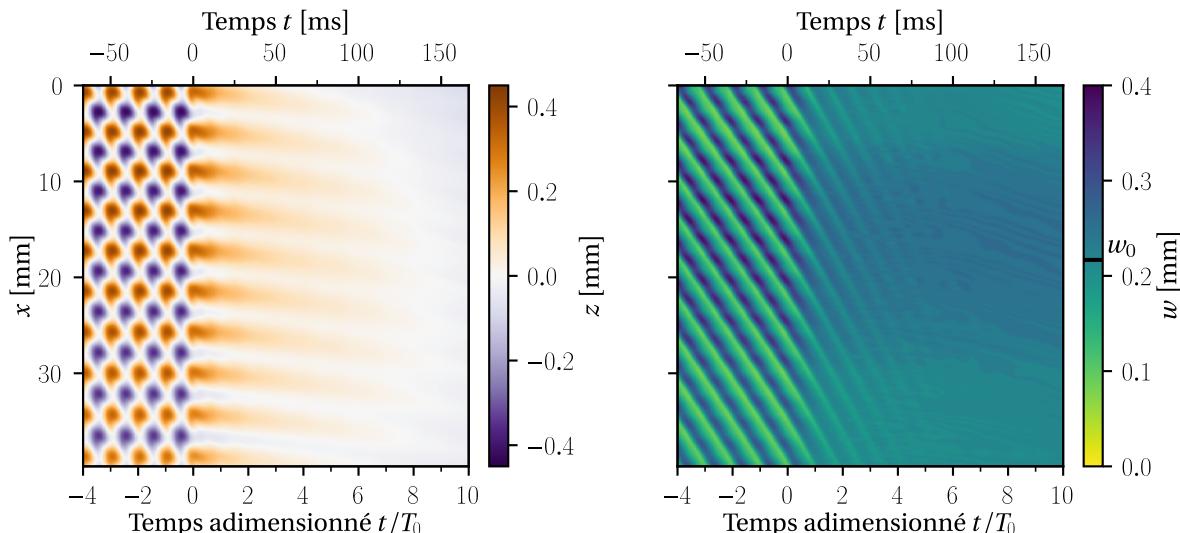
Annexe 4.B Expériences de trempe



Vidéo 4.7 : Mort de l'instabilité ([en savoir plus](#)).

L'instabilité en collier de perles permet de créer des rivelets ayant une sinuosité et des variations d'épaisseur non nulles. Une fois le forçage éteint, ces motifs disparaissent rapidement, car les ondes transverses comme longitudinales sont atténuées linéairement (équation (4.11)). Pour une illustration de ce comportement, on pourra consulter la vidéo 4.7, où le forçage est coupé à $t = 0$: on voit alors les deux perturbations décroître fortement en amplitude. Il est possible d'utiliser cette propriété pour effectuer des mesures : on déclenche l'instabilité, elle se stabilise, puis on coupe le forçage et on mesure le taux de décroissance des variables. Cela s'assimile à une expérience de trempe (*quenching*), où les conditions environnementales sont changées brutalement, permettant d'observer des évolutions aux petites échelles.

Nous avons réalisé cette expérience de trempe, et nous avons représenté sur la figure 4.15 les données expérimentales qui en sont issues. Pour les temps négatifs, donc avant la fin du forçage, on reconnaît le motif de l'instabilité en collier de perles : la position est la somme de deux contributions dépendant respectivement du temps et de l'espace, tandis que les oscillations d'épaisseur sont advectées vers le bas à vitesse constante. À $t = 0$, le forçage est coupé et le système réagit instantanément : la composante temporelle du signal $z(x, t)$ disparaît, la composante spatiale commence à décroître, et les modulations d'épaisseur disparaissent, le rivelet retrouvant son épaisseur moyenne w_0 .



4

FIGURE 4.15 – Diagrammes spatio-temporels correspondant à une expérience de trempe. Écartement des plaques $b = 0,6$ mm, fréquence d'excitation $1/T_0 = 60$ Hz. Le forçage est coupé à l'instant $t = 0$. Les axes des ordonnées présentent le temps réel en millisecondes et le temps adimensionné par la période d'excitation $T_0 = 2\pi/\omega_0$. (gauche) : Position z du rivelet en fonction de l'espace et du temps. (droite) : Épaisseur w du rivelet en fonction de l'espace et du temps. L'épaisseur au repos w_0 est indiquée sur l'échelle de couleur.

Pour exploiter quantitativement ces données, nous mesurons à chaque instant l'amplitude

des variations transverses et longitudinales. Cela nous donne accès aux données montrées sur la figure 4.16 : nous avons accès à l'évolution temporelle de l'amplitude des motifs, que nous voyons décroître brutalement après l'arrêt du forçage. Nous croyons voir⁶ que cette décroissance se fait en deux étapes : d'abord une chute très rapide, d'origine non-linéaire, puis une atténuation exponentielle.

La première phase de la chute correspond selon nous à un déclin non-linéaire, qui d'après notre modèle devrait être en loi de puissance : puisque nous considérons dans notre modèle une non-linéarité dominante d'ordre 5 (voir l'équation (4.31a) et la discussion qui la précède), nous prévoyons une décroissance en $t^{-1/4}$. Cependant, nous ne disposons pas de mesures assez précises, faites sur un temps suffisamment grand, pour pouvoir comparer cette prédiction à l'expérience. Nous nous concentrerons donc pour la suite sur la seconde partie de l'évolution.

L'atténuation qui domine dans un second temps, plus modérée, est due à la dissipation visqueuse et nous nous attendons donc à une amplitude décroissant exponentiellement avec le temps. Expérimentalement, la décroissance prend une forme assimilable à une ligne droite sur le graphe en échelle semi-logarithmique, dont on peut extraire la pente (ou en tout cas une pente caractéristique). Celle-ci peut nous renseigner sur les temps caractéristiques d'atténuation des deux grandeurs.

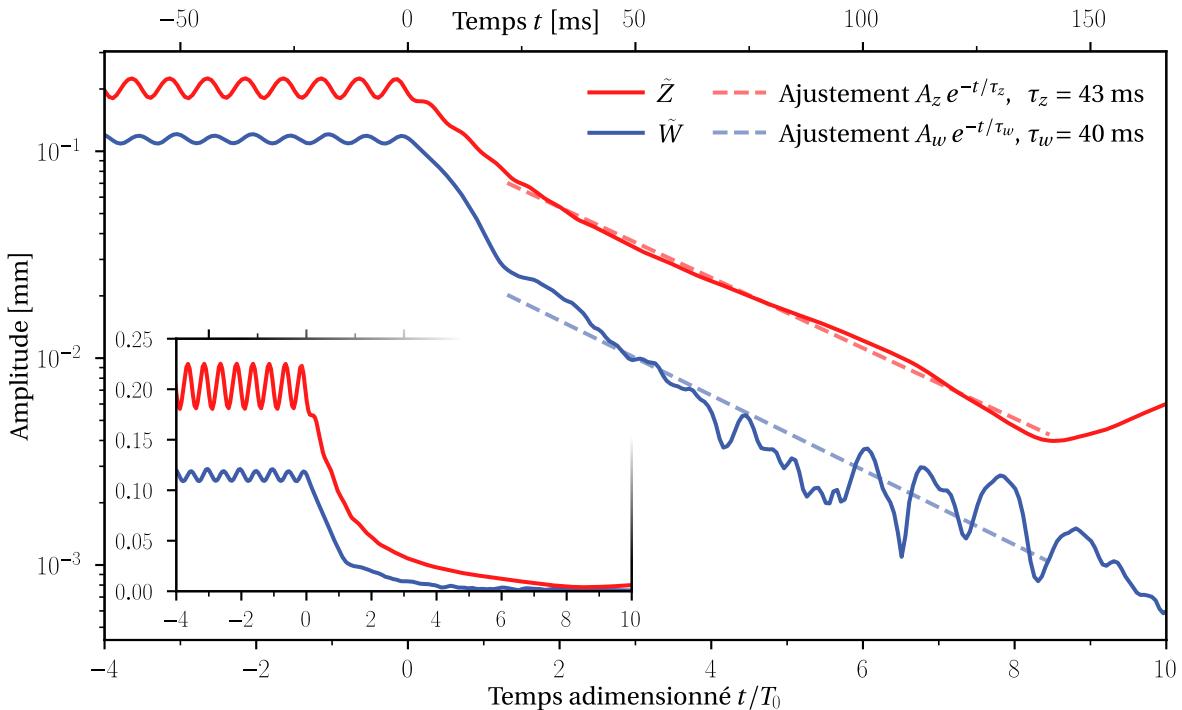


FIGURE 4.16 – Amplitude des motifs en fonction du temps. En traits pleins, les amplitudes expérimentales. En pointillés, les ajustements par des fonctions exponentielles. En rouge, les informations concernant le chemin, en bleu celles concernant le profil d'épaisseur. L'échelle est semi-logarithmique pour le graphe principal, et linéaire pour le graphe en insert.

Les mesures présentées dans cette annexe ont été faites à l'improviste, sans que les paramètres

6. Il faudrait d'autres mesures, plus précises, pour l'affirmer avec certitude.

de la caméra (champ de vision, zoom) ne soient optimisés pour mesurer des détails fins. En conséquence, les mesures aux faibles amplitudes sont imprécises : pour des amplitudes en deçà de 1×10^{-2} mm, on croit même voir l'amplitude des variations transverses remonter, ce qui *a priori* n'est pas physique. La détermination des temps d'atténuation est donc ici très approximative : il faut voir ce qui est présenté dans cette annexe plus comme une preuve de principe qu'une véritable mesure.

L'utilisation de ces données nous permet de mesurer directement deux quantités d'intérêt. Tout d'abord, il permet de mesurer le coefficient d'amortissement en utilisant le fait que

$$\tau_w = \frac{2}{\mu} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{12 v}{b^2} \frac{b w_0 + b^2(1 - \pi/4)}{b w_0}. \quad (4.40)$$

La valeur de τ_w calculée avec les paramètres de cette expérience est $\tau_w^{(\text{calc})} = 37$ ms, ce qui est bien du même ordre que la valeur mesurée $\tau_w^{(\text{mes})} = 40$ ms.

Nous avons aussi accès à une mesure expérimentale directe du coefficient sans dimension η , le ratio entre la dissipation des ondes transverses et longitudinales, qui est

$$\frac{\tau_w}{\tau_z} = \frac{-\partial_T \tilde{Z}/\tilde{Z}}{-\partial_T \tilde{W}/\tilde{W}} = \frac{\eta \mu}{\mu} = \eta \quad (4.41)$$

$$\approx 0.93 \quad (4.42)$$

qui est bien de l'ordre de 1, ce qui est attendu car la vitesse de phase de l'onde transverse, c'est-à-dire la différence entre u_0 et v_c , est très faible : le motif de la figure 4.15 est quasi-stationnaire.

Annexe 4.C Article paru dans Physical Review Letters

Nous reproduisons ci-après un article que nous avons écrit et qui a été publié en janvier 2025 dans le journal *Physical Review Letters* (Le Lay et Daerr 2025a). Nous avons jugé utile de l'inclure en annexe du présent travail, car il présente l'instabilité en collier de perle avec une approche différente, mais complémentaire, de celle adoptée dans le chapitre 4. Avant de disposer des relations de dispersion des ondes, et de pouvoir écrire les équations sous la forme d'une interaction à trois ondes, nous voyions le déplacement de la déformation sinuuse comme une dérive du motif, se superposant à l'advection à la vitesse u_0 des modulations d'épaisseur.

Cette vision, moins quantitative (il y a par exemple un écart entre les points expérimentaux et le modèle sur la figure 3 dans les hautes fréquences), a l'avantage d'être pertinente en-dessous comme au-dessus du seuil de l'instabilité de méandrage spontané (traitée au chapitre 5), tandis que le modèle présenté plus haut ne permet pas de décrire le régime où les deux instabilités cohabitent. Nous présentons dans cet article, en insert dans la figure trois, des mesures expérimentales de la vitesse de phase des ondes transverses, qui montrent notamment que cette vitesse correspond à celle des méandres spontanés dans le régime $Q > Q^*$, et qu'elle est constante dans le régime $Q < Q^*$, ce qui semble indiquer un verrouillage en fréquence dont l'origine est encore mal comprise.

Phase-Locking Parametric Instability Coupling Longitudinal and Transverse Waves on Rivulets in a Hele-Shaw Cell

Grégoire Le Lay^{ID*} and Adrian Daerr^{ID}

Matière et Systèmes Complexes UMR 7057 CNRS, Université Paris Cité, 75231 Paris cedex 13, France



(Received 9 January 2024; accepted 25 November 2024; published 6 January 2025)

We report an instability exhibited by a fluid system when coupling two distinct types of waves, both linearly damped. While none of them is unstable on its own, they amplify one another, resulting in a previously unreported convective instability. An external excitation is used to induce a parametric cross-coupling between longitudinal and transverse deformations of a liquid bridge between two vertical glass plates. Coherent amplification results in waves satisfying a synchronization condition, which selects a precise wavelength. We derive a model for this instability using depth-averaged Navier-Stokes equations, showing the physical origin of the coamplification, and confirm its relevance experimentally. Our findings open new perspectives in the study of parametrically controlled pattern formation, and invites the search for analogous parametric cross-coupling instabilities in other systems exhibiting distinct wave types, from plasma to elastic media.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.134.014001

For more than one and a half centuries, the study of hydrodynamic instabilities has driven our understanding of dynamical systems, and led to the development of tools to tackle nonlinear systems with many degrees of freedom that are used in all realms of physics and indeed all sciences. Examples of hydrodynamic instabilities include the laminar-to-turbulent transition [1], the Rayleigh-Plateau instability of a liquid cylinder [2], or the Kelvin-Helmholtz instability of the interface between fluid phases moving relative to one another, as in wind blowing over water giving rise to waves [3]. Understanding these instabilities is of tremendous importance in environmental, biological, and other natural settings, as well as in many industrial processes, where the instability can be desirable as in combustion or printing or deleterious as in coating [4].

This Letter reports on an original parametric instability that should be relevant in many contexts outside hydrodynamics. Parametric instabilities arise from the temporal variation of a multiplicative parameter. In hydrodynamics (Faraday instability of an accelerated liquid [5]) or optics (parametric amplification of optical signals [6]), this variation usually creates a nonlinear coupling of a wave field to itself (surface height and electric field, respectively, in the given examples). In contrast, the instability described here involved the coupling of two distinct wave types, which do not interact in the absence of external forcing. The parametric coupling of distinct modes can also occur in plasma, e.g., Langmuir and ion acoustic waves, under the effect of an external dipolar field [7,8]. As a multitude of physical systems can sustain distinct wave types (e.g.,

compressive and shear waves in elastic media), we expect that analogous nonlinear wave coupling instabilities may occur in other very different contexts from geophysics and acoustics to astrophysics.

Here, we subject a liquid filament, henceforth termed “rivulet,” to homogeneous acoustic forcing, and describe a previously unreported instability where the path followed by the rivulet becomes sinuous, while simultaneously the streamwise mass distribution becomes inhomogeneous. We show that both features, although damped under normal conditions, grow by amplifying one another through a parametric coupling created by the acoustic forcing. When the difference between fluid advection velocity and sinusoidal wave speed precisely matches the ratio of perturbation wavelength and period, the coupling becomes coherent and phase-locked, leading to reciprocal amplification. For the sake of clarity we stress that this cross-coupling and its parametric origin is the original finding of this Letter, and fundamentally distinguishes the resulting instability from the unforced, inertial meandering instability occurring above a threshold flow rate [9,10].

Experimental setup—We inject liquid between two vertical and parallel glass plates separated by a gap of air of thickness $b = 0.6$ mm, forming a Hele-Shaw cell. The liquid (perfluorinated polyether PFPE, Galden HT135, density $\rho = 1.71$ g/ml, surface tension $\gamma = 17$ mN/m, kinematic viscosity $\nu = 1$ mm²/s) totally wets the glass. The liquid forms a bridge joining the plates and falling downward. Since the plate separation b is chosen inferior to the capillary length, the bridge is in first approximation bounded by semicylindrical interfaces meeting the glass with vanishing contact angle [11].

*Contact author: gregoire.le-lay@u-paris.fr

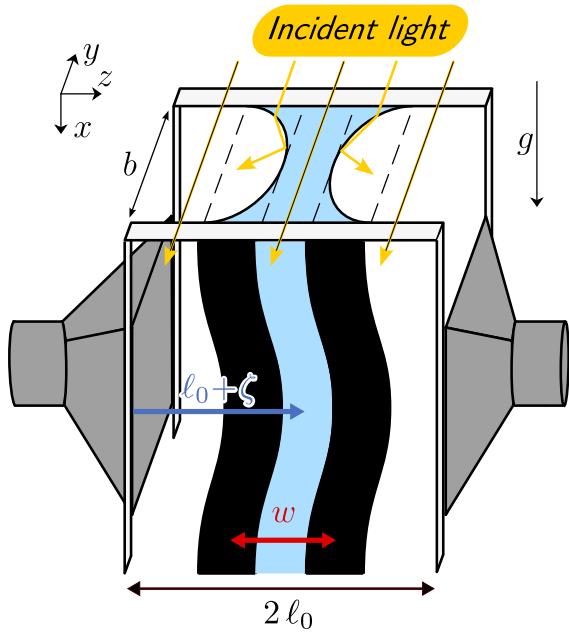


FIG. 1. Sketch of the experimental apparatus, not to scale. The glass panes are 1 m high and 30 cm wide, and set $b = 0.6$ mm apart. The lateral boundaries are closed except for a 20 cm range, vertically centered, where loudspeakers impose the pressure. When viewed head on, the rivulet appears delimited by dark bands where the curved interface refracts light away from the optical axis.

The liquid is injected into the cell through a pipette tip fed by a gear pump. Underneath the cell the fluid falls into a container that is continuously weighed, allowing us to measure the flow rate Q .

We use a camera to look at the rivulet, which is backlit with quasicollimated light. The two regions of curved menisci appear as dark bands on a bright background, framing a central light band where light passes unhindered through the bulk (Fig. 1). This allows us to record the position of both the menisci as a function of x , from which we define the rivulet position $\zeta(x, t)$ as the middle of the bright region and the rivulet width $w(x, t)$ as the distance between the two menisci. By measuring the width of the dark regions, we are also able to know if the menisci are still semicircular or have been deformed.

When not subject to forcing, the rivulet flows straight vertically or exhibits spontaneous meandering depending on whether the flow rate is inferior or superior to a critical flow rate Q^* , the origin of which has been studied previously [10]. In both cases, the rivulet is always observed to be of constant width. Indeed, since the curvature of the interface in the transverse (y, z) plane is fixed by the cell spacing, the rivulet is not subjected to the Plateau-Rayleigh instability and any variation in width is linearly damped.

The rivulet behaves as a one-dimensional membrane effectively splitting the cell in two regions, into which we

force air using speakers on the sides of the cell (Fig. 1) driven by a sinusoidal signal of frequency f_0 in a push-pull configuration: when one speaker pushes air into the space on the left of the rivulet, the other draws air on the right, and the process is reversed half a period later. Since the acoustic wavelength in air corresponding to the frequency used is always larger than the cell width, the rivulet is subjected to spatially homogeneous forcing over a region spanning 20 cm lengthwise. The neutral line around which the rivulet oscillates can display a small shift in the z direction, with respect to the path in the absence of forcing, over the scale of the excited portion of the cell. This is a consequence of a slight asymmetry in amplitude of the movements induced by the two speakers.

Results—At leading order, the rivulet responds to the forcing by moving sideways, i.e., along z , harmonically. At low to moderate frequencies we observe that inertia is negligible, that is, the rivulet displacement is in phase with that of the loudspeaker membranes. This sideways movement of the whole rivulet at the forcing frequency is always present, as indicated by the displacement relative to the blue dashed line in Fig. 2. In the experiments that follow, we induced transverse displacements of 0.2–2 mm, depending on the frequency.

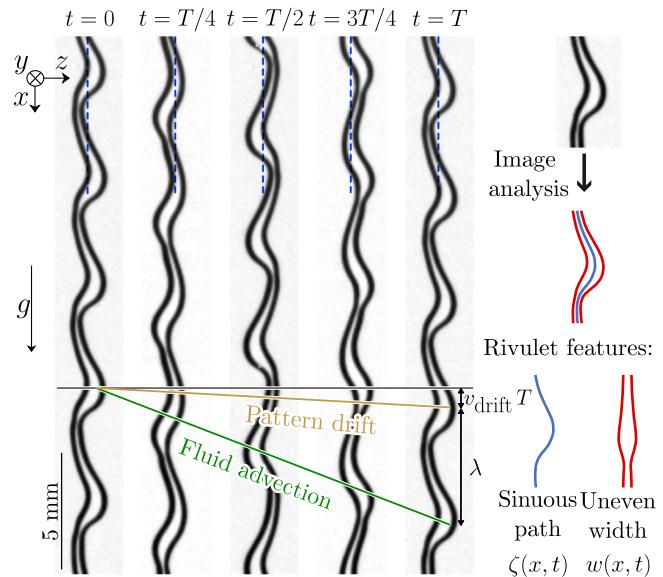


FIG. 2. Left: snapshots of the rivulet over one forcing period $T = 20$ ms, for $Q > Q^*$ ($Q = 46 \pm 1$ mm 3 /s). The phase velocity v_{drift} of the sinusoidal deformation is smaller than that at which the liquid bulges flow downstream. Note how the pattern reproduces exactly after one period T , up to a translation. The dashed blue line represents the position of the rivulet averaged in time and space. The spatially averaged (over x) rivulet position coincides with this line at $t = 0, T/2, T$ and the rivulet is off-centered on the left at $t = T/4$ and symmetrically on the right at $t = 3T/4$. Right: decomposition of the rivulet profile into the z -wise deformation of the center line (ζ , in blue) and the width modulation (w , in red).

On top of this synchronous sideways movement, when the forcing amplitude is above a certain threshold that depends on the forcing frequency, the rivulet adopts a sinuous trajectory with a well-defined wavelength λ that is orders of magnitude below the acoustic wavelength. Moreover, the width of the rivulet is also modulated with the same spatial periodicity (Fig. 2 and movie S1 [12]; such a modulation is sometimes termed “varicose mode” in the literature). Movie S2 shows the initial growth after the onset of forcing, while movie S3 shows how the perturbations quickly decay when the excitation is switched off.

The width modulations are advected streamwise at a velocity only weakly depending on frequency and flow rate, whereas the sinuous pattern is either static or drifts slowly at a drift speed v_{drift} , which can be zero, positive, or negative and that depends on the forcing frequency and the flow rate (Fig. 3 inset).

This reorganization of the rivulet is observed for a wide range of frequencies (10–1000 Hz). The wavelength nears the system size at the low end of this range, and drops below the gap size b and optical resolution at high frequencies, indicating that the frequency range of observable response could be extended even further through appropriate modifications of the setup.

When the drift speed is zero, we observe that the rivulet profile is exactly the same, both in lateral displacement and

width, every period T . This also holds, up to a translation in x , when the drift speed is nonzero (Fig. 2). In other terms the path and width modulations are phase-locked. This suggests that the wavelength selection is given by the relative speed of the width modulation with respect to the path modulation: after one period, compared to the path modulation, the width modulation has traveled exactly one wavelength further downstream. The wavelength thus acts as a degree of freedom that allows the rivulet to respond to any forcing frequency (movie S1).

This is remarkably confirmed by plotting the distance traveled by the width modulation, i.e., the wavelength λ plus path drift distance in one period $v_{\text{drift}}T$, as a function of the external forcing period T (Fig. 3). Assuming the phase speed of the width modulations matches the bulk (Darcy) flow speed $u_0 = gb^2/(12\nu) = 280 \pm 40$ mm/s, one expects the relation $\lambda + v_{\text{drift}}T = u_0T$ to hold. We find quantitative agreement over 2 orders of magnitude with this prediction without any adjustable parameter.

The points are slightly offset from the curve for periods smaller than 4 ms, an effect that we attribute to the meniscus deformation. Indeed, the semicircular shape of the meniscus is maintained for slow rivulet movements, but viscous dissipation changes the dynamic contact angle on the glass significantly for faster motion. When the rivulet is subjected to fast transverse movements, the interface flattens where the fluid advances, while the concavity increases where it retreats. For this reason, at high frequencies we experimentally observe the interface to become noncircular, with the meniscus shadows showing time oscillating asymmetry (not shown). We thus expect the average viscous dissipation to differ from the semi-cylindrical meniscus case, affecting the fluid velocity and/or the sinuous drift velocity.

The measured drift speed of the path modulation (Fig. 3 inset) shows a nontrivial behavior: for flow rates below the spontaneous meandering threshold ($Q < Q^*$) the sinuous pattern is stationary for frequency below 100 Hz, and drifts upstream at higher frequencies. For flow rates above Q^* and at low frequencies, the sinuous pattern moves downstream at the spontaneous meanders’ phase speed, which we measure independently in the absence of forcing.

Discussion—In this section we propose a model for the rivulet dynamics, based on the dominant physical ingredients. We identify the mechanism for the unstable cross-amplification of phase-locked path and width modulations.

The action of the speakers can be taken as equivalent to that of two infinite rigid vertical walls placed symmetrically at distance $\pm\ell_0$ from the rest position of the straight rivulet at $\zeta = 0$, moving horizontally so that their position relative to the situation at rest is given by $Z(t) = Z_0 \cos(2\pi f_0 t)$, and acting like pistons on the air to the left and right of the rivulet. From Mariotte’s law, for small displacements it follows that the force per unit length exerted on the rivulet is $b\rho\Pi(Z - \langle\zeta\rangle_x)$ with $\Pi = 2P_0/(\rho\ell_0)$, where P_0 is the

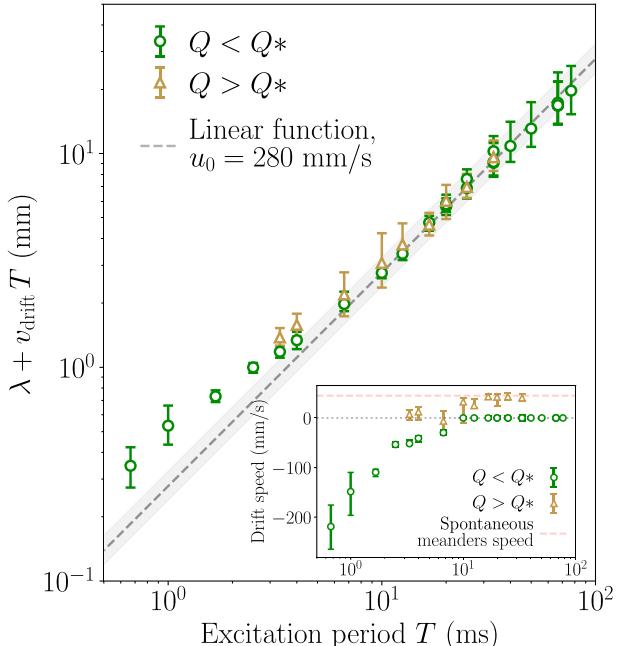


FIG. 3. The distance traveled over one period by the width modulation as a function of the forcing period for two flow rates Q , 26 ± 1 mm³/s and 46 ± 1 mm³/s, being respectively below and above the spontaneous meandering threshold Q^* . The dashed line is the linear function of slope u_0 . Inset: sinuous pattern drift speed v_{drift} as a function of the forcing period.

atmospheric pressure and $\langle \zeta \rangle_x$ is the space-averaged position of the rivulet. Thus the rivulet behavior is given by

$$w(\partial_t + \beta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = w\mathbf{g} - w\mu\mathbf{u} + w\Gamma\nabla(\partial_{xx}w) + \left[\Gamma\partial_{xx}\zeta - \mu_{cl}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \Pi(Z - \langle \zeta \rangle_x) \right] \mathbf{n}, \quad (1)$$

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)w = -w\nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (2)$$

The first equation is the depth-averaged Navier-Stokes equation integrated over the width of the rivulet w , where $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_z$ is the fluid velocity and \mathbf{n} is a unit vector normal to the rivulet path ζ . The second equation reflects mass conservation.

The lhs of Eq. (1) represents inertia, where the numerical prefactor $\beta \approx 1$ accounts for the velocity's y profile. Henceforth, following [10], we take $\beta = 1$ to simplify the equations without losing physical relevance. The terms on the right represent, in this order, gravity, viscous friction internal to the rivulet following from Darcy's law with $\mu = 12\nu/b^2$, streamwise Laplace pressure gradient inside the rivulet due to width variations and forces normal to the rivulet center line. Note that the streamwise Laplace pressure gradient tends to regularize width variations, unlike in the Rayleigh-Plateau instability of cylindrical filaments.

The last term includes three contributions of normal forces. Surface tension γ tends to straighten the rivulet, with $\partial_{xx}\zeta$ being the curvature of the rivulet in the (x, z) plane and $\Gamma = \pi\gamma/(2\rho)$ [11]. The second term makes for contact line friction, accounting for the high dissipation at the meniscus edges when the rivulet slides transversally on thin films of thickness $h \ll b$ on the plates outside the rivulet: $\mu_{cl} \approx b\mu\sqrt{b/h}$ ([10], to be published), with $h = 3 \text{ }\mu\text{m}$ for $Q = 46 \pm 1 \text{ mm}^3/\text{s}$. The last term is the acoustic pressure discussed above.

The base solution is a straight rivulet of constant width w_0 , located at $z = \zeta_0(t)$ with velocity $\mathbf{u} = [u_0 = g/\mu, v_0 = \partial_t\zeta_0(t)]$. The rivulet rest width w_0 in the experimental results presented here was measured to be $0.22 \pm 0.04 \text{ mm}$ for $Q = 26 \pm 1 \text{ mm}^3/\text{s}$ and $0.33 \pm 0.04 \text{ mm}$ for $Q = 46 \pm 1 \text{ mm}^3/\text{s}$. To understand the mechanism leading to the instability we consider a weak perturbation of this straight rivulet with $u = u_0 + \epsilon u_1(x, t)$, $w = w_0 + \epsilon w_1(x, t)$, and $\zeta = \zeta_0(t) + \epsilon \zeta_1(x, t)$. The transverse speed is $v = (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\zeta$. The Navier-Stokes Eq. (1) projected on \mathbf{e}_z gives at order 0

$$w_0(\partial_t + \mu)\partial_t\zeta_0 = -\mu_{cl}\partial_t\zeta_0 + \Pi(Z - \zeta_0) =: w_0F(t). \quad (3)$$

This equation describes the back and forth membranelike movement of the rivulet. It is linear in the forcing amplitude, and indeed the experimental space-averaged

rivulet position ζ_0 is always well fitted by a sine function of time.

At order 1 the same projection yields an equation governing the fluid path ζ ,

$$[w_0(\partial_t + u_0\partial_x)(\partial_t + u_0\partial_x + \mu) - \Gamma\partial_{xx} + \mu_{cl}\partial_t]\zeta_1 = -Fw_1, \quad (4)$$

which corresponds to Eq. (4) from [10] with an extra forcing term on the rhs. This term couples the purely time-dependent forcing F and the width w , which is advected at speed u_0 . It is destabilizing and causes width modulations in conjunction with acoustic forcing to amplify path perturbations.

By projecting Eq. (1) on \mathbf{e}_x , we obtain at first order in ϵ the evolution equation for the width w ,

$$[(\partial_t + u_0\partial_x)(\partial_t + u_0\partial_x + \mu) + w_0\Gamma\partial_{xxxx}]w_1 = w_0F\partial_{xx}\zeta_1. \quad (5)$$

The right-hand term can be understood as a stretching or compression of curved rivulet segments by the pressure difference across the rivulet. This term implies that the growth of width perturbations is a consequence of path modulations combined with acoustic forcing.

An interesting property of Eqs. (4) and (5) is that the destabilizing rhs does not contain the quantity differentiated on the lhs. In other words neither the sinuosity ζ_1 nor the width variations w_1 are directly amplified by the excitation forcing, but rather the acoustic forcing allows mutual growth by cross-coupling the two modes. While a coupling between sinusoidal and width variation modes is not unusual and is found for example in jets [13,14], usually both modes are intrinsically unstable, can exist on their own, and compete against each other. Here, sinusoidal and width perturbations are linearly damped when considered independently, i.e., in the absence of forcing-induced coupling. They grow only by sustaining one another through parametric coupling.

We can find experimental confirmation of this mechanism by looking at the spatiotemporal Fourier transform of the position and width of the rivulet. Using image analysis tools, we extract from the video the width and the position of the rivulet as a function of time and the x coordinate (Fig. 2 right, Figs. SF2 and SF3). In Fig. 4 and Fig. S1 we represent the logarithm of the power spectrum of ζ and w in the reciprocal space (q, f) . Zones of high intensity are organized in localized spots because of the quasiperiodicity of the pattern. For nonzero wave numbers, the more intense harmonics are at positive frequencies, corresponding to positive speed (downward displacement).

More can be said from Fig. 4 and Fig. S1 on the spatiotemporal behavior of the rivulet. For instance, note how for $q = 0$, the displacement spectrum $\hat{\zeta}$ has peaks (blue

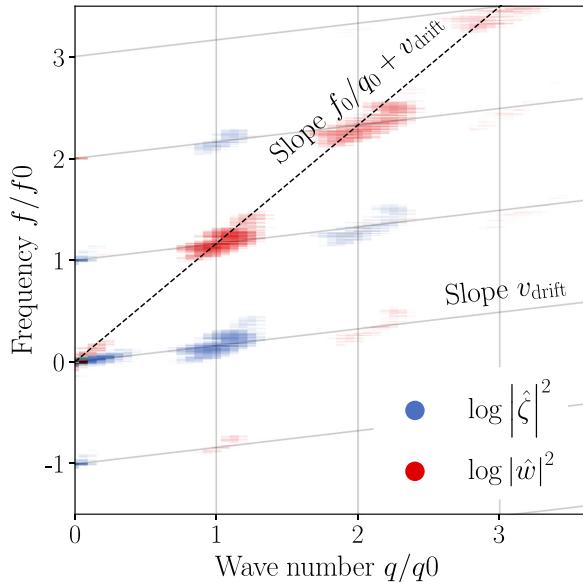


FIG. 4. Spatiotemporal power spectrum of the position (blue) and width (red) of the rivulet for $Q > Q^*$ ($Q = 46 \pm 1 \text{ mm}^3/\text{s}$). The frequency scale is set by the forcing frequency $f_0 = 50 \text{ Hz}$, the wave number scale by the dominant mode $q_0 = 0.193 \text{ mm}^{-1}$. The color intensity indicates the strength of the signal on a logarithmic scale, with a cutoff to white below -110 dB of the peak signal. An equivalent plot for a lower flow rate $Q < Q^*$ is included in the Supplemental Material [12] as Fig. S1.

patches) at $\pm f_0$ but not at $\pm n f_0$ with $n > 1$: this reflects the fact that the space-averaged response of the rivulet is linear and the global movement of the filet $\zeta_0(t)$ is sinusoidal in time, in accordance with Eq. (3).

More importantly, the patches of highest power in \hat{w} (red) lie on a line whose slope is the speed of the width modulations. The relevance of the mutual amplification mechanism described above is supported by the fact that on a given vertical line the high-signal regions alternate between \hat{w} (red) and $\hat{\zeta}$ (blue), the gap between two consecutive spots being the forcing frequency f_0 . This shows that both modes are coupled by a function oscillating at f_0 , and that no mode is unstable on its own (or we would see all its time harmonics). Finally the localization of the spectrum at discrete wave numbers is also explained by our model, positive feedback, and mutual amplification of longitudinal and transverse waves requiring the resonance condition $u_0 q = v_{\text{drift}} q + n f_0$ to be met.

Conclusion and perspectives—Under the effect of a spatially uniform forcing, a homogeneous membrane or string is expected to respond by homogeneous transverse translation. Remarkably, the liquid rivulet studied in this Letter develops a pattern with a well-defined wavelength combining transverse deformations of the flow path and longitudinal modulations of the local cross section.

It is far from obvious that the added degree of freedom with respect to a string, namely the possibility to

redistribute mass along the rivulet, should lead to an instability. Indeed both modes growing simultaneously, sinuosity and width variations, are linearly damped, and they amplify one another only when coupled by the forcing. This contrasts with vibrated soap films and strings loaded with beads, where mass redistribution merely causes the broadening of resonances [15,16].

Interestingly, although the acoustic forcing is additive, the effective forcing felt by the sinuosity and width variations is multiplicative. Formally this parametric cross-coupling is reminiscent of the way standing waves in the annular Faraday instability can be seen as arising through the coupling of counterpropagating waves [5]. The resonance condition to the amplification indicates a possible connection with the energy transfer due to resonant three-wave interaction in the case of stratified or homogeneous free-surface flows over a nonflat bottom [17,18].

The selection of the pattern drift speed is an open problem. We attributed modifications of the width advection speed at high frequencies to asymmetric deformations of the rivulet cross section. The study of these deformations, which can lead to rivulet breaking, could open the perspective of investigating the problem of the behavior of an air-fluid interface in a Hele-Shaw cell in the oscillating regime where inertial effects can be as important as capillary ones [19]. The forced rivulet also allows the coupling and simultaneous study of both the retreating and advancing menisci.

As an experimental investigation of a previously unreported instability, validated by theoretical modeling that identifies the mechanism as a new type of parametric coupling, this Letter opens exciting perspectives for new research and applications. The generation of wavelengths that are orders of magnitude smaller than the acoustic wavelength of the forcing could be exploited for controlled liquid fragmentation, mixing, and micromanufacturing. We also expect fundamental research on dynamical wetting to take advantage of the broad frequency response, that can for instance be used to probe timescales relevant in surfactant diffusion, adsorption, and desorption dynamics.

Acknowledgments—We thank Michael Berhanu and Chi-Tuong Pham for insightful discussions. The research received special funds from laboratory MSC UMR 7057.

- [1] M. Avila, D. Barkley, and B. Hof, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **55**, 575 (2023).
- [2] J. Eggers and E. Villermaux, *Rep. Prog. Phys.* **71**, 036601 (2008).
- [3] M. Rabaud and F. Moisy, *C. R. Méc.* **348**, 489 (2020).
- [4] F. Charru, *Hydrodynamic Instabilities*, Cambridge Texts in Applied Mathematics (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2011).
- [5] S. Douady, S. Fauve, and O. Thual, *Europhys. Lett.* **10**, 309 (1989).

- [6] S. A. Akhmanov, A. I. Kovrigin, A. S. Piskarskas, V. V. Fadeev, and R. V. Khokhlov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **45**, 1336 (1965) [Sov. J. Exp. Theor. Phys. Lett. **18**, 191 (1965)], <http://jetp.ras.ru/cgi-bin/e/index/e/18/4/p919?a=list>.
- [7] K. Nishikawa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **24**, 916 (1968).
- [8] C. Liu and V. Tripathi, *Phys. Rep.* **130**, 143 (1986).
- [9] W. Drenkhan, H. Ritacco, A. Saint-Jalmes *et al.*, *Phys. Fluids* **19**, 102101 (2007).
- [10] A. Daerr, J. Eggers, L. Limat, and N. Valade, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 184501 (2011).
- [11] C.-W. Park and G. M. Homsy, *J. Fluid Mech.* **139**, 291 (1984).
- [12] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.134.014001> for movies showing the rivulet oscillating, the start, and the end of the instability; as well as figures showing the spatio-temporal evolution of the position and width of the rivulet and a figure similar to Fig. 4 for $Q < Q^*$.
- [13] K. Mikhaylov and X. Wu, *Phys. Fluids* **32**, 064104 (2020).
- [14] S. J. Leib and M. E. Goldstein, *Phys. Fluids* **1**, 513 (1989).
- [15] A. Boudaoud, Y. Couder, and M. Ben Amar, *Eur. Phys. J. B* **9**, 159 (1999).
- [16] A. Boudaoud, Y. Couder, and M. Ben Amar, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3847 (1999).
- [17] E. S. Benilov, *J. Fluid Mech.* **185**, 551 (1987).
- [18] R. A. D. Szoéke, *J. Fluid Mech.* **130**, 279 (1983).
- [19] P. Aussillous and D. Quéré, *Phys. Fluids* **12**, 2367 (2000).

Annexe 4.D Dérivation des équations aux ordres deux et trois

Dans cette annexe, exceptionnellement, on utilise la notation $w_0 := \sigma_0/b$, ce qui permet de simplifier l'expression des équations.

Équations d'évolution à l'ordre deux en ϵ

Équation d'évolution à l'ordre ϵ^2 pour z

L'équation dynamique projetée sur \hat{z} , au second ordre en ϵ , est

$$\begin{aligned} & w_0 \partial_a v_2 \\ & + (w_1 \partial_a + w_0 u_1 \partial_x) v_1 = w_0 \Gamma \partial_x \kappa_{w,1} (\partial_x z_1) \\ & \quad + \Gamma \kappa_{z,2} + \Pi(t) \end{aligned} \quad (4.43)$$

qui amène à

$$w_0 \mathcal{L}_z z_2 + w_0 (\partial_x z_1) (\partial_a u_1) + 2w_0 u_1 \partial_a \partial_x z_1 + w_1 \partial_a^2 z_1 = w_0 \Gamma \partial_x z_1 \partial_{xxx} w_1 + \Pi(t) \quad (4.44)$$

qui correspond à l'équation (4.9a) avec

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_z(z_1, w_1, u_1) = & -(\partial_x z_1) (\partial_a u_1) - 2u_1 \partial_a \partial_x z_1 \\ & - \frac{w_1}{w_0} \partial_a^2 z_1 + \Gamma \partial_x z_1 \partial_{xxx} w_1 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Équation d'évolution à l'ordre ϵ^2 pour w

L'équation dynamique projetée sur \hat{x} , au second ordre en ϵ , est

4

$$\begin{aligned} & w_0 \partial_a u_2 \\ & + (w_1 \partial_a + w_0 u_1 \partial_x) u_1 = w_0 \Gamma \partial_x \kappa_{w,2} \\ & \quad + w_1 \Gamma \partial_x \kappa_{w,1} \\ & \quad - \Gamma \kappa_{z,1} (\partial_x z_1) \end{aligned} \quad (4.46)$$

dont nous prenons la dérivée spatiale $-\partial_x$ (4.46)

$$\begin{aligned} & \partial_a (-w_0 \partial_x u_2) \\ & + w_1 \partial_a (-\partial_x u_1) + u_1 \partial_x (-w_0 \partial_x u_1) + (\partial_x u_1) (-w_0 \partial_x u_1) = w_0 \Gamma \partial_{xxxx} w_2 \\ & \quad - \Gamma \partial_x [w_1 \partial_{xxx} w_1] \\ & \quad + \Gamma \partial_x [(\partial_{xx} z_1) (\partial_x z_1)] \end{aligned} \quad (4.47)$$

après quoi on peut remplacer ce qu'il faut par les expressions appropriées données en 2.2.3

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_w w_2 \\
 & + \partial_a \partial_x (w_1 u_1) + w_0 \partial_a \partial_x \left[(\partial_x z_1) \left(\left(\partial_t - \frac{1}{2} u_0 \right) z_1 \right) \right] \\
 & + \frac{w_1}{w_0} \partial_a^2 w_1 + (\partial_x u_1 + u_1 \partial_x) (\partial_a w_1) = -\Gamma \partial_x [w_1 \partial_{xxx} w_1] \\
 & \quad + \Gamma \partial_x [(\partial_{xx} z_1) (\partial_x z_1)] \tag{4.48}
 \end{aligned}$$

d'où la définition de $N_w(z_1, w_1, u_1)$ dans l'équation (4.9b) suit immédiatement.

Équations d'évolution à l'ordre trois en ϵ

Équation d'évolution à l'ordre ϵ^3 pour z

L'équation dynamique projetée sur \hat{z} , au troisième ordre en ϵ , est

$$\begin{aligned}
 & w_0 \partial_a v_3 + w_0 \partial_{\tilde{T}} v_1 \\
 & + (w_1 \partial_a + w_0 u_1 \partial_x) v_2 \\
 & + (w_2 \partial_a + w_0 u_{t2} \partial_x + w_1 u_1 \partial_x) v_1 \\
 & - \frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 w_0 u_0 \partial_x v_1 = - w_0 \mu v_1 - \mu_{\text{cl}} \partial_t z_1 \\
 & + w_0 \Gamma \partial_x \kappa_{w,2} (\partial_x z_1) + w_0 \Gamma \partial_x \kappa_{w,1} (\partial_x z_2) \\
 & + w_1 \Gamma \partial_x \kappa_{w,1} (\partial_x z_1) \\
 & + \Gamma \kappa_{z,3} - \frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 \Gamma \kappa_{z,1}
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

qui, après des remplacements, amène à

$$\begin{aligned}
 & w_0 \partial_a (\partial_{\tilde{T}} z_1 + \partial_a z_3) + w_0 \partial_{\tilde{T}} \partial_a z_1 \\
 & + w_0 \partial_a \left(u_1 \partial_x z_2 + u_2 \partial_x z_1 + \partial_t z_1 (\partial_x z_1)^2 + \frac{1}{3} u_0 (\partial_x z_1)^3 \right) \\
 & + (w_1 \partial_a + w_0 u_1 \partial_x) (\partial_a z_2 + u_1 \partial_x z_1) \\
 & + (w_2 \partial_a + w_0 \left(u_2 + \frac{1}{2} u_0 (\partial_x z_1)^2 + \partial_t z_1 \partial_x z_1 \right) \partial_x \\
 & + w_1 u_1 \partial_x) \partial_a z_1 \\
 & - \frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 w_0 u_0 \partial_x \partial_a z_1 = - w_0 \mu \partial_a z_1 - \mu_{\text{cl}} \partial_t z_1 \\
 & + w_0 \Gamma \partial_{xxx} w_2 (\partial_x z_1) \\
 & + w_0 \Gamma \partial_{xxx} w_1 (\partial_x z_2) \\
 & + w_1 \Gamma \partial_{xxx} w_1 (\partial_x z_1) \\
 & + \Gamma \partial_{xx} z_3 - \frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 \Gamma \partial_{xx} z_1 \\
 & - \frac{3}{2} \Gamma \left[(\partial_x z_1)^2 + (\partial_x w_1)^2 / 4 \right] \partial_{xx} z_1 \\
 & - \frac{3}{4} \Gamma (\partial_x z_1) (\partial_x w_1) \partial_{xx} w_1 .
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

En utilisant alors les propriétés de z_2 , w_2 et u_2 , on obtient

$$\begin{aligned} & w_0 \mathcal{L}_z z_3 + 2w_0 \partial_{\tilde{T}} \partial_a z_1 \\ & + w_0 \partial_a \left(\partial_t z_1 (\partial_x z_1)^2 \right) + \frac{1}{3} u_0 w_0 \partial_a (\partial_x z_1)^3 \\ & + w_1 \partial_{tt} z_2 + (w_1 \partial_a + w_0 u_1 \partial_x) (u_1 \partial_x z_1) \\ & + (w_0 \partial_t z_1 \partial_x z_1 + w_1 u_1) \partial_x \partial_a z_1 = -w_0 \mu \partial_a z_1 - \mu_{\text{cl}} \partial_t z_1 \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} & + w_1 \Gamma \partial_{xxx} w_1 (\partial_x z_1) \\ & - \frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 \Gamma \partial_{xx} z_1 \\ & - \frac{3}{2} \Gamma [(\partial_x z_1)^2 + (\partial_x w_1)^2 / 4] \partial_{xx} z_1 \\ & - \frac{3}{4} \Gamma (\partial_x z_1) (\partial_x w_1) \partial_{xx} w_1 . \end{aligned} \quad (4.52)$$

Ne considérant plus maintenant que les termes susceptibles de résonner, nous écrivons :

$$\begin{aligned} & w_0 \mathcal{L}_z z_3 + 2w_0 \partial_{\tilde{T}} \partial_a z_1 \\ & + w_0 \partial_a \left(\partial_t z_1 (\partial_x z_1)^2 \right) + \frac{1}{3} w_0 u_0 \partial_a (\partial_x z_1)^3 \\ & + 2w_1 u_1 \partial_a \partial_x z_1 + w_0 u_1^2 \partial_{xx} z_1 \\ & + w_0 \partial_t z_1 \partial_x z_1 \partial_x \partial_a z_1 = -w_0 \mu \partial_a z_1 - \mu_{\text{cl}} \partial_t z_1 - w_1 \partial_{tt} z_2 \\ & - \frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 \Gamma \partial_{xx} z_1 \\ & - \frac{3}{2} [(\partial_x z_1)^2 + (\partial_x w_1)^2 / 4] \partial_{xx} z_1 \\ & - \frac{3}{4} (\partial_x z_1) (\partial_x w_1) \partial_{xx} w_1 . \end{aligned} \quad (4.53)$$

Nous utilisons maintenant les expressions complexes de nos variables

$$\begin{aligned} z_1(x, t) &= \tilde{Z} e^{i(\omega_z t - k_z x)} + \text{c.c.} \\ z_2(t) &= \tilde{F} e^{i(\omega_0 t - 0 x)} + \text{c.c.} \\ w_1(x, t) &= \tilde{W} e^{i(\omega_w t - k_w x)} + \text{c.c.} ; \end{aligned}$$

nous écrivons la vitesse de phase des ondes transverses $v_z = \omega_z / k_z$, et la condition de solvabilité

devient alors

$$\begin{aligned}
 & 2w_0[i k_z(v_z - u_0)]\partial_{\tilde{T}}\tilde{Z} \\
 & -3iw_0v_zk_z^3[i k_z(v_z - u_0)]|\tilde{Z}|^2\tilde{Z} \\
 & -iw_0u_0k_z^3[i k_z(v_z - u_0)]|\tilde{Z}|^2\tilde{Z} \\
 & -2ik_z[i k_z(v_z - u_0)](\tilde{W}\tilde{U}^* + \tilde{W}^*\tilde{U})\tilde{Z} \\
 & -2w_0k_z^2|\tilde{U}|^2\tilde{Z} \\
 & -3iw_0v_zk_z^3[i k_z(v_z - u_0)]|\tilde{Z}|^2\tilde{Z} = -w_0\mu[i k_z(v_z - u_0)]\tilde{Z} - i\mu_{\text{cl}}v_zk_z\tilde{Z} + \omega_0^2\tilde{W}\tilde{F}^* \\
 & -\frac{3}{2}w_0v_c^2k_z^4|\tilde{Z}|^2\tilde{Z} \\
 & -\frac{9}{2}w_0v_c^2k_z^4|\tilde{Z}|^2\tilde{Z} - \frac{3}{4}w_0v_c^2k_z^2k_w^2|\tilde{W}|^2\tilde{Z} \\
 & -\frac{3}{2}w_0v_c^2k_zk_w^3|\tilde{W}|^2\tilde{Z}. \tag{4.54}
 \end{aligned}$$

puis, après quelques réarrangements,

$$\begin{aligned}
 2\partial_{\tilde{T}}\tilde{Z} = & -\mu\left(1 - \frac{\mu_{\text{cl}}}{w_0\mu}\frac{v_z}{u_0 - v_z}\right)\tilde{Z} + i\frac{1}{1 - v_z/u_0}\frac{\omega_0^2}{w_0u_0k_z}\tilde{W}\tilde{F}^* \\
 & + ik_z^3\left(u_0 + 6v_z + 6\frac{v_c^2}{v_z - u_0}\right)|\tilde{Z}|^2\tilde{Z} \\
 & + ik_w^2\left(\left(\frac{3}{2}k_w - \frac{1}{4}k_z\right)\frac{v_c^2}{v_z - u_0} + 4\varepsilon_w\frac{k_z}{k_w}\frac{v_c}{w_0}\right)|\tilde{W}|^2\tilde{Z}. \tag{4.55}
 \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant que $v_z = u_0 + \varepsilon_z v_c$, et en anticipant déjà que $k_z = k_w = k$, nous obtenons

4

$$\begin{aligned}
 2\partial_{\tilde{T}}\tilde{Z} = & -\mu\left(1 + \varepsilon_z\frac{\mu_{\text{cl}}}{w_0\mu}\left(\frac{u_0}{v_c} + \varepsilon_z\right)\right)\tilde{Z} - i\varepsilon_z\frac{\omega_0^2}{w_0v_ck}\tilde{W}\tilde{F}^* \\
 & + 7ik^3u_0|\tilde{Z}|^2\tilde{Z} \\
 & + ik^2v_c\left(-\varepsilon_z\frac{5}{4}k + \frac{4\varepsilon_w}{w_0}\right)|\tilde{W}|^2\tilde{Z}. \tag{4.56}
 \end{aligned}$$

Équation d'évolution à l'ordre ϵ^3 pour w

L'équation dynamique projetée sur \hat{x} , au troisième ordre en ϵ , est

$$\begin{aligned}
 & w_0 \partial_a u_3 + w_0 \partial_{\tilde{T}} u_1 \\
 & + (w_1 \partial_a + w_0 u_1 \partial_x) u_2 \\
 & + (w_2 \partial_a + w_0 u_{t2} \partial_x + w_1 u_1 \partial_x) u_1 \\
 & - \frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 w_0 u_0 \partial_x u_1 = - w_0 \mu u_1 \\
 & + w_0 \Gamma \partial_x \kappa_{w,3} \\
 & + w_1 \Gamma \partial_x \kappa_{w,2} + w_2 \Gamma \partial_x \kappa_{w,1} \\
 & - w_0 \Gamma \partial_x \kappa_{w,1} (\partial_x z_1)^2 \\
 & - \Gamma \kappa_{z,1} (\partial_x z_2) - \Gamma \kappa_{z,2} (\partial_x z_1) \\
 & - \Pi(\partial_x z_1). \tag{4.57}
 \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant le fait que $w_0 \partial_a^2 z_2 = \Pi$ et calculons $-\partial_x$ (4.57)

$$\begin{aligned}
 & \partial_a (-w_0 \partial_x u_3) + \partial_{\tilde{T}} (-w_0 \partial_x u_1) \\
 & - \partial_x w_1 \partial_t u_2 + \frac{w_1}{w_0} \partial_t (-w_0 \partial_x u_2) \\
 & + \partial_x \left(\frac{u_0}{w_0} w_1 + u_1 \right) (-w_0 \partial_x u_2) \\
 & - \partial_x w_2 \partial_t u_1 + \frac{w_2}{w_0} \partial_t (-w_0 \partial_x u_1) \\
 & + \partial_x \left(\frac{u_0}{w_0} w_2 + u_{t2} + \frac{1}{w_0} w_1 u_1 \right) (-w_0 \partial_x u_1) \\
 & - \frac{1}{2} u_0 \partial_x \left((\partial_x z_1)^2 (-w_0 \partial_x u_1) \right) = - \mu (-w_0 \partial_x u_1) \\
 & - w_0 \Gamma \partial_{xxx} w_3 + \frac{3}{2} w_0 \Gamma \partial_{xx} \left((\partial_x w_1)^2 \partial_{xx} w_1 \right) \\
 & - \Gamma \partial_x (w_1 \partial_{xxx} w_2 + w_2 \partial_{xxx} w_1) \\
 & + w_0 \Gamma \partial_x \left((\partial_{xxx} w_1) (\partial_x z_1)^2 \right) \\
 & + \Gamma \partial_x ((\partial_{xx} z_1) (\partial_x z_2)) + \Gamma \partial_x ((\partial_{xx} z_2) (\partial_x z_1)) \\
 & + w_0 \partial_x \left(\partial_a^2 z_2 (\partial_x z_1) \right) \tag{4.58}
 \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant la conservation de la masse aux ordres 1 et 3, de manière à obtenir

$$\begin{aligned}
 & \partial_a(\partial_a w_3 + \partial_{\bar{T}} w_1) + \partial_{\bar{T}} \partial_a w_1 \\
 & + w_0 \partial_a \partial_x \left(u_1 \frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 + u_0 \partial_x z_1 \partial_x z_2 + \partial_t z_1 \partial_x z_2 + \partial_t z_2 \partial_x z_1 \right) \\
 & + \partial_a \partial_x \left(w_2 u_1 + w_1 u_2 + w_1 \left[\frac{1}{2} u_0 (\partial_x z_1)^2 + \partial_t z_1 \partial_x z_1 \right] \right) \\
 & - \partial_a \left(\frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 (w_0 \partial_x u_1 + u_0 \partial_x w_1) \right) \\
 & - \partial_x w_1 \partial_t u_2 + \frac{w_1}{w_0} \partial_t (-w_0 \partial_x u_2) \\
 & + \partial_x \left(\frac{u_0}{w_0} w_1 + u_1 \right) (-w_0 \partial_x u_2) \\
 & - \partial_x w_2 \partial_t u_1 + \frac{w_2}{w_0} \partial_t \partial_a w_1 \\
 & + \partial_x \left[\left(\frac{u_0}{w_0} w_2 + u_{t2} + \frac{1}{w_0} w_1 u_1 \right) \partial_a w_1 \right] \\
 & - \frac{1}{2} u_0 \partial_x ((\partial_x z_1)^2 \partial_a w_1) = - \mu \partial_a w_1 \\
 & - w_0 \Gamma \partial_{xxxx} w_3 + \frac{3}{2} w_0 \Gamma \partial_{xx} ((\partial_x w_1)^2 \partial_{xx} w_1) \\
 & - \Gamma \partial_x (w_1 \partial_{xxx} w_2 + w_2 \partial_{xxx} w_1) \\
 & + w_0 \Gamma \partial_x ((\partial_{xxx} w_1) (\partial_x z_1)^2) \\
 & + \Gamma \partial_x ((\partial_{xx} z_1) (\partial_x z_2)) + \Gamma \partial_x ((\partial_{xx} z_2) (\partial_x z_1)) \\
 & + w_0 \partial_x (\partial_a^2 z_2 (\partial_x z_1)). \tag{4.59}
 \end{aligned}$$

On utilise maintenant la conservation de la masse à l'ordre 2, et faisons quelques simplifications, pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_w w_3 + 2 \partial_a \partial_{\bar{T}} w_1 \\
 & + w_0 \partial_a \partial_x \left(u_1 \frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 + \partial_x z_1 \partial_t z_2 \right) \\
 & + \partial_a \partial_x \left(w_1 \left[\frac{1}{2} u_0 (\partial_x z_1)^2 + \partial_t z_1 \partial_x z_1 \right] \right) \\
 & - \partial_a \left(\frac{1}{2} (\partial_x z_1)^2 (-\partial_t w_1) \right) \\
 & + \partial_x \left[\left(\frac{1}{2} u_0 (\partial_x z_1)^2 + \partial_t z_1 \partial_x z_1 + \frac{1}{w_0} w_1 u_1 \right) \partial_a w_1 \right] \\
 & - \frac{1}{2} u_0 \partial_x ((\partial_x z_1)^2 \partial_a w_1) = - \mu \partial_a w_1 \\
 & + \frac{3}{2} w_0 \Gamma \partial_{xx} ((\partial_x w_1)^2 \partial_{xx} w_1) \\
 & + w_0 \Gamma \partial_x ((\partial_{xxx} w_1) (\partial_x z_1)^2) \\
 & + w_0 \partial_{xx} z_1 \partial_{tt} z_2. \tag{4.60}
 \end{aligned}$$

Finalement, nous utilisons les expressions complexes de z_1 , w_1 et z_2 :

$$\begin{aligned} z_1(x, t) &= \tilde{Z} e^{i(\omega_z t - k_z x)} + \text{c.c.} \\ z_2(t) &= \tilde{F} e^{i(\omega_0 t - 0x)} + \text{c.c.} \\ w_1(x, t) &= \tilde{W} e^{i(\omega_w t - k_w x)} + \text{c.c.} \end{aligned}$$

et le fait que $\partial_a w = i(\omega_w - u_0 k_w) = \varepsilon_w i v_c k^2 w_0$ pour obtenir à la fin

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_w i v_c k^2 w_0) 2 \partial_{\tilde{T}} W \\ & + (\varepsilon_w i v_c k^2 w_0) (-ik) \left(u_0 W \frac{1}{2} |kZ|^2 + w_0 (-ik) Z (i\omega_0) F \right) \\ & + (\varepsilon_w i v_c k^2 w_0) (-ik) \left(W \left[\frac{1}{2} u_0 |kZ|^2 + v_z |kZ|^2 \right] \right) \\ & + (\varepsilon_w i v_c k^2 w_0) \left(\frac{1}{2} |kZ|^2 i \omega_w W \right) \\ & + (-ik) (\varepsilon_w i v_c k^2 w_0) \left(\frac{1}{2} u_0 |kZ|^2 - v_z |kZ|^2 + \frac{u_0}{w_0^2} |W|^2 \right) W \\ & + \frac{1}{2} u_0 (\varepsilon_w i v_c k^2 w_0) (ik) |kZ|^2 W = - (\varepsilon_w i v_c k^2 w_0) \mu w_1 \\ & \quad + \frac{3}{2} w_0 \Gamma k^6 |W|^2 W \\ & \quad + w_0 \Gamma |kZ|^2 k^4 W \\ & \quad + w_0 k^2 \omega_0^2 F Z \end{aligned} \tag{4.61}$$

Et enfin nous obtenons

$$\begin{aligned} 2 \partial_{\tilde{T}} \tilde{W} &= - \mu \tilde{W} - i \varepsilon_w k \omega_0 \left(\frac{\omega_0}{k v_c} - \varepsilon_w w_0 k \right) \tilde{F} \tilde{Z} \\ & - \varepsilon_w 2 i w_0 k^2 v_c |k \tilde{Z}|^2 \tilde{W} + i \left(k \frac{u_0}{w_0^2} - \varepsilon_w \frac{3}{2} w_0 v_c k^4 \right) |\tilde{W}|^2 \tilde{W} \end{aligned} \tag{4.62}$$

qui correspond bien à l'équation (4.11b).

5

MÉANDRAGE SPONTANÉ

Dans ce chapitre plus exploratoire que les précédents, nous présentons des avancées (très récentes autour de l'instabilité de méandrage spontané. Nous exposons des idées et des résultats préliminaires nouveaux et inédits, mais qui pour beaucoup sont encore qualitatifs et en cours d'élaboration : tout n'étant pas encore parfaitement compris, ils invitent à la discussion.

5.1	Instabilités en hydrodynamique	148
5.1.1	Les instabilités en mécanique des fluides	148
5.1.2	Méandrage entre deux plaques	150
5.2	Instabilité de méandrage spontané	152
5.2.1	Phénoménologie	152
5.2.2	Mécanisme d'instabilité	156
5.2.3	Interprétations	159
5.2.4	Limites	162
5.3	Flexion visqueuse du rivelet	163
5.3.1	Une « poutre liquide »	163
5.3.2	Méandrage d'un rivelet soumis à la flexion	166
5.4	Effet du forçage acoustique	168
5.4.1	Déclencher et contrôler les méandres	169
5.4.2	Atténuer les méandres	174
	Conclusion du chapitre 5	176
	Annexes du chapitre 5	178
Annexe 5.A	Autres représentations	178
Annexe 5.B	Calcul du critère d'instabilité	182
Annexe 5.C	Calcul du moment quadratique I_y	184
Annexe 5.D	Simulations	184

Dans ce chapitre, nous cherchons à comprendre et à caractériser le comportement du rivelet lorsque le fluide est injecté à haut débit dans la cellule : une instabilité dite de méandrage se développe alors, et le rivelet se met à présenter des oscillations. Si ce phénomène ne met pas en jeu les variations de l'épaisseur du rivelet, il n'en est pas moins très complexes : le rivelet montre des propriétés surprenantes et adopte un comportement très riche.

Nous commençons en 5.1 par contextualiser le méandrage spontané, qui constitue un cas de la vaste catégorie de comportements tombant sous la dénomination d'instabilités hydrodynamiques.

Nous décrivons ensuite expérimentalement à la section 5.2 le comportement du rivelet, et présentons une dérivation du critère d'instabilité établi par Daerr, Eggers et al. 2011.

Pour essayer de dépasser les aspects insatisfaisants du critère d'instabilité, et donc du modèle qui le sous-tend, nous ajoutons en 5.3 un nouvel ingrédient physique à notre modélisation : la flexion visqueuse, qui permet d'expliquer l'absence d'amplification des faibles longueurs d'ondes.

Enfin, dans la section 5.4, nous explorons les conséquences intrigantes du forçage acoustique localisé sur le rivelet.

Pour rendre la lecture de ce chapitre la plus aisée possible, nous avons repoussé en annexe certaines descriptions complémentaires des phénomènes expérimentaux (5.A), les étapes calculatoires de l'établissement du critère d'instabilité (5.B) et le calcul, utile mais fastidieux, d'un coefficient numérique (5.C). Enfin nous présentons une note succincte sur l'intérêt potentiel de la simulation numérique appliquée à notre système en 5.D.

5.1 Instabilités en hydrodynamique

Lorsque le fluide entre dans la cellule, il forme un rivelet initialement vertical. Au-dessus d'un certain débit, ce rivelet change d'état spontanément. L'écoulement cesse de couler droit, il devient sinueux, formant des méandres : il s'agit d'une instabilité.

5.1.1 Les instabilités en mécanique des fluides

En physique, on appelle *positions d'équilibre* les points fixes des équations mathématiques modélisant le système d'intérêt¹. Ce sont les états du système qui, mathématiquement, n'évoluent pas spontanément. Mais tout système physique est en permanence soumis à de faibles perturbations qui modifient, même très peu, son état : si un système reste proche de son état d'origine malgré ces perturbations, il est dit *stable*, tandis qu'on appelle *instabilité* l'inaptitude d'un système à persévéérer dans son état lorsqu'il est dérangé par une de ces petites perturbations (Chandrasekhar 1961).

L'étude des positions d'équilibre d'un système et de leur stabilité occupe un rôle central en science, à l'origine, en mécanique et en mécanique céleste, jusqu'à aujourd'hui dans tous les domaines décrits par la physique, et même au-delà : on trouve aujourd'hui sans peine des instabilités dans des domaines aussi variés que la chimie, la géologie, la biologie, et même dans les sciences sociales, en économie... La question de savoir quelles sont les configurations stables d'un système, ou au contraire quelles sont celles qui sont susceptibles d'évoluer, que ce soit spontanément ou sous l'effet d'une perturbation, est aussi vieille que la dynamique, et n'a jamais au fil des siècles perdu de sa pertinence².

Dans le domaine particulier de la mécanique des fluides, l'étude des instabilités a été l'un des moteurs principaux de développement depuis plus de deux siècles. L'observation expérimentale et

1. Plus généralement, les trajectoires fermées de l'espace des phases : si elles ne se réduisent pas à un point, on parle alors de cycles limites.

2. Nous ne résistons pas ici à l'envie de citer W. Thomson, futur Lord Kelvin : "There is scarcely any question in dynamics more important for Natural Philosophy than the stability of motion." (Thomson et Tait 1867).

la modélisation théorique des instabilités hydrodynamiques constituent des outils puissants qui permettent d'approfondir la compréhension des systèmes fluides. Ces connaissances permettent en particulier d'éviter l'apparition d'instabilités, lorsque celles-ci sont indésirables pour le système, ou au contraire de les favoriser et surtout de les contrôler, lorsqu'elles sont jugées utiles.

On peut classer les instabilités en plusieurs catégories, selon les domaines physiques qu'elles concernent, la nature des objets qui deviennent instables, les mécanismes physiques qui les sous-tendent, la manière dont elles quittent l'état de base, dont elles saturent, etc (Chandrasekhar 1961 ; Charru 2007 ; Guyon, Hulin et Petit 2012).

En ce qui concerne le méandrage spontané en cellule de Hele-Shaw, qui fait l'objet de ce chapitre, il existe plusieurs phénomènes d'instabilités qui en sont particulièrement proches. Tout d'abord, le terme « méandrage » (*meandering*) lui-même est issu du vocabulaire de la géographie : de nombreux cours d'eau, des ruisseaux aux fleuves, ont tendance naturellement à déformer leur lit et à adopter une trajectoire sinuuse, formant des chemins très courbés appelés méandres. Le rivelet, dans le régime que nous étudions dans ce chapitre, a tendance lui aussi à se déformer pour adopter un chemin sinueux et courbe : le terme de « méandrage » qualifie traditionnellement ce comportement, par analogie avec l'instabilité géophysique d'un cours d'eau rectiligne, et nous parlerons donc de « méandres » au cours de cette partie pour désigner les sinuosités du chemin suivi par le rivelet. Cependant, l'analogie s'arrête là, car tout oppose un fleuve qui déforme son lit et un filet d'huile entre deux plaques de verre : par exemple, le méandrage des rivières est un phénomène qui dépend très fortement des dynamiques de transport de sédiments, qui dominent la physique en jeu et permettent d'expliquer la déformation des berges.

Nous ne nous entendrons donc pas plus avant sur le méandrage des rivières. Cependant d'autres écoulements, présentant des mêmes ingrédients physiques plus proches de ceux étudiés au cours de cette thèse, présentent des méandres : c'est le cas par exemple du flux d'un filet de liquide sur une seule plaque inclinée (Nakagawa et Scott 1984 ; Bruinsma 1990 ; H.-Y. Kim, J.-H. Kim et Kang 2004)³. Lorsque le fluide mouille une surface solide, la dynamique du méandrage dépend de l'étalement du fluide sur la plaque ; lorsque le fluide est non-mouillant, la géométrie adoptée dépend très fortement de l'accrochage des angles de contacts aux défauts de la plaque (Le Grand-Piteira, Daerr et Limat 2006). De plus, la conservation du volume ne joue pas du tout le même rôle que dans notre système, qui est symétrisé par l'ajout d'une deuxième plaque : la section transverse du rivelet n'a pas une géométrie fixée, et elle peut évoluer au cours du temps et de l'espace pour former des tresses (*braiding*) (Mertens, Putkaradze et Vorobieff 2005 ; Bostwick et Steen 2018).

Au final, si des ingrédients en commun peuvent être trouvés, le phénomène que nous présentons ici dépend de mécanismes qui lui sont très spécifiques.

3. On peut aussi penser au « méandrage » dû à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz des feuilles liquides dans l'air (Crapper et al. 1973).

5.1.2 Méandrage entre deux plaques

Lorsqu'un fluide coule entre deux plaques parallèles (une cellule de Hele-Shaw), son chemin adopte une géométrie sinuuse si le débit du fluide dépasse une certaine valeur critique. Ceci a d'abord été observé dans le cas où le fluide est une solution de tensioactifs dans l'eau (Anand et Bejan 1986; Drenckhan, Gatz et Weaire 2004; Le Grand-Piteira 2006). Un rivelet de solution tensioactive en cellule de Hele-Shaw est un système potentiellement utile pour la mesure à l'échelle macroscopique des propriétés microscopiques de ces mélanges usuellement difficiles à mesurer, comme l'élasticité de surface (*surface elasticity*) ou la viscosité de cisaillement de surface (*surface shear viscosity*) (Drenckhan, Ritacco et al. 2007); mais la richesse et la complexité des comportements observés ont appelé à chercher un système plus simple qui pourrait être mieux compris.

En remplaçant le fluide par des huiles silicones peu visqueuses et des huiles perfluorées, Daerr, Eggers et al. 2011 ont déterminé l'origine physique du seuil à partir duquel la sinuosité du trajet se développe, et ont montré que le mécanisme général de déstabilisation était valable pour d'autres configurations. Cependant, le modèle présenté dans cette étude ne permet pas de comprendre la longueur d'onde typique des oscillations : d'après ce modèle, à partir du seuil, toutes les longueurs d'ondes deviennent instables en même temps, y compris les longueurs d'ondes infiniment petites, ce qui n'est pas physique, et la relation de dispersion ne possède pas de maximum qui expliquerait la sélection d'un mode en particulier. L'article appelle à considérer un mécanisme non-linéaire de sélection de longueur d'onde, mais, avant de se lancer dans une telle étude, il convient d'abord de disposer d'un système linéaire qui ne prévoie pas l'amplification indiscriminée de toutes les fréquences.

5.2 Instabilité de méandrage spontané

L'instabilité de méandrage spontané décrit la propension d'un rivelet liquide à adopter un chemin sinueux lorsque le débit excède un certain niveau. Nous rappelons dans cette section quelques résultats déjà connus à propos de ce phénomène, en particulier, nous présentons une dérivation du critère d'instabilité établi par Daerr, Eggers et al. 2011.

5.2.1 Phénoménologie

Lorsqu'un fluide dépourvu de tensioactifs est injecté dans une cellule de Hele-Shaw dont il mouille parfaitement les parois, il peut adopter quatre comportements. Tout d'abord, si le fluide n'est au contact qu'avec une seule des parois, il va s'étaler dessus et tomber en formant un film très large. Ce régime est hautement intéressant pour nous, et nous l'excluons en forçant le mouillage simultané des deux plaques délimitant la cellule dans la direction y (la profondeur), entre lesquelles le film forme un pont liquide.

En supposant que le fluide mouille parfaitement les deux parois, si le débit est suffisamment faible, le fluide n'est pas en quantité suffisante pour former un rivelet qui s'étend sur toute la hauteur de la cellule : il va se former des gouttes qui vont tomber les unes après les autres. Aux débits plus importants, un rivelet est formé, qui est parfaitement vertical, à l'intérieur duquel le fluide s'écoule à la vitesse moyenne u_0 . Sur ce rivelet, les ondes sinueuses comme longitudinales peuvent se propager, mais elles sont toutes deux atténuées linéairement.

Au-delà d'un débit seuil Q^* , le rivelet se déstabilise spontanément, adoptant un chemin sinueux qui évolue dans le temps. On parle alors de régime méandrant, par analogie avec les méandres des rivières en géographie (avec lesquels notre objet partage cependant peu de caractéristiques). Un exemple d'instantané d'un rivelet méandrant est visible sur la figure 5.1 ci-contre, nous présentons aussi un diagramme spatio-temporel sur la figure 5.2.

La caractéristique la plus étonnante des oscillations sinueuses adoptées par le rivelet dans ce régime est leur manque apparent de régularité. Loin d'exhiber la même périodicité que les oscillations vues au chapitre précédent, dans ce régime le rivelet produit des oscillations qui n'ont pas de périodicité très marquée, et ce dès la zone de formation. Cela est visible par exemple en regardant les vidéos 5.1 et 5.2, où il est difficile de déceler l'organisation spatiale qui dicte la géométrie des méandres.

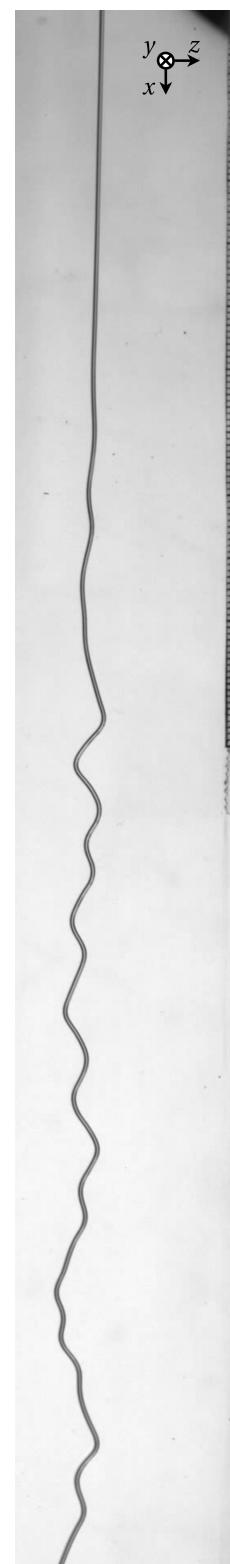


FIGURE 5.1 – Déstabilisation d'un rivelet droit par méandrage spontané. Le papier millimétré à droite donne l'échelle.

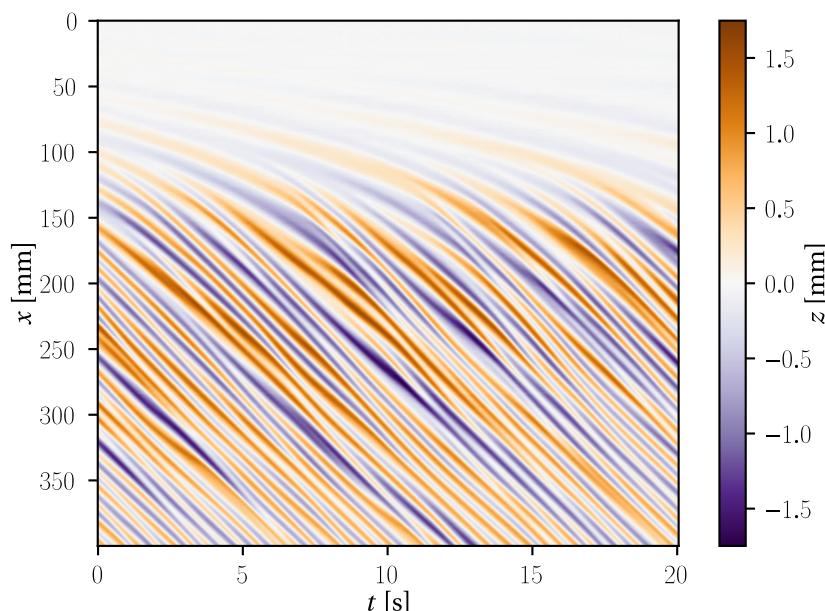


FIGURE 5.2 – Données expérimentales : chemin du rivelet (z , en échelle de couleur), en fonction de la coordonnée verticale (x , en ordonnée) et du temps (t , en abscisse). Épaisseur de la cellule $b = (0,58 \pm 0,02)$ mm, débit volumique $Q = (58 \pm 2)$ mm³/s.

Les méandres sont formés à partir d'une certaine distance du point d'injection, qui évolue avec le temps. On voit cette zone de départ en haut de la figure 5.2 (en blanc, car le rivelet y est proche de sa position moyenne). La longueur d'apparition des méandres, c'est-à-dire la distance par rapport au haut de la cellule où les méandres se forment, dépend du débit considéré : elle est très courte à haut débit, et, près du seuil de méandrage, elle peut aller jusqu'à l'entièreté de la cellule, le rivelet ne commençant à osciller que plusieurs dizaines de centimètres en-dessous du point d'injection. À débit fixé, la position d'apparition des méandres varie dans le temps de manière irrégulière. Cela rappelle fortement les oscillations irrégulières de la longueur d'apparition (*healing length*) observées dans le cas de l'instabilité radiale d'un fluide visqueux tombant le long d'une fibre en régime convectif (Duprat, Ruyer-Quil, Kalliadasis et al. 2007). L'instabilité de méandrage spontané est elle-même une instabilité convective, la vitesse de groupe des perturbations étant toujours positive dans le référentiel du laboratoire, comme on le verra plus loin.



Vidéo 5.1 : Zone de départ du méandrage spontané. ([en savoir plus](#)).

La zone de formation des méandres est caractérisée par un très grand désordre, où la position du rivelet est semblable à du bruit, exhibant une grande variété d'échelles caractéristiques. Plus bas, les méandres gagnent en cohérence et une taille typique des méandres émerge : si les oscillations naturelles du rivelet issues de l'instabilité ne sont jamais rigoureusement périodiques, elles ne sont pas pour autant dépourvues de structure.

La première chose que l'on remarque en observant le rivelet, par exemple sur la figure 5.2 ou bien la vidéo 5.2, c'est que les déformations du rivelet semblent être advectées vers le bas à une certaine vitesse. Pour se représenter ce transport d'une manière visuelle, nous proposons

d'observer la figure 5.3, sur laquelle nous avons représenté la dérivée temporelle de la position du rivelet ($\partial_t z(x, t)$) en fonction de sa dérivée spatiale ($\partial_x z(x, t)$). Dans cette représentation, l'intensité de la couleur en un état particulier est proportionnelle au nombre de points expérimentaux enregistrés. La première constatation est la symétrie de la figure par rapport au point $(0, 0)$, qui rend compte de la symétrie du problème vis à vis de la transformation $z \rightarrow -z$, ou bien $(x, t) \rightarrow (-x, -t)$. On voit ensuite que la plupart des points (excepté près du centre de la figure) sont répartis sur une droite, dont la pente c est homogène à une vitesse : on a $\partial_t z - c\partial_x z \approx 0$, il y a donc bien une propagation à l'œuvre à la vitesse de phase c .

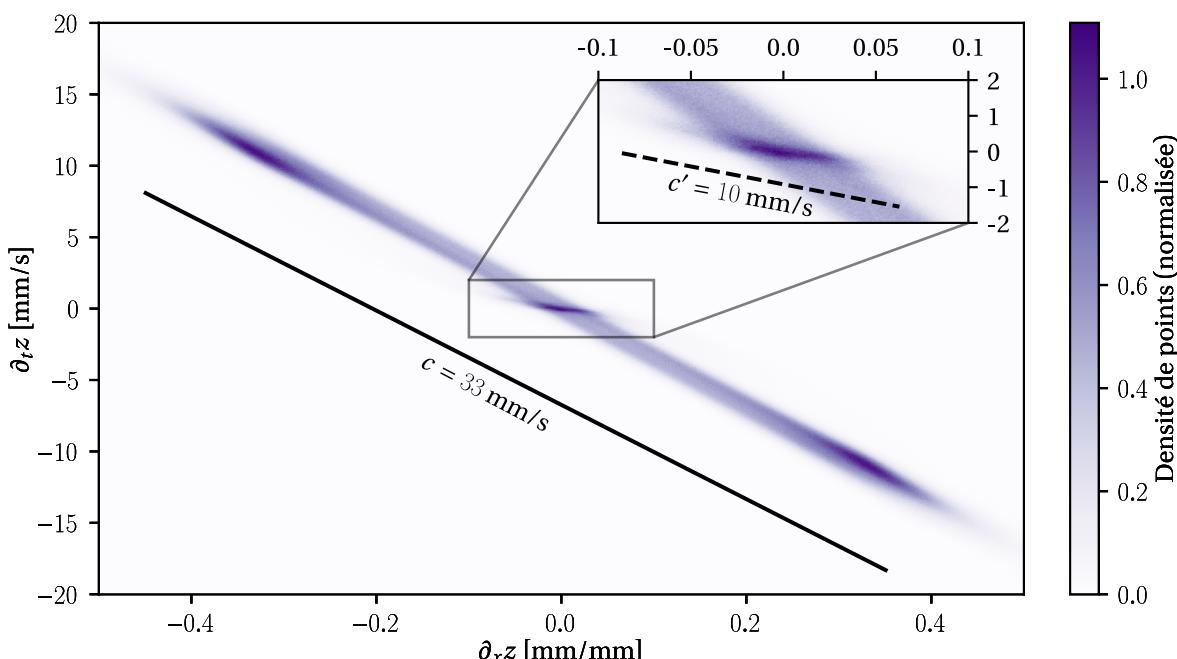


FIGURE 5.3 – Densité de points expérimentaux sur l'espace $(\partial_x z, \partial_t z)$. En insert : grossissement autour du centre de la figure. Épaisseur de la cellule $b = (0,58 \pm 0,02)$ mm, débit volumique $Q = (68 \pm 1)$ mm³/s.



Vidéo 5.2 : Méandres naturels. ([en savoir plus](#)).

Près du point $(0, 0)$, on observe sur la figure 5.2 une concentration de points correspondant à des perturbations faiblement inclinées, alignées le long d'une droite de pente faible : elles se déplacent lentement. Il s'agit là des points correspondant à la « zone de naissance » des rivelets, qui au départ sont peu inclinés et peu véloces, comme on peut aussi le constater en regarder la figure 5.2 ou bien la vidéo 5.1. La représentation que nous utilisons est particulièrement intéressante, car les données représentées sont purement locales : cela nous permet d'estimer cette vitesse typique des méandres naissants, sans être gênés par le fait que la zone sur laquelle les méandres se développent bouge en permanence (du fait de la longueur d'apparition irrégulière, mentionnée plus haut).

Enfin, sur la figure 5.3, on voit que loin du centre la densité de points se concentre en deux zones symétriques par rapport au point $(0, 0)$. Observer cette zone permet d'estimer la pente typique des rivelets, qui est de l'ordre de 0,35. Cette pente n'est pas particulièrement petite devant un, ce qui est cohérent avec le fait que l'évolution des méandres soit hautement non-linéaire.

L'existence de cette pente typique laisse deviner l'existence d'une forme de périodicité du motif spatial des méandres, ce que nous montrons au paragraphe suivant.

En observant le rivelet sur un temps long, on peut avoir l'impression qu'une échelle spatiale caractéristique se dégage au bout d'une certaine distance après la zone où ils naissent, malgré le désordre apparent. Sur la figure 5.4, nous avons représenté, en fonction des fréquences spatiales, le spectre de puissance associé à la transformée de Fourier spatiale du signal expérimental de position z . Pour différents instants t_0, t_1, \dots , on a calculé la transformée de Fourier de $z(x, t_i)$, c'est à dire $\hat{z}(k, t_i)$ où $k = 2\pi/\lambda$ est la pulsation spatiale. Les densités spectrales de puissance correspondantes (c'est-à-dire, à une constante multiplicative près, $|\hat{z}|^2$) ont été représentées en traits gris sur la figure 5.4, et le trait noir épais représente leur moyenne. On voit sur ces spectres que de manière générale l'amplitude du signal décroît avec la fréquence spatiale, sauf pour une zone centrée autour d'une longueur d'onde caractéristique λ^* de l'ordre de 15 mm. Cette longueur d'onde, pour laquelle la densité spectrale de puissance est maximale, n'est pas la même à chaque instant, ce qui témoigne du fait que le rivelet a une structure spatiale évoluant au cours du temps. Cette évolution est désordonnée, comme le montre la figure 5.14 (en annexe 5.A).

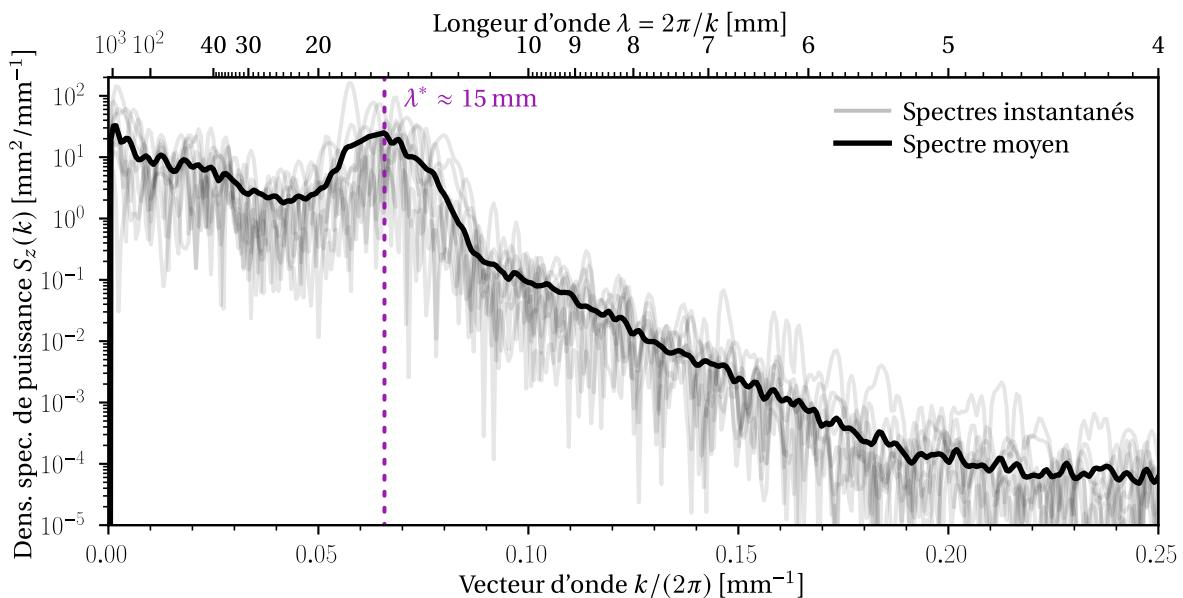


FIGURE 5.4 – Densité spectrale de puissance de la transformée de Fourier spatiale $\hat{z}(k, t = t_0)$, pour différents instants t_0 (lignes grises transparentes). Le spectre moyen (moyenne arithmétique) est indiqué par une ligne épaisse noire. Les instants auxquels les spectres sont réalisés sont choisis suffisamment espacés dans le temps (30 s) pour pouvoir être considérés « indépendants ». Pour cette figure on n'a considéré que les méandres « développés », c'est-à-dire loin en aval (plus de 5 cm) de l'endroit où les méandres apparaissent. Les spectres ont été réalisés avec un fenêtrage de Hann, et un remplissage de zéros (*zero-padding*). Épaisseur de la cellule $b = (0,58 \pm 0,02)$ mm, débit volumique $Q = (68 \pm 1)$ mm³/s.

Au fur et à mesure que le débit augmente, l'instabilité se déclenche de plus en plus tôt, les oscillations sont de plus en plus rapides et amples et, pour les débits les plus élevés, l'instabilité peut croître jusqu'au stade où certains segments du rivelet deviennent horizontaux. Ces parties cassent sous l'effet de la gravité, ce qui brise le rivelet, qui se fragmente alors de manière irrégulière.

Une caractéristique du régime de méandrage spontané est que le rivelet garde toujours une

largeur constante : en l'absence de forçage acoustique, les modulations de largeur ne sont plus couplées aux oscillations sinusoïdales, et dans la suite de cette partie on considérera toujours la largeur constante : $w = w_0$. L'aire de la section transversale du rivelet $\sigma = \sigma_0$ est donc elle aussi constante, ce qui implique notamment le fait que la vitesse moyenne du fluide dans le rivelet u_0 , comme la vitesse de phase des perturbations sinusoïdales v_c , sont, elles aussi, fixées : nous supposons donc qu'elles restent constantes tout au long de la dynamique. Dans les modèles que nous utilisons, ces vitesses ne dépendent ainsi que des conditions de l'expérience, en particulier du débit Q , mais jamais, par exemple, de la longueur d'onde.

5.2.2 Mécanisme d'instabilité

Essayons de comprendre l'origine de l'instabilité de méandrage spontané. Pour cela, nous partons de l'équation linéarisée (2.12a) en l'absence de forçage acoustique ($\Pi = 0$) :

$$(\partial_t + u_0 \partial_x)^2 z_1 = -\mu (\partial_t + u_0 \partial_x) z_1 + \frac{\Gamma}{\sigma_0} \partial_{xx} z_1 - \frac{\mu_{cl}}{\sigma_0} \partial_t z_1. \quad (5.1)$$

Il est astucieux de simplifier la discussion de cette équation en se plaçant dans le référentiel advecté avec l'écoulement moyen, c'est-à-dire se déplaçant à la vitesse u_0 vers le bas. Cela correspond à la transformation $\partial_t \rightarrow \partial_t - u_0 \partial_x$. On obtient alors la forme suivante :

$$\partial_{tt} z_1 - v_c^2 \partial_{xx} z_1 = -\mu_{tot} \partial_t z_1 + u_0 \frac{\mu_{cl}}{\sigma_0} \partial_x z_1 \quad \text{avec} \quad v_c := \sqrt{\frac{\Gamma}{\sigma_0}} \quad \text{et} \quad \mu_{tot} := \mu + \frac{\mu_{cl}}{\sigma_0} \quad (5.2)$$

où l'on a fait apparaître la vitesse capillaire v_c et la dissipation totale μ_{tot} .

L'équation (5.2) est alors aisée à interpréter : les termes d'ordre les plus élevés, dans le membre de gauche, indiquent que l'on est face à une équation hyperbolique et qu'une perturbation va donc se propager : ils contrôlent la vitesse de cette propagation, qui est $\pm v_c$ dans le référentiel advecté à u_0 . Les termes d'ordre plus bas, dans le membre de droite, contrôlent l'évolution de l'amplitude de cette perturbation. Le terme $-\mu_{tot} \partial_t z_1$ est proportionnel à l'opposé de l'évolution temporelle de la position : c'est un terme de dissipation visqueuse, il représente donc une atténuation sur le temps caractéristique $1/\mu_{tot}$. Le terme $u_0 \frac{\mu_{cl}}{\sigma_0} \partial_x z_1$ peut jouer deux rôles différents. Si on considère une onde propageante, alors $\partial_x \approx -v_c \partial_t$: ce terme incarne alors la dissipation supplémentaire due aux frottements avec la plaque. Si on s'intéresse à une onde contrapropageante, alors $\partial_x \approx v_c \partial_t$, et ce terme représente une dissipation négative (et donc une amplification) : c'est lui qui sera responsable de la croissance de l'instabilité.

Seuil d'instabilité : méthode linéaire

Nous suivons ici le raisonnement de physique linéaire présenté dans Daerr, Eggers et al. 2011. Pour déterminer le taux d'amplification, on cherche une solution de l'équation (5.2) sous la forme

$$z(x, t) = e^{st - ikx} + \text{c.c.} \quad \text{avec } s \in \mathbb{C} \quad \text{et } k \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Le critère d'instabilité devient alors $\text{Re}(s) > 0$, où s est la solution du polynôme du second ordre

$$s^2 + \mu_{\text{tot}} s + v_c^2 k^2 + i u_0 k \frac{\mu_{\text{cl}}}{\sigma_0} = 0. \quad (5.4)$$

La subtilité ici vient du fait que la dissipation et l'amplification sont de natures différentes : comme on l'a vu dans l'équation (5.2), la dissipation agit sur un terme temporel tandis que l'amplification est représentée par un terme spatial. En conséquence, l'équation (5.4) comporte un terme imaginaire, ce qui rend beaucoup plus difficile son interprétation. La quantité s est donnée par

$$s = \frac{1}{2} (-\mu_{\text{tot}} + \delta) \quad \text{avec} \quad \delta^2 = \mu_{\text{tot}}^2 - 4 v_c^2 k^2 - 4 i u_0 k \frac{\mu_{\text{cl}}}{\sigma_0}. \quad (5.5)$$

En toute rigueur, il existe deux modes, s^\pm , associés à δ^\pm , les deux racines de δ^2 . Définissons δ^+ tel que $\text{Re}(\delta^+) > 0$ (et puisque $\delta^- = -\delta^+$, on a $\text{Re}(\delta^-) < 0$). L'un des modes, celui correspondant à δ^- , est très atténué : il correspond au mode rapide des ondes sinueuses, et nous avons déjà expliqué physiquement cette atténuation en 4.3.1 (chapitre 4). Pour la suite, nous oublions ce mode qui n'est pas amplifié (et jamais observé expérimentalement), et nous ne nous intéressons qu'au mode δ^+ qui est celui potentiellement instable. Nous notons donc à partir de maintenant $s := s^+$ et $\delta := \delta^+$ pour alléger les notations.

Le critère d'instabilité est alors $\text{Re}(\delta) > \mu_{\text{tot}}$, ce qui est équivalent à la condition

$$\frac{u_0}{v_c} > \frac{\mu_{\text{tot}}}{\mu_{\text{cl}}/\sigma_0} \quad (5.6)$$

comme nous le montrons dans l'annexe 5.B.

Seuil d'instabilité : méthode non-linéaire

La méthode linéaire présentée précédemment a l'avantage d'être directe et d'utiliser les méthodes mathématiques familières de la physique linéaire (décomposition en modes de Fourier-Laplace, recherche de racines complexes de polynômes). Cependant, le sens physique du critère obtenu est quelque peu obscurci : les racines de l'équation (5.4) sont tout sauf évidentes, et obtenir la solution finale nécessite de passer par l'algèbre touffue de l'annexe 5.B.

À la place, on peut adopter une approche plus « non-linéaire », en s'inspirant des méthodes qui ont été efficaces au chapitre 4. Pour cela, on part de l'idée que la solution recherchée est une onde $f(x \pm c t)$, dont on cherche à caractériser le taux de croissance (ou d'atténuation) en temps. Traitons cette croissance (ou atténuation) comme une perturbation : si l'amplitude de l'onde est

d'ordre ϵ , alors supposons que les mécanismes dissipatifs / amplificateurs sont eux même d'ordre ϵ . La croissance de l'instabilité se fera alors sur une échelle de temps lente $T = t/\epsilon$.

On peut ainsi partir de l'ansatz suivant :

$$z(x, t) = \epsilon A(T) f(x + \epsilon_z c t) \quad (5.7)$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde recherchée, $f(x)$ est une fonction quelconque d'ordre unité, et $A(T)$ est l'amplitude de l'onde d'ordre unité, qui varie avec l'échelle de temps lente $T = t/\epsilon$. Comme dans la partie 4.3.1, la quantité ϵ_z vaut ± 1 et rend compte du caractère propagatif ($\epsilon_z = -1$) ou contrapropagatif ($\epsilon_z = +1$) de l'onde étudiée.

Nous injections cette solution dans l'équation (5.2), que l'on a ré-échelonnée (*rescaled*) pour pouvoir traiter la dissipation et l'amplification de manière perturbative :

$$\partial_{tt} z - v_c^2 \partial_{xx} z = -\epsilon \mu_{\text{tot}} \partial_t z + u_0 \frac{\epsilon \mu_{\text{cl}}}{\sigma_0} \partial_x z \quad (5.8)$$

$$c^2 \epsilon A f'' + 2 \epsilon_z \epsilon^2 \partial_T A f' - v_c^2 \epsilon A f'' = -\epsilon_z c \epsilon^2 \mu_{\text{tot}} A f' + \epsilon^2 u_0 \frac{\mu_{\text{cl}}}{\sigma_0} A f' \quad (5.9)$$

où l'on a gardé que les termes à l'ordre ϵ et ϵ^2 . L'équation obtenue donne, en ne prenant que les termes d'ordre 1 en ϵ :

$$c = v_c \quad (5.10)$$

ce qui est tout sauf surprenant, v_c étant la vitesse de propagation des ondes sinuuses.

À l'ordre ϵ^2 , on a alors

$$2 \epsilon_z \partial_T A f' = -\epsilon_z c \mu_{\text{tot}} A f' + u_0 \frac{\mu_{\text{cl}}}{\sigma_0} A f' \quad (5.11)$$

$$\text{soit } \partial_T A = \frac{1}{2} \left(\epsilon_z u_0 \frac{\mu_{\text{cl}}}{\sigma_0} - v_c \mu_{\text{tot}} \right) A \quad \text{en simplifiant par } f'. \quad (5.12)$$

L'amplitude de l'onde que nous considérons varie donc exponentiellement, et nous constatons donc immédiatement deux choses :

- Le mécanisme ne peut amplifier que les ondes contrapropagatives, c'est à dire celles pour lesquelles $\epsilon_z = +1$. Ce sont les ondes qui « remontent le courant », en se propageant vers le haut, à rebours de l'écoulement. Ces ondes sont sous-atténuées, voire amplifiées, contrairement aux ondes propagatives qui sont sur-atténuées, comme nous l'avions déjà constaté au chapitre 4.
- L'amplification ne peut se faire que si la condition

$$\frac{u_0}{v_c} > \frac{\mu_{\text{tot}}}{\mu_{\text{cl}}/\sigma_0} \quad (5.6, \text{ de nouveau})$$

5.2.3 Interprétations

Le critère (5.6) est celui auquel sont arrivés Daerr, Eggers et al. 2011. Il peut se traduire de la manière suivante : l'instabilité se déclenche lorsque la vitesse à l'intérieur de l'écoulement est suffisamment grande devant la vitesse des ondes sinueuses capillaires. Plus précisément, lorsque le ratio de ces deux vitesses devient plus grand que le ratio entre deux échelles de temps du système : d'une part le temps caractéristique d'amplification d'une perturbation se déplaçant à la vitesse u_0 , c'est à dire σ_0/μ_{cl} , d'autre part le temps caractéristique d'atténuation d'une perturbation $1/\mu_{\text{tot}}$.

Le mécanisme de l'instabilité en lui-même n'est pas évident à comprendre. En effet, l'effet responsable de l'amplification est la friction de ligne de contact μ_{cl} , or il n'est pas immédiatement clair que cet effet résistif, qui s'oppose au mouvement, puisse être responsable de la croissance d'une perturbation. Le rôle du frottement de ligne de contact dans le problème est en outre difficile à mettre en évidence, puisqu'il est responsable d'une partie de l'atténuation, en plus de l'amplification : il joue donc systématiquement un rôle ambivalent.

Nous proposons dans ce paragraphe une explication qualitative qui selon nous donne une idée physique du mécanisme, en nous appuyant sur les schémas montrés sur la figure 5.5. Pour toute cette explication, nous nous plaçons dans le référentiel se mouvant avec le fluide à la vitesse u_0 , c'est-à-dire le référentiel pour lequel l'équation (5.2) est valide. Dans ce référentiel, où l'onde obéit en première approximation à l'équation de d'Alembert, les plaques formant la cellule, qui sont immobiles dans le référentiel du laboratoire, se déplacent vers le haut (donc vers $-\hat{x}$) à la vitesse u_0 .

Dans un premier temps, considérons une onde propagative, c'est-à-dire se déplaçant vers le bas (dans la direction $+\hat{x}$) à la vitesse v_c . Les plaques se déplaçant vers le haut à la vitesse u_0 , la vitesse totale du rivelet par rapport aux plaques est $+v_c + u_0 > 0$ (le rivelet est en train de descendre rapidement dans le référentiel du laboratoire). Cette vitesse importante génère de fort frottements qui s'opposent au mouvement du rivelet par rapport aux plaques. Ces frottements sont donc dirigés dans la direction opposée à la vitesse des points dans la direction z . Les frottements sont donc purement résistifs et l'onde est fortement atténuee. C'est la situation montrée sur la figure 5.5 (haut).

Dans un second temps, considérons une onde contrapropagative, c'est-à-dire se déplaçant vers le haut (dans la direction $-\hat{x}$) à la vitesse v_c , telle que $v_c > u_0$. Les plaques se déplaçant vers le haut à la vitesse u_0 , la vitesse totale du rivelet par rapport aux plaques est $-v_c + u_0 < 0$ (le rivelet est en train de remonter dans le référentiel du laboratoire). Cette vitesse négative génère des frottements qui s'opposent au mouvement du rivelet par rapport aux plaques. Ces frottements sont donc dirigés dans la direction opposée à la vitesse des points dans la direction z . Les frottements sont donc purement résistifs et l'onde est amortie. C'est la situation montrée sur la figure 5.5 (milieu).

Dans un dernier temps, considérons une onde contrapropagative, c'est-à-dire se déplaçant vers le haut (dans la direction $-\hat{x}$) à la vitesse v_c , mais cette fois-ci telle que $v_c < u_0$. Les plaques se déplaçant vers le haut à la vitesse u_0 , la vitesse totale du rivelet par rapport aux plaques est $-v_c + u_0 > 0$ (le rivelet est en train de descendre dans le référentiel du laboratoire). Cette vitesse positive génère des frottements qui s'opposent au mouvement du rivelet par rapport aux plaques. Ces frottements sont donc dirigés dans la même direction que la vitesse des points dans la direction z . Cette fois-ci, les frottements *accompagnent* le mouvement du rivelet et l'amplifient : si cette amplification est suffisante pour dépasser les frottements visqueux de volume, l'instabilité est déclenchée. C'est la situation montrée sur la figure 5.5 (bas).

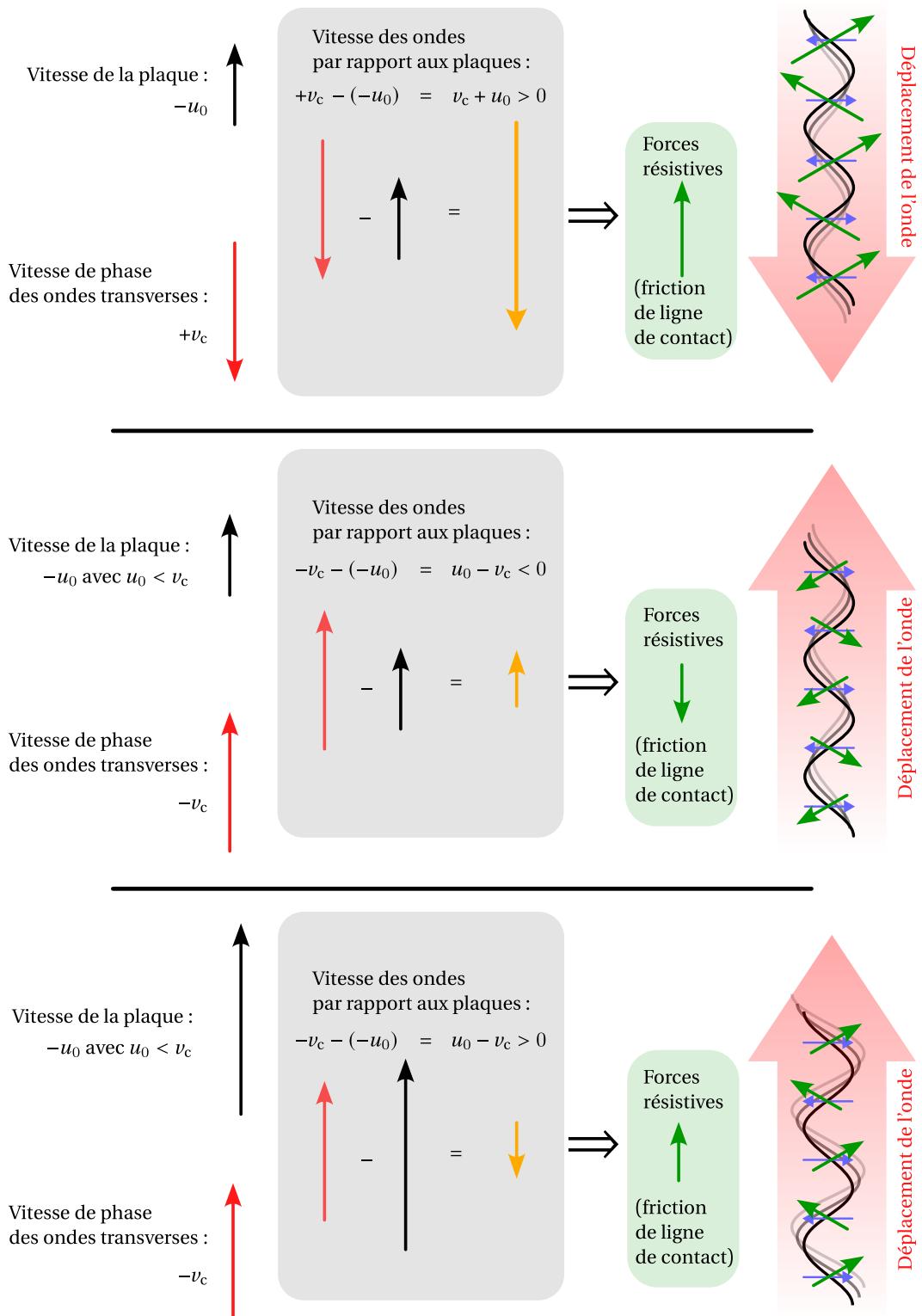


FIGURE 5.5 – Schéma illustratif du mécanisme d'instabilité (pour $\mu_{cl} \gg \mu$). À droite l'onde est dessinée dans le référentiel advecté à u_0 . Dans la zone grise, on calcule la vitesse de l'onde dans le référentiel des plaques. Les forces exercées sont en vert, les flèches bleues représentent la vitesse instantanée des points matériels dans le référentiel advecté. (haut) : Onde propagative. Les forces de frottement sont importantes et dirigées dans la direction opposée à la vitesse des points, l'onde est donc fortement amortie. (milieu) : Onde contrappropagative, $v_c > u_0$. Les forces de frottement sont dirigées dans la direction opposée à la vitesse des points, l'onde est amortie (bas) : Onde contrappropagative, $v_c < u_0$. Les forces de frottement sont dirigées dans la même direction que la vitesse des points, l'onde est amplifiée.

5.2.4 Limites

Le principal problème soulevé par le critère (5.6) est le suivant : la quantité

$$\frac{\mu_{\text{tot}}}{\mu_{\text{cl}}/\sigma_0} = 1 + \frac{\sigma_0 \mu}{\mu_{\text{cl}}} \quad (5.13)$$

est indépendante de la longueur d'onde. Cela signifie donc qu'à partir du moment où le débit dépasse le débit seuil Q^* , l'écoulement se fait à une vitesse suffisamment élevée pour amplifier toutes les perturbations, de toutes les longueurs d'onde. Cela rappelle le cas de l'instabilité de Kelvin–Helmoltz, mais celle-ci est mitigée par des effets gravitaires, de tension de surface, et de viscosité, or aucun de ces mécanismes ne semble arrêter l'instabilité telle que nous l'avons mise en équation.

Pire encore, non seulement toutes les longueurs d'ondes sont amplifiées, mais elles le sont de manière indiscriminée. Dans le cas de l'instabilité capillaire de pincement de jet (instabilité de Rayleigh–Plateau) par exemple, toutes les perturbations de longueurs d'ondes supérieures au périmètre du jet sont amplifiées, mais le taux de croissance de l'amplification dépend de la fréquence, et il reste possible de trouver la longueur d'onde la plus instable (Eggers et Villermaux 2008).

Au contraire ici, la condition (5.6) implique non seulement un taux de croissance positif pour toutes les fréquences, mais de plus ce taux atteint un plateau avec la fréquence. Une manière de le voir mathématiquement est d'écrire, pour les grands nombres d'onde (petites longueurs d'onde) :

$$\delta^2 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} -4v_c^2 k^2 - 4iu_0 k \frac{\mu_{\text{cl}}}{\sigma_0} \approx \left(\frac{\mu_{\text{cl}} u_0}{\sigma_0 v_c} - 2ikv_c \right)^2 \quad (5.14)$$

$$\text{et donc } s \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_{\text{cl}} u_0}{\sigma_0 v_c} - \mu_{\text{tot}} \right) - ikv_c \quad (5.15)$$

Aux très grands k , le taux de croissance est une constante. Il n'y a donc pas de longueur d'onde caractéristique de croissance, et le modèle prédit l'amplification de modes de très petites longueurs d'ondes, qui ne sont pas observées en pratique : cela paraît insatisfaisant, il semble manquer un mécanisme de régulation aux faibles longueurs d'onde.

L'absence de sélection de longueurs d'ondes peut être confirmée en lisant la figure 5.6, qui présente des valeurs calculées numériquement du taux de croissance pour plusieurs ratios de vitesses u_0/v_c . Au-dessus du seuil, le taux de croissance de l'instabilité est toujours positif, et ne diminue pas aux grands nombres d'ondes, ce qui n'est pas physique.

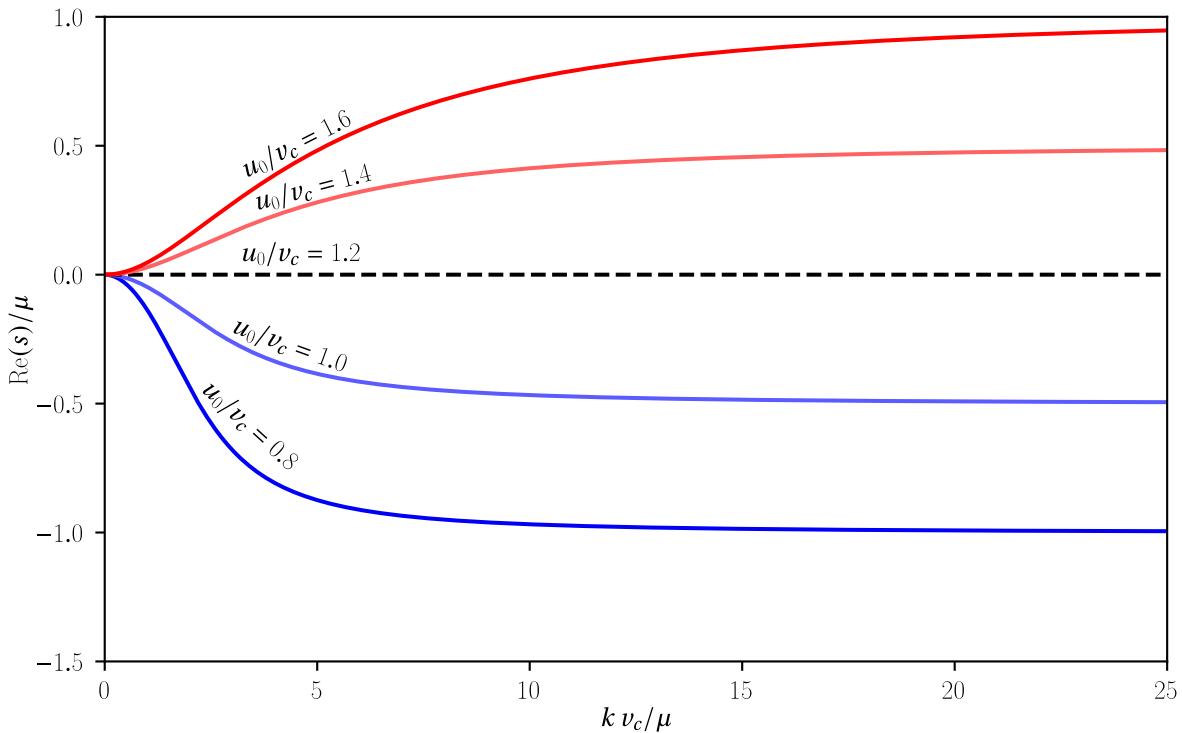


FIGURE 5.6 – Taux d'amplification $\text{Re}(s)$, donné par l'équation (5.5). On a pris $\mu_{\text{cl}}/(\mu \sigma_0) = 5$, le seuil d'instabilité donné par l'équation (5.6) est donc à $u_0/v_c = 1 + 1/5 = 1.2$ (représenté par une ligne noire tiretée).

5.3 Flexion visqueuse du rivelet

Nous proposons d'ajouter un nouvel ingrédient dans le modèle, qui permettra de régulariser le comportement théorique de l'instabilité aux petites longueurs d'onde : la flexion visqueuse.

5.3.1 Une « poutre liquide »

Le rivelet étant un objet fin et étendu, soumis à de faibles déformations, il se comporte donc comme une « poutre » liquide, au sens de la mécanique des milieux continus, dans le sens où il s'agit d'un objet étendu dans une direction (ici la direction verticale, x) dont la section transversale σ n'est pas modifiée par de faibles déformations. Essayons de comprendre ce que cela implique.

Flexion d'une poutre

De manière analogue à une poutre solide, le rivelet est soumis à différents efforts (d'origine visqueuse, puisque le rivelet est fluide, au lieu d'élastique si le rivelet était solide) lorsqu'il est déformé en flexion : il en résulte une force linéaire Y . Comme montré sur la figure 5.7 (gauche), cette force peut s'écrire $Y = \frac{\partial T}{\partial x}$, où T est l'effort tranchant induit dans la poutre, lui-même relié par la relation $T = -\frac{\partial C}{\partial x}$ à C , le moment fléchissant dû à la déformation (Soutif 1970).

À son tour, on peut exprimer C sous la forme $C = -\iint_{(\sigma)} \delta z \, dF$, où σ est une section du rivelet dans le plan (y, z) , δz correspond à la distance dans la direction z entre le centre du rivelet, équivalent à la fibre neutre, et le point considéré dans la section σ , enfin F est la force, normale à

la section, qui comprime ou allonge une fibre non neutre du rivelet de section $d\sigma$, comme montré sur la figure 5.7 (centre).

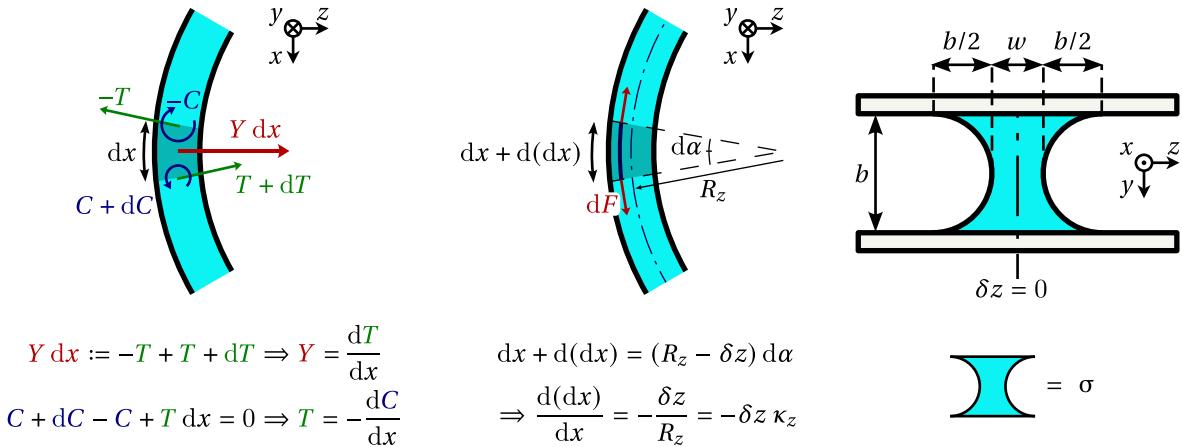


FIGURE 5.7 – (gauche) : La force $Y \, dx$ est définie comme la résultante des forces s'exerçant sur la portion de poutre dx . Un bilan des moments au centre de cette portion donne le lien entre l'effort tranchant T et le moment fléchissant C .
 (milieu) : La fibre neutre de la poutre (ligne discontinue) garde la même longueur, tandis que les autres fibres sont déformées (ici on montre un allongement).

Sous une déformation de flexion, une fibre non neutre, de longueur initiale dx et située à une distance δz du centre du rivelet, subit un allongement relatif (algébrique) $\frac{d(dx)}{dx} = -\frac{\delta z}{R_z}$ (figure 5.7, centre). Le rayon de courbure algébrique $R_z = \frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{\kappa_z}$ correspond alors à l'inverse de la courbure du chemin κ_z .

Résumons : la force de rappel sur le rivelet due à la flexion $Y \, dx$ peut donc s'exprimer en fonction du moment fléchissant C :

$$Y = -\partial_{xx} C \quad \text{avec} \quad C = - \iint_{(\sigma)} \delta z \, dF \quad (5.16)$$

où dF est la force due à la déformation relative des fibres non neutres $\frac{d(dx)}{dx} = -\delta z \kappa_z$. Il ne nous manque plus que la relation entre la force et l'allongement relatif afin de fermer le problème et d'obtenir l'expression de la force linéaire Y .

Analogie élasto-visqueuse

Dans le cas d'une poutre solide, la force dF exercée par le reste du solide est reliée à l'allongement relatif $\frac{d(dx)}{dx}$ par la loi de Hooke

$$dF = E \frac{d(dx)}{dx} \, d\sigma \quad (5.17)$$

$$= -E \kappa_z \delta_z \, d\sigma \quad (5.18)$$

où E est le module d'Young du matériau considéré. On constate finalement que le moment fléchissant est proportionnel à la courbure κ_z de la poutre. Dans le cas d'un milieu non-élastique, comme les fluides que l'on utilise ici, la loi de Hooke n'est évidemment pas valable.

Cependant, il est possible d'établir une analogie formelle entre les effets de l'élasticité dans les solides et ceux de la viscosité dans les liquides. La loi de Hooke peut s'écrire

$$\sigma_{ii} = E \varepsilon_{ii}, \quad (5.19)$$

où les σ_{ij} sont les composantes du tenseur des contraintes, et ε_{ij} celles du tenseur des déformations. Or, pour un fluide newtonien, on peut écrire

$$\sigma_{ii} = 2 \rho v \frac{d}{dt} \varepsilon_{ii}, \quad (5.20)$$

où $\frac{d}{dt} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ désigne la dérivée totale, qui rassemble une contribution locale et une contribution advective.

Il est donc légitime de « remplacer » E par $2 \rho v \frac{d}{dt}$, ce qui permet par exemple d'expliquer la flexion de filaments visqueux sous un effort de compression (Le Merrer, Quéré et Clanet 2012), le pliage de feuillets liquides (Suleiman et Munson 1981 ; Cruickshank et Munson 1981 ; Howell 1996 ; Ribe 2003) ou encore l'enroulement de filaments en chute libre (Ribe, Habibi et Bonn 2012)⁴.

Cette analogie fut repérée pour la première fois par Stokes 1845 : en redécouvrant les équations de la mécanique des fluides déjà obtenues auparavant par Poisson, il remarque qu'il peut obtenir celles des solides en faisant ce remplacement. Cette remarque est aussi faite cent ans plus tard par Rayleigh 1945.

Fait contre-intuitif : plutôt qu'une force de rappel proportionnelle à la courbure comme dans le cas des solides, la force obtenue pour une poutre de fluide est proportionnelle à la *dérivée temporelle* de la courbure (Buckmaster 1973 ; Buckmaster, Nachman et Ting 1975 ; Ribe, Habibi et Bonn 2006 ; Le Merrer, Quéré et Clanet 2012).

Force de flexion sur le rivelet

En suivant cette approche, nous écrivons ainsi $dF = -2 \rho v \frac{d\kappa_z}{dt} \delta z \, d\sigma$, d'où vient

$$C = 2 \rho v \frac{d\kappa_z}{dt} \iint_{(\sigma)} (\delta z)^2 \, d\sigma \quad (5.21)$$

$$= 2 I_y \rho v \frac{d\kappa_z}{dt} \quad \text{avec} \quad I_y := \iint_{(\sigma)} (\delta z)^2 \, d\sigma \quad (5.22)$$

où I_y est le moment quadratique axial d'une section transverse du rivelet, calculé par rapport à un axe dirigé selon y et passant par le centre du rivelet.

Ainsi, le rivelet subit-il une force par unité de longueur

$$Y = -\partial_{xx} C \quad (5.23)$$

$$= -2 \rho v I_y \partial_{xx} (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \kappa_z \quad (5.24)$$

$$= -\rho \mu B \partial_{xx} (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \kappa_z \quad \text{avec} \quad B := 24 b^2 I_y \quad (5.25)$$

4. Citons aussi Mahadevan, Ryu et Samuel 1998, dont nous apprécions tout particulièrement l'incroyable figure 2.

due à la flexion. Le calcul exact de la valeur de B et du moment quadratique axial I_y est présenté dans l'annexe 5.C.

5.3.2 Méandrage d'un rivelet soumis à la flexion

Il faut donc, pour prendre en compte l'effet de la flexion visqueuse, ajouter au membre de droite de l'équation maîtresse de la dynamique du rivelet, c'est à dire l'équation (2.2), le nouveau terme

$$-\mu B \partial_{xx}(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \kappa_z \mathbf{n}. \quad (5.26)$$

Ce terme étant proportionnel au coefficient de Darcy μ , il ne change pas les résultats des chapitres précédents partout où les frottements sont négligés, mais il apporte une dépendance en longueur d'onde dans l'atténuation des ondes sinueuses présentée au chapitre 4, qui a été négligée et qu'il faudrait donc en toute rigueur prendre en compte : ce travail devra être mené dans les études à venir.

Intéressons-nous maintenant à l'effet de la flexion visqueuse sur le méandrage.

Critère d'instabilité

L'équation linéarisée (5.1) sur laquelle nous nous sommes appuyés pour dériver la condition d'instabilité est devenue

$$(\partial_t + u_0 \partial_x)^2 z_1 = -\mu (\partial_t + u_0 \partial_x) z_1 + \frac{\Gamma}{\sigma_0} \partial_{xx} z_1 - \frac{\mu_{cl}}{\sigma_0} \partial_t z_1 - \mu \frac{B}{\sigma_0} \partial_{xxxx} (\partial_t + u_0 \partial_x) z_1. \quad (5.27)$$

Les calculs de la section 5.2.2 peuvent donc être repris intégralement, à condition d'utiliser la nouvelle expression de l'atténuation visqueuse totale :

$$\mu_{tot} := \mu \left(1 + \frac{\mu_{cl}}{\mu \sigma_0} + \frac{B}{\sigma_0} \partial_{xxxx} \right) = \mu \left(1 + \frac{\mu_{cl}}{\mu \sigma_0} + \frac{B}{\sigma_0} k^4 \right). \quad (5.28)$$

La flexion visqueuse a ainsi pour effet net d'augmenter la dissipation aux petites longueurs d'onde, ce qui résout le problème de l'amplification indiscriminée aux k arbitrairement grands : le critère d'instabilité (5.6) est inchangé, mais il s'exprime maintenant :

$$\frac{u_0}{v_c} > \frac{\mu_{tot}}{\mu_{cl}/\sigma_0} = 1 + \frac{\mu \sigma_0}{\mu_{cl}} + \frac{\mu B}{\mu_{cl}} k^4. \quad (5.29)$$

Le critère d'instabilité dépend donc explicitement de la longueur d'onde. Comme le montre la figure 5.8, sur laquelle nous avons représenté le taux de croissance en prenant en compte l'effet de la flexion, nous avons donc fait apparaître une longueur de coupure, en-dessous de laquelle les perturbations sinueuses ne sont plus amplifiées!

Pour une condition donnée (c'est-à-dire, pour un ratio u_0/v_c fixé), le domaine de nombres d'ondes pour lesquels l'instabilité se développe est donc fini, c'est ce qui est montré sur la figure 5.9, sur laquelle on a montré en échelle de couleurs la partie réelle du taux de croissance de l'instabilité,

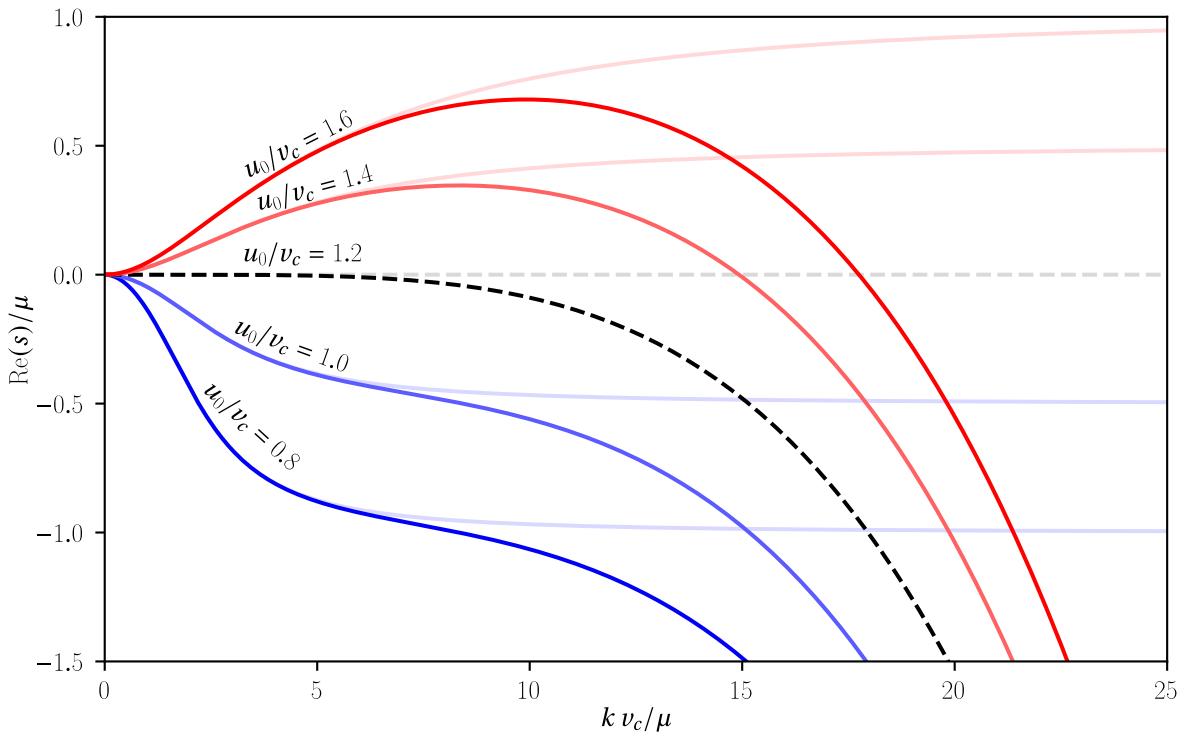


FIGURE 5.8 – Taux d'amplification $\text{Re}(s)$, donné par l'équation (5.5), en prenant en compte la flexion visqueuse. On a pris $\mu_{\text{cl}}/(\mu \sigma_0) = 5$, le seuil d'instabilité à nombre d'onde nul ($k = 0$) donné par l'équation (5.29) est donc à $u_0/v_c = 1 + 1/5 = 1.2$ (représenté par une ligne noire tiretée). Les taux d'amplification sans prise en compte de la flexion sont montrés en transparence.

en fonction du nombre d'onde et du paramètre u_0/v_c .

Remarquons par ailleurs que pour $k = 0$, on a toujours $s = 0$ et donc $\text{Re}(s) = 0$: le mode $k = 0$ est un mode neutre (*neutral mode*) du système. Cela est tout sauf étonnant : l'ajout d'une composante à $k = 0$ correspond à la transformation $z \rightarrow z + z_0$, qui laisse invariante le système et n'a aucune raison physique d'être atténuée ou amplifiée.

Si on suppose les paramètres de l'expérience (u_0, v_c, B) fixés, alors l'ajout du nouveau terme dans l'équation fait apparaître deux nombres d'ondes/longueurs d'ondes caractéristiques : il y a d'abord le vecteur d'onde pour lequel l'amplification est maximale k^{\max} , défini par

$$\left. \frac{d \text{Re}(s)}{dk} \right|_{k=k^{\max}} = 0 \quad (5.30)$$

et ensuite le vecteur d'onde k_{lim} au-delà duquel une perturbation n'est plus amplifiée

$$\text{Re}(s[k = k_{\text{lim}}]) = 0 \quad \text{donné par} \quad k_{\text{lim}} = \sqrt[4]{\frac{\mu_{\text{cl}}}{\mu B} \left(\frac{u_0}{v_c} - 1 - \frac{\mu \sigma_0}{\mu_{\text{cl}}} \right)}. \quad (5.31)$$

On s'attend *a priori*, par analogie à ce qui est observé pour presque toutes les autres instabilités hydrodynamiques, à ce que le vecteur d'onde le plus instable, k^{\max} , soit celui qui dicte la longueur d'onde de l'instabilité. Pour les paramètres expérimentaux réalistes, par exemple ceux utilisés pour recueillir les données de la figure 5.4, on trouve $\lambda^{\max} = 2\pi/k^{\max} \approx (8 \pm 1)$ mm, tandis que la

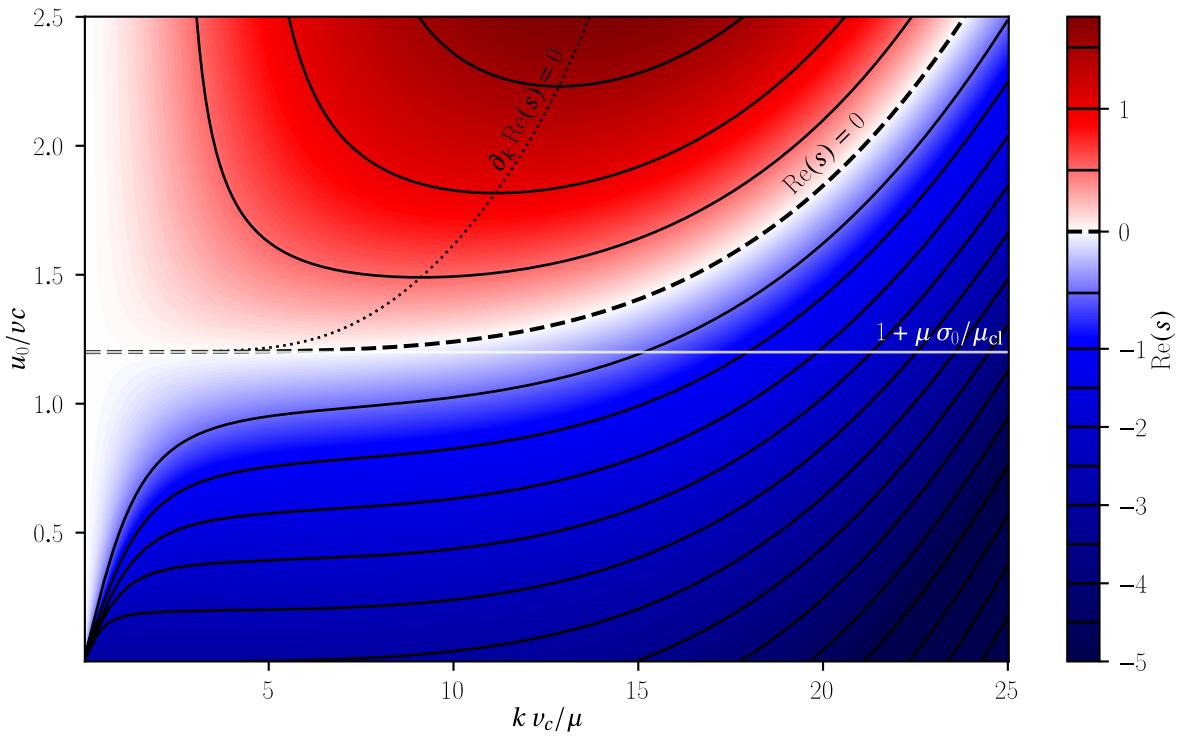


FIGURE 5.9 – Taux d'amplification $\text{Re}(s)$ (en échelle de couleurs), donné par l'équation (5.5), en prenant en compte la flexion visqueuse. On a pris $\mu_{\text{cl}}/(\mu \sigma_0) = 5$, le seuil d'instabilité à nombre d'onde nul ($k = 0$) donné par l'équation (5.29) est donc à $u_0/v_c = 1 + 1/5 = 1.2$. L'écartement de la cellule est pris à $b = 0.6$ mm et l'épaisseur du rivelet à $\sigma_0/b = 0.2$ mm. Le seuil de l'instabilité en représenté par une ligne noire tiretée. Le vecteur d'onde à amplification maximale est représenté par une ligne fine pointillée. Les lignes de niveaux pour le taux de croissance sont en traits noirs pleins.

longueur d'onde caractéristique de l'instabilité effectivement mesurée est plutôt $\lambda^* \approx (15 \pm 3)$ mm. Nous trouvons le bon ordre de grandeur, mais les mesures restent incompatibles : nous attribuons cela à la très forte influence des non-linéarités dans la dynamique du rivelet.

L'intérêt principal de notre résultat à ce stade est donc plutôt qualitatif : nous expliquons physiquement la raison pour laquelle des méandres très resserrés, de faible longueur d'onde, ne sont jamais observés.

Au-delà de cela, nous espérons qu'en disposant maintenant d'une théorie linéaire « raisonnable », il sera possible pour des études futures d'établir des modèles non-linéaires puissants qui permettront de mieux rendre compte des observations.

5.4 Effet du forçage acoustique

Dans cette section, nous explorons l'effet d'une perturbation acoustique localisée sur le rivelet. Nous avons expliqué au chapitre 1 que nous avions conçu notre dispositif expérimental de manière à pouvoir imposer une perturbation acoustique au rivelet. Au chapitre 4, nous avons utilisé un forçage homogène à haute fréquence (par rapport aux fréquences caractéristiques exhibées par le rivelet en méandrage spontané, c'est à dire plus de 10 Hz) pour observer une instabilité couplant ondes longitudinales et transverses. Nous souhaitons maintenant gagner en

compréhension sur le phénomène de méandrage spontané : nous allons donc utiliser un forçage ayant des caractéristiques spatio-temporelles plus proches de celles que le système présente spontanément.

Pour ce faire, nous utilisons un forçage localisé, en introduisant des pièces spéciales à l'intérieur de la cellule pour ne déplacer le rivelet que très localement (sur une échelle de l'ordre du centimètre), comme décrit à la section 1.1.3. Nous optons aussi pour des fréquences d'excitation proche des fréquences naturelles du système, en deçà de 10 Hz.

La première chose que nous avons essayé de faire est de déclencher l'instabilité « manuellement », c'est-à-dire de forcer le rivelet dans un régime juste en-dessous du seuil de méandrage spontané. Cela consisterait à créer des perturbations transverses dans un régime où elles sont peu amorties et par exemple à mesurer leur taux d'atténuation, ou encore à observer une éventuelle sous-criticalité du méandrage. Nos tentatives dans ce sens se sont toutes révélées infructueuses, ce que nous attribuons au fait que la localisation de la perturbation ne soit pas assez forte pour créer des ondes qui puissent survivre en dehors de la zone excitée. Nous pensons qu'une voie plus prometteuse pour aller dans cette direction serait de faire des expériences de trempe (*quenching*), comme celles décrites en 4.B, proche du seuil de méandrage : paradoxalement, une excitation homogène en espace amène le rivelet à adopter une forme plus proche d'un méandre spontané qu'une excitation à peu près localisée, comme celle à laquelle nous avons accès.

Pour les données montrées dans cette section, nous sommes donc toujours dans un régime où le rivelet méandre spontanément (débit volumique $Q = (68 \pm 1) \text{ mm}^3/\text{s}$), et le forçage est effectué 20 mm avant la zone de déclenchement des méandres spontanés. Nous utilisons toujours un forçage rigoureusement sinusoïdal.

5.4.1 Déclencher et contrôler les méandres

Dans un premier temps, nous essayons de forcer le rivelet à une fréquence temporelle proche de celles générées par le méandrage spontané. Afin de connaître ces fréquences, nous utilisons des représentations comme celle montrée sur la figure 5.10 (a'). Pour obtenir cette figure nous calculons, pour chaque emplacement sur l'axe vertical x_0 , la transformée de Fourier de la fonction du temps $z(x = x_0, t)$, et nous représentons sa densité spectrale de puissance en échelle de couleur. Nous voyons ainsi comment évoluent, en fonction de l'espace, les composantes du signal $z(x, t)$ en termes de fréquences temporelles.

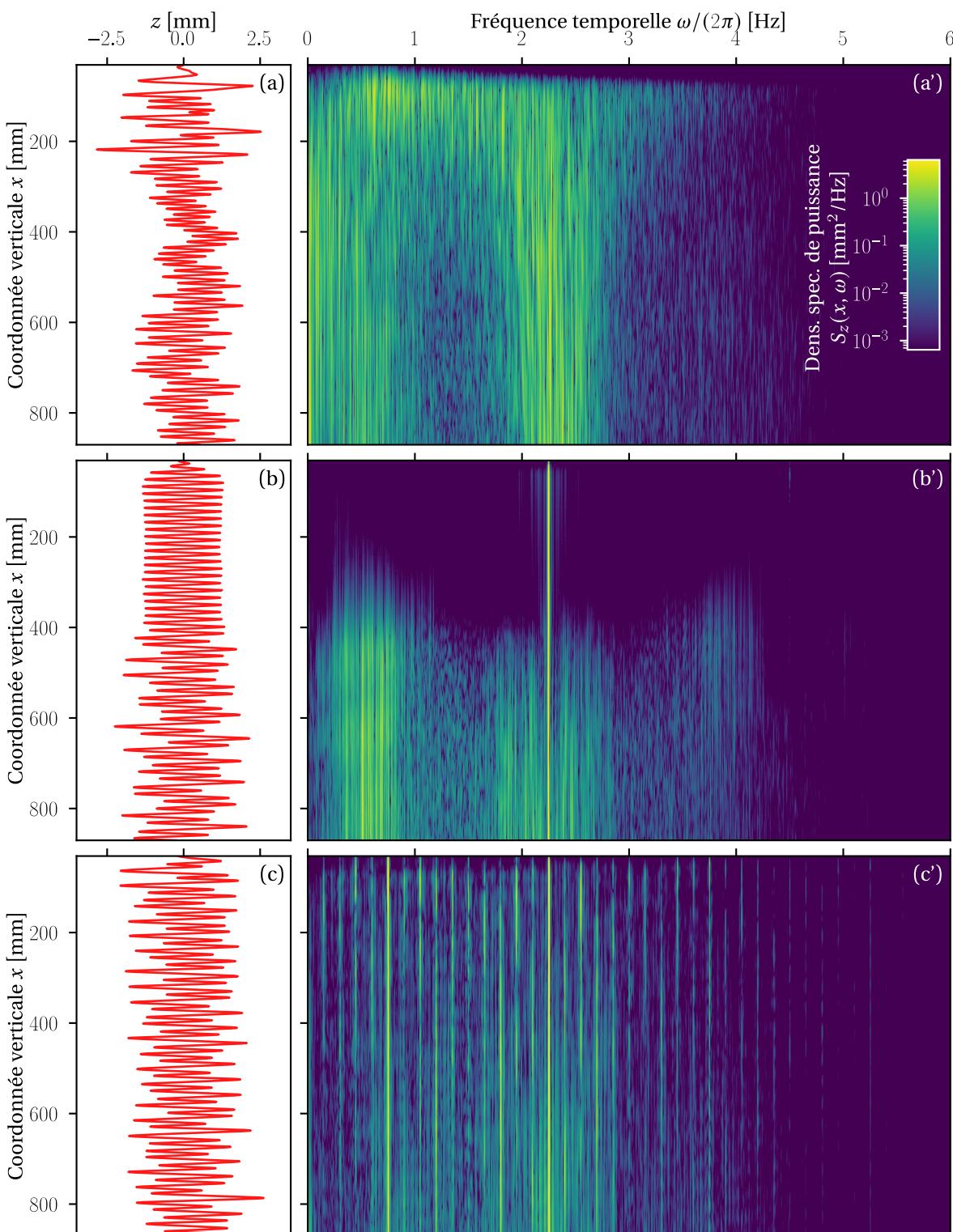


FIGURE 5.10 – (gauche) Position du rivelet à un instant donné en fonction de l'espace. (droite) Spectre de puissance de la transformée de Fourier en temps de z (en échelle de couleur), en fonction de la position spatiale x (axe des ordonnées) et de la fréquence f (axe des abscisses). À chaque position $x = x_0$, on calcule le spectre de puissance de $z(x = x_0, t)$, c'est à dire $\hat{z}(x = x_0, \omega)$. Première ligne : pas de forçage; deuxième ligne : forçage à 2,25 Hz, troisième ligne : forçage à 0,75 Hz. Transformées de Fourier réalisées avec un fenêtrage de Hann. Épaisseur de la cellule $b = (0,58 \pm 0,02)$ mm, débit volumique $Q = (68 \pm 1)$ mm^3/s .

Pour mieux comprendre, analysons les figures 5.10 (a) et (a'). Sur le graphe 5.10 (a), nous voyons tracée de la position du rivelet à un instant donné. En haut de la cellule, aux faibles x , c'est-à-dire proche de l'injection (qui est en $x = 0$, non montré sur le graphe), le signal a une amplitude faible. Puis le rivelet se met à méandrer, son parcours devient désordonné, il fait des excursions de grande amplitude. Enfin, vers le bas de la cellule ($x > 500$ mm), sans être périodique le rivelet est plus régulier : on croit distinguer une vague période spatiale caractéristique, qui se superpose à un fond basse fréquence plus désordonné (ceci est compatible avec les résultats que nous avons déjà présentés sur la figure 5.4, et ceux que nous montrons plus bas sur la figure 5.15). Comme dans notre système les méandres sont toujours advectés vers le bas, nous pouvons espérer voir la signature des observations que nous venons de faire sur le plan spatial (zone calme, puis naissance des méandres désordonnés, puis présence d'oscillations avec une taille caractéristique) en observant cette fois le signal temporel (et donc fréquentiel).

En observant maintenant l'image 5.10 (a'), nous retrouvons toutes les caractéristiques vues précédemment. En haut de la cellule, on voit une bande noire, indiquant une absence de signal : le rivelet est droit. Puis en descendant nous voyons une large bande de fréquence portant une amplitude importante : ce signal correspond au rivelet en train de méandrer et de se mouvoir en adoptant une grande diversité de formes. Enfin dans la partie basse de la cellule, nous voyons que le spectre temporel paraît plus ordonné : il y a du signal autour d'une fréquence caractéristique, qui est sommé à un bruit de fond à basse fréquence.

Il est maintenant légitime de se demander quelles sont les fréquences de forçage auxquelles il serait intéressant de soumettre le rivelet. Pour trouver une réponse, nous allons chercher quelles sont les fréquences particulières pour les méandres naturels décomposés sur la figure 5.10 (a'). Tout d'abord, au tout début de la zone d'apparition des méandres, une première fréquence semble émerger avant les autres, de l'ordre de 0,75 Hz, avant que le spectre ne remplisse de manière continue. Ensuite, dans la zone ordonnée (bas de la cellule, donc bas de l'image), le signal est plus régulier et semble présenter une composante importante autour de 2,25 Hz. Nous allons donc investiguer les effets d'un forçage à 2,25 Hz (figures (b) et (b')) et à 0,75 Hz (figures (c) et (c')).

Sur les figures 5.10 (b) et (b'), nous présentons les mêmes visualisations que pour les figures (a) et (a') (position instantanée à gauche, spectre fréquentiel en fonction de l'espace à droite), mais cette fois-ci pour un rivelet subissant un forçage de fréquence 2,25 Hz à la position $x = 20$. Le comportement du rivelet est alors radicalement différent : il est fortement influencé par le forçage qu'il a subi !

Sur l'instantané de la figure 5.10 (b), nous voyons que le rivelet adopte des oscillations parfaitement régulières à une certaine longueur d'onde, qui croissent d'abord avant de se stabiliser en amplitude. À partir de la moitié de la hauteur de la cellule ($x \approx 400$ mm), à ces oscillations se superposent des modulations plus lentes. C'est aussi ce qui ressort de la 5.10 (b') : le rivelet commence par effectuer des oscillations extrêmement régulières à la fréquence de forçage (2,25 Hz) et, plus bas, d'autres composantes fréquentielles apparaissent à basse fréquence.

Nous sommes donc en mesure, en excitant le rivelet proche d'une fréquence qu'il présente naturellement, à le faire « laser », c'est à dire, par analogie avec un LASER monochromatique, à lui faire adopter un régime de méandrage régulier dont la fréquence est contrôlée par le forçage. Ce

régime n'est cependant pas stable au temps long : loin du forçage, le désordre réapparaît.

Sur les figures 5.10 (c) et (c'), on observe que pour le forçage à 0,75 Hz le rivelet ne « lase » pas : si le signal fréquentiel est beaucoup plus structuré que dans le cas du méandrage spontané, il n'est pas harmonique comme dans le cas précédent. Pour comprendre d'où viennent toutes les fréquences visibles sur l'image 5.10 (c'), il nous faut nous intéresser à ce qui se passe proche de la zone où s'effectue le forçage, ce que nous pouvons faire en observant la figure 5.11.

Sur la figure 5.11, nous représentons les données sur le même format que la figure précédente (instantanés à gauche, spectre de puissance fréquentielle en fonction de l'espace à droite), et pour les mêmes conditions (pas de forçage en haut, forçage à 2,25 Hz au milieu et à 0,75 Hz en bas), mais cette fois-ci nous nous intéressons à la zone proche de l'origine du rivelet (en $x = 0$), qui contient la zone de forçage (en $x \approx 20$).

En 5.11 (a) et (a') nous pouvons observer la zone de naissance des méandres : ils sont créés à partir d'une fréquence d'origine de l'ordre de 0,5 Hz, et le spectre, qui est continu, s'élargit rapidement à la fois vers les basses et les hautes fréquences, générant des méandres désordonnés à une variété d'échelles différentes.

En observant l'image 5.11 (b'), on peut constater que le forçage n'est pas parfaitement localisé : même si l'action des haut-parleurs est la plus forte autour de $x = 20$ mm, le rivelet est déplacé même en $x = 0$. On peut aussi confirmer le fait que l'excitation soit bien sinusoïdale : même à -80 dB d'atténuation (quatre décades), on ne voit pas trace d'harmonique de rang supérieur à un.

En s'intéressant à la figure 5.11 (c'), on peut voir la raison pour laquelle nous observions beaucoup d'harmoniques en aval de l'excitation : au fur et à mesure que l'on s'éloigne (vers le bas) du lieu de l'excitation, qui impose au rivelet un mouvement sinusoïdal, nous pouvons voir que le système mute de manière à générer spontanément des composantes à des fréquences commensurables avec la fréquence de forçage.

À partir du signal à 0,75 Hz, que nous appelons harmonique 1, une multitude d'autres composantes sont créées au fur et à mesure du temps. Nous annotons certaines de ces harmoniques par une fraction représentant la fraction de leur fréquence par rapport à la fréquence de forçage. On trouve d'abord (par ordre d'intensité du signal) des harmoniques dont la fréquence est un multiple entier de la fréquence de forçage. On note que les harmoniques de rangs impairs (3, 5, 7, ...) sont particulièrement intenses comparées aux harmoniques de rang pair. On trouve ensuite des sous-harmoniques, espacées de $1/5^e$ de la fréquence d'excitation.

Nous ne comprenons pas encore l'organisation des harmoniques et la répartition de l'énergie parmi elles montrées par ces données très récentes. Elles sont générées par un mécanisme non-linéaire qu'il faudrait investiguer.

La multiplication rapide d'harmoniques et de sous-harmoniques à partir d'une fréquence de départ donne une idée de pourquoi les méandres naturels apparaissent si chaotiques⁵

5. Ce mot n'est pas choisi au hasard : l'augmentation rapide du nombre d'harmoniques avec la distance au point de forçage nous semble (peut-être par erreur) évoquer les cascades de sous-harmoniques qui constituent une « route vers le chaos » en théorie des systèmes dynamiques (Bergé, Pomeau et Vidal 1988 ; Mullin 1995 ; Strogatz 2007).

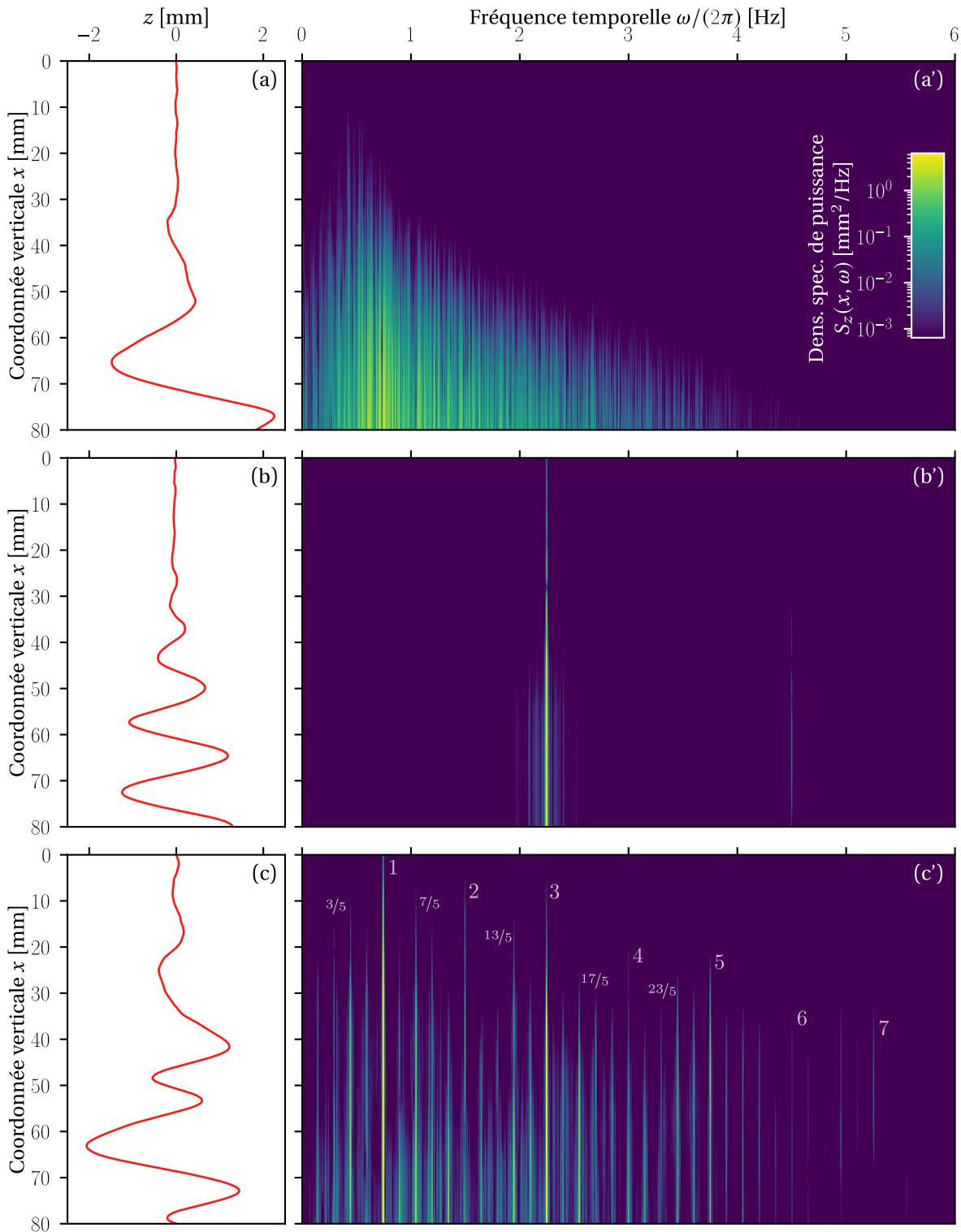


FIGURE 5.11 – (gauche) Position du rivelet à un instant donné en fonction de l'espace. (droite) Spectre de puissance de la transformée de Fourier en temps de z (en échelle de couleur), en fonction de la position spatiale x (axe des ordonnées) et de la fréquence f (axe des abscisses). À chaque position $x = x_0$, on calcule le spectre de puissance de $z(x = x_0, t)$, c'est à dire $\hat{z}(x = x_0, \omega)$. Mêmes conditions que la figure 5.10 : Première ligne : pas de forçage; deuxième ligne : forçage à 2,25 Hz, troisième ligne : forçage à 0,75 Hz. Transformées de Fourier réalisées avec un fenêtrage de Hann. Épaisseur de la cellule $b = (0,58 \pm 0,02)$ mm, débit volumique $Q = (68 \pm 1)$ mm^3/s .

Nous avons donc réussi, en excitant le rivelet à des fréquences de l'ordre de ses fréquences caractéristiques, à le faire laser à une fréquence d'équilibre (méta)stable d'une part, et à générer une suite d'harmoniques engendrant un spectre très riche d'autre part.

On peut maintenant se poser la question : que se passe-t-il si on essaie de forcer le rivelet à une fréquence éloignée de ses fréquences naturelles ?

5.4.2 Atténuer les méandres

Nous choisissons pour notre excitation « hors du spectre naturel » une fréquence de 5 Hz. Sur les spectres précédents, cette fréquence n'était associée à aucun signal, ou à des amplitudes très faibles ; dans le même temps, nous souhaitons une fréquence à laquelle le rivelet peut réagir en formant des méandres comparables aux méandres naturels : un forçage important à plus d'une dizaine de hertz déclencherait l'instabilité en collier de perles que nous avons traitée au chapitre 4, et dont la phénoménologie est entièrement différente.

Les résultats, sur le même format que pour les figures 5.10 et 5.11, de l'excitation à 5 Hz sont visibles sur la figure 5.12. En haut ((a) et (a')), on présente une expérience dénuée de forçage, à fin de comparaison. Au milieu ((b) et (b')), on a appliqué un forçage de faible amplitude et en bas ((c) et (c')), un forçage de plus grande amplitude.

Dans le cas du forçage à faible amplitude, on peut voir sur la figure 5.12 (b) que l'effet principal est un retard du déclenchement de l'instabilité de méandrage spontané. Cela est à contraster par rapport au cas précédent, où nous favorisions l'apparition des méandres : sur la figure 5.11, on voit qu'un des effets du forçage est de diminuer la longueur d'apparition des perturbations ; de manière analogue à ce qui est observé dans le cas d'un film coulant le long d'une fibre, et soumis à un forçage périodique de fréquence comparable à la fréquence la plus instable (Duprat, Ruyer-Quil et Giorgiutti-Dauphiné 2009).

Au contraire, en appliquant un forçage à une fréquence « trop grande », nous avons décalé la zone où les méandres naissent, et nous avons ainsi augmenté la longueur d'apparition de l'instabilité.

Que se passe-t-il maintenant si nous augmentons encore l'amplitude du forçage ? Le résultat, visible sur les figures 5.12 (c) et (c'), est que le rivelet se met alors à suivre la fréquence du forçage, en gardant une amplitude faible. Comme pour le forçage à 2,25 Hz, le système « lase » à la fréquence imposée, mais cette fois l'amplitude des perturbations est très faible, un ordre de grandeur en-dessous de l'amplitude des méandres naturels, ou forcés à une fréquence proche des fréquences exhibées spontanément.

Ce verrouillage en fréquence du rivelet sur le forçage surprend par sa robustesse : alors que le forçage est localisé, n'étant efficace que sur une taille de l'ordre du centimètre tout en haut de la cellule, le rivelet reste bloqué sur un mode oscillant à 5 Hz sur toute sa hauteur, soit à peu près un mètre (modulo de faibles modulations). Ce verrouillage traduit donc l'existence d'un état stable, ou métastable, qui n'est pas atteint naturellement et dont le bassin d'attraction est donc limité.

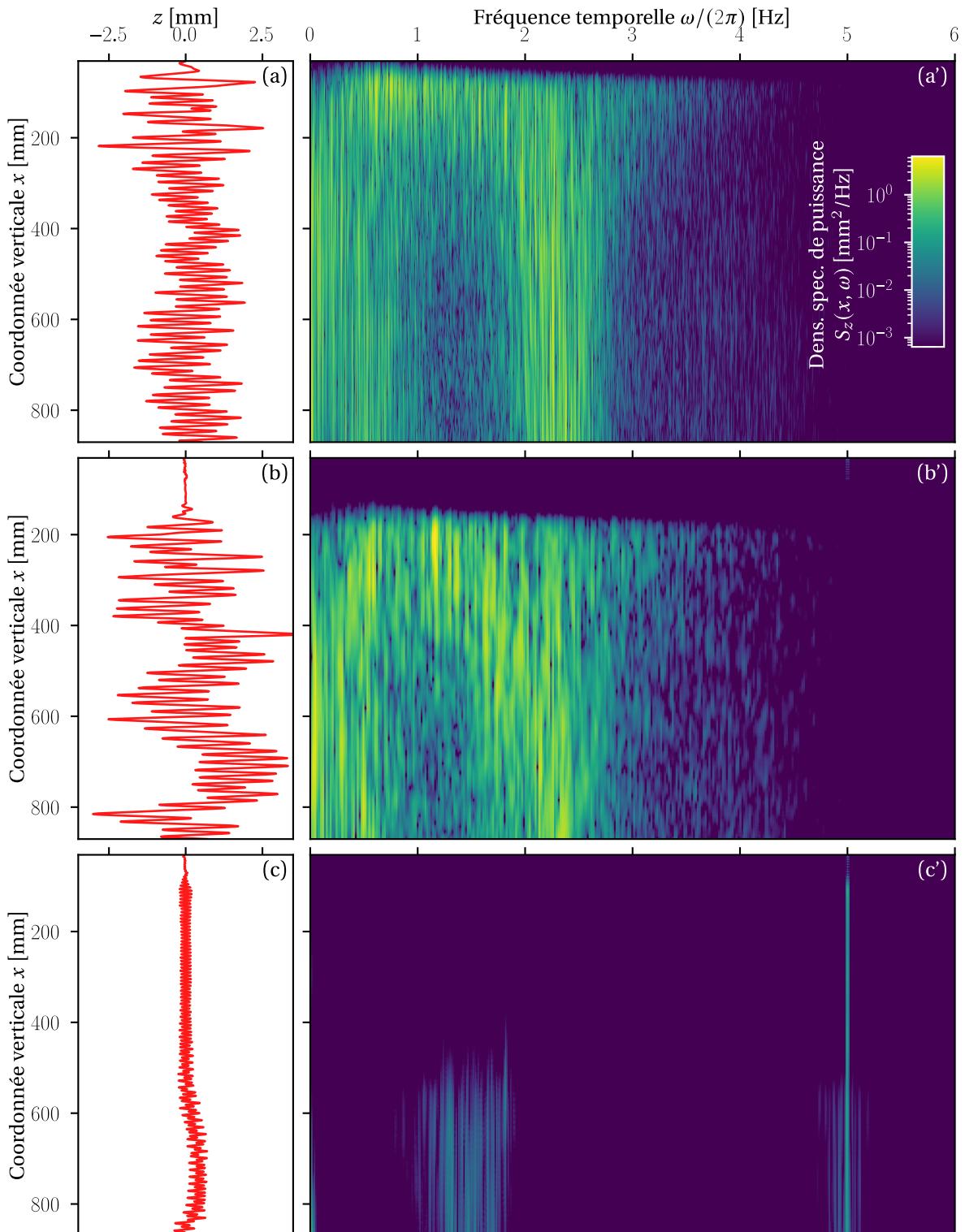


FIGURE 5.12 – (gauche) Position du rivelet à un instant donné en fonction de l'espace. (droite) Spectre de puissance de la transformée de Fourier en temps de z (en échelle de couleur), en fonction de la position spatiale x (axe des ordonnées) et de la fréquence f (axe des abscisses). À chaque position $x = x_0$, on calcule le spectre de puissance de $z(x = x_0, t)$, c'est à dire $\hat{z}(x = x_0, \omega)$. Première ligne : pas de forçage (même condition que la fig. 5.10 (haut)); deuxième ligne : forçage à 5 Hz, amplitude 25,8 μm , troisième ligne : forçage à 5 Hz, amplitude 26,2 μm . Transformées de Fourier réalisées avec un fenêtrage de Hann. Épaisseur de la cellule $b = (0,58 \pm 0,02)$ mm, débit volumique $Q = (68 \pm 1)$ mm^3/s .

Attardons-nous un instant sur le forçage à relativement haute fréquence en faisant une dernière remarque : la transition depuis le régime où la longueur d'apparition est augmentée, vers le régime où elle disparaît et où tout le système s'accorde sur le forçage, est extrêmement acérée (*sharp*).

Pour l'illustrer, nous montrons sur la figure 5.13 et sur la vidéo 5.3 des instantanés (ou des images expérimentales sur la vidéo) du rivelet pour cinq amplitudes de forçage différentes. Sur la figure (a), tout à gauche, il n'y a pas de forçage : les méandres se déclenchent au bout d'une certaine longueur d'apparition. Juste à gauche, sur la figure (b), nous appliquons un forçage à 5 Hz peu intense, et cette longueur d'apparition est repoussée vers le bas d'environ 70 mm. Pour quantifier l'intensité du forçage, nous mesurons sur la vidéo l'amplitude du mouvement du rivelet, à la fréquence de forçage, au niveau de la ligne médiane des haut-parleurs. Pour la figure 5.13 (b), cette amplitude est de 19,1 μm . On augmente ensuite le forçage sur la figure (c), où la longueur d'apparition est encore une fois augmentée par rapport au cas précédent. Le forçage correspond alors à un déplacement de 25,8 μm d'amplitude.

Pour passer de la figure 5.13 (c) à (d), nous n'augmentons le forçage que de 1 %, passant d'une amplitude de 25,8 μm à 26,2 μm . Pourtant, le changement de régime est complet et le rivelet passe d'un état de méandrage retardé de quelques centimètres à un état verrouillé sur le forçage sur une très longue distance.

En augmentant encore le forçage, figure 5.13 (e), ou bien à droite sur la vidéo 5.3, le système reste verrouillé sur l'excitation. Comme cette dernière est plus intense, le régime établi pour lequel l'amplitude reste stable est atteint plus rapidement.

Vidéo 5.3 : Influence de l'amplitude du forçage.
[\(en savoir plus\)](#)



Nous ne connaissons pas beaucoup de systèmes expérimentaux exhibant des transitions aussi franches entre deux états séparés par des paramètres expérimentaux aussi proches. Pour terminer sur ce point, permettons-nous de remarquer que le mouvement du rivelet en réponse au forçage, à peine visible sur les images expérimentales de la vidéo 5.3, est d'amplitude très faible, à peine quelques dizaines de micromètres. Un pixel de la vidéo correspondant à 0,470 mm, une amplitude de 20 μm correspond à moins d'un vingtième de pixel. Notre capacité à mesurer de mouvements du rivelet d'amplitude aussi faible, avec une précision en-dessous de 1 %, rend compte de la fiabilité de notre méthode de repérage (décrise à la section 1.5).

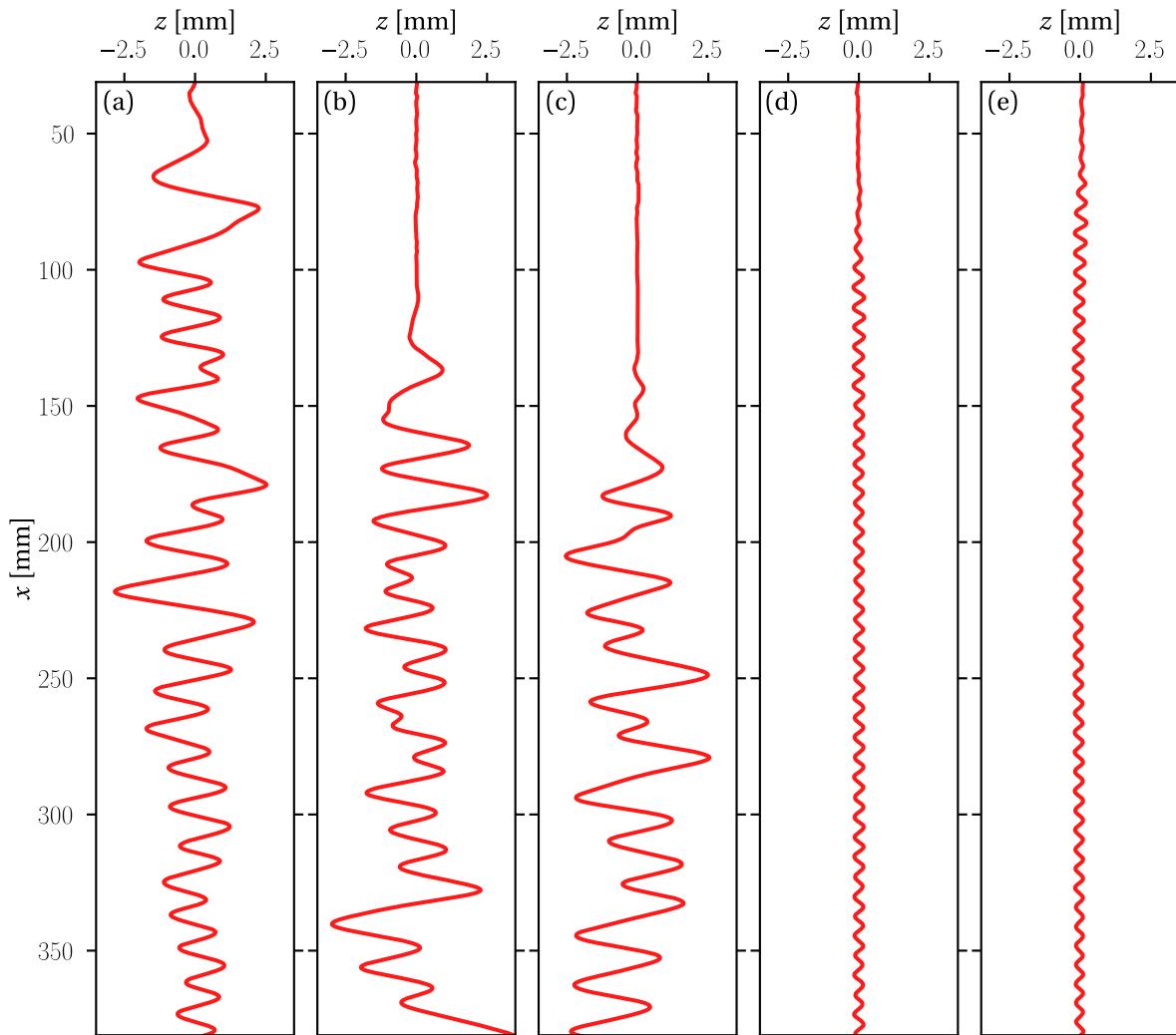


FIGURE 5.13 – Chemin du rivelet (en aval du forçage) à un instant quelconque. Intensité du forçage (amplitude du mouvement du rivelet au niveau des haut-parleurs à la fréquence d'excitation) : (a) Pas de forçage ($< 0,5 \mu\text{m}$), (b) ($19,1 \mu\text{m}$), (c) ($25,8 \mu\text{m}$), (d) ($26,2 \mu\text{m}$), (e) ($122 \mu\text{m}$). Épaisseur de la cellule $b = (0,58 \pm 0,02) \text{ mm}$, débit volumique $Q = (68 \pm 1) \text{ mm}^3/\text{s}$.

Conclusion du chapitre 5

Au cours de ce chapitre, nous sommes revenus sur l'instabilité de méandrage spontané : en commençant par la définir et par la décrire, en la replaçant dans le contexte des instabilités hydrodynamiques. Nous avons montré comment il est possible de comprendre et de quantifier l'évolution de ce système dont le comportement naturel est complexe : au bout d'une certaine longueur d'apparition, le rivelet se déstabilise, formant des méandres exhibant une grande diversité d'amplitudes et de fréquences temporelles et spatiales. Une forme d'ordre émerge ensuite, avec l'apparition d'une longueur caractéristique des oscillations et d'une vitesse caractéristique du transport.

En revenant sur la dérivation du seuil d'instabilité, nous avons ajouté un nouvel élément à la modélisation, qui permet de rendre compte de l'effet de la flexion visqueuse sur le rivelet. Cela permet d'expliquer pourquoi on ne peut jamais observer d'oscillations naturelles au-delà d'une

certaine fréquence spatiale.

Enfin, en utilisant un forçage acoustique localisé, nous avons montré que nous pouvons sonder la dynamique du système de manière plus poussée. Nous sommes d'abord en mesure de déclencher le méandrage plus tôt que dans le cas naturel. Les méandres peuvent alors être verrouillés à la fréquence de forçage, ou bien montrer de nombreuses harmoniques qui apparaissent au fur et à mesure que l'on descend la cellule. Il est aussi possible de retarder le méandrage spontané en utilisant une fréquence de forçage éloignée des fréquences naturelles et, à forçage plus élevé encore, de verrouiller le système autour de cette fréquence sur une longue distance/durée, même bien après le lieu du forçage.

Tout dans ce que nous avons présenté n'est pas encore parfaitement compris, et il reste encore du travail pour réussir à créer des liens conceptuels plus forts entre les différents éléments que nous avons mis en évidence : longueur d'onde typique λ^* , vitesse non-linéaire c , vitesse de croissance c' , nombre d'onde maximal prédit k_{\max}^{th} ...

Il nous semble par ailleurs qu'il serait adéquat de développer un modèle non-linéaire du rivelet, en s'inspirant du travail réalisé au chapitre 4, afin de capturer certains comportements singuliers comme l'accrochage en fréquence sur un mode faiblement attracteur, ou la génération spontanée d'harmoniques.

Annexe 5.A Autres représentations

Nous proposons dans cette annexe quelques autres représentations des données expérimentales liées au méandrage spontané, que nous décrivons succinctement, et qui sont complémentaires de celles présentées dans les sections précédentes.

Figure 5.14 : Spectre fréquentiel spatial du rivelet en fonction du temps

Cette représentation est motivée par la question suivante : sur la figure 5.4, est-il vraiment légitime de moyenner les spectres en temps ? Chacun des spectres individuels sur cette figure (traits gris) semblent avoir sa propre fréquence maximale. Si jamais l'évolution de cette fréquence spatiale favorisée suit un schéma déterministe en temps (périodicité, ou bien dérive à vitesse constante), alors moyenner les spectres ne fait que brouiller un ordre sous-jacent. Au contraire, si la fréquence spatiale pour laquelle le signal est maximal varie aléatoirement dans le temps, alors il est légitime de faire une moyenne.

Sur la figure 5.14, on voit donc, en fonction du temps (en abscisse), la répartition des fréquences spatiales, c'est à dire le spectre de puissance $|\hat{z}|^2(k, t = t_0)$, pour chaque instant t_0 , en échelle de couleur. Cette représentation est similaire à celle des figures 5.10 (a'), (b') et (c'), à ceci près que l'on a interverti le rôle du temps et de l'espace. On peut voir sur l'image obtenue que le nombre d'onde de réponse maximale, autour de $0,65 \text{ mm}^{-1}$, semble varier aléatoirement dans le temps, légitimant la moyenne présentée en 5.4.

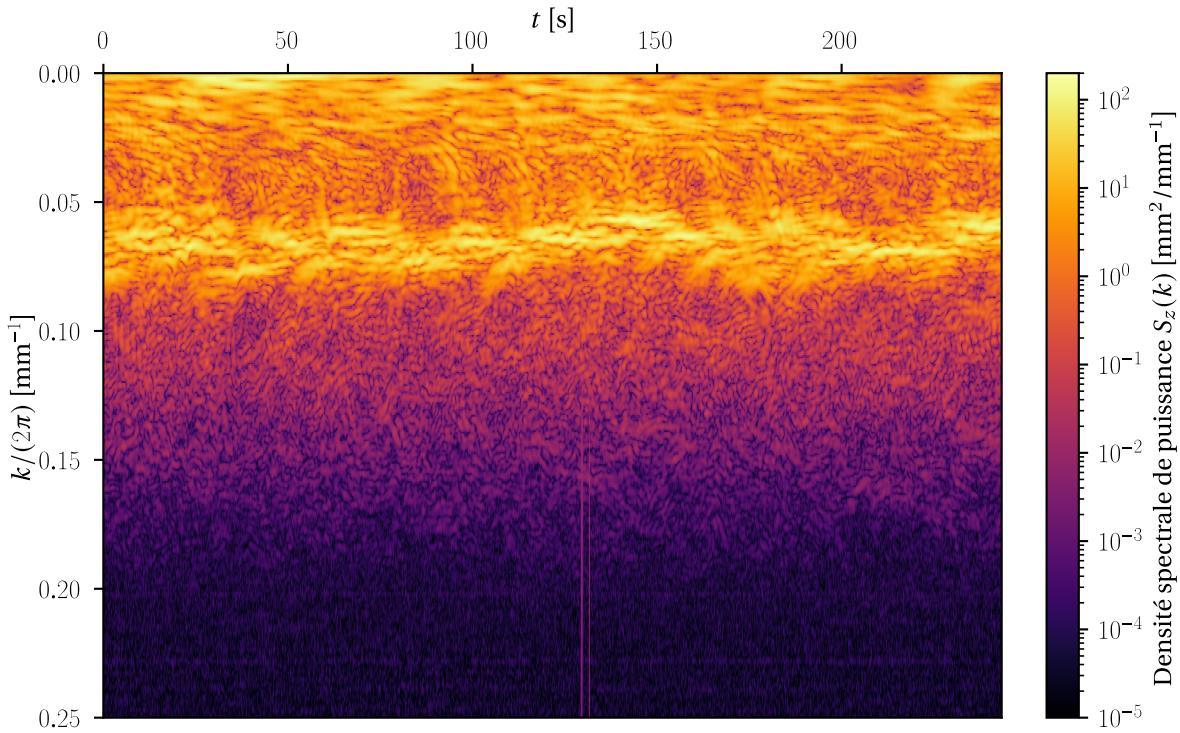


FIGURE 5.14 – Spectre de puissance de la transformée de Fourier en espace de z (en échelle de couleur), en fonction de la fréquence spatiale k (axe des ordonnées) et du temps t (axe des abscisses). À chaque instant t_0 , on calcule le spectre de puissance de $z(x, t = t_0)$, c'est à dire $\hat{z}(k, t = t_0)$. Transformées de Fourier réalisées avec un fenêtrage de Hann. Épaisseur de la cellule $b = (0,58 \pm 0,02)$ mm, débit volumique $Q = (68 \pm 1)$ mm³/s.

Figure 5.15 : Transformée de Fourier locale

On a vu, en observant les méandres spontanés, que leur comportement dépendait de l'espace : on distingue une zone calme, puis une zone de naissance où les perturbations grandissent, une zone désordonnée où on trouve des perturbations chaotiques de grande amplitude, enfin une zone plus calme où une longueur d'onde domine et où l'ordre revient. Sur quelle zone est-il donc légitime d'effectuer des transformées de Fourier en espace ? Autrement dit, quelle est la zone spatiale sur laquelle le signal est périodique en espace ?

Nous montrons sur la figure 5.15 le résultat de transformées de Fourier locale, ou transformée de Fourier aux échelles courtes (en anglais *STFT, Short-Term Fourier Transform*)⁶. Pour les obtenir, on part d'un instantané, comme sur la figure 5.15 (gauche), à partir duquel on calcule la transformée de Fourier sur une fenêtre se déplaçant le long de l'axe vertical. La fenêtre est choisie suffisamment large pour identifier convenablement la fréquence spatiale d'intérêt, et suffisamment petite pour résoudre les variations spatiales recherchées.

On constate sur cette figure que le spectre est, en moyenne, stabilisé pour $x > 300$: c'est sur cette plage de positions que sont prises les données servant à générer les spectres purement spatiaux, sur les figures 5.4 et 5.14.

6. C'est le parent pauvre de la transformée en ondelettes continue (*CWT, Continuous Wavelet Transform*), qui suffit amplement pour l'usage qu'on en fait ici.

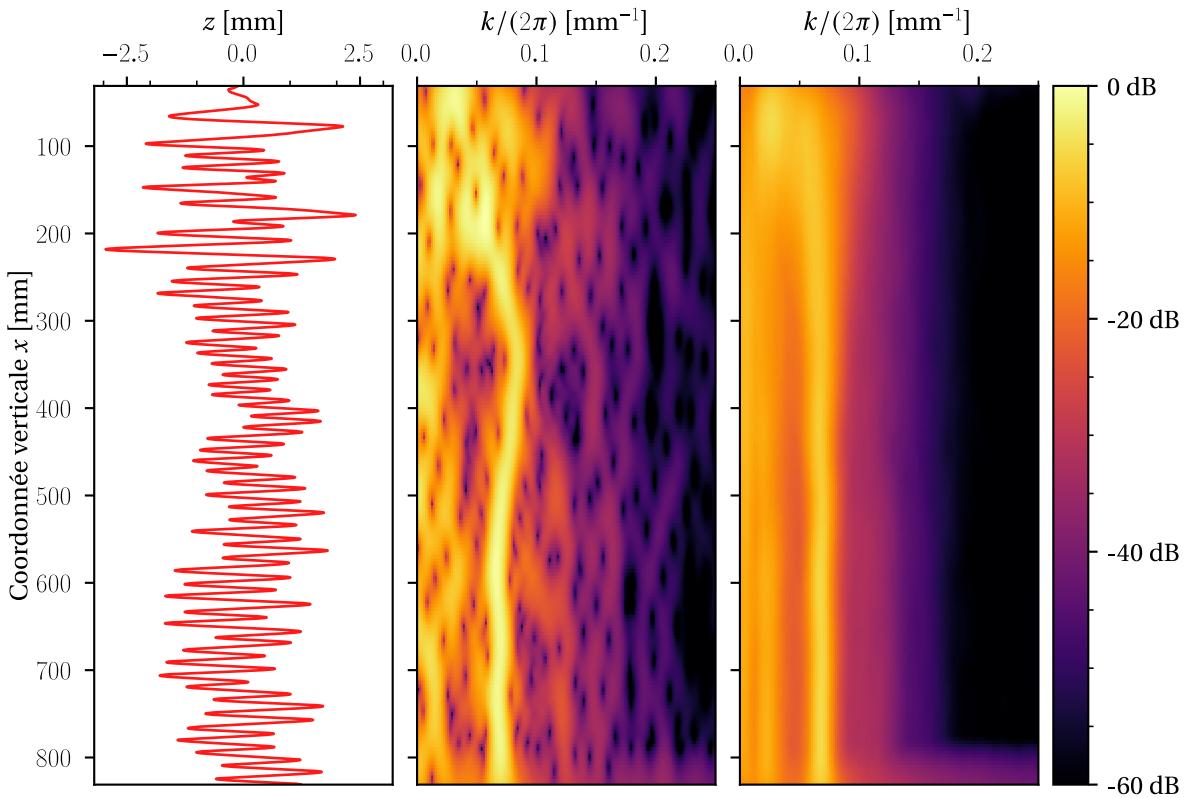


FIGURE 5.15 – (gauche) Instantané du signal. (milieu) Carré de l'amplitude de la transformée de Fourier locale continue (*continuous short-term Fourier transform*) avec fenêtre glissante de Hann (150 mm) du signal de gauche. (droite) Moyenne temporelle de plusieurs transformées prises à des instants différents. Épaisseur de la cellule $b = (0,58 \pm 0,02)$ mm, débit volumique $Q = (68 \pm 1)$ mm 3 /s.

Figure 5.16 : Espace de Fourier bidimensionnel

Enfin, on a vu dans ce chapitre une profusion de transformées de Fourier spatiales ou bien temporelles, mais qu'en est-il de la représentation du système dans l'espace des fréquences uniquement, c'est à dire $\hat{z}(k, \omega)$? Cette représentation, qui s'est avérée très fructueuse au chapitre précédent (section 4.6), ne nous semble pas ici porter la même puissance explicative, et l'interprétation des spectres est bien plus délicate.

Commentons rapidement les spectres montrés sur la figure 5.16. En 5.16 (a), le signal correspond aux méandres naturels, sans forçage. On y reconnaît un motif analogue à celui de la figure 5.3 : une droite passant par l'origine présentant une pente caractéristique c et un point où le signal est concentré autour d'un couple (k, ω) donné; et une deuxième droite de pente plus faible c' , représentant les variations à plus grandes échelles. Sur la figure 5.16 (d), le forçage est à 5 Hz (peu intense). Le signal de forçage est atténué, on observe un signal comparable au cas des méandres naturels en (a). Sur la figure 5.16 (b) et (e), le forçage est à 2,25 Hz et 5 Hz (intense), respectivement. Les méandres se verrouillent sur le signal de forçage, la réponse semble située sur la droite de pente c . Sur les figures 5.16 (c) et (f), le forçage est à 0,75 Hz et 1 Hz, respectivement. Des harmoniques et sous-harmoniques du signal de forçage sont générées, mais elles ne suivent pas la relation de dispersion. Ce comportement est hautement non-linéaire.

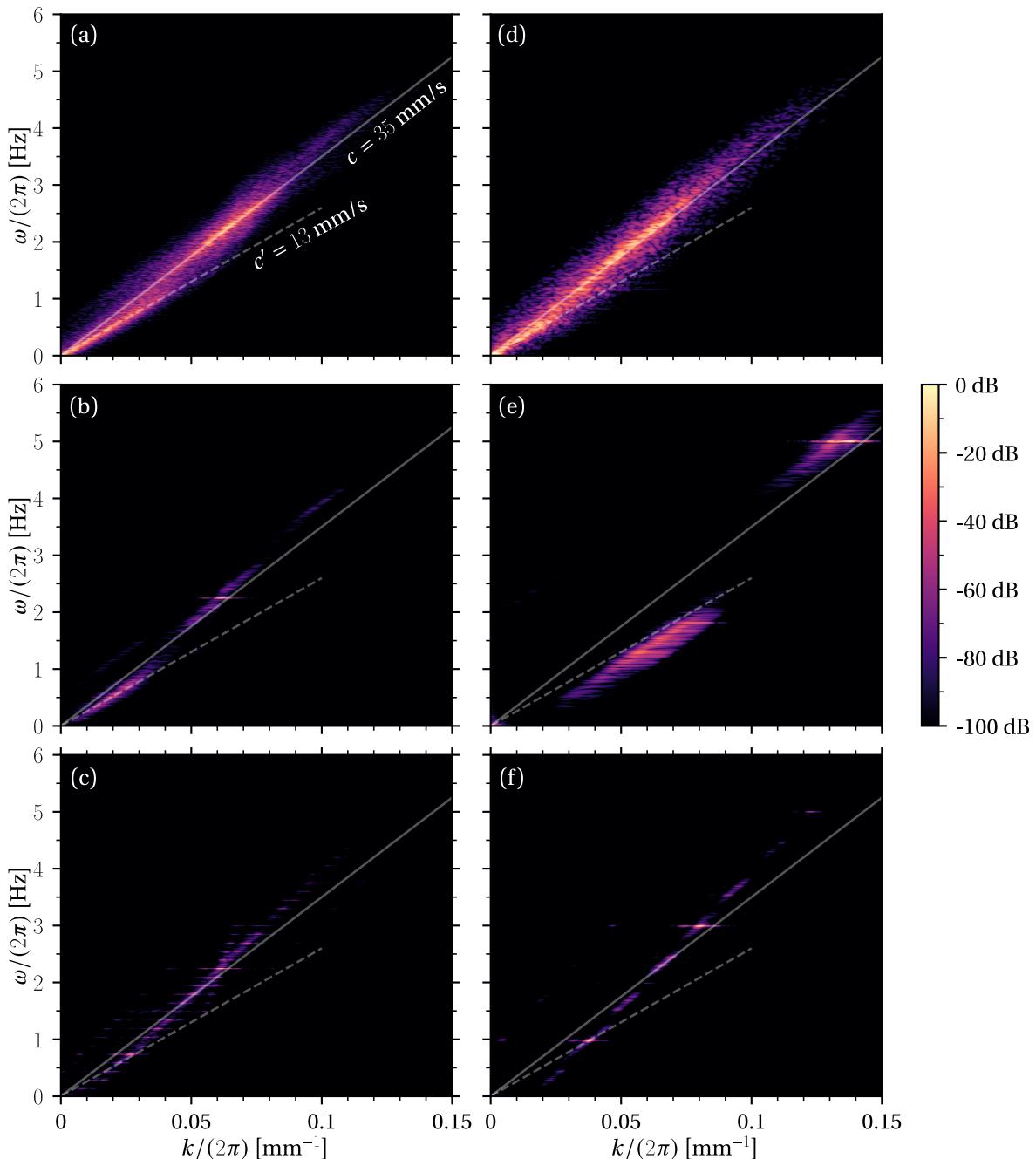


FIGURE 5.16 – Densité spectrale de puissance $S_z(k, \omega)$ (transformée de Fourier en deux dimensions). Conditions : (a) pas de forçage (même condition que 5.10 (haut), 5.11 (haut) et 5.12 (haut)); (b) forçage à 2,25 Hz (même condition que 5.10 (milieu) et 5.11 (milieu)); (c) forçage à 0,75 Hz (même condition que 5.10 (bas) et 5.11 (bas)); (d) forçage à 5 Hz, amplitude 25,8 μm (même condition que 5.12 (milieu)); (e) forçage à 5 Hz, amplitude 26,2 μm (même condition que 5.12 (bas)); (f) forçage à 1 Hz. On a représenté que les fréquences positives ($\omega > 0$) correspondant aux signaux propageant : expérimentalement, nous n'observons jamais de signaux contrapropageants mesurables. Les vitesses c et c' sont toujours les mêmes, mesurées à partir de la condition (a). Transformée effectuée avec fenêtrage de Hann en espace et en temps. Pour toutes les conditions, espacement de la cellule $b = (0,58 \pm 0,02)$ mm, débit volumique $Q = (68 \pm 1)$ mm^3/s .

Annexe 5.B Calcul du critère d'instabilité

Ici nous calculons le critère permettant de déterminer le régime (instable ou non) du méandrage spontané.

On part du critère (5.6) c'est-à-dire $\text{Re}(s) > 0$, où s est la solution du polynôme du second ordre

$$s^2 + \mu_{\text{tot}} s + v_c^2 k^2 + i u_0 k \frac{\mu_{\text{cl}}}{\sigma_0} = 0$$

Nous adimensionnons le problème, en utilisant comme temps caractéristique $1/\mu$, et comme vitesse caractéristique v_c , ce qui impose d'utiliser la longueur caractéristique v_c/μ . On pose alors naturellement $s := s/\mu$, $k := k v_c/\mu$ et $\mu_{\text{tot}} = \mu_{\text{tot}}/\mu$, et on définit en outre les quantités sans dimensions $\mu_{\text{cl}} := \mu_{\text{cl}}/(\sigma_0 \mu)$ et $v := u_0/v_c$.

Le polynôme dont on cherche les racines est alors

$$s^2 + s \mu_{\text{tot}} + k^2 + i k v \mu_{\text{cl}} = 0. \quad (5.32)$$

Ainsi on trouve

$$s = \frac{1}{2} (-\mu_{\text{tot}} + \delta) \quad \text{avec} \quad \delta^2 = \mu_{\text{tot}}^2 - 4 k^2 - 4 i k v \mu_{\text{cl}} \quad (5.33)$$

Le critère d'instabilité est $\text{Re}(s) > 0$, ce qui correspond à $\text{Re}(\delta) > \mu_{\text{tot}}$, avec

$$\text{Re}(\delta) = \frac{\delta + \delta^*}{2} = \frac{\sqrt{\delta^2 + \delta^{*2} + 2\delta\delta^*}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} (\text{Re}(\delta^2) + |\delta|^2)} = \sqrt{\frac{\text{Re}(\delta^2)}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\text{Im}(\delta^2)^2}{\text{Re}(\delta^2)^2}} \right)} \quad (5.34)$$

Le critère est alors

$$\text{Re}(\delta)^2 > \mu_{\text{tot}}^2 \quad (5.35)$$

$$(\mu_{\text{tot}}^2 - 4 k^2) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{(4 k v \mu_{\text{cl}})^2}{(\mu_{\text{tot}}^2 - 4 k^2)^2}} \right) > 2 \mu_{\text{tot}}^2 \quad (5.36)$$

$$\sqrt{1 + \frac{(4 k v \mu_{\text{cl}})^2}{(\mu_{\text{tot}}^2 - 4 k^2)^2}} > \frac{\mu_{\text{tot}}^2 + 4 k^2}{\mu_{\text{tot}}^2 - 4 k^2} \quad (5.37)$$

$$(\mu_{\text{tot}}^2 - 4 k^2)^2 + (4 k v \mu_{\text{cl}})^2 > (\mu_{\text{tot}}^2 + 4 k^2)^2 \quad (5.38)$$

$$(4 k v \mu_{\text{cl}})^2 > 4^2 \mu_{\text{tot}}^2 k^2 \quad (5.39)$$

$$v > \frac{\mu_{\text{tot}}}{\mu_{\text{cl}}}. \quad (5.40)$$

On retombe bien sur la condition (5.6).

Une manière simplifiée de traiter ce calcul est de considérer le cas $k \ll 1$. On a alors

$$\operatorname{Re}(\delta)^2 \approx \frac{1}{2} \left(\mu_{\text{tot}}^2 - 4k^2 \right) \left(1 + \sqrt{1 + 16k^2 \left(\frac{v \mu_{\text{cl}}}{\mu_{\text{tot}}} \right)^2} \right) \quad (5.41)$$

$$\approx \left(\mu_{\text{tot}}^2 - 4k^2 \right) \left(1 + 4k^2 \left(\frac{v \mu_{\text{cl}}}{\mu_{\text{tot}}} \right)^2 \right) \quad (5.42)$$

$$\approx \mu_{\text{tot}}^2 + 4k^2 \left(\left(\frac{v \mu_{\text{cl}}}{\mu_{\text{tot}}} \right)^2 - 1 \right) \quad (5.43)$$

$$\text{et donc } \operatorname{Re}(\delta) \approx \mu_{\text{tot}} \left(1 + 2k^2 \left(\left(\frac{v \mu_{\text{cl}}}{\mu_{\text{tot}}} \right)^2 - 1 \right) \right). \quad (5.44)$$

On a bien que $\operatorname{Re}(\delta) > \mu_{\text{tot}}$ si et seulement si $\frac{v \mu_{\text{cl}}}{\mu_{\text{tot}}} > 1$. Ce développement nous précise en outre la nature de la dépendance fréquentielle du taux de croissance de l'instabilité aux grandes longueurs d'ondes (faibles nombre d'ondes) :

$$\operatorname{Re}(s) \propto k^2 \propto 1/\lambda^2. \quad (5.45)$$

Annexe 5.C Calcul du moment quadratique I_y

Nous calculons ici le moment quadratique d'une section transversale du rivelet, par rapport à l'axe dirigé selon \hat{y} et passant par le centre du rivelet en $\delta z = 0$. Pour les notations, se référer au schéma proposé sur la figure 5.7 (droite).

$$I_y := \iint_{(\sigma)} (\delta z)^2 \, d\sigma \quad (5.46)$$

$$= \int_{y=-b/2}^{b/2} \int_{\delta z = -z_m(y)}^{z_m(y)} (\delta z)^2 \, dz \, dy \quad \text{avec } z_m(y) = \frac{w}{2} + \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2} \quad (5.47)$$

$$= 4 \int_{y=0}^{b/2} dy \int_{\delta z = 0}^{z_m(y)} (\delta z)^2 \, dz \quad (5.48)$$

$$= \frac{4}{3} \int_{y=0}^{b/2} [z_m(y)]^3 \, dy \quad (5.49)$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{b}{2}\right)^4 \int_{u=0}^1 \left[\frac{w}{b} + 1 - \sqrt{1-u^2}\right]^3 \, du \quad \text{avec } y = \frac{b}{2}u \quad (5.50)$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{b}{2}\right)^4 \int_{t=0}^{\pi/2} \left[1 + \frac{w}{b} - \cos t\right]^3 \cos(t) \, dt \quad \text{avec } u = \sin t \quad (5.51)$$

$$= \frac{b^4}{12} \left[\left(1 + \frac{w}{b}\right)^3 - \frac{3\pi}{4} \left(1 + \frac{w}{b}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{w}{b}\right) - \frac{3\pi}{16} \right] \quad \text{avec motivation} \quad (5.52)$$

$$\text{d'où } B := 24 b^2 I_y = 2 b^6 \left[\left(1 + \frac{w}{b}\right)^3 - \frac{3\pi}{4} \left(1 + \frac{w}{b}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{w}{b}\right) - \frac{3\pi}{16} \right] \quad (5.53)$$

Annexe 5.D Simulations

Nous terminons enfin cette partie en mentionnant le fait que le système étudié dans ce chapitre est particulièrement adapté à la simulation numérique.

En effet, nous étudions le rivelet comme un objet unidimensionnel, et nous ne nous intéressons qu'à sa position $z(x, t)$. L'évolution temporelle de cette position ne dépend donc que du champ 1D $z_t(x)$ et de ses dérivées temporelles, ce qui ouvre la voie à des simulations de basse dimension, donc peu gourmandes en ressources informatiques. Il est alors envisageable de tester différents modèles et différents paramètres, sur des cellules d'extension verticale arbitraire, ainsi que d'étudier l'effet d'un forçage bien contrôlé en espace et en temps.

Je n'ai pas eu le temps d'aller très loin dans cette direction, ayant été occupé principalement par les tâches expérimentales et de modélisation. Tout juste ai-je eu l'occasion d'écrire une « simulation-jouet » : elle utilise une modélisation crue (l'effet de la flexion n'est pas considéré) et les seules sources de non-linéarité considérées sont celles d'origine géométrique.

Nous utilisons une discrétisation à grille fixée, en utilisant la méthode des différences finies. En haut, la condition limite est fixée ($z(t)$ et $\dot{z}(t)$ imposés), ce qui permet d'imposer un forçage arbitraire : sur l'image présentée, le forçage est un bruit blanc. En bas de la cellule, j'ai mis une condition aux limites absorbante, avec une atténuation pour régulariser le comportement de la

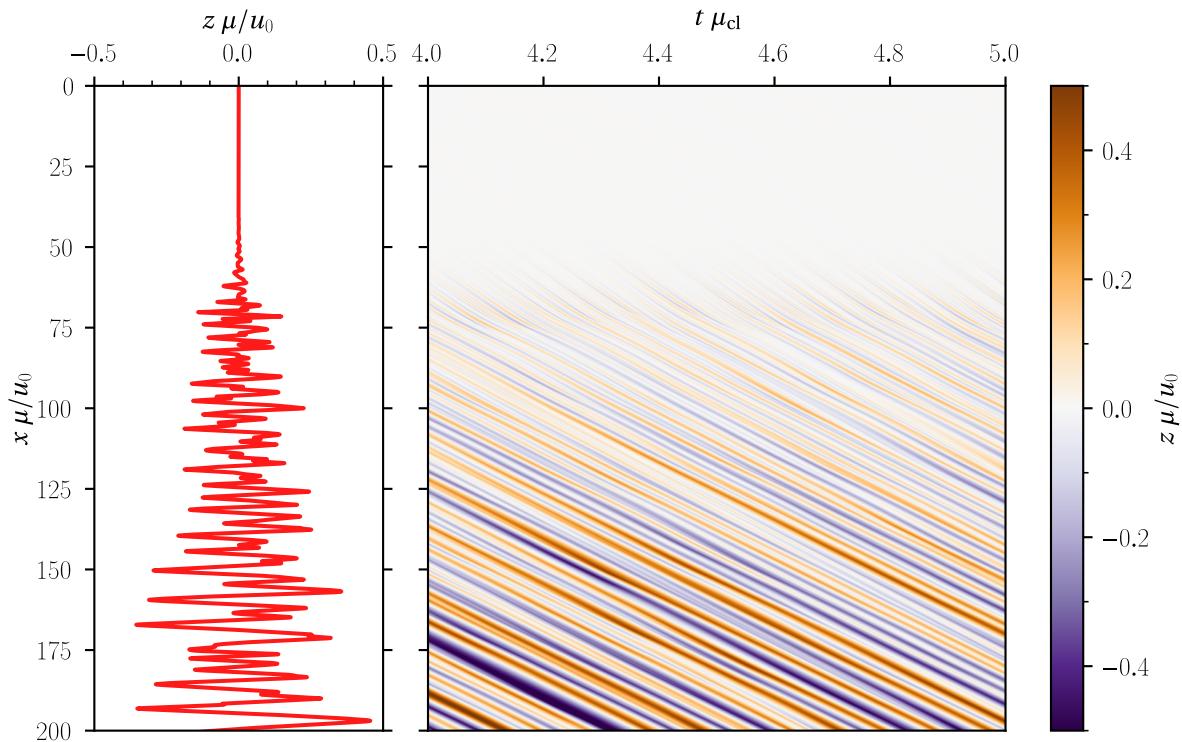


FIGURE 5.17 – Instantané (gauche) et diagramme spatio-temporel (droite) de la position z du rivelet issue d'une simulation, en unités adimensionnées. Pour cette « expérience numérique », on a pris $\mu_{\text{cl}}/(\sigma_0 \mu) = 10$, et $u_0/v_c = 1,2$, soit 0,1 au dessus du seuil.

solution (comme tout dans ce système est advecté vers le bas, cela n'a pas d'influence néfaste sur le comportement au-dessus). Le schéma d'intégration en temps est composé d'une combinaison d'advection semi-lagrangienne (pour les termes advectifs) et de méthode de Runge–Kutta d'ordre deux.

On peut voir sur la figure 5.17 un exemple de donnée obtenue avec cette technique. Le but n'est pas ici de prétendre disposer d'une simulation qui reproduirait fidèlement les méandres spontanés, car le résultat de la simulation ne ressemble pas exactement aux méandres naturels, mais de montrer que malgré notre approche grossière, on remarque tout de même un certain nombre de similitudes avec le système expérimental (advection, pentes faibles, comportement désordonné mais pas de hautes fréquences).

Il nous semblerait donc pertinent d'ajouter un aspect de simulation numérique à d'éventuelles futures études sur le sujet.

CONCLUSION ET OUVERTURE

Au cours de cette thèse, nous avons traité de différents aspects de la dynamique d'un rivelet en cellule de Hele-Shaw.

Nous avons commencé par décrire nos méthodes expérimentales, en expliquant et en motivant nos choix, de sorte que nos résultats puissent être facilement reproduits et, nous l'espérons, améliorés, par quiconque en aurait l'envie. Nous avons ensuite détaillé la modélisation mathématique choisie pour le rivelet, en précisant les approximations que nous avons faites, et en les justifiant.

Nous avons traité du dépôt de film par le rivelet, en montrant que nous étions capable de contrôler son mouvement par forçage acoustique, et que l'éclairage monochromatique nous permettait de mesurer précisément les caractéristiques géométriques des films déposés, ainsi que leur évolution. En montrant que cette déposition se faisait suivant la loi de Landau-Levich-Derjaguin, nous avons notamment obtenu un moyen d'estimer la hauteur effective des films sur lesquels glissent le rivelet. Nous avons aussi discuté de l'influence comparée de la fréquence et de la vitesse pour les mouvements rapides.

Nous avons étudié en profondeur l'instabilité en collier de perles, en décomposant ses caractéristiques spatio-temporelles, en établissant la relation de résonance qui conditionne son observation, et en écrivant un modèle non-linéaire s'appuyant sur un développement en échelles multiples pour prédire la structure du mode instable, son désaccord en fréquence spatiale et sa saturation en amplitude. Nous avons mis en évidence le fait que cette instabilité résultait d'une interaction triadique résonante entre ondes transverses et longitudinales, et nous avons montré que cette instabilité pouvait être utilisée pour effectuer des mesures sur le système.

Nous avons finalement exploré le phénomène de méandrage spontané. Après avoir rapporté des observations précises de ce phénomène, et avoir recalculé par différentes approches le critère d'instabilité; nous avons réussi, en prenant en compte l'ingrédient de la flexion visqueuse, à construire un modèle amélioré qui ne prédit pas l'amplification des courtes longueurs d'ondes. En forçant le rivelet localement, nous avons pu observer une grande diversité des réponses possibles du système, incluant le verrouillage en fréquence et la génération d'harmoniques et de sous-harmoniques.

Insistons sur l'interdépendance entre les différents sujets que nous avons abordés : maintenant que le mécanisme de dépôt de film est bien établi, nous sommes en mesure d'estimer plus précisément le coefficient μ_{cl} , et donc de mieux comprendre la naissance et le développement des instabilités en collier de perle et de méandrage spontané. En maîtrisant l'instabilité en collier de perles, nous avons mis en évidence une manière de mesurer directement des paramètres difficiles d'accès, pertinents pour l'étude du méandrage spontané, à l'aide d'expériences de trempe. Enfin, la meilleure compréhension du méandrage spontané à laquelle nous espérons avoir contribué ouvre la voie à de futures études sur l'instabilité en collier de perles pour le régime dans lequel les deux instabilités coexistent, au-delà du débit volumique critique.

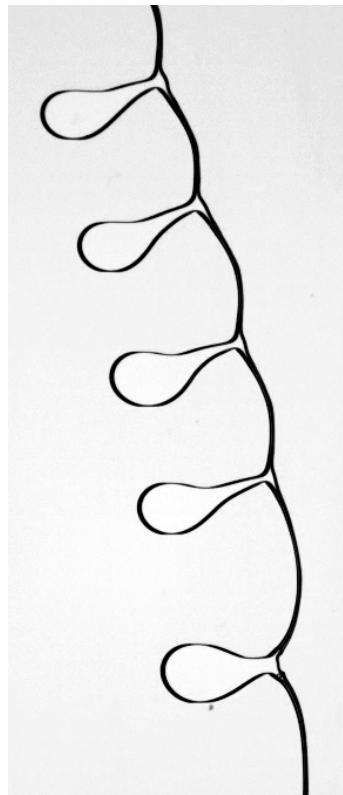
Ce travail a donc permis d'approfondir la connaissance de plusieurs phénomènes dynamiques exhibés par un rivelet en cellule de Hele-Shaw. Chaque axe de recherche que nous avons exploré est évidemment susceptible en soi d'approfondissement et d'améliorations. Nous avons déjà mentionné plusieurs phénomènes qu'il reste encore à comprendre et à explorer dans la dynamique du rivelet formé d'un liquide mouillant à l'occasion des conclusions spécifiques à chaque chapitre. Rappelons-en ici deux, qui nous pensons sont les plus intrigants et renferment les découvertes les plus riches : le fait que dans l'instabilité en collier de perles, à basse fréquence et en dessous du débit critique, la vitesse des ondes transverses est parfois bloquée à zéro ; et le fait que le méandrage spontané puisse générer spontanément des harmoniques, ou bien se verrouiller en fréquence sur une fréquence d'excitation.

Une perspective de recherche que nos travaux ouvrent et qui nous semble particulièrement prometteuse, tant du point de vue fondamental que de celui des applications, pourrait être l'étude de rivelets formés d'un mélange eau-tensioactifs. Nous savons déjà que le méandrage spontané de tels rivelets est très complexe et présente différents régimes, qui sont encore mal compris (Drenckhan, Gatz et Weaire 2004 ; Le Grand-Piteira 2006). Ce manque de compréhension peut, au moins en partie, être attribué au fait que le méandrage spontané est un sujet difficile et peu exploré, comme nous avons essayé de le montrer au chapitre 5. Au contraire, nous pensons que le modèle détaillé et précis que nous avons construit pour l'instabilité en collier de perles pourrait utilement être adapté à l'étude de solutions de tensioactifs.

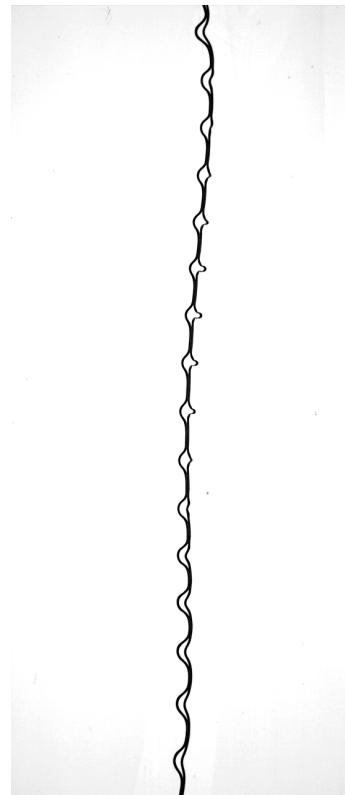
Nous avons réalisé quelques expériences préliminaires en ce sens, qui ont donné des résultats surprenants et ouvert la porte à de nouveaux régimes à explorer. Sur la figure ci-contre, nous montrons les motifs dus à l'instabilité en collier de perles qui apparaissent lorsque différents forçages sont appliqués à un rivelet fait d'un mélange eau-tensioactifs. À 30 Hz, on observe un régime très déformé, où les inhomogénéités d'épaisseur atteignent un régime presque caricatural, formant des « ballons » de fluides dans lequel tout le liquide s'acumule, reliés par de très fins filaments. À 50 Hz, les modulations d'épaisseur sont bien présentes, mais la sinuosité oscille en temps et est parfois supprimée, comme sur l'image que nous reproduisons. À 200 Hz, un régime très désordonné apparaît, dans lequel le rivelet se brise et se reconnecte de manière chaotique, enfermant de nombreuses bulles à l'intérieur de la structure.

Tous ces régimes exotiques sont rendus possibles par l'importante modification de la rhéologie de surface due à la dynamique des tensioactifs. Nous pensons qu'il serait intéressant de caractériser ces régimes, de les quantifier, et de les modéliser en s'appuyant sur la compréhension que nous avons développée pour les rivelets d'huile neutre. On pourrait alors faire le lien entre les propriétés déjà connues des tensioactifs utilisés et les comportements observés du rivelet. Ce faisant, il serait possible de construire un « banc de mesure tensiométrique » qui pourrait permettre, en réalisant des observations à l'échelle macroscopique, de sonder sur plusieurs ordres de grandeur de fréquences les caractéristiques microscopiques de molécules amphiphiles.

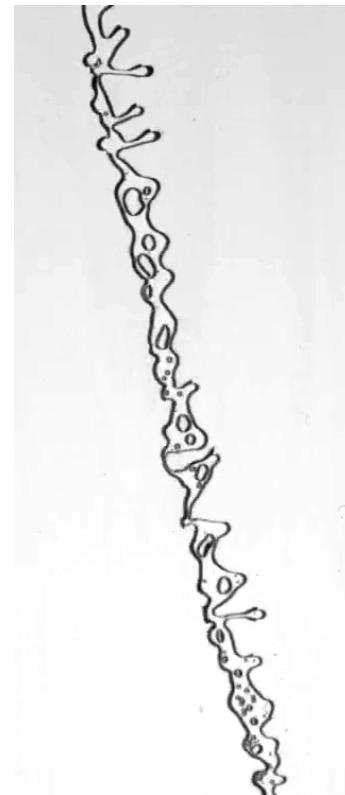
Conclusion



Excitation à 30 Hz.



Excitation à 50 Hz.



Excitation à 200 Hz.

Instabilité en collier de perles pour un mélange eau-tensioactifs (TTAB, concentré au double de la concentration micellaire critique, soit 9 mmol/l). Écartement de la cellule 0,6 mm.

Moi aussi, j'ai eu l'heur de résoudre quelques problèmes mathématiques et physiques [...]. Mais l'orgueil dont j'aurais pu me prévaloir devant l'aboutissement de mes efforts était considérablement amoindri par le fait que j'étais bien conscient de comment j'étais parvenu à résoudre de tels problèmes : grâce à l'heureux concours de généralisations qui m'emmengaient de plus en plus loin à partir d'exemples opportuns, et par une série de fulgurances dues à la chance – et ce, après m'être maintes fois égaré en route. Qu'on me permette de me comparer à un alpiniste qui, sans connaître le chemin, grimpe lentement et péniblement, doit souvent rebrousser chemin car il se retrouve face à un cul-de-sac; découvre tantôt grâce à ses réflexions, tantôt par hasard une nouvelle voie praticable qui porte à nouveau ses pas un peu plus loin; tout cela pour découvrir finalement à son grand embarras, lorsqu'enfin il a atteint son but, un chemin royal qu'il aurait pu emprunter dès le début s'il avait eu l'intelligence de trouver le bon départ. Il va sans dire que, dans mes écrits, je n'ai pas entretenu le lecteur de mes errements, et je me suis contenté de lui décrire la voie toute tracée par laquelle il peut désormais sans peine atteindre les hauteurs.

Hermann von Helmholtz, *Souvenirs* (1891)
(trad. C. Perron)

Auch bin ich im Stande gewesen, einige mathematisch-physikalische Probleme zu lösen [...]. Aber der Stolz, den ich über das Endresultat in diesen Fällen hätte empfinden können, wurde beträchtlich herabgesetzt dadurch, dass ich wohl wusste, wie mir die Lösungen solcher Probleme fast immer nur durch allmählich wachsende Generalisationen von günstigen Beispielen, durch eine Reihe glücklicher Einfälle nach mancherlei Irrfahrten gelungen waren. Ich musste mich vergleichen einem Bergsteiger, der, ohne den Weg zu kennen, langsam und mühselig hinaufklimmt, oft umkehren muss, weil er nicht weiter kann, der bald durch Uebelegung, bald durch Zufall neue Wegspuren entdeckt, die ihn wieder ein Stück vorwärts leiten, und endlich, wenn er sein Ziel erreicht, zu seiner Beschämung einen königlichen Weg findet, auf dem er hätte herauffahren können, wenn er gescheit genug gewesen wäre, den richtigen Anfang zu finden. In meinen Abhandlungen habe ich natürlich den Leser dann nicht von meinen Irrfahrten unterhalten, sondern ihm nur den gebahnten Weg beschrieben, auf dem er jetzt ohne Mühe die Höhe erreichen mag.

Hermann von Helmholtz, *Erinnerungen* (1891)

Annexes

A

ROUE À EAU CHAOTIQUE

En arrière-plan de ma thèse, je me suis investi dans la construction d'une expérience de vulgarisation. Le principe de base est très simple : une roue creuse, constituée d'un grand nombre de petits conteneurs indépendants, ouverts sur le dessus et percés par en bas, tourne autour d'un axe incliné par rapport à la verticale, comme dessiné sur la figure A.1. De l'eau est apportée en continu dans la partie supérieure de la roue, qui remplit les conteneurs du haut. Cela fait monter le centre de gravité de la roue au-dessus de l'axe : elle devient alors instable, et se met à tourner. Les conteneurs se vident lentement en permanence puisqu'ils sont percés, et se remplissent lorsqu'ils passent en dessous de la source d'eau.

La roue peut alors adopter plusieurs comportements :

- à très bas débit, l'apport d'eau n'est pas suffisant pour faire tourner la roue, et elle reste immobile;
- à débit un peu plus grand, la roue tourne continûment dans un seul sens;
- à très fort débit, la roue exhibe un mouvement pendulaire et elle alterne un tour dans un sens et un tour dans l'autre;
- enfin dans certaines conditions, la roue peut présenter un comportement chaotique, c'est-à-dire apériodique et sensible aux conditions initiales.

Cette expérience, simple à expliquer mais au comportement surprenamment riche, qui peut être déplacée et montée hors du laboratoire, est excellemment adaptée à la vulgarisation devant tous les publics, des enfants aux scientifiques professionnels. Elle permet d'expliquer des notions scientifiques profondes comme celle de déterminisme, de brisure de symétrie ou de prédictibilité, et d'illustrer des concepts complexes comme la sensibilité aux conditions initiales, l'espace des phases ou le chaos temporel.

La roue à eau présente aussi un lien profond avec les systèmes météorologiques. En effet, les équations qui régissent la roue peuvent se réduire au système (A.1), qui correspond exactement au système d'équations proposées par Lorenz 1963. Dans cet article fondateur pour l'étude du chaos dissipatif, E. Lorenz utilise un développement tronqué en modes propres de l'instabilité de Rayleigh-Bénard, qui prend place lorsqu'un fluide se trouve dans une enceinte refroidie par le bas et chauffée par le haut, ce qui mène à l'apparition de rouleaux de convection.

Le lien entre le système de Rayleigh-Bénard et les équations de la roue à eau est tout sauf fortuit : plusieurs années après l'article de Lorenz, Keller 1966 et Welander 1967, qui travaillaient sur la convection océanique, étudient un système de Rayleigh-Bénard simplifié où le fluide est contenu dans une boucle rectangulaire. Plus tard, Malkus 1972 modifia cette idée en utilisant

une boucle de fluide circulaire, ce qui permet donc de modéliser un seul rouleau de convection, à l'aspect constraint. En trouvant les mêmes équations que Lorenz dix ans plus tôt, Malkus eut l'idée de construire le premier prototype de roue à eau chaotique mécanique, où le remplissage des compartiments joue le rôle de l'augmentation de densité due au chauffage du fluide. Les frottements mécaniques représentent alors la dissipation visqueuse, la vidange des tubes la diffusivité thermique, etc.

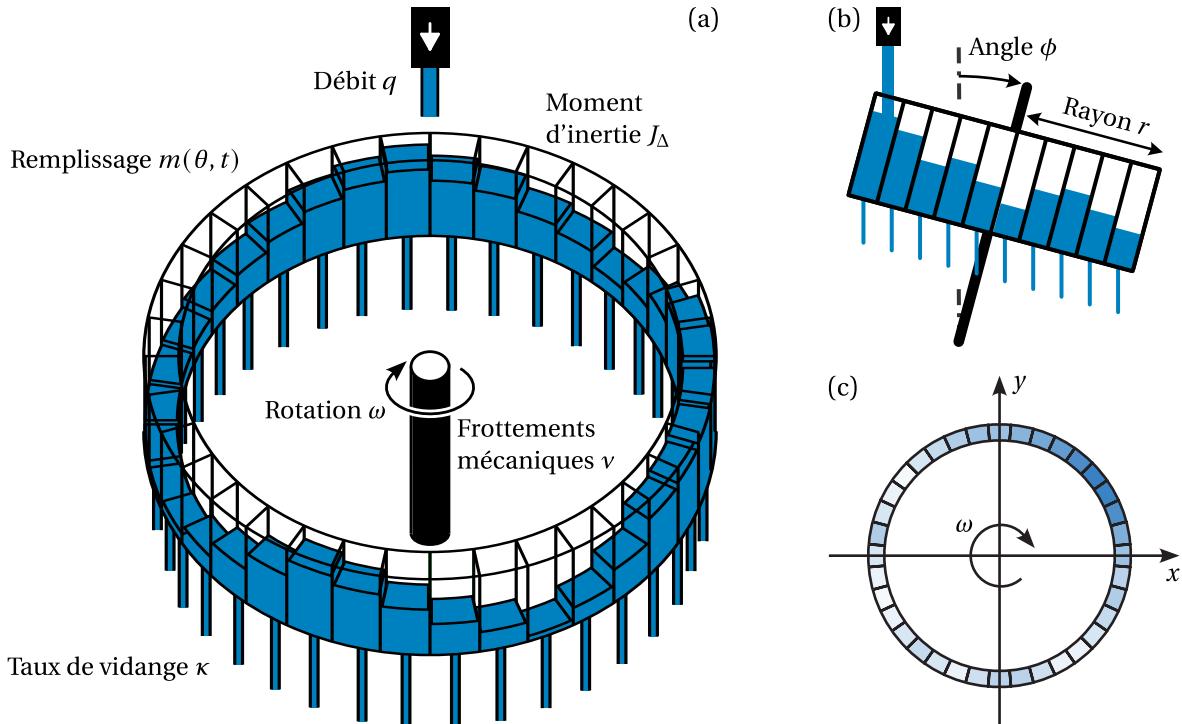


FIGURE A.1 – Schéma de la roue à eau. (a) Vue de face : les compartiments sont répartis autour de l'axe de rotation, ils se vident en continu, l'apport d'eau se fait par le dessus. (b) Vue de côté : la roue est inclinée par rapport à la verticale. (c) Vue d'au-dessus de la roue.

Au cours de ma thèse, j'ai eu l'occasion de présenter cette roue devant divers publics :

- des familles et des enfants, au sein de la cité des sciences et de l'industrie, à l'occasion du congrès de la Société Française de Physique;
- des classes de collège, à l'occasion de la fête de la science;
- des physicien(ne)s professionnel(le)s, aux Rencontres du Non-Linéaire 2024;
- des curieux, à l'occasion du festival de vulgarisation *Pint of Science*.

Construire un dispositif transportable et qui fonctionne bien dans le régime chaotique s'est révélé beaucoup plus difficile que je ne le pensais initialement. Pour pouvoir réaliser cette roue dans de bonnes conditions, j'ai bénéficié de fonds (1000 €) accordés par la Faculté des sciences d'Université Paris Cité (appel à projet « médiation scientifique 2025 »).

Pour aller un petit peu plus loin

Les équations décrivant le comportement de la roue prennent une forme simple, donnée par le système d'équations (A.1).

$$\frac{1}{\sigma} \dot{W} = -W + X \quad (\text{A.1a})$$

$$\dot{X} = -X + W Y \quad (\text{A.1b})$$

$$\dot{Y} = -Y - W X + \rho \quad (\text{A.1c})$$

L'espace des phases comporte trois dimensions (c'est le minimum pour qu'un système continu puisse fonctionner en régime chaotique), et le mode de fonctionnement de la roue dépend de deux paramètres sans dimensions¹, qui sont

$$\text{le nombre de Rayleigh } \rho = \frac{q r g \sin \phi}{\kappa^2 \nu} \quad \text{et le nombre de Prandtl } \sigma = \frac{J_\Delta / \nu}{\kappa}.$$

Le nom de ces deux grandeurs vient d'une analogie avec le système de Rayleigh-Bénard : le premier compare les effets convectifs aux effets dissipatifs, le second compare les effets dissipatifs entre eux. En fonction des valeurs de ρ et σ , la roue peut adopter différents comportements, comme mentionné plus haut. J'ai calculé la « chaoticité » (une mesure du désordre) du système pour de nombreux couples de paramètres, le résultat est montré sur la figure A.2.

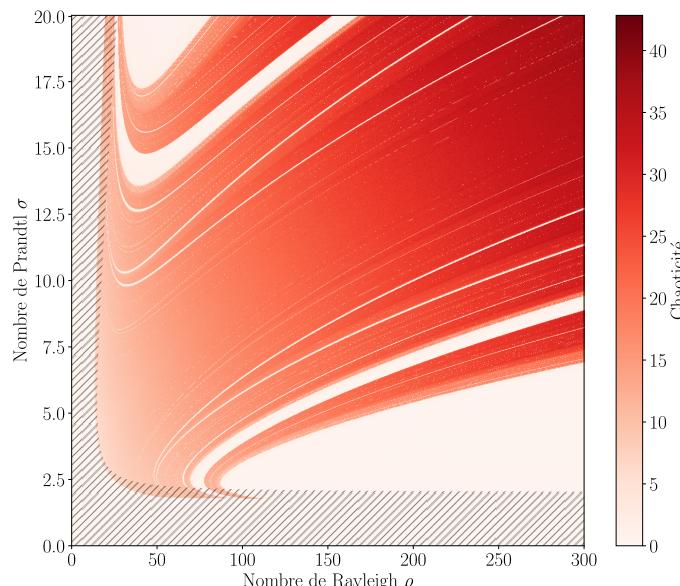


FIGURE A.2 – Régime de la roue en fonction des paramètres ρ et σ . En blanc, le comportement est périodique. Plus la couleur est intense, plus la « chaoticité » du régime est élevée. Cette quantité, qui peut être définie de plusieurs manières différentes, varie inversement avec le temps caractéristique d'éloignement de deux trajectoires initialement proches dans l'espace des phases. Les zones hachurées correspondent aux zones où un état d'équilibre linéairement stable existe.

1. Il y en a trois dans le système de Lorenz, mais l'un d'eux, communément appelé b , correspond au rapport d'aspect des rouleaux de convection. Ici la valeur $b = 1$ est imposée par la géométrie utilisée.

B

UN MODÈLE SIMPLE DE LÉVITATION MAGNÉTIQUE

J'ai eu la chance de pouvoir enseigner au niveau universitaire au cours de ma thèse, et j'ai beaucoup apprécié cette expérience. Dans le cadre de ces enseignements, j'ai co-encadré pendant trois ans l'équipe d'Université Paris Cité pour le *French Physicists' Tournament* (FPT), l'antenne française de l'*International Physicists' Tournament* (IPT), un « tournoi » durant lequel des équipes de six étudiant·e·s s'affrontent autour de la résolution de problèmes de physique originaux. Chaque année, onze nouveaux problèmes étaient proposés, et notre rôle était d'encadrer les membres de l'équipe pour les aider à s'approprier les sujets, à concevoir, réaliser et exploiter des expériences, et à trouver des modèles simples pour décrire les phénomènes étudiés.

Un de ces problèmes durant le tournoi 2023 était *Unstable levitation*, qui demandait d'expliquer pourquoi il est possible de faire léviter un aimant dans les airs en le plaçant à proximité d'un autre aimant en rotation rapide. Le mécanisme de cette lévitation n'est pas du tout évident au premier abord, et une mise en équation directe du problème complet aboutit à une suite inextricable de calculs dont il est difficile de dégager la moindre signification. Le seul travail publié sur ce sujet était alors un article de plus de 100 pages écrit par H. Ucar (référence [1] plus bas). Cet article, qui n'est pas dépourvu de bonnes idées sur le fond, est extrêmement difficile à lire : il est touffu, changeant sans cesse de notations, d'objets d'études et de modèles, le tout dans un style éloigné des conventions académiques (il a été publié dans la revue prédatrice *Symmetry*¹). Il ne propose par ailleurs aucune comparaison entre les (nombreux et divers) modèles proposés et des résultats expérimentaux.

Les équipes d'Université Paris Cité et de l'ENS Lyon sont toutes les deux arrivées indépendamment à des résultats compatibles sur ce problème et ont décidé de collaborer pour transformer leurs idées en un article, dont l'ambition est double : d'abord proposer une vision simple de ce problème difficile, en identifiant les éléments physiques les plus importants et en établissant un modèle simplifié qui rende compte des caractéristiques principales du phénomène en s'appuyant notamment sur des lois d'échelle; ensuite de proposer les premières comparaisons quantitatives entre modèle et expériences.

J'inclus donc ici cet article (Le Lay, Layani et al. 2024), que j'ai rédigé en très grande partie et pour lequel j'ai écrit le modèle. Il a été publié dans le journal *Physical Review E*, et sélectionné comme *Editor's suggestion*. Les résultats obtenus ont par la suite été mis en avant par le CNRS. Trois co-auteurices de ce travail sont des étudiant·e·s ayant participé au FPT, ce qui illustre bien les interactions constructives qui peuvent exister entre enseignement et recherche.

1. En consultant la page d'accueil de ce journal, édité par MDPI, je suis tombé directement sur une preuve de l'hypothèse de Riemann, un problème mathématique légendaire mis à prix à un million de dollars. La « preuve rigoureuse et algébrique » de cet énoncé qui défie les mathématicien·ne·s depuis plus d'un siècle et demi a été acceptée et publiée en moins d'un mois.

Magnetic levitation in the field of a rotating dipole

Grégoire Le Lay , Sarah Layani , Adrian Daerr , and Michael Berhanu

Université Paris Cité, CNRS, Laboratoire Matière et Systèmes Complexes UMR 7057, 75231 Paris cedex 13, France

Rémy Dolbeault , Till Person , Hugo Roussille , and Nicolas Taberlet

Univ Lyon, Ens de Lyon, Univ Claude Bernard, CNRS, Laboratoire de Physique, F-69342 Lyon, France



(Received 15 April 2024; revised 29 July 2024; accepted 10 September 2024; published 28 October 2024)

It is well known that two permanent magnets of fixed orientation will either always repel or attract one another regardless of the distance between them. However, if one magnet is rotated at sufficient speed, a stable position at a given equilibrium distance can exist for a second free magnet. The equilibrium is produced by magnetic forces alone, which are strong enough to maintain a levitating state under gravity. We show that a stable levitation can be obtained when the rotating magnet is tilted from the rotation axis, with no offset in its position. In this regime, the levitating magnet remains centered and its spinning rate remains negligible, while its magnetic moment precesses in synchronization with the driving magnet. We provide a physical explanation of the levitation through a model relying on static dipolar interactions between the two magnets and present experimental results which validate the proposed theory.

DOI: [10.1103/PhysRevE.110.045003](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.110.045003)

I. INTRODUCTION

Recently a new way to obtain magnetic levitation—i.e., the hovering of an object in the air due to magnetic forces—was discovered: a fast rotating permanent magnet (the rotor) being able to "lock in" another magnet (termed here the levitating magnet) [1]. This differs from a number of other well-known techniques allowing for magnetic levitation. For example, electromagnetic suspension, where an active control system using an electromagnet stabilizes a permanent magnet, can be used with high speed machinery [2]. Another approach is generating an opposing magnetic field either using eddy currents in conductive materials in the case of electrodynamic suspension (for example in the Maglev train [3]) or directly using diamagnetic materials, or exploiting the Meissner effect of superconductors [4]. One can also mechanically limit the degrees of freedom of a levitating magnet, use a rotating magnetic quadrupole to form a magnetic Paul trap [5] or make stabilizing use of the gyroscopic torque as in the case of the Levitron [6–8].

The magnetic levitation by dipole rotation is simple to observe and the experiment is easily doable by students or amateurs but is surprisingly difficult to explain and describe quantitatively. In 2021, Ucar published a first general description of this levitation technique [1]. His seminal article provided an overview of the phenomenon, including a compendium of experimental realizations, and laid out the main physical ingredients to explain it. The phenomenon started gaining interest after being exposed to the general public [9,10] and notably one of the subjects of the International Physicists' Tournament 2023 consisted in investigating the limitations of the phenomenon.

A more systematic study was recently published by Hermansen *et al.* [11]. Its authors focus experimentally on the case of a centered rotor whose magnetic moment is normal to the rotation axis, observing semistable states of finite lifetime.

Notably, they measure the lifetime of the levitation, describe how it stops, and study the influence of the magnet size and magnetization on the minimum rotation rate for levitation. The dynamics is further explored by simulations of a model based on the same ingredients as Ucar, which reproduce levitation provided the rotor is slightly shifted off axis or tilted and dissipation is added at least initially.

While both the works of Ucar and of Hermansen *et al.* properly identify the fundamental physical mechanism behind the levitation, and resort to numerical simulation of the derived complex evolution equation for the translational and rotational degrees of freedom of the levitating magnet, neither provides a quantitative comparison of the derived model to experimental measurements. The goal of this paper is to provide a synthetic physical picture of the phenomenon, and to back it using quantitative experimental evidence. We propose a model based on physical ingredients in line with the preceding literature, valid for small tilt angles γ and θ of both magnets with respect to an orthogonal configuration (Fig. 1) but otherwise general, that yields scaling laws without the need for numerical simulation. In particular we characterize the axial equilibrium position. Confronting the scaling laws and some analytical predictions to observations, we provide the first quantitative comparison between experimental data and an analytic model of the levitation. This allows us to validate the levitation mechanism suggested by Ucar.

II. THE LEVITATION MECHANISM

A. Qualitative description and notations

The typical experimental setup needed to observe the magnetic levitation in the regime studied here is as follows. One magnet (termed rotor magnet, or rotor) is fixed and rotates at a rate ω , typically around 150 to 300 Hz, around a vertical axis to which its magnetic moment is almost (yet not rigorously)

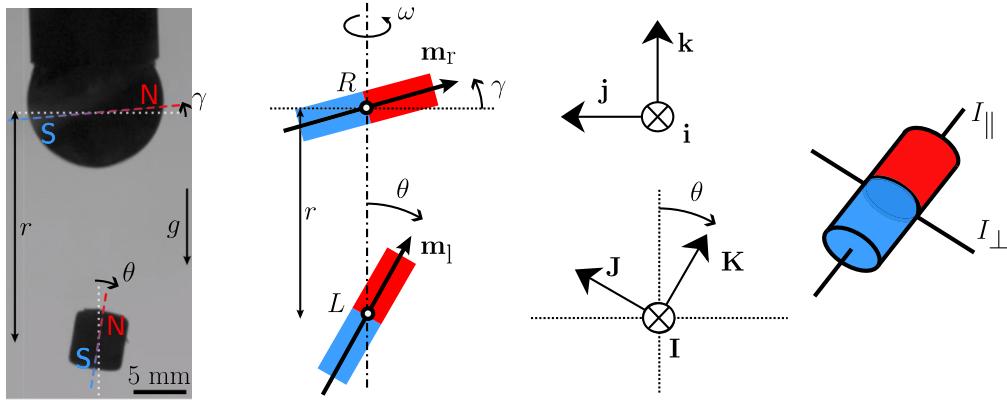


FIG. 1. Left: Instantaneous picture of the experiment taken with a high speed camera. The top magnet is rotated at a rate of $f = (216 \pm 2)$ Hz and its dipolar moment m_r is inclined by an angle γ relatively to the plane of rotation (the rotation axis is vertical here). The bottom magnet levitates at a distance r from the top magnet and its dipolar moment m_l makes an angle θ with the vertical axis. For this experiment, the top magnet is a sphere of diameter 12.7 mm and the levitating magnet is a cylinder of radius 5 mm and height 5 mm. Other magnet shapes (sphere, cylinder, cube,...) both for rotating and levitating magnets can produce the levitation effect, as noted previously [1] (see also Supplemental Movies S2 and S3 [12]). Right: schematics and geometrical notations for the model. The basis $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ is attached to the rotating magnet with \mathbf{k} aligned with the rotation axis and the magnetic moment in the (\mathbf{j}, \mathbf{k}) plane. The basis $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ is attached to the levitating magnet, with $\mathbf{I} = \mathbf{i}$, and \mathbf{K} along the magnetic moment. I_{\parallel} and I_{\perp} are the moments of inertia, parallel to the dipolar moment and perpendicular, respectively.

perpendicular. The angle between the horizontal plane and the magnetic moment of the rotor is noted γ and is a few degrees. Below the rotor, another magnet (the levitating magnet, or levitator) hovers midair (video S1 [12]). It is inclined through an angle θ compared to the vertical. In this levitating regime, both magnetic moments remain comprised in the same plane, evidencing the synchronization between the rotation of the rotor and the precession of the levitator. We have checked experimentally that this synchronization is respected. A picture of the plane taken from the video, as well as a schematics, are displayed in Fig. 1, showing that at any given instant the north pole of the levitator points on the side of the north pole of the rotor magnet (i.e., $\theta > 0$).

Experimentally, the levitator remains at a fixed distance from the rotor for several tens of seconds when no dissipation is present, to minutes or even hours when in presence of dissipation obtained by placing an aluminium block nearby the levitating magnet to enhance eddy current damping. But even the shortest lifetimes, around ten seconds, are very long compared to one period of rotation (around 5 ms). Thus, the levitation can be considered stable, lasting for thousands of cycles before eventually failing. In the present work, we focus on the existence of this stable position.

In this article, we will always consider that the dipolar magnetic moment m_l of the levitating magnet is localized at the center of mass and aligns with a principal axis of inertia (Fig. 1). We write I_{\parallel} the moment of inertia around this axis and I_{\perp} the other two principal moments which we suppose identical. The levitation can be realized for a variety of ratios I_{\perp}/I_{\parallel} , as can be seen in Supplemental Movie S3 [12]. The model applies whenever the magnetic field of the levitating magnet is dipolar in first approximation, including nonspherical magnets such as cylinders or cubes, as can be seen in Supplemental Movie S2 [12].

For the convenience of forthcoming calculations, we define two orthonormal bases, both rotating around the vertical

(magnet-to-magnet) axis synchronously at rate ω . The basis $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ is so that \mathbf{k} is pointing up and the rotor magnetic moment is in the plane spanned by (\mathbf{j}, \mathbf{k}) . The basis $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ is attached to the levitating magnet: \mathbf{K} points along its magnetic moment and principal inertial axis, inclined by an angle θ from the vertical, and $\mathbf{I} = \mathbf{i}$.

We consider the center of the rotor to be vertically aligned with that of the levitating magnet (i.e., no horizontal offset for either magnets) at a distance r . Both magnetic moments turning around the vertical axis at constant rotation rate $\omega = 2\pi f$ (as discussed below, as opposed to the rotor which is rotating, the levitator precesses with often negligible spin). The rotor is modeled as a perfect magnetic dipole of moment m_r contained in the (\mathbf{j}, \mathbf{k}) plane and inclined from the horizontal by a small angle $\gamma \ll 1$ (Fig. 1).

B. Counteracting forces

Let us first offer a qualitative explanation for the existence of a stable point. The reason the levitator stays at a fixed distance to the rotor is because it is constrained there by a repulsive and an attractive force, both of magnetic origin. In general, these magnetic forces dominate over gravity, which is why the levitation can be maintained even on an upside-down configuration, as shown in previous literature [1].

The attractive force comes from the fact that the rotor is slightly inclined, the vertical component $\mathbf{m}_r \cdot \mathbf{k}$ generating a vertical magnetic field. Given the relative orientations of the magnets (see Fig. 2) this component of the magnetic interaction is attractive and proportional to γ .

The repulsive force comes from the slight inclination of the levitator magnetic moment (θ), whose horizontal component interacts with the horizontal magnetic field generated by the rotor. Seeing that the north and south poles of both magnets face each other (see Fig. 2), this interaction is repulsive, like

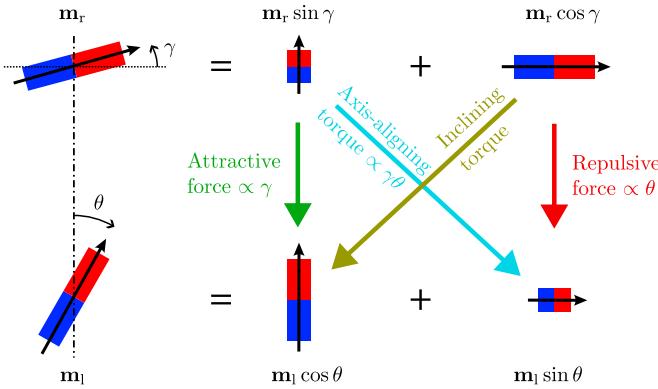


FIG. 2. Schematics of the magnetic interactions (forces and torques) between the rotor magnet and the levitating magnet.

the one between two parallel dipoles. Its intensity is proportional to the polar angle θ .

Aside from the qualitative explanation, one can rigorously compute the forces acting between the two dipoles. The magnetic field of the rotor magnet at the center of mass of the levitating magnet reads [13]

$$\mathbf{B}_r(L) = \frac{\mu_0 m_r}{4\pi r^3} (\cos \gamma \mathbf{j} + 2 \sin \gamma \mathbf{k}). \quad (1)$$

Thus, the magnetic force acting on the levitating magnet is

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \nabla(\mathbf{m}_l \cdot \mathbf{B}_r(L)) \\ &= \frac{3G}{r^4} ((2 \sin \gamma \cos \theta - \sin \theta \cos \gamma) \mathbf{k} + \cos(\theta - \gamma) \mathbf{j}) \\ &\approx \frac{3G}{r^4} ((2\gamma - \theta) \mathbf{k} + \mathbf{j}) \quad \text{with } G = \frac{\mu_0 m_r m_l}{4\pi}. \end{aligned} \quad (2)$$

The direction \mathbf{j} rotates at rate ω in the inertial laboratory frame, so that the corresponding force component has vanishing time average. The corresponding orbiting of the levitating magnet in the plane normal to the axis is imperceptible experimentally, due to inertia at these high rotation rates. We therefore neglect this motion in the following.

The vertical force comprises two components of opposite directions. In our experiment γ is fixed, but we observe experimentally that the levitator tilt θ strongly varies with the distance r between the two magnets. An equilibrium position for the motion along the vertical axis is reached when

$$\theta = 2\gamma \quad (3)$$

is verified. At this stage, however, the inclination of the levitator θ remains unknown, so that Eq. (3) tells us little about the equilibrium position for the levitator. In order to predict the equilibrium distance, one needs to understand the relationship between the polar angle, θ , and the distance, r . We will now show that the torque balance provides this dependency.

C. Torque balance

To study the inclination of the levitating magnet, one can work in the frame of reference in rotation at rate ω . The angle θ is given by the equilibrium between all the different torques acting on the levitating magnet. The magnetic torque Γ can be decomposed into two contributions. The horizontal

component of the rotor magnetic moment and the vertical component of the levitator magnetic moment interact through the horizontal magnetic field generated by the rotor, inducing an inclining torque, which tends to align the levitator in the reverse horizontal direction, so that the opposite poles of both contribution face each other.

In contrast, the small vertical magnetic moment of the rotor creates a vertical magnetic field, and its action on the horizontal magnetic moment of the levitator creates an axis-aligning torque, which tends to align the levitator with the rotation axis. Since this contribution is proportional to both γ and θ , which are chosen to be small, it is always negligible compared to the inclining torque:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \mathbf{m}_l \times \mathbf{B}_r(L) \\ &= \frac{-G}{r^3} (\cos \gamma \cos \theta + 2 \sin \gamma \sin \theta) \mathbf{i} \quad \text{with } G = \frac{\mu_0 m_r m_l}{4\pi} \\ &\approx \frac{-G}{r^3} (1 + 2\gamma \theta) \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (4)$$

If this torque were static, the magnet would align with the field on a timescale $\sqrt{I_{\perp}/\Gamma}$. The observed levitator orientation almost aligned with the rotation axis is possible only if the torque changes orientation on a shorter timescale. The minimum rotation rate should therefore scale as $\sqrt{\Gamma/I_{\perp}}$. Using the magnetic moment of the magnet used and typical levitation distances gives a minimum rotation frequency of ~ 100 Hz, which is the correct order of magnitude.

We now need to apply the laws of mechanics of an axially symmetric rigid body rotating around a fixed point (which are formally identical to the ones governing the movement of a symmetric spinning top). By applying the angular momentum theorem to the levitating magnet at point L (see Fig. 1) in the rotating frame of reference [14], we obtain

$$\Gamma \cdot \mathbf{K} = I_{\parallel} \frac{d\omega_s}{dt} \quad \text{with } \omega_s = \omega \cos \theta + \omega_K, \quad (5)$$

$$\Gamma \cdot \mathbf{J} = I_{\perp} (\dot{\omega} \sin \theta + 2\omega \dot{\theta} \cos \theta) - I_{\parallel} \dot{\theta} \omega_s, \quad (6)$$

$$\Gamma \cdot \mathbf{I} = I_{\perp} \ddot{\theta} + I_{\parallel} \omega \omega_s \sin \theta - I_{\perp} \omega^2 \cos \theta \sin \theta. \quad (7)$$

The quantity ω_s is the levitating magnet spin, i.e., the angular rotation frequency of the magnet around its own magnetic moment, in the laboratory frame of reference. It is accessible experimentally for small polar angle θ and is always observed to be considerably smaller than the rotor frequency ω . Indeed, levitation can be obtained for a levitator with no or even reverse spin. When unconstrained, however, the levitator will eventually start spinning in the same direction as the rotor. Yet, the spinning rate of the levitator remains five to ten times smaller than that of the rotor. Note that, since we are interested in the rapid (on the timescale of one cycle) dynamics of the evolution of θ , we consider an inviscid situation with no dissipation. Air drag, as well as dissipation due to eddy currents, need not be taken into account on such short timescale, where inertia and magnetic actions largely dominate. The quantity ω_K represents the speed of rotation of the magnet around its magnetic moment in the rotating frame of reference turning at speed ω , in which the direction of the magnetic moment is fixed.

Due to the fact that the magnetic torques cannot be colinear to the magnetic moment of the levitator, we have

$$\frac{d\omega_s}{dt} = 0, \quad (8)$$

so that the quantity ω_s is conserved. Indeed, we always observe experimentally that ω_s is constant (with $\sim 2\%$ margin) for all the duration of an experiment. We always observe ω_s to be inferior to ω , being often negligible. It is also possible to change this quantity using a string attached to the levitator or a static magnet on the side of the experiment, and still observe levitation. This justifies in the following that we neglect the role of ω_s . But in the general case we have $\omega_s \neq 0$, as can be seen in the Supplemental Movies we provide [12] (see Supplemental Movies S1–S3) or those from Hermansen *et al.* [11], even though their model predicts ω_s to be null at all times.

Multiplying Eq. (6) by $\sin \theta$ gives us

$$\frac{dL_k}{dt} = 0 \quad \text{with} \quad L_k = I_{\perp} \omega \sin^2 \theta + I_{\parallel} \omega_s \cos \theta, \quad (9)$$

which is a second conserved quantity, corresponding to the angular momentum along the axis \mathbf{k} . And since both ω and ω_s are unchanging, we necessarily have $\theta = \text{cst}$. In the inviscid situation that we placed ourselves in, valid for the shortest timescales, the problem is mathematically extremely constrained and the inclination of the levitating magnet cannot change significantly.

We can now use Eq. (7) to find the value of θ :

$$-\frac{G}{r^3} (1 + 2\gamma\theta) = (I_{\parallel} \omega \omega_s - I_{\perp} \omega^2)\theta. \quad (10)$$

On the left-hand term of Eq. (10), we see the magnetic torque formed of the two contributions discussed earlier. On the right-hand term we find the inertial torque, which comes from the fact that we placed ourselves in the rotating frame of reference. There are two contributions to the inertial torque.

The leftmost term consists of the gyroscopic torque, proportional to the axial moment of inertia, which tends to incline the levitator toward the vertical axis. This is the term that governs the equilibrium of spinning tops and gyroscopes, but here this term is not dominating as ω_s is usually small. Indeed, at first order, the levitating magnet is not properly spinning around the vertical axis: rather its magnetic moment is precessing on a cone around the vertical axis, but a point on the equator of the levitator hardly spins around said axis.

The last term consists of the centrifugal contribution of the inertial torque. It is the torque generated by the addition of all the centrifugal forces along the levitator, which is proportional to the transverse moment of inertia and tends to lay down the levitator in the horizontal plane perpendicular to the rotation axis. Note that this torque is termed "gyroscopic" in Ref. [11] because of formal resemblance, in the rest frame of the levitator where it has spin $-\omega$, thus slightly stretching the textbook usage as a torque linked to proper spin [15–18]. We favor a distinct naming to stress an original feature of this kind of magnetic levitation, and a fundamental difference compared to the levitron: here the levitator is not a gyroscope, and gyroscopic effects, if any, are destabilizing.

Using $\theta, \gamma \ll 1$ and $\omega_s \ll \omega$, we can keep only the dominating terms of Eq. (10) to see that the value of θ is given

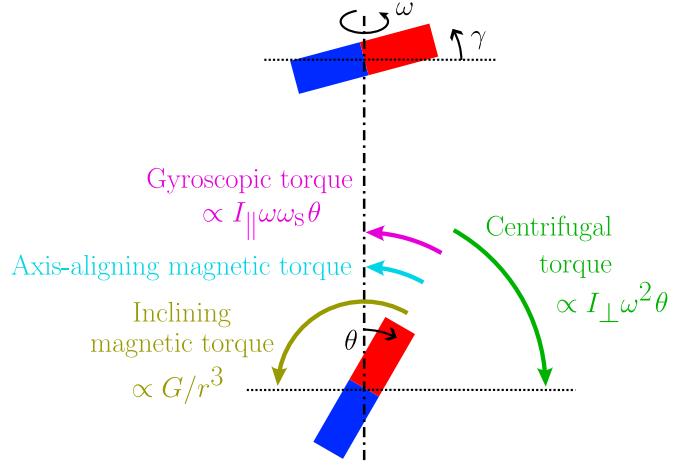


FIG. 3. The different torques in play. The magnetic torque is the sum of an inclining torque, which tends to lay the magnet down to $\theta = -\pi/2$, and an axis-aligning torque, which pushes θ to 0. Since we are in the rotating frame of reference, we see torques of inertial origin: the gyroscopic torque which, as for a spinning top, straightens up the magnet to the vertical, and the centrifugal torque, i.e., the torque resulting from centrifugal forces, that tends to incline the levitating magnet.

by a balance between the centrifugal inertial torque and the inclining magnetic torque as illustrated in Fig. 3. We deduce from this the dependency of θ in r :

$$\theta \approx \frac{G}{r^3} \frac{1}{I_{\perp} \omega^2}. \quad (11)$$

At short times, the angle of inclination of the levitating magnet thus varies as $1/r^3$.

D. Conclusion on the levitation mechanism

The levitation takes place because of the balance between the attractive component of the magnetic force, which only depends on the constant inclination angle of the rotor γ , and its repulsive component, which depends on the inclination angle of the levitator θ . According to the torque balance condition, on short timescales we always have $\theta(r) \propto 1/r^3$. Therefore, we can now draw the whole physical picture, using a potential energy diagram depicted in Fig. 4.

In this figure, the repulsive and attractive components are represented and the resulting potential energy is plotted as a function of the distance between the two magnets. One can see that the energy landscape exhibits a potential well which defines the stable position for the levitator. For completeness, the effect of gravity was added.

When the magnets are close, the magnetic torque increases, and to keep the equilibrium the centrifugal torque also augments, so the levitating magnet leans toward the horizontal. This effect strongly increases the repulsive magnetic force. When the levitating magnet is further away, the attractive magnetic force gains importance, until an equilibrium position is attained. The addition of gravity deforms the energy well, and makes the situation metastable, as illustrated in Fig. 4.

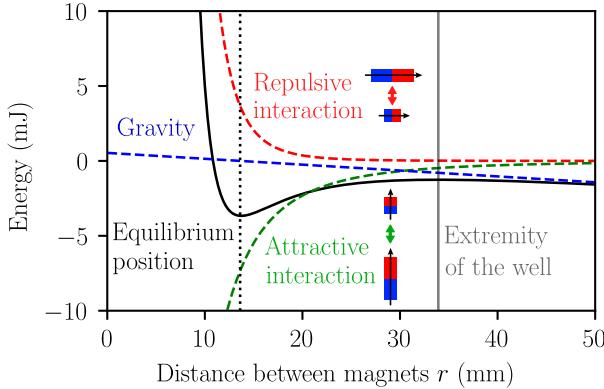


FIG. 4. Potential energy diagram as a function of the distance between magnets r . This corresponds to the point $\omega = 1362$ rad/s of Fig. 8. The equilibrium position results from an equilibrium between an attractive term $\propto -1/r^3$ and a repulsive term $\propto \theta/r^3$. Since $\theta \propto 1/r^3$, the repulsive interaction potential energy is as $1/r^6$. The equilibrium position is at the minimum of the energy well, where small oscillations can take place. When the levitator is below the rotating magnet, gravity makes the situation metastable and beyond a critical distance the levitator will run off to $r \rightarrow \infty$. Note that if the levitator is placed above the rotor, the metastability turns into a complete stability for vertical displacements as gravity acts in the opposite direction.

III. EXPERIMENTAL VERIFICATION

In this section, we present our experimental results and quantitatively discuss their agreement with the model developed above.

A. Torque balance

Experiments in this subsection were conducted using as a rotor a 12.7 mm diameter spherical magnet of remanence (1.32 ± 0.03) T glued to an aluminum bit fitted in the chuck of a motor tool (*Dremel 4250*) and spun between 12 000 and 18 000 rpm. Its magnetic moment is inclined by an angle $\gamma = (6 \pm 1)^\circ$ from the horizontal. The levitating magnet was a cylinder-shaped magnet (5 mm height, 5 mm diameter) weighing 746 mg with a remanence of (1.35 ± 0.02) T. During the initialization of the levitation we used an aluminium block as induction damper which was removed once the levitation has started.

The setup was backlit by an LED panel and a small portion of wire of negligible weight was attached to the levitating magnet to keep track of the rotation around its own axis. In order to resolve all the time scales involved, videos were taken with a high-speed camera, Chronos CR14-1.0, at a frame rate of 8810 frames per second. The images were analyzed using in-house *Python* routines in order to extract the distance between the magnets r and the polar angle θ .

An example of the data obtained can be seen in Fig. 5. The levitating magnet is in a bound state for more than 4 s, as it performs small oscillations around the equilibrium position (in a potential well similar to that of Fig. 4, a representation of which is given in the Supplemental Material S4 [12]). One can easily observe that the levitating distance r and the polar angle

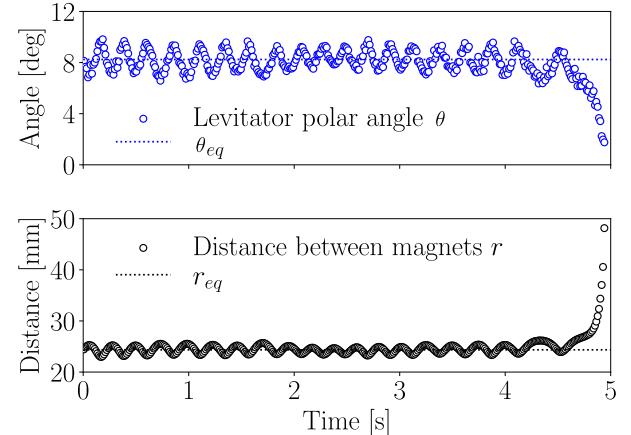


FIG. 5. Angle of the levitating magnet and distance between the two magnets as a function of time for one given rotor frequency. For this recording the rotor was turning at $f = (216 \pm 2)$ Hz.

θ are highly correlated. Near the end of the recording, we see the magnet falling vertically as r increases toward infinity.

The data allows us to validate the scaling law of Eq. (11), arising from the equilibrium of magnetic and inertial centrifugal torques in a conservative system, along with approximations that are appropriate in our setup. The period of the oscillations (typically 0.2 s) is much greater than that of the imposed rotation (smaller than 5 ms), leaving enough time for the inclination of the levitator, $\theta(t)$ to adapt to a varying distance $r(t)$.

The data in Fig. 6, in which the angle θ is plotted against the distance r between the magnets, is in excellent agreement with the predicted power law, even during the fall of the

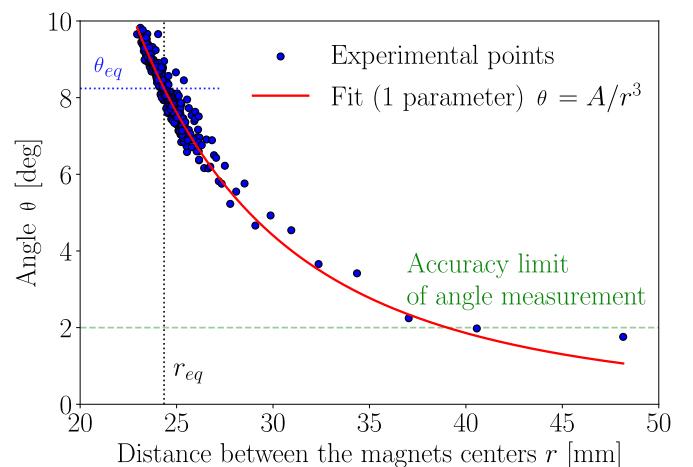


FIG. 6. The inclination angle of the levitation magnet as a function of the distance between the two magnets, for a rotor frequency of $f = (216 \pm 2)$ Hz. According to our theoretical model [Eq. (11)], we expect a power law of exponent -3 . The experimental values are well fitted by A/r^3 , red solid line, where A is an adjustable parameter (see text). The equilibrium values for the distance r_{eq} and the inclination θ_{eq} are indicated in dotted lines. By performing small oscillations, the levitating magnet explores the potential well, while verifying the scaling law. During the fall of the magnet, the scaling law is still respected.

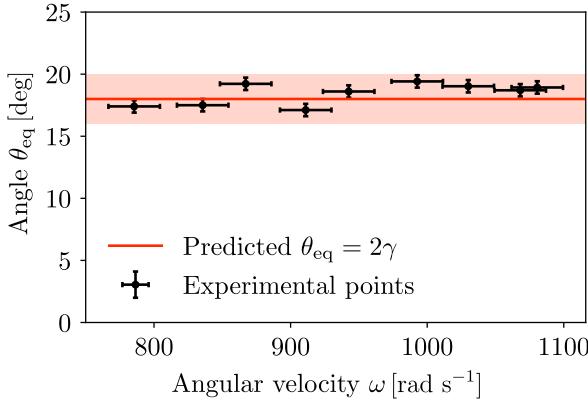


FIG. 7. Measured value of the angle θ_{eq} at equilibrium for different rotor angular velocities. The angle γ is such that $\gamma = (9 \pm 1)^\circ$. We observe that Eq. (3) holds up to experimental precision.

levitating magnet. The fitting parameter takes the value $A_{\text{exp}} = (2.08 \pm 0.34) \times 10^{-6} \text{ rad m}^3$, while the predicted value using Eq. (11) is $A_{\text{th}} = (2.32 \pm 0.08) \times 10^{-6} \text{ rad m}^3$, which is compatible with the experiments. We thus correctly identified the mechanisms behind the scaling law and demonstrates the robustness of our nondissipative approach for short times.

B. Equilibrium state: Polar angle and distance

Experiments in this subsection were performed using a setup similar to the one presented in the previous subsection. The rotor was a 10 mm diameter spherical magnet with remanence 1.22 T to 1.26 T. The tilt angle of the rotor was chosen to be $\gamma = (9 \pm 1)^\circ$ and the rotation speed was varied. The resulting equilibrium distance and the equilibrium inclination of the levitator were measured using a large block of aluminum which serves as an inductive damper for the oscillations reported in Fig. 5. Each data point corresponds to an individual run which was filmed using a high-speed camera. We used *Python* image analysis tools to extract the distance between magnets as well as the polar angle θ , and an exploitation of the spectrogram of the sound made by the motor tool to determine the rotation frequency.

As a reminder, according to Eq. (3), the mean polar angle θ should be independent of the frequency and is equal to twice the rotor inclination γ . To confirm this, we used as levitating magnet a cylindrical magnet with height 12.5 mm and diameter 4 mm of remanence 1.29 T to 1.32 T. Exploiting a video of the experiment, we measured the angle of inclination of the levitator θ . We were limited in precision when measuring the angle because it exhibits small variations due to vertical oscillations. Figure 7 indeed shows that the inclination of the levitating magnet does not depend on the rotation speed, and remains equal to 2γ with experimental uncertainties. Again, these results confirm the prediction of our dipolar model.

Combining Eqs. (3) and (11), one finds that the equilibrium condition (in the no gravity limit) reads

$$r = \sqrt[3]{\frac{G}{2\gamma I_{\perp}\omega^2}} \propto \omega^{-2/3}. \quad (12)$$

The experimental measurements of the equilibrium distance as a function of the rotation speed are plotted in Fig. 8.

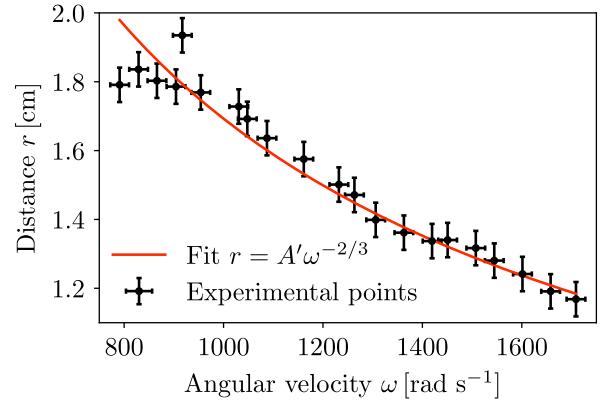


FIG. 8. Equilibrium distance r between the two magnets as a function of the rotation speed ω . The experimental data is correctly described by a model $r = A'\omega^{-2/3}$, with A' a free parameter, which validates the theoretical result in Eq. (12) (see text).

For these experiments, the levitating magnet was a sphere of diameter 10 mm and remanence 1.22 T – 1.26 T. Errors in ω correspond to the measurement of the rotation speed from video acquisition and errors in r are determined by the fluctuations in position during movement for one acquisition. Again, the predicted $\omega^{-2/3}$ power law is in excellent agreement with the data. The fitting parameter takes the value $A'_{\text{exp}} = (1.69 \pm 0.02) \text{ m s}^{2/3}$, while the predicted value using Eq. (12) is $A'_{\text{th}} = (1.48 \pm 0.06) \text{ m s}^{2/3}$. The disagreement between these two values can be explained by the simplicity of our model, which induces systematic errors. In particular, as the magnetic field of the magnets varies strongly at distances less than a few radii, the assimilation of magnets to point dipoles is a considerable approximation. Consequently, the actions felt by the levitating magnet are not exactly the force and torque given in Eqs. (2) and (4). Nevertheless, these two values being close to each other and of the same order of magnitude confirms that the model correctly encompasses the main physical effects. Note that levitation can be obtained for lower values of the rotation speed but as ω decreases, the role played by gravity become increasingly preeminent.

IV. CONCLUSION/PERSPECTIVE

In this article, we have proposed a clear explanation of the levitation phenomenon first described by Ucar [1]. Our approach focuses on the case in which the rotor is slightly tilted from the horizontal, which creates a two-component magnetic interaction, leading to the existence of a stable point. Our model is compatible with the approaches of Ucar [1] and Hermansen *et al.* [11], but instead of relying on numerical simulation of the dynamical system, we used appropriate simplifications and analytic calculations to draw a comprehensible picture of how the levitation emerges from the interactions. Moreover, we derived simple scaling laws that match our experimental data quantitatively.

The theory and results presented here are obtained with working assumptions whose range of applicability needs to be discussed and tested.

First, the scaling given by Eq. (11) is derived in the absence of any source of dissipation. This is a reasonable

assumption which holds for low rotation speeds and which remains valid at short timescales. While it allows for the explanation of the levitation, arguably in a more realistic approach, encompassing wider timescales and studying the destabilization mechanism and the lifetime of the phenomenon, dissipation, coming either from air drag or eddy currents heat loss, should be included as well as energy injection from the rotor magnet.

In the regime presented here, as far as we can tell, the two magnetic moments remain in the same (rotating) plane, one magnet rotating, the other precessing. In general a lag between the two can exist. Indeed, a phase angle between the rotor and the levitator of $(6.4 \pm 5.1)^\circ$ was observed by Hermansen *et al.* [11]. Such a small phase shift has no significant impact on our model and its conclusions, as it induces only a quadratic correction on the magnetic torque (Appendix A). As a lag induces axial torque (although quadratically small), it may, however, be an important degree of freedom for the dynamics on longer time scales and for the stability of the system.

Our model treats the two magnets as pointlike dipoles. While it is known that spheres of uniform magnetic material indeed create a dipolar field, the deviation from such a field for nonspherical or unevenly magnetized levitators may come into play when the magnets get close to one another. Note, however, that the levitation is possible even when considering strongly nonspherical, and thus less dipolar, levitating magnets (Supplemental Movie S2 [12]). The limitations mentioned above imply corrections merely of higher order, since our model quantitatively describes the data well.

In conclusion, we provided a first quantitative experimental verification of the stabilizing mechanism for an original magnetic levitation in a rotating dipolar field that differs fundamentally from the spin stabilization of the levitron. Compared to the latter which balances weight with magnetic repulsion, trapping occurs only through magnetic interactions which have both an attractive and a repulsive contribution. The trapping energy in the milli-Joule range (Fig. 4 and [1]) is easily two orders of magnitude above that of the levitron, making this levitation far easier to reproduce. Last but not least, here dissipation helps in reaching the equilibrium position, which is maintained as long as the second magnet is spun, while dissipation limits the levitron's duration and stability. There are several interesting ways to deepen the understanding of the phenomenon that we have not explored. We believe that the most promising one would be to add one (or several) degree of freedom to the small-angle model to study how the destabilization occurs and what dynamical path it takes to escape the potential well. It would also be interesting to have an estimation of the lower bound of the rotor speed allowing for levitation, which could be quantitatively compared to experimental measurements such as the ones made by Hermansen *et al.* [11].

ACKNOWLEDGMENTS

G.L., S.L., A.D., and M.B. would like to thank O.-S. Soumarasing who greatly helped designing and manufacturing parts of the experimental apparatus, L. Padilla and W. Toutain for technical help as well as the professors teaching the experimental physics course at Université Paris Cité. R.D., T.P., H.R., and N.T. are very grateful to N. Plimon for the insightful discussions they had during the course of this project.

APPENDIX A: EFFECT OF LEVITATOR PRECESSION PHASE LAG

Consistent with our experimental observations, we assume that the levitator's magnetic moment is contained in the same vertical plane as the magnetic moment of the rotor. Here we discuss the implications of a small but nonzero constant phase shift between the horizontal components that rotate at the same rate around the vertical. When the magnetic moment of the rotor is aligned with $-\mathbf{j}$, note $\mathbf{m}_l = m_l(-\sin \theta \sin \delta \mathbf{i} - \sin \theta \cos \delta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k})$ the moment of the levitator, whose projection in the (\mathbf{i}, \mathbf{j}) plane lags by an angle δ behind that of the rotor. With Eq. (1) the magnetic torque then reads

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma} &= \mathbf{m}_l \times \mathbf{B}_r(L) \\ &= \frac{-G}{r^3} ((\cos \gamma \cos \theta + 2 \sin \gamma \sin \theta \cos \delta) \mathbf{i} \\ &\quad - 2 \sin \gamma \sin \theta \sin \delta \mathbf{j} + \sin \gamma \sin \theta \cos \delta \mathbf{k}) \\ &\approx \frac{-G}{r^3} ((1 + 2\gamma \theta) \mathbf{i} + \theta \delta \mathbf{k}) \quad \text{with} \quad G = \frac{\mu_0 m_r m_l}{4\pi}. \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

Compared to the torque (4), the inclining magnetic torque $\propto \mathbf{i}$ is unchanged to second order in small angles, justifying that we neglect the phase δ . Interestingly, there is a second order term $\propto \mathbf{k}$ that tends to change δ , which may play a role in stability and in determining the levitator spin around its axis.

APPENDIX B: LEVITATOR ORBITING AROUND ROTATION AXIS

If we consider that the levitator is at $\mathbf{r} = -z\mathbf{k} + \delta_i\mathbf{i} + \delta_j\mathbf{j}$, then we can compute the force acting on the levitator. Considering a small deviation from the equilibrium presented above, we take $\gamma, \theta \ll 1$ and also consider $\delta_i, \delta_j \ll r$. Last, we place ourselves at the equilibrium position on the vertical axis, i.e., we consider Eq. (3) to be valid. We then obtain, up to second order in $\gamma, \theta, \delta_i/r, \delta_j/r$,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{3G}{r^4} \left(4 \frac{\delta_j}{r} \mathbf{k} - \left(2\gamma \frac{\delta_i}{r} + 5 \frac{\delta_i \delta_j}{r^2} \right) \mathbf{i} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + 2\gamma \frac{\delta_j}{r} - \frac{\delta_i^2}{2r^2} - \frac{11\delta_j^2}{2r^2} \right) \mathbf{j} \right). \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

In the lateral direction, the leading term is $\mathbf{F}^{(0)} = 3G/r^4 \mathbf{j}$ which is seen on Eq. (2), all other terms being of order two. The discussion of the stability of a very small displacement in the lateral direction would thus necessitate a quadratic development of all the equations previously computed and an analysis over long time scales for which dissipation as well as energy injection can become relevant. Note that since it only stays in the same direction during a short time (of order $1/\omega$), the transverse magnetic force $F \approx 3G/r^4 \mathbf{j}$ can only move the magnet of a distance of order

$$\frac{\delta_j}{r} \sim \frac{F}{r m \omega^2} = \frac{6\gamma I_\perp}{m r^2} \approx 6\gamma \left(\frac{a}{r}\right)^2 \ll 1,$$

where a is the characteristic size of the levitating magnet. Since this displacement is small, the magnet stays, to a good approximation, on the rotation axis. As the levitator moves in the opposite direction half a period later, this magnetic force effectively averages at zero.

- [1] H. Ucar, Polarity free magnetic repulsion and magnetic bound state, *Symmetry* **13**, 442 (2021).
- [2] J. Jansen, C. Van Lierop, E. A. Lomonova, and A. J. Vandenput, Magnetically levitated planar actuator with moving magnets, *IEEE Trans. Ind. Appl.* **44**, 1108 (2008).
- [3] H.-W. Lee, K.-C. Kim, and J. Lee, Review of maglev train technologies, *IEEE Trans. Magn.* **42**, 1917 (2006).
- [4] D. Supreeth, S. I. Bekinal, S. R. Chandranna, and M. Doddamani, A review of superconducting magnetic bearings and their application, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **32**, 1 (2022).
- [5] M. Perdriat, C. Pellet-Mary, T. Copie, and G. Hétet, Planar magnetic Paul traps for ferromagnetic particles, *Phys. Rev. Res.* **5**, L032045 (2023).
- [6] M. D. Simon, L. O. Heflinger, and S. Ridgway, Spin stabilized magnetic levitation, *Am. J. Phys.* **65**, 286 (1997).
- [7] T. Jones, M. Washizu, and R. Gans, Simple theory for the Levitron®, *J. Appl. Phys.* **82**, 883 (1997).
- [8] M. M. Michaelis, Horizontal axis Levitron—A physics demonstration, *Phys. Educ.* **49**, 67 (2014).
- [9] Magnet tricks: Insane discovery with neodymium magnets (2018), <https://www.youtube.com/watch?v=zQ23j1hB-1o>.
- [10] The action lab: Magnetic locking without a superconductor! (2021), <https://www.youtube.com/watch?v=V5FyFvgxUhE>.
- [11] J. M. Hermansen, F. L. Durhuus, C. Frandsen, M. Beleggia, C. R. Bahl, and R. Bjørk, Magnetic levitation by rotation, *Phys. Rev. Appl.* **20**, 044036 (2023).
- [12] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevE.110.045003> for an extract of a typical experimental video (S1); a demonstration of the levitation of different shapes of magnets (S2); a demonstration of the levitation of cylindrical magnets of various aspect ratios (S3); the potential energy diagram computed with the parameters of the experiments displayed in Figs. 5 and 6 (S4).
- [13] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. (J. Wiley & Sons Inc, New York, 1999).
- [14] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Vol. 1 (CUP Archive, Moscow, Russia, 1960).
- [15] S. Timoshenko and D. H. Young, *Advanced Dynamics* (McGraw–Hill, New York, 1948).
- [16] G. R. Fowles and G. L. Cassiday, *Analytical Mechanics*, 5th ed. (Thomson Brooks/Cole, Belmont, California, 1997).
- [17] H. M. Yehia, *Rigid Body Dynamics: A Lagrangian Approach*, Advances in Mechanics and Mathematics, Vol. 45 (Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 2022).
- [18] J.-P. Pérez, *Mécanique: Fondements et applications*, 7th ed. (Dunod, Paris, France, 2022).

C

GALERIE

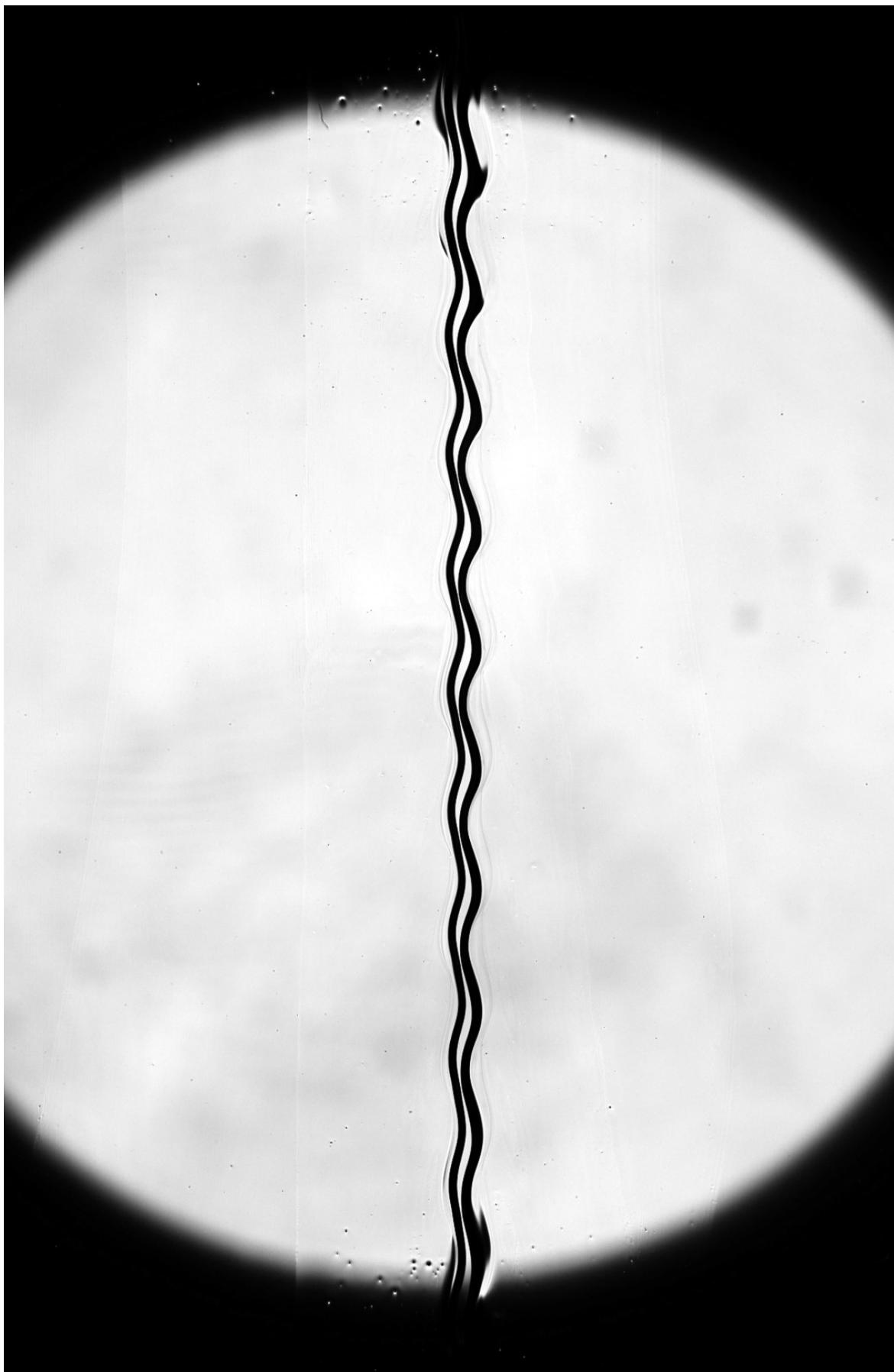
Un de principaux attraits de la physique dite « macroscopique » est la capacité à pouvoir observer directement les objets d'étude. Une des choses que j'apprécie particulièrement dans ce domaine, c'est donc de pouvoir étudier des phénomènes qui, outre leur intérêt sur le plan scientifique, ne sont pas dépourvus de qualité esthétique. C'était aussi, à l'origine, un des principaux moteurs qui m'ont poussé à m'intéresser de plus près à l'instabilité en collier de perles.

En plus des vidéos proposées tout au long de ce manuscrit, j'ai placé dans cette annexe, purement pour le plaisir des yeux, quelques-unes de mes plus belles images du rivelet. J'indique à chaque fois les conditions d'éclairage qui ont permis de les obtenir.

L'image présentée sur la page [209](#) a même eu l'honneur de figurer sur l'affiche de l'édition 2025 des Rencontres du Non-Linéaire, à l'occasion de laquelle j'ai eu la chance de présenter mes travaux au cours d'un exposé long.

- Page [208](#) : *Rivelet sur la lune* (Éclairage parallèle, vignettage dû au diaphragme de l'objectif)
- Page [209](#) : *Rasta rivelet* (Éclairage diffus étendus verticalement vert à gauche et rouge à droite)
- Page [210](#) : *Alerte rouge* (Éclairage diffus rouge sur une échelle réduite)
- Page [211](#) : *Coquelicot* (Éclairages ponctuels rouges à l'infini, faible profondeur de champ)
- Page [212](#) : *Série I* (Collage d'instantanés, séparés dans le temps d'un quart de période d'excitation. Éclairages étendus verticalement, sur les côtés hors du champ de vision, verts à droite et rouges à gauche.)
- Page [213](#) : *Série II* (Même technique que Série I)

Ces images ne sont pas (entièrement) dépourvues d'intérêt scientifique. Sur les premières, on peut souvent visualiser les films de mouillage près du rivelet et déduire des informations qualitatives sur leur géométrie. Sur les dernières, on peut s'amuser à trouver la phase de la réponse linéaire au forçage et, avec un peu plus d'effort, on peut retrouver la condition de phase ([4.24a](#)).





28^e Rencontre du Non-Linéaire

25, 26 et 27 mars 2025

Amphithéâtre Buffon - 15 rue Hélène Brion - Paris 13^e

25 mars

> Le mini-colloque

Acoustique et physique non linéaire

VALENTIN LEROY
GUILLAUME MICHEL

Inscription gratuite et informations
nonlineaire.univ-lille.fr/SNL

Contact

rnl@univ-lille.fr



Imprimé par le département Production documentaire - Université Paris Cité © Photographie de G. Le Lay

26 et 27 mars

> La Rencontre

Exciting (nonlinear) things to do with custom microstructured optical fibres

NICOLAS JOLY (FAU ERLANGEN-NÜRNBERG ET MAX PLANCK INSTITUTE FOR THE SCIENCE OF LIGHT)

Interactions between vertical and horizontal convections: From nuclear safety to the eye of cyclones

MICHAEL LE BARS (IRPHE, CNRS, AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ)

High frequency chaotic waves

STEPHANE NONNENMACHER (LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES D'ORSAY, UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY)

Flow and instabilities of particle-laden fluids

VALERIE VIDAL (LABORATOIRE DE PHYSIQUE, CNRS, ENS DE LYON)

Comité scientifique

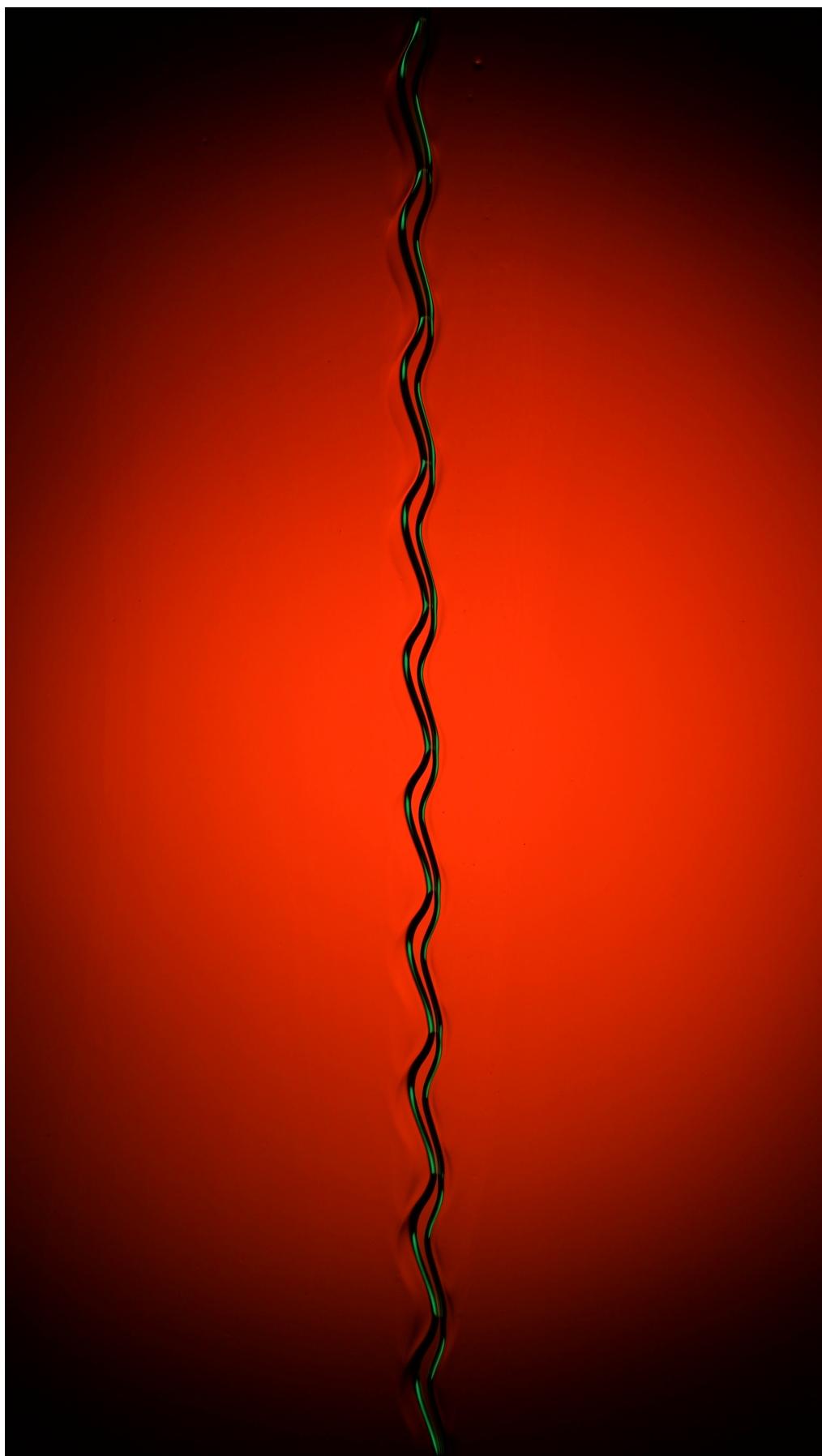
A.-L. Biance, S. Bielawski, P.-P. Cortet,
E. Falcon, M. Gibert, J.-B. Gorce,
X. Leoncini, B. Maury, C. Michel,
G. Michel, F. Pétrélis, C.-T. Pham,
C. Quilliet, E. Reissat et S. Santucci

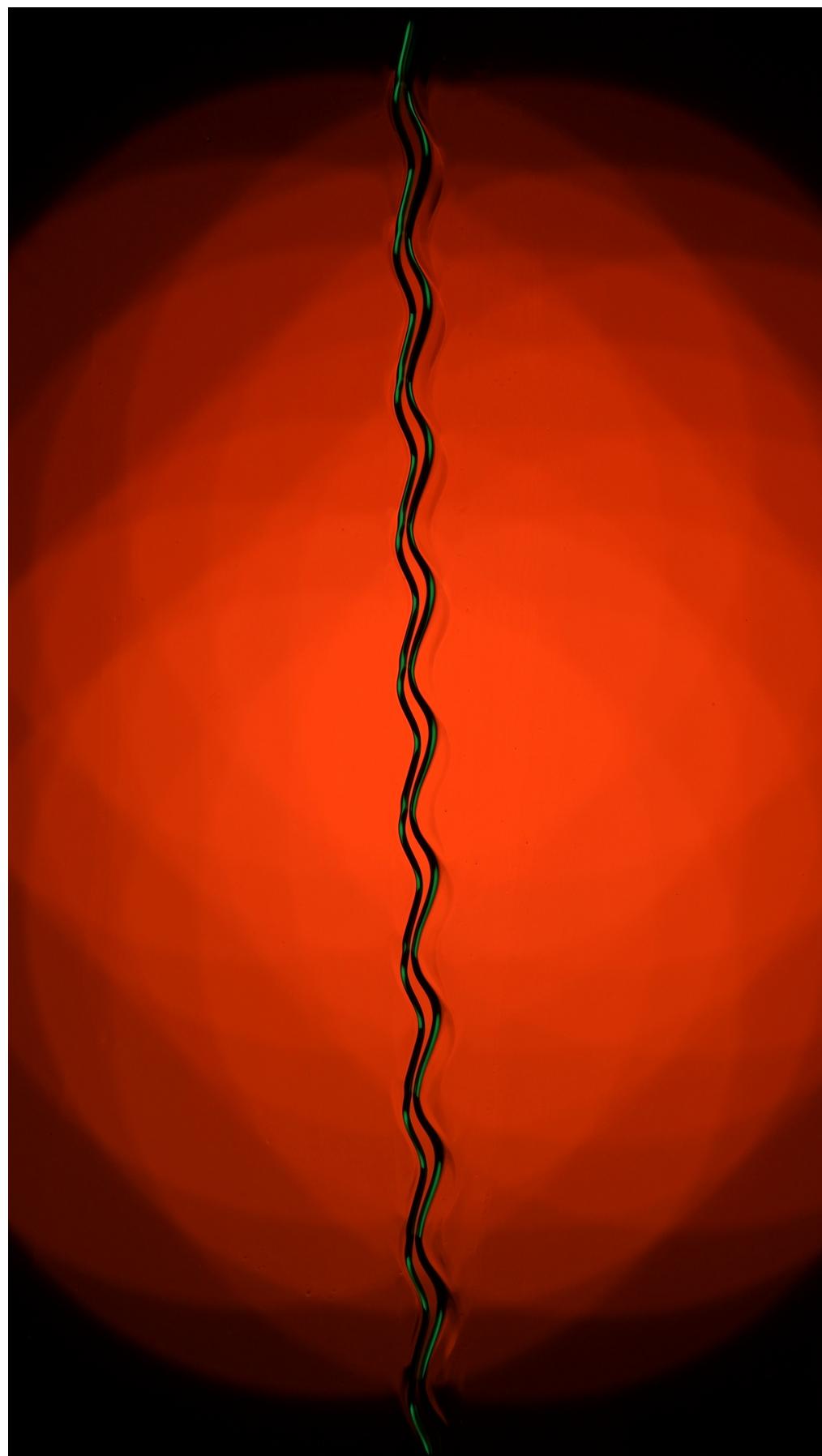
Comité scientifique

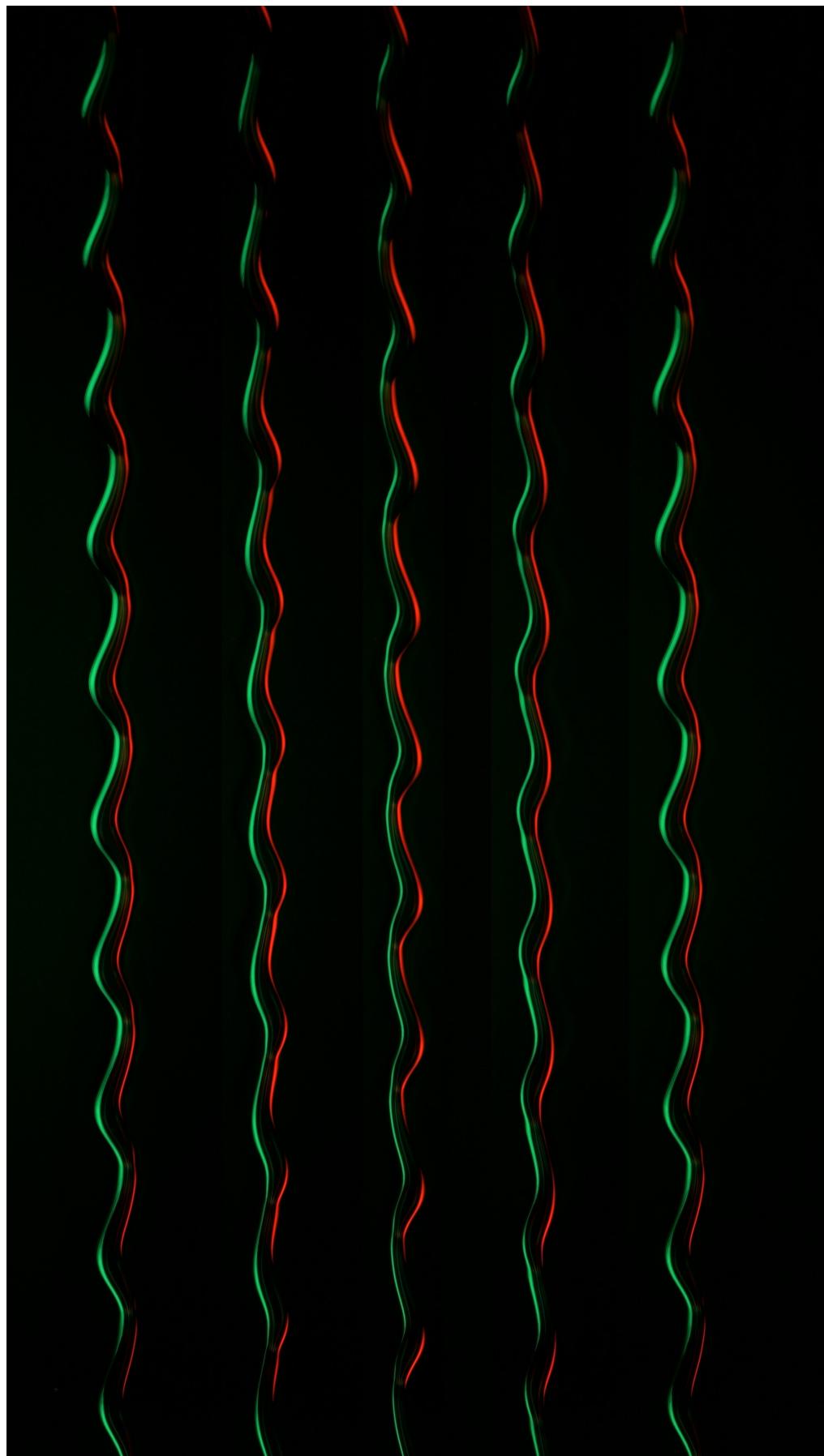
P.-P. Cortet, E. Falcon, M. Gibert,
J.-B. Gorce, F. Pétrélis et C.-T. Pham

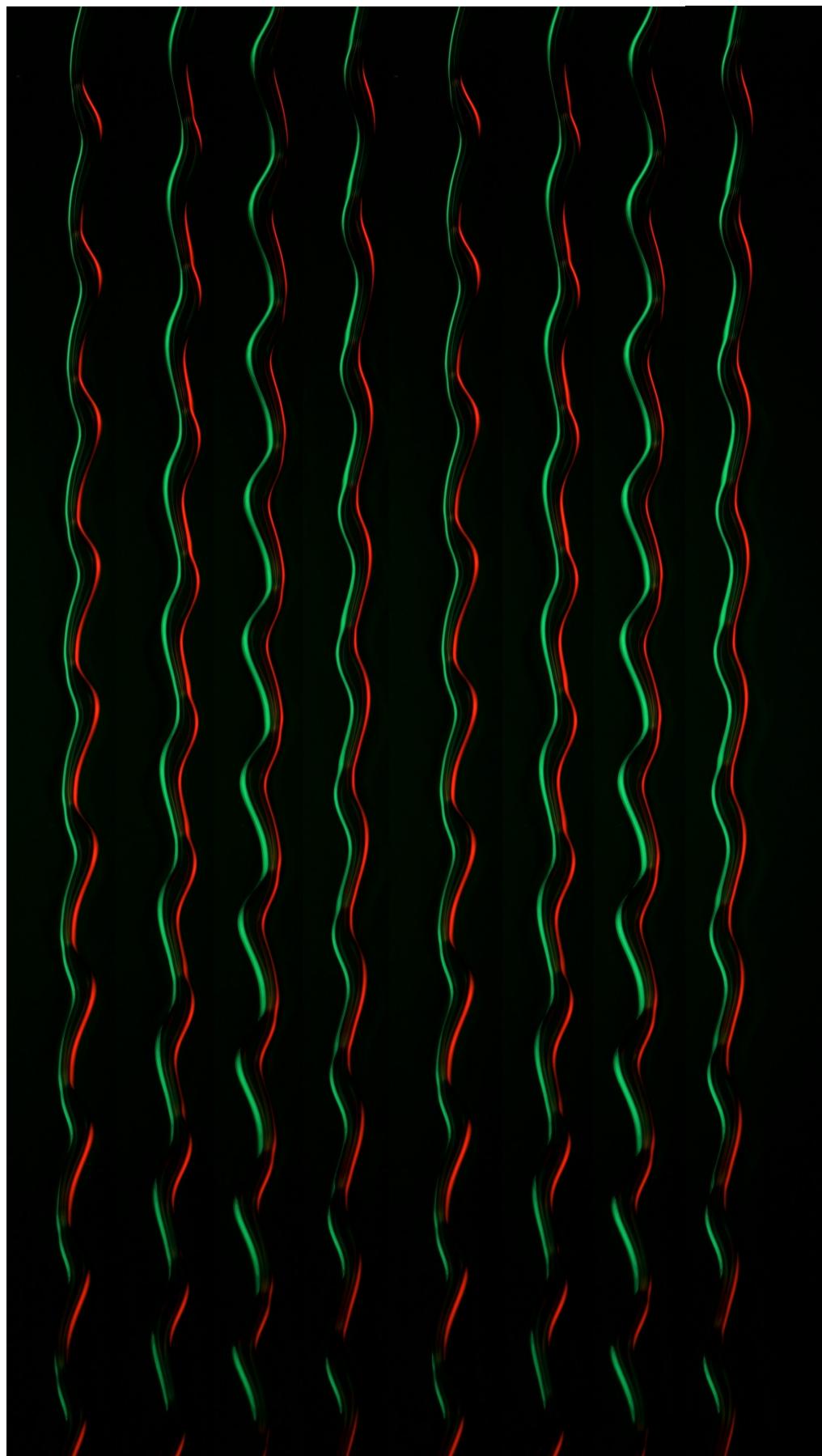
u-paris.fr











BIBLIOGRAPHIE

- Amon, A., M. Nizette et al. (2003). « Bursting Oscillations in Optical Parametric Oscillators ». *Physical Review A*. doi : [10.1103/PhysRevA.68.023801](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.023801).
- Amon, A., P. Suret et al. (2009). « Cooperative Oscillation of Nondegenerate Transverse Modes in an Optical System ». *Physical Review Letters*. doi : [10.1103/PhysRevLett.102.183901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.183901).
- Anand, A. et A. Bejan (1986). « Transition to Meandering Rivulet Flow in Vertical Parallel-Plate Channels ». *Journal of Fluids Engineering*. doi : [10.1115/1.3242574](https://doi.org/10.1115/1.3242574).
- Apffel, B. et al. (2020). « Floating under a Levitating Liquid ». *Nature*. doi : [10.1038/s41586-020-2643-8](https://doi.org/10.1038/s41586-020-2643-8).
- Aravis Project Team (2025). Aravis. Version 0.8. URL : <https://github.com/AravisProject/aravis>.
- Atasi, O. et al. (2018). « How to Measure the Thickness of a Lubrication Film in a Pancake Bubble with a Single Snapshot? » *Applied Physics Letters*. doi : [10.1063/1.5051057](https://doi.org/10.1063/1.5051057).
- Baroud, C. N., F. Gallaire et R. Dangla (2010). « Dynamics of Microfluidic Droplets ». *Lab on a Chip*. doi : [10.1039/C001191F](https://doi.org/10.1039/C001191F).
- Baudoin, M. et al. (2013). « Airway Reopening through Catastrophic Events in a Hierarchical Network ». *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*.
- Benilov, E. S. (1987). « Dynamics of ideal fluid flows over an uneven bottom ». *Journal of Fluid Mechanics*. doi : [10.1017/S0022112087003318](https://doi.org/10.1017/S0022112087003318).
- Bergé, P., Y. Pomeau et C. Vidal (1988). *L'ordre dans le chaos : Vers une approche déterministe de la turbulence*. Paris : Hermann. 352 p.
- Berry, J. D. et al. (2015). « Measurement of Surface and Interfacial Tension Using Pendant Drop Tensiometry ». *Journal of Colloid and Interface Science*. doi : [10.1016/j.jcis.2015.05.012](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2015.05.012).
- Berteloot, G. et al. (2012). « Evaporation of a Sessile Droplet : Inside the Coffee Stain ». *Journal of Colloid and Interface Science*. doi : [10.1016/j.jcis.2011.10.053](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2011.10.053).
- Berthet, R. et al. (2003). « Effect of Multiplicative Noise on Parametric Instabilities ». *Physica D : Nonlinear Phenomena*. Papers from the Workshop on the Complex Ginzburg-Landau Equation : Theoretical Analysis and Experimental Applications in the Dynamics of Extended Systems. doi : [10.1016/S0167-2789\(02\)00684-X](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(02)00684-X).
- Bongarzone, A. et al. (2023). « A Revised Gap-Averaged Floquet Analysis of Faraday Waves in Hele-Shaw Cells ». *Journal of Fluid Mechanics*. doi : [10.1017/jfm.2023.986](https://doi.org/10.1017/jfm.2023.986).
- Bostwick, J. B. et P. H. Steen (2018). « Static Rivulet Instabilities : Varicose and Sinuous Modes ». *Journal of Fluid Mechanics*. doi : [10.1017/jfm.2017.876](https://doi.org/10.1017/jfm.2017.876).
- Boudaoud, A., Y. Couder et M. Ben Amar (1999a). « A Self-Adaptative Oscillator ». *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*. doi : [10.1007/s100510050751](https://doi.org/10.1007/s100510050751).
- (1999b). « Self-Adaptation in Vibrating Soap Films ». *Physical Review Letters*. doi : [10.1103/PhysRevLett.82.3847](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.3847).
- Bretherton, F. P. (1961). « The Motion of Long Bubbles in Tubes ». *Journal of Fluid Mechanics*. doi : [10.1017/S0022112061000160](https://doi.org/10.1017/S0022112061000160).

- Bruinsma, R. (1990). « The Statistical Mechanics of Meandering ». *Journal de Physique*. DOI : [10.1051/jphys:01990005109082900](https://doi.org/10.1051/jphys:01990005109082900).
- Buckmaster, J. D. (1973). « The Buckling of Thin Viscous Jets ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112073000807](https://doi.org/10.1017/S0022112073000807).
- Buckmaster, J. D., A. Nachman et L. Ting (1975). « The Buckling and Stretching of a Viscida ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112075001279](https://doi.org/10.1017/S0022112075001279).
- Cantat, I. (2013). « Liquid Meniscus Friction on a Wet Plate : Bubbles, Lamellae, and Foamsa »). *Physics of Fluids*. DOI : [10.1063/1.4793544](https://doi.org/10.1063/1.4793544).
- Cazaubiel, A. et al. (2019). « Forced Three-Wave Interactions of Capillary-Gravity Surface Waves ». *Physical Review Fluids*. DOI : [10.1103/PhysRevFluids.4.074803](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.074803).
- Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. 1^{re} éd. Oxford : Oxford University Press. 652 p.
- Charru, F. (2007). *Instabilités Hydrodynamiques*. EDP Sciences. Savoirs Actuels. 408 p.
- Couder, Y. et al. (2005). « From Bouncing to Floating : Noncoalescence of Drops on a Fluid Bath ». *Physical Review Letters*. DOI : [10.1103/PhysRevLett.94.177801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.177801).
- Crapper, G. D. et al. (1973). « A Note on the Growth of Kelvin-Helmholtz Waves on Thin Liquid Sheets ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112073001941](https://doi.org/10.1017/S0022112073001941).
- Craster, R. V. et O. K. Matar (2009). « Dynamics and stability of thin liquid films ». *Reviews of modern physics*. DOI : [10.1103/RevModPhys.81.1131](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1131).
- Cruickshank, J. O. et B. R. Munson (1981). « Viscous Fluid Buckling of Plane and Axisymmetric Jets ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112081003467](https://doi.org/10.1017/S0022112081003467).
- Daerr, A. (2018). *Gevcapture*. Version 1.7. URL : <https://gitlab.com/gevcapture/gevcapture>.
- Daerr, A., J. Eggers et al. (2011). « General Mechanism for the Meandering Instability of Rivulets of Newtonian Fluids ». *Physical Review Letters*. DOI : [10.1103/PhysRevLett.106.184501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.184501).
- Daerr, A. et A. Mogne (2016). « Pendent_Drop : An ImageJ Plugin to Measure the Surface Tension from an Image of a Pendent Drop ». *Journal of Open Research Software*. DOI : [10.5334/jors.97](https://doi.org/10.5334/jors.97).
- Daudet, L. et al. (1995). « Secondary Instabilities of Surface Waves on Viscous Fluids in the Faraday Instability ». *Europhysics Letters*. DOI : [10.1209/0295-5075/32/4/005](https://doi.org/10.1209/0295-5075/32/4/005).
- De Ryck, A. et D. Quéré (1994). « Quick Forced Spreading ». *Europhysics Letters*. DOI : [10.1209/0295-5075/25/3/006](https://doi.org/10.1209/0295-5075/25/3/006).
- De Ryck, A. et D. Quéré (1996). « Inertial coating of a fibre ». *Journal of Fluid Mechanics*.
- De Szoeke, R. A. (1983). « Baroclinic instability over wavy topography ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112083001093](https://doi.org/10.1017/S0022112083001093).
- Deegan, R. D. et al. (1997). « Capillary Flow as the Cause of Ring Stains from Dried Liquid Drops ». *Nature*. DOI : [10.1038/39827](https://doi.org/10.1038/39827).
- Derjaguin, B. (1943). « On the Thickness of the Liquid Film Adhering to the Walls of a Vessel after Emptying ». *Progress in Surface Science*. DOI : [10.1016/0079-6816\(93\)90022-N](https://doi.org/10.1016/0079-6816(93)90022-N).
- Devaud, M. et T. Hocquet (2017). « An Essay on the Vibrating String and Its Nonlinearities ». URL : <https://hal.science/hal-01532358>.

- Dolganov, P. V., N. A. Spiridenko et A. S. Zverev (2024). « Dynamics of Viscous Droplet Coalescence in the Confined Geometry of Optical Cells ». *Physical Review E*. DOI : [10.1103/PhysRevE.109.014702](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.109.014702).
- Douady, S. (1990). « Experimental Study of the Faraday Instability ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112090003603](https://doi.org/10.1017/S0022112090003603).
- Douady, S., S. Fauve et O. Thual (1989). « Oscillatory Phase Modulation of Parametrically Forced Surface Waves ». *Europhys. Lett.* DOI : [10.1209/0295-5075/10/4/005](https://doi.org/10.1209/0295-5075/10/4/005).
- Drenckhan, W., S. Gatz et D. Weaire (2004). « Wave Patterns of a Rivulet of Surfactant Solution in a Hele-Shaw Cell ». *Physics of Fluids*. DOI : [10.1063/1.1766211](https://doi.org/10.1063/1.1766211).
- Drenckhan, W., H. Ritacco et al. (2007). « Fluid Dynamics of Rivulet Flow between Plates ». *Physics of Fluids*. DOI : [10.1063/1.2757153](https://doi.org/10.1063/1.2757153).
- Duprat, C., C. Ruyer-Quil et F. Giorgiutti-Dauphiné (2009). « Spatial Evolution of a Film Flowing down a Fiber ». *Physics of Fluids*. DOI : [10.1063/1.3119811](https://doi.org/10.1063/1.3119811).
- Duprat, C., C. Ruyer-Quil, S. Kalliadasis et al. (2007). « Absolute and Convective Instabilities of a Viscous Film Flowing Down a Vertical Fiber ». *Physical Review Letters*. DOI : [10.1103/PhysRevLett.98.244502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.244502).
- Duval, É. et al. (en revue). « Parametric resonance on soft strings ». En cours de revue par les pairs à Physical Review Letters.
- Edwards, W. S. et S. Fauve (1994). « Patterns and Quasi-Patterns in the Faraday Experiment ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112094003642](https://doi.org/10.1017/S0022112094003642).
- Eggers, J. (1997). « Nonlinear Dynamics and Breakup of Free-Surface Flows ». *Reviews of Modern Physics*. DOI : [10.1103/RevModPhys.69.865](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.69.865).
- Eggers, J., L. Limat et A. Daerr (non publié). « Computation of μ_{cl} ».
- Eggers, J. et E. Villermaux (2008). « Physics of Liquid Jets ». *Reports on Progress in Physics*. DOI : [10.1088/0034-4885/71/3/036601](https://doi.org/10.1088/0034-4885/71/3/036601).
- Faraday, M. (1831). « On a Peculiar Class of Acoustical Figures; and on Certain Forms Assumed by Groups of Particles upon Vibrating Elastic Surfaces ». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. DOI : [10.1098/rstl.1831.0018](https://doi.org/10.1098/rstl.1831.0018).
- Fauve, S., S. Douady et O. Thual (1991). « Drift Instabilities of Cellular Patterns ». *Journal de Physique II*. DOI : [10.1051/jp2:1991170](https://doi.org/10.1051/jp2:1991170).
- Fourgeaud, L. et al. (2017). « *In Situ* Investigation of Liquid Films in Pulsating Heat Pipe ». *Applied Thermal Engineering*. DOI : [10.1016/j.applthermaleng.2017.01.064](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2017.01.064).
- Gassin, P.-M. (2014). « Mesure de la tension superficielle par la technique de la goutte pendante ». *Bulletin de l'union des physiciens (BUP)*.
- Godrèche, C. et P. Manneville, éd. (1998). *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*. Collection Alea-Saclay. Cambridge University Press. DOI : [10.1017/CBO9780511524608](https://doi.org/10.1017/CBO9780511524608).
- Gondret, P. et M. Rabaud (1997). « Shear Instability of Two-Fluid Parallel Flow in a Hele-Shaw Cell ». *Physics of Fluids*. DOI : [10.1063/1.869441](https://doi.org/10.1063/1.869441).
- Grotberg, J. B. (2011). « Respiratory Fluid Mechanics ». *Physics of Fluids*. DOI : [10.1063/1.3517737](https://doi.org/10.1063/1.3517737).
- Guan, J. H. et al. (2023). « Traveling Faraday Waves ». *Physical Review Fluids*. DOI : [10.1103/PhysRevFluids.8.110501](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.8.110501).

- Gurfein, V. et al. (1991). « Simple Grid Technique to Measure Refractive Index Gradients ». *Optics Communications*. DOI : [10.1016/0030-4018\(91\)90384-P](https://doi.org/10.1016/0030-4018(91)90384-P).
- Guyon, É., J.-P. Hulin et L. Petit (2012). *Hydrodynamique physique*. 3e édition. Savoirs Actuels. EDP Sciences. 724 p.
- Hammack, J. L. et D. M. Henderson (1993). « Resonant Interactions Among Surface Water Waves ». *Annual Review of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1146/annurev.fl.25.010193.000415](https://doi.org/10.1146/annurev.fl.25.010193.000415).
- Haudin, F. et al. (2016). « Experimental Study of Three-Wave Interactions among Capillary-Gravity Surface Waves ». *Physical Review E*. DOI : [10.1103/PhysRevE.93.043110](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.043110).
- Hecht, F. (2012). « New development in FreeFem++ ». *J. Numer. Math.*
- Howell, P. D. (1996). « Models for Thin Viscous Sheets ». *European Journal of Applied Mathematics*. DOI : [10.1017/S0956792500002400](https://doi.org/10.1017/S0956792500002400).
- Kalliadasis, S. et al. (2012). *Falling Liquid Films*. T. 176. Applied Mathematical Sciences. London : Springer. DOI : [10.1007/978-1-84882-367-9](https://doi.org/10.1007/978-1-84882-367-9).
- Keller, J. B. (1966). « Periodic Oscillations in a Model of Thermal Convection ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112066001423](https://doi.org/10.1017/S0022112066001423).
- Kerswell, R. R. (1993). « The Instability of Precessing Flow ». *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*. DOI : [10.1080/03091929308203609](https://doi.org/10.1080/03091929308203609).
- Kim, H.-Y., J.-H. Kim et B. H. Kang (2004). « Meandering Instability of a Rivulet ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112003006748](https://doi.org/10.1017/S0022112003006748).
- Kumar, K. et L. S. Tuckerman (1994). « Parametric Instability of the Interface between Two Fluids ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112094003812](https://doi.org/10.1017/S0022112094003812).
- Landau, L. et B. Levich (1942). « Dragging of a Liquid by a Moving Plate ». *Dynamics of Curved Fronts*. Sous la dir. de P. Pelcé. San Diego : Academic Press, p. 141-153. DOI : [10.1016/B978-0-08-092523-3.50016-2](https://doi.org/10.1016/B978-0-08-092523-3.50016-2).
- Launay, S. et al. (2007). « Transient Modeling of Loop Heat Pipes for the Oscillating Behavior Study ». *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. DOI : [10.2514/1.26854](https://doi.org/10.2514/1.26854).
- Le Bars, M., D. Cébron et P. Le Gal (2015). « Flows Driven by Libration, Precession, and Tides ». *Annual Review of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1146/annurev-fluid-010814-014556](https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010814-014556).
- Le Bars, M. et D. Lecoanet, éd. (2020). *Fluid Mechanics of Planets and Stars*. CISM International Centre for Mechanical Sciences. Cham : Springer International Publishing. DOI : [10.1007/978-3-030-22074-7](https://doi.org/10.1007/978-3-030-22074-7).
- Le Grand-Piteira, N. (2006). « Ruissellement avec effets de mouillage : Gouttes et méandres sur un plan incliné ». Thèse de doct. Université Paris-Diderot - Paris VII. URL : <https://pastel.hal.science/tel-00083935>.
- Le Grand-Piteira, N., A. Daerr et L. Limat (2006). « Meandering Rivulets on a Plane : A Simple Balance between Inertia and Capillarity ». *Physical Review Letters*. DOI : [10.1103/PhysRevLett.96.254503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.254503).
- Le Lay, G. (2023). *Limrendir*. URL : <https://github.com/Moryavendil/limrendir>.
- (2024). *PyPendentDrop*. Version 0.1.4. URL : <https://github.com/Moryavendil/pypendentdrop>.

- Le Lay, G. et A. Daerr (2025a). « Phase-Locking Parametric Instability Coupling Longitudinal and Transverse Waves on Rivulets in a Hele-Shaw Cell ». *Physical Review Letters*. DOI : [10.1103/PhysRevLett.134.014001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.134.014001).
- (2025b). « Data Analysis for Thin Films Measurements ». *Zenodo (jeu de données)*. DOI : [10.5281/zenodo.15167101](https://doi.org/10.5281/zenodo.15167101).
- (2025c). « Controlling Deposition and Characterizing Dynamics of Thin Liquid Films with High Temporal and Spatial Resolution ». *Physics of Fluids*. DOI : [10.1063/5.0268672](https://doi.org/10.1063/5.0268672).
- (en revue). « Dancing rivulets in an air-filled Hele-Shaw cell ». En cours de revue par les pairs au Journal of Fluid Mechanics.
- Le Lay, G., S. Layani et al. (2024). « Magnetic Levitation in the Field of a Rotating Dipole ». *Physical Review E*. DOI : [10.1103/PhysRevE.110.045003](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.110.045003).
- Le Merrer, M., D. Quéré et C. Clanet (2012). « Buckling of Viscous Filaments of a Fluid under Compression Stresses ». *Physical Review Letters*. DOI : [10.1103/PhysRevLett.109.064502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.064502).
- Lemasquerier, D. et al. (2017). « Libration-Driven Flows in Ellipsoidal Shells ». *Journal of Geophysical Research : Planets*. DOI : [10.1002/2017JE005340](https://doi.org/10.1002/2017JE005340).
- Li, J., X. Li et S. Liao (2019). « Stability and Hysteresis of Faraday Waves in Hele-Shaw Cells ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/jfm.2019.335](https://doi.org/10.1017/jfm.2019.335).
- Lips, S. et al. (2010). « Experimental Evidences of Distinct Heat Transfer Regimes in Pulsating Heat Pipes (PHP) ». *Applied Thermal Engineering*. DOI : [10.1016/j.applthermaleng.2009.12.020](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2009.12.020).
- Liverpool, T. B. et S. F. Edwards (1995). « Dynamics of a Meandering River ». *Physical Review Letters*. DOI : [10.1103/PhysRevLett.75.3016](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.3016).
- Lorenz, E. N. (1963). « Deterministic Nonperiodic Flow ». *Journal of the Atmospheric Sciences*. DOI : [10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2).
- Mahadevan, L., W. S. Ryu et A. D. T. Samuel (1998). « Fluid ‘Rope Trick’ Investigated ». *Nature*. DOI : [10.1038/32321](https://doi.org/10.1038/32321).
- Malkus, W. V. R. (1972). « Non-Periodic Convection at High and Low Prandtl Number ». *Mem. Societe Royale des Sciences de Liege*. IV.
- Marcotte, A. et al. (2024). « Releasing Long Bubbles Trapped in Thin Capillaries via Tube Centrifugation and Inclination ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/jfm.2024.746](https://doi.org/10.1017/jfm.2024.746).
- Martin, B. S., W. F. Simmons et C. Wunsch (1972). « The Excitation of Resonant Triads by Single Internal Waves ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112072000023](https://doi.org/10.1017/S0022112072000023).
- Mcgoldrick, L. F. (1965). « Resonant Interactions among Capillary-Gravity Waves ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112065000198](https://doi.org/10.1017/S0022112065000198).
- Mertens, K., V. Putkaradze et P. Vorobieff (2005). « Morphology of a Stream Flowing down an Inclined Plane. Part 1. Braiding ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112005003873](https://doi.org/10.1017/S0022112005003873).
- Mikhailov, K. et X. Wu (2020). « Nonlinear evolution of interacting sinuous and varicose modes in plane wakes and jets : Quasi-periodic structures ». *Phys. Fluids*.
- Moisy, F. et al. (2012). « Cross-Waves Induced by the Vertical Oscillation of a Fully Immersed Vertical Plate ». *Physics of Fluids*. DOI : [10.1063/1.3686696](https://doi.org/10.1063/1.3686696).
- Mullin, T. (1995). *The Nature of Chaos*. Oxford : Clarendon Press. 337 p.

- Nakagawa, T. et J. C. Scott (1984). « Stream Meanders on a Smooth Hydrophobic Surface ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S002211208400255X](https://doi.org/10.1017/S002211208400255X).
- Nayfeh, A. H. (2008). *Perturbation Methods*. Wiley.
- Nayfeh, A. H. et D. Mook T. (1979). *Nonlinear Oscillations*. Wiley. 716 p.
- Nikolayev, V. S. (2021). « Physical Principles and State-of-the-Art of Modeling of the Pulsating Heat Pipe : A Review ». *Applied Thermal Engineering*. DOI : [10.1016/j.applthermaleng.2021.117111](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2021.117111).
- Okumura, K. (2018). « Viscous Dynamics of Drops and Bubbles in Hele-Shaw Cells : Drainage, Drag Friction, Coalescence, and Bursting ». *Advances in Colloid and Interface Science. Multiscale Applications of Surface Tension and Capillary Forces*. DOI : [10.1016/j.cis.2017.07.021](https://doi.org/10.1016/j.cis.2017.07.021).
- Osiptsov, A. A. (2017). « Fluid Mechanics of Hydraulic Fracturing : A Review ». *Journal of Petroleum Science and Engineering*. DOI : [10.1016/j.petrol.2017.05.019](https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.05.019).
- Pagliarini, L., N. Iwata et F. Bozzoli (2023). « Pulsating heat pipes : Critical review on different experimental techniques ». *Experimental Thermal and Fluid Science*. DOI : [10.1016/j.expthermflusci.2023.110980](https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2023.110980).
- Park, C.-W. et G. M. Homsy (1984). « Two-Phase Displacement in Hele Shaw Cells : Theory ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112084000367](https://doi.org/10.1017/S0022112084000367).
- Pétrélis, F., S. Aumaître et S. Fauve (2005). « Effect of Phase Noise on Parametric Instabilities ». *Physical Review Letters*. DOI : [10.1103/PhysRevLett.94.070603](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.070603).
- Phillips, O. M. (1981). « Wave Interactions - the Evolution of an Idea ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112081001572](https://doi.org/10.1017/S0022112081001572).
- Plateau, J. (1873). *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. T. 2. Paris : Gauthier-Villars. 495 p.
- Plouraboué, F. et E. J. Hinch (2002). « Kelvin–Helmholtz Instability in a Hele-Shaw Cell ». *Physics of Fluids*. DOI : [10.1063/1.1446884](https://doi.org/10.1063/1.1446884).
- Podgorski, T., J.-M. Flesselles et L. Limat (1999). « Dry Arches within Flowing Films ». *Physics of Fluids*. DOI : [10.1063/1.869956](https://doi.org/10.1063/1.869956).
- Quéré, D. (1999). « Fluid coating on a fiber ». *Annual review of fluid mechanics*. DOI : [10.1146/annurev.fluid.31.1.347](https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.31.1.347).
- Rayleigh, J. W. S. B. (1945). *The Theory of Sound*. T. 2. 2 t. Courier Corporation. 530 p. URL : <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.22520/page/n335/mode/2up>.
- Reed, M. et B. Simon (2013). *Functional Analysis*. Methods of Modern Mathematical Physics I. Elsevier.
- Reichert, B., I. Cantat et M.-C. Jullien (2019). « Predicting Droplet Velocity in a Hele-Shaw Cell ». *Physical Review Fluids*. DOI : [10.1103/PhysRevFluids.4.113602](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.113602).
- Residori, S., R. Berthet et al. (2001). « Noise Induced Bistability of Parametric Surface Waves ». *Physical Review Letters*. DOI : [10.1103/PhysRevLett.88.024502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.024502).
- Residori, S., A. Guarino et U. Bortolozzo (2007). « Two-Mode Competition in Faraday Instability ». *Europhysics Letters*. DOI : [10.1209/0295-5075/77/44003](https://doi.org/10.1209/0295-5075/77/44003).
- Ribe, N. M., M. Habibi et D. Bonn (2006). « Stability of Liquid Rope Coiling ». *Physics of Fluids*. DOI : [10.1063/1.2336803](https://doi.org/10.1063/1.2336803).

- Ribe, N. M. (2003). « Periodic Folding of Viscous Sheets ». *Physical Review E*. DOI : [10.1103/PhysRevE.68.036305](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.68.036305).
- Ribe, N. M., M. Habibi et D. Bonn (2012). « Liquid Rope Coiling ». *Annual Review of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1146/annurev-fluid-120710-101244](https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-120710-101244).
- Ricard, G. et E. Falcon (2021). « Experimental Quasi-1D Capillary-Wave Turbulence ». *EPL*. DOI : [10.1209/0295-5075/ac2751](https://doi.org/10.1209/0295-5075/ac2751).
- Rio, E. et al. (2005). « Boundary Conditions in the Vicinity of a Dynamic Contact Line : Experimental Investigation of Viscous Drops Sliding Down an Inclined Plane ». *Physical Review Letters*. DOI : [10.1103/PhysRevLett.94.024503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.024503).
- Rivero-Rodriguez, J. et B. Scheid (2019). « Mass Transfer around Bubbles Flowing in Cylindrical Microchannels ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/jfm.2019.136](https://doi.org/10.1017/jfm.2019.136).
- Rotenberg, Y., L. Boruvka et A. W. Neumann (1983). « Determination of Surface Tension and Contact Angle from the Shapes of Axisymmetric Fluid Interfaces ». *Journal of Colloid and Interface Science*. DOI : [10.1016/0021-9797\(83\)90396-X](https://doi.org/10.1016/0021-9797(83)90396-X).
- Saffman, P. G. et G. I. Taylor (1958). « The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid ». *Proc Roy. Soc. London A. Math. Phys. Sc.*
- Savva, N. et J. W. M. Bush (2009). « Viscous Sheet Retraction ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112009005795](https://doi.org/10.1017/S0022112009005795).
- Shukla, I. et al. (2019). « Film Thickness Distribution in Gravity-Driven Pancake-Shaped Droplets Rising in a Hele-Shaw Cell ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/jfm.2019.453](https://doi.org/10.1017/jfm.2019.453).
- Simmons, W. F. (1969). « A Variational Method for Weak Resonant Wave Interactions ». *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. DOI : [10.1098/rspa.1969.0056](https://doi.org/10.1098/rspa.1969.0056). JSTOR : [2416102](https://www.jstor.org/stable/2416102).
- Snoeijer, J. H. (2008). « Thick Films of Viscous Fluid Coating a Plate Withdrawn from a Liquid Reservoir ». *Physical Review Letters*. DOI : [10.1103/PhysRevLett.100.244502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.244502).
- Snoeijer, J. H. et al. (2006). « Avoided Critical Behavior in Dynamically Forced Wetting ». *Physical Review Letters*. DOI : [10.1103/PhysRevLett.96.174504](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.174504).
- Soutif, M. (1970). *Vibrations, Propagation, Diffusion*. Dunod. 268 p.
- Sridhar, S. (1975). « Nonlinear Resonances in Systems Having Many Degrees of Freedom ». Thèse de doct. Blacksburg, Virginia : Virginia Polytechnic Institute and State University. 154 p.
- Stokes, G. G. (1845). « On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids ». *Trans. Cambridge Philos. Soc.* DOI : [10.1190/1.9781560801931.ch3e](https://doi.org/10.1190/1.9781560801931.ch3e).
- Strogatz, S. H. (2007). *Nonlinear Dynamics And Chaos : With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering*. Cambridge, Mass : CRC Press. 512 p.
- Suleiman, S. M. et B. R. Munson (1981). « Viscous Buckling of Thin Fluid Layers ». *The Physics of Fluids*. DOI : [10.1063/1.863241](https://doi.org/10.1063/1.863241).
- Sünderhauf, G., H. Raszillier et F. Durst (2002). « The Retraction of the Edge of a Planar Liquid Sheet ». *Physics of Fluids*. DOI : [10.1063/1.1426387](https://doi.org/10.1063/1.1426387).
- Tabeling, P., G. Zocchi et A. Libchaber (1987). « An experimental study of the Saffman-Taylor instability ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112087000867](https://doi.org/10.1017/S0022112087000867).

- Taylor, G. I. (1961). « Deposition of a Viscous Fluid on the Wall of a Tube ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112061000159](https://doi.org/10.1017/S0022112061000159).
- Thete, S. S. et al. (2016). « Self-Similarity and Scaling Transitions during Rupture of Thin Free Films of Newtonian Fluids ». *Physics of Fluids*. DOI : [10.1063/1.4961549](https://doi.org/10.1063/1.4961549).
- Thomson, W. et P. G. Tait (1867). *Treatise on Natural Philosophy*. 2^e éd. T. 1. Cambridge Library Collection - Mathematics. Oxford : Oxford University Press. DOI : [10.1017/CBO9780511703928](https://doi.org/10.1017/CBO9780511703928).
- Tufillaro, N. B., R. Ramshankar et J. P. Gollub (1989). « Order-Disorder Transition in Capillary Ripples ». *Physical Review Letters*. DOI : [10.1103/PhysRevLett.62.422](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.62.422).
- Van der Net, A. et al. (2007). « Simulating and Interpreting Images of Foams with Computational Ray-Tracing Techniques ». *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects*. A Collection of Papers Presented at the 6th Eufoam Conference, Potsdam, Germany, 2-6 July, 2006. DOI : [10.1016/j.colsurfa.2006.11.057](https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2006.11.057).
- Villermaux, E. et C. Clanet (2002). « Life of a Flapping Liquid Sheet ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112002008376](https://doi.org/10.1017/S0022112002008376).
- Welander, P. (1967). « On the Oscillatory Instability of a Differentially Heated Fluid Loop ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/S0022112067000606](https://doi.org/10.1017/S0022112067000606).
- Xue, N. et H. A. Stone (2022). « Gravitational Drainage on a Vertical Substrate of a Narrow Width ». *Physical Review Fluids*. DOI : [10.1103/PhysRevFluids.7.014001](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.7.014001).
- Youn, Y. J., Y. Han et N. Shikazono (2018). « Liquid Film Thicknesses of Oscillating Slug Flows in a Capillary Tube ». *International Journal of Heat and Mass Transfer*. DOI : [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.03.102](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.03.102).
- Zautkin, V. V., B. I. Orel et V. B. Cherepanov (1983). « Parametric Excitation of Spin Waves by Noise Modulation of Their Frequencies ». *Sov. Phys. JETP*.
- Zhang, J., Z. Hou et C. Sun (1998). « Theoretical Analysis of the Pressure Oscillation Phenomena in Capillary Pumped Loop ». *Journal of Thermal Science*. DOI : [10.1007/s11630-998-0004-2](https://doi.org/10.1007/s11630-998-0004-2).
- Zhang, X. et V. S. Nikolayev (2021). « Liquid Film Dynamics with Immobile Contact Line during Meniscus Oscillation ». *Journal of Fluid Mechanics*. DOI : [10.1017/jfm.2021.540](https://doi.org/10.1017/jfm.2021.540).
- Zheng, L. et al. (2002). « Accuracy of Measurements of Curvature and Apparent Contact Angle in a Constrained Vapor Bubble Heat Exchanger ». *International Journal of Heat and Mass Transfer*. DOI : [10.1016/S0017-9310\(01\)00306-4](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(01)00306-4).