

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра компьютерных технологий и систем

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 1  
ВАРИАНТ 5

Выполнил:

Карпович Артём Дмитриевич  
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:

Каркоцкий Александр Геннадьевич

Минск, 2024

## Условие

Решить следующие смешанные задачи методом разделения переменных. Произвести визуализацию с использованием пакета Wolfram Mathematica. Первая задача посвящена колебанию тонкой струны, вторая – прямоугольного контура. Сумма, при необходимости, должна состоять не менее чем из 100 слагаемых.

1.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x(2+t), 0 < x < 5, t > 0 \\ u|_{t=0} = x, \\ u_t|_{t=0} = 0, \\ u_x + 5u|_{x=0} = 1-t, \\ u|_{x=5} = t. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=5} = 0, \\ u_y|_{y=0} = u|_{y=9} = 0, \\ u|_{t=0} = e^{x+y}, \\ u_t|_{t=0} = e^{x-y}. \end{cases}$$

## Задача 1

### Получение решения

Перепишем условие задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x(2+t), 0 < x < 5, t > 0 \\ u|_{t=0} = x, \\ u_t|_{t=0} = 0, \\ u_x + 5u|_{x=0} = 1-t, \\ u|_{x=5} = t. \end{cases}$$

Решение задачи будем искать в виде суммы

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где функция  $v(x, t)$  удовлетворяет смешанной задаче с однородными граничными условиями, а функция  $w(x, t)$  - неоднородным граничным условием.

Найдем функцию  $w(x, t)$  из представления:

$$w(x, t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t).$$

Подставим это представление в граничные условия:

$$w_x(0, t) + 5w(0, t) = b + 5c = 1 - t,$$

$$w(5, t) = 25a + 5b + c = t.$$

Положим  $a(t) = 0$ , тогда получим систему для  $b, c$ :

$$\begin{cases} b + 5c = 1 - t, \\ 5b + c = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4}(t - \frac{1}{6}), \\ c = \frac{1}{4}(\frac{5}{6} - t). \end{cases} \Rightarrow w = \frac{1}{4}(t - \frac{1}{6})x + \frac{1}{4}(\frac{5}{6} - t).$$

Тогда решение исходной задачи представимо в виде:

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{1}{4}(t - \frac{1}{6})x + \frac{1}{4}(\frac{5}{6} - t).$$

Путём подстановки данного представления в исходную задачу получим задачу для  $v(x, t)$  с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = x(2+t), \\ v|_{t=0} = \frac{5}{24}(5x - 1), \\ v_t|_{t=0} = \frac{1}{4}(1 - x), \\ v_x + 5v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=5} = 0. \end{cases}$$

Решение данной задачи будем искать в виде суммы:

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t).$$

Составим задачу Штурма-Лиувилля для однородного уравнения:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda_k^2 X(x) = 0, \\ X'(0) + 5X(0) = 0, \\ X(5) = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение уравнения данной задачи:

$$X_k(x) = A_k \cos \lambda_k x + B_k \sin \lambda_k x,$$

подставляем в граничные условия для нахождения коэффициентов:

$$\begin{cases} \lambda_k B_k + 5A_k = 0, \\ A_k \cos 5\lambda_k + B_k \sin 5\lambda_k = 0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения  $A_k$ :

$$A_k = -\frac{\lambda_k}{5} B_k,$$

тогда, подставляя полученное во второе начальное условие, получим:

$$-\frac{\lambda_k}{5} B_k \cos 5\lambda_k + B_k \sin 5\lambda_k = 0, \Rightarrow \left(-\frac{\lambda_k}{5} \cos 5\lambda_k + \sin 5\lambda_k\right) B_k = 0$$

поскольку из выражения для  $A_k$  следует, что  $B_k \neq 0$  (в противном случае получаем нулевое решение), то можем разделить уравнение на  $B_k$  и получим:

$$\sin 5\lambda_k = \frac{\lambda_k}{5} \cos 5\lambda_k \Rightarrow \operatorname{tg} 5\lambda_k = \frac{\lambda_k}{5}.$$

Положим  $B = 1$ , тогда собственные функции задачи Штурма-Лиувилля примут вид:

$$X_k(x) = \sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x.$$

Собственные значения найдем чуть позже, при визуализации полученного решения, используя Wolfram Mathematica. Таким образом, решение рассматриваемой задачи можно представить в виде:

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x \right) T_k(t).$$

Подставим полученное представление в исходное уравнение и начальные условия рассматриваемой задачи:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x \right) (T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x \right) f_k, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x \right) T_k(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x \right) \varphi_k, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x \right) T_k'(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x \right) \psi_k. \end{cases}$$

Найдём соответствующие коэффициенты ряда Фурье:

$$f_k = \frac{\int_0^5 x(2+t) X_k(x) dx}{\int_0^5 X_k^2(x) dx},$$

$$\varphi_k = \frac{\int_0^5 \frac{5}{24}(5x-1)X_k(x)dx}{\int_0^5 X_k^2(x)dx},$$

$$\psi_k = \frac{\int_0^5 \frac{1}{4}(1-x)X_k(x)dx}{\int_0^5 X_k^2(x)dx}.$$

Для нахождения коэффициентов воспользуемся Wolfram Mathematica:

```
In[23]:= ClearAll[Xk, fk, phik, psik]
```

```
Xk[x_] := Sin[λ * x] - (λ / 5) * Cos[λ * x]
```

```
fk = Integrate[x * (2 + T) * Xk[x], {x, 0, 5}] / Integrate[Xk[x]^2, {x, 0, 5}]
```

```
fk // Simplify
```

```
Out[25]= -
```

$$\frac{20(2+T)(-\lambda+26\lambda\cos(5\lambda)+5(-1+\lambda^2)\sin(5\lambda))}{\lambda(10\lambda(24+\lambda^2+\cos(10\lambda))+(-25+\lambda^2)\sin(10\lambda))}$$

```
Out[26]= -
```

$$\frac{20(2+T)(-\lambda+26\lambda\cos(5\lambda)+5(-1+\lambda^2)\sin(5\lambda))}{\lambda(10\lambda(24+\lambda^2+\cos(10\lambda))+(-25+\lambda^2)\sin(10\lambda))}$$

```
In[27]:= phik = Integrate[5 / 24 * (5 * x - 1) * Xk[x], {x, 0, 5}] / Integrate[Xk[x]^2, {x, 0, 5}]
```

```
phik // Simplify
```

```
Out[27]=
```

$$\frac{25(-125\lambda\cos(5\lambda)+(25-24\lambda^2)\sin(5\lambda))}{6\lambda(10\lambda(24+\lambda^2+\cos(10\lambda))+(-25+\lambda^2)\sin(10\lambda))}$$

```
Out[28]=
```

$$\frac{25(-125\lambda\cos(5\lambda)+(25-24\lambda^2)\sin(5\lambda))}{6\lambda(10\lambda(24+\lambda^2+\cos(10\lambda))+(-25+\lambda^2)\sin(10\lambda))}$$

```
In[29]:= psik = Integrate[1 / 4 * (1 - x) * Xk[x], {x, 0, 5}] / Integrate[Xk[x]^2, {x, 0, 5}]
```

```
psik // Simplify
```

```
Out[29]=
```

$$\frac{5(4\lambda+21\lambda\cos(5\lambda)+(-5+4\lambda^2)\sin(5\lambda))}{\lambda(10\lambda(24+\lambda^2+\cos(10\lambda))+(-25+\lambda^2)\sin(10\lambda))}$$

```
Out[30]=
```

$$\frac{5(4\lambda+21\lambda\cos(5\lambda)+(-5+4\lambda^2)\sin(5\lambda))}{\lambda(10\lambda(24+\lambda^2+\cos(10\lambda))+(-25+\lambda^2)\sin(10\lambda))}$$

Таким образом, получаем:

$$f_k = -\frac{20(t+2)(5(\lambda^2-1)\sin(5\lambda)-\lambda+26\lambda\cos(5\lambda))}{\lambda((\lambda^2-25)\sin(10\lambda)+10\lambda(\lambda^2+\cos(10\lambda)+24))},$$

$$\varphi_k = \frac{25((25-24\lambda^2)\sin(5\lambda)-125\lambda\cos(5\lambda))}{6\lambda((\lambda^2-25)\sin(10\lambda)+10\lambda(\lambda^2+\cos(10\lambda)+24))},$$

$$\psi_k = \frac{5((4\lambda_k^2-5)\sin(5\lambda_k)+4\lambda_k+21\lambda_k\cos(5\lambda_k))}{\lambda_k((\lambda_k^2-25)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24))}.$$

С помощью полученных коэффициентов составляем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = -\frac{20(t+2)(5(\lambda_k^2-1)\sin(5\lambda_k)-\lambda_k+26\lambda_k\cos(5\lambda_k))}{\lambda_k((\lambda_k^2-25)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24))}, \\ T_k(0) = \frac{25((25-24\lambda_k^2)\sin(5\lambda_k)-125\lambda_k\cos(5\lambda_k))}{6\lambda_k((\lambda_k^2-25)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24))}, \\ T_k'(0) = \frac{5((4\lambda_k^2-5)\sin(5\lambda_k)+4\lambda_k+21\lambda_k\cos(5\lambda_k))}{\lambda_k((\lambda_k^2-25)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24))}. \end{cases}$$

Решим эту задачу. Построим общее однородное решение уравнения рассматриваемой задачи Коши:

$$T_k^{\text{оо}}(t) = A_k \cos \lambda_k t + B_k \sin \lambda_k t.$$

По виду правой части выпишем частное решение неоднородного уравнения:

$$T_k^{\text{чн}}(t) = C_k t + D_k.$$

Подставим вид частного неоднородного решения в уравнение:

$$C_k \lambda_k^2 t + D_k \lambda_k^2 = f_k.$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты, получим:

$$\begin{cases} C_k = -\frac{20(5(\lambda_k^2-1)\sin(5\lambda_k)-\lambda_k+26\lambda_k\cos(5\lambda_k))}{\lambda_k^3((\lambda_k^2-25)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24))}, \\ D_k = -\frac{40(5(\lambda_k^2-1)\sin(5\lambda_k)-\lambda_k+26\lambda_k\cos(5\lambda_k))}{\lambda_k^3((\lambda_k^2-25)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24))}. \end{cases}$$

Тогда получаем общее решение неоднородного уравнения в виде суммы:

$$T_k^{\text{он}}(t) = T_k^{\text{оо}}(t) + T_k^{\text{чн}}(t) = A_k \cos \lambda_k t + B_k \sin \lambda_k t + C_k t + D_k.$$

Коэффициенты  $A_k, B_k$  получим, подставив полученное выражение в начальные условия:

$$\begin{cases} T_k(0) = A_k + D_k, \\ T_k'(0) = \lambda_k B_k + C_k, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_k = \varphi_k - D_k, \\ B_k = \frac{1}{\lambda_k}(\psi_k - C_k). \end{cases}$$

Снова прибегнем к помощи Wolfram Mathematica:

```
In[55]:= ClearAll[Ck, Dk, Ak]
```

```
Ck[λ_] = -((20(-λ + 26λ Cos[5λ] + 5(-1 + λ^2) Sin[5λ])) / (λ^3(10λ(24 + λ^2 + Cos[10λ]) + (-25 + λ^2) Sin[10λ])))
Dk[λ_] = -((40(-λ + 26λ Cos[5λ] + 5(-1 + λ^2) Sin[5λ])) / (λ^3(10λ(24 + λ^2 + Cos[10λ]) + (-25 + λ^2) Sin[10λ])))
Ak[λ_] = phik - Dk[λ]
Ak[λ] // Simplify
```

$$\text{Out[56]} = -\frac{20(-\lambda + 26\lambda \cos[5\lambda] + 5(-1 + \lambda^2) \sin[5\lambda])}{\lambda^3(10\lambda(24 + \lambda^2 + \cos[10\lambda]) + (-25 + \lambda^2) \sin[10\lambda])}$$

$$\text{Out[57]} = -\frac{40(-\lambda + 26\lambda \cos[5\lambda] + 5(-1 + \lambda^2) \sin[5\lambda])}{\lambda^3(10\lambda(24 + \lambda^2 + \cos[10\lambda]) + (-25 + \lambda^2) \sin[10\lambda])}$$

$$\text{Out[58]} = \frac{25(-125\lambda \cos[5\lambda] + (25 - 24\lambda^2) \sin[5\lambda])}{6\lambda(10\lambda(24 + \lambda^2 + \cos[10\lambda]) + (-25 + \lambda^2) \sin[10\lambda])} + \frac{40(-\lambda + 26\lambda \cos[5\lambda] + 5(-1 + \lambda^2) \sin[5\lambda])}{\lambda^3(10\lambda(24 + \lambda^2 + \cos[10\lambda]) + (-25 + \lambda^2) \sin[10\lambda])}$$

$$\text{Out[59]} = -\frac{5(48\lambda + \lambda(-1248 + 625\lambda^2) \cos[5\lambda] + 5(48 - 73\lambda^2 + 24\lambda^4) \sin[5\lambda])}{6\lambda^3(10\lambda(24 + \lambda^2) + 10\lambda \cos[10\lambda] + (-25 + \lambda^2) \sin[10\lambda])}$$

```
In[60]:= ClearAll[Bk]
```

```
Bk[λ_] = 1/λ*(psik - Ck[λ])
Bk[λ] // Simplify
```

$$\text{Out[61]} = \frac{\frac{20(-\lambda + 26\lambda \cos[5\lambda] + 5(-1 + \lambda^2) \sin[5\lambda])}{\lambda^3(10\lambda(24 + \lambda^2 + \cos[10\lambda]) + (-25 + \lambda^2) \sin[10\lambda])} + \frac{5(4\lambda + 21\lambda \cos[5\lambda] + (-5 + 4\lambda^2) \sin[5\lambda])}{\lambda(10\lambda(24 + \lambda^2 + \cos[10\lambda]) + (-25 + \lambda^2) \sin[10\lambda])}}{\lambda}$$

$$\text{Out[62]} = \frac{5(4\lambda(-1 + \lambda^2) + \lambda(104 + 21\lambda^2) \cos[5\lambda] + (-20 + 15\lambda^2 + 4\lambda^4) \sin[5\lambda])}{\lambda^4(10\lambda(24 + \lambda^2) + 10\lambda \cos[10\lambda] + (-25 + \lambda^2) \sin[10\lambda])}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} A_k = -\frac{5((625\lambda_k^2 - 1248)\lambda_k \cos(5\lambda_k) + 5(24\lambda_k^4 - 73\lambda_k^2 + 48) \sin(5\lambda_k) + 48\lambda_k)}{6\lambda_k^3(10\lambda_k(\lambda_k^2 + 24) + (\lambda_k^2 - 25) \sin(10\lambda_k) + 10\lambda_k \cos(10\lambda_k))}, \\ B_k = \frac{5(4\lambda_k(\lambda_k^2 - 1) + \lambda_k(21\lambda_k^2 + 104) \cos(5\lambda_k) + (4\lambda_k^4 + 15\lambda_k^2 - 20) \sin(5\lambda_k))}{\lambda_k^4(10\lambda_k(\lambda_k^2 + 24) + (\lambda_k^2 - 25) \sin(10\lambda_k) + 10\lambda_k \cos(10\lambda_k))}. \end{cases}$$

Таким образом, из-за излишней громоздкости выражения подставим все найденные коэффициенты мысленно, и тогда мы сможем найти решение задачи для  $v$ , решение исходной задачи будет иметь вид:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x) (A_k \cos \lambda_k t + B_k \sin \lambda_k t + C_k t + D_k) + \frac{1}{4}(t - \frac{1}{6})x + \frac{1}{4}(\frac{5}{6} - t),$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= -\frac{5((625\lambda_k^2 - 1248)\lambda_k \cos(5\lambda_k) + 5(24\lambda_k^4 - 73\lambda_k^2 + 48) \sin(5\lambda_k) + 48\lambda_k)}{6\lambda_k^3(10\lambda_k(\lambda_k^2 + 24) + (\lambda_k^2 - 25) \sin(10\lambda_k) + 10\lambda_k \cos(10\lambda_k))}, \\ B_k &= \frac{5(4\lambda_k(\lambda_k^2 - 1) + \lambda_k(21\lambda_k^2 + 104) \cos(5\lambda_k) + (4\lambda_k^4 + 15\lambda_k^2 - 20) \sin(5\lambda_k))}{\lambda_k^4(10\lambda_k(\lambda_k^2 + 24) + (\lambda_k^2 - 25) \sin(10\lambda_k) + 10\lambda_k \cos(10\lambda_k))}, \\ C_k &= -\frac{20(5(\lambda_k^2 - 1) \sin(5\lambda_k) - \lambda_k + 26\lambda_k \cos(5\lambda_k))}{\lambda_k^3((\lambda_k^2 - 25) \sin(10\lambda_k) + 10\lambda_k(\lambda_k^2 + \cos(10\lambda_k) + 24))}, \end{aligned}$$

$$D_k = -\frac{40(5(\lambda_k^2 - 1)\sin(5\lambda_k) - \lambda_k + 26\lambda_k\cos(5\lambda_k))}{\lambda_k^3((\lambda_k^2 - 25)\sin(10\lambda_k) + 10\lambda_k(\lambda_k^2 + \cos(10\lambda_k) + 24))},$$

$\lambda_k$  найдем при визуализации из уравнения  $\operatorname{tg} 5\lambda_k = \frac{\lambda_k}{5}$ .

## Визуализация решения

Для визуализации необходимо перенести полученное аналитически решение в Wolfram Mathematica, а так же вычислить недостающий на данном этапе элемент, а именно собственные значения  $\lambda_k$ :

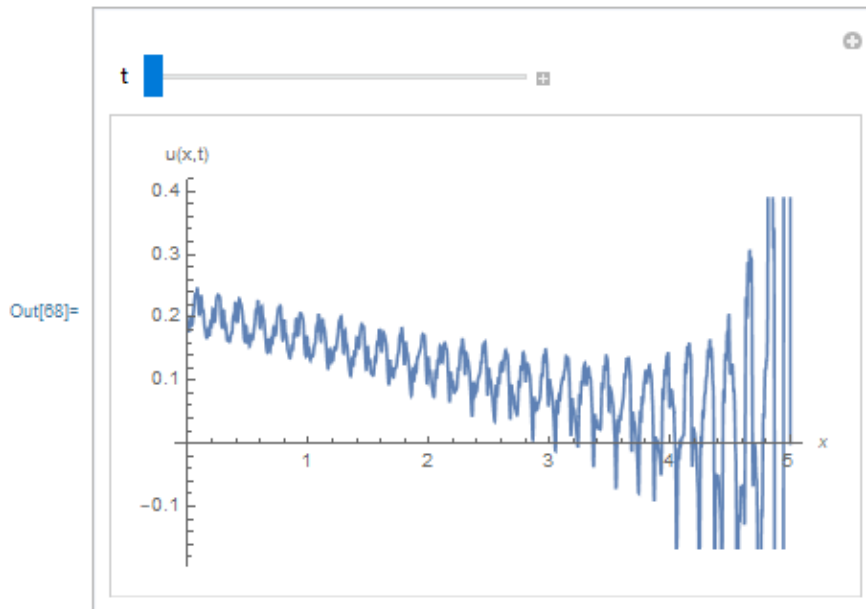
```
In[61]:= omega[x_, t_] := 1/4*(t - 1/6)*x + 1/4*(5/6 - t)
root[n_] := NSolve[Tan[5*λ] == λ/5 && 100*n < λ ≤ 100*(n+1), Reals];
list = {};
For[i = 0, i ≤ 3, i++, list = Join[list, Values[root[i]]]]

In[65]:= u[x_, t_] :=
Sum[(Sin[list[[k]]*x] - list[[k]]/5*Cos[list[[k]]*x])*
(Ak[list[[k]]]Cos[list[[k]]*t) + Bk[list[[k]]]*Sin[list[[k]]*t] + Ck[list[[k]]]*t + Dk[list[[k]]]),
{k, list // Length}] + omega[x, t]
```

Теперь построим две визуализации для нашей задачи:

1. Профиля струны во времени для конкретного момента времени с возможностью изменения:

```
In[68]:= Manipulate[Plot[Evaluate[u[x, t]], {x, 0, 5}, AxesLabel -> {x, "u(x,t)"}], {t, 0, 5, 0.5}]
```

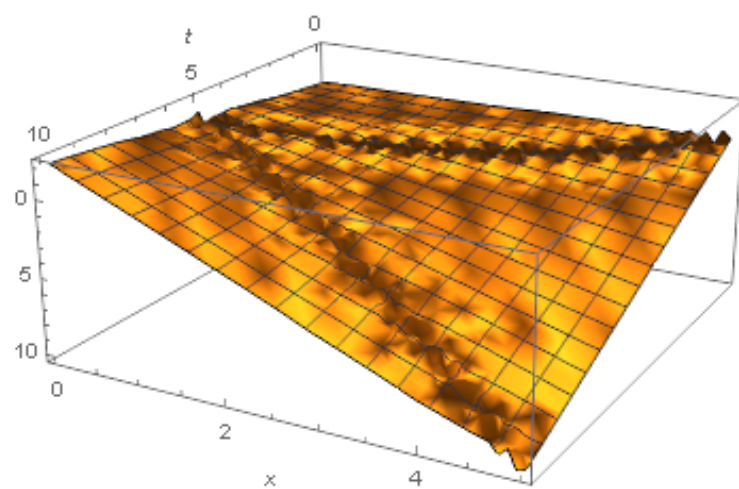


2. Профиля струны во времени на всем промежутке времени:



```
In[73]:= Plot3D[Evaluate[u[x, t]], {x, 0, 5}, {t, 0, 10}, AxesLabel -> {x, t, "u(x,t)"}]
```

Out[73]=  $u(x,t)$



## Задача 2

### Получение решения

Перепишем условие задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=5} = 0, \\ u_y|_{y=0} = u|_{y=9} = 0, \\ u|_{t=0} = e^{x+y}, \\ u_t|_{t=0} = e^{x-y}. \end{cases}$$

Решение задачи будем искать в виде:

$$u(x, y, t) = T(t)V(x, y),$$

подставим данное представление в уравнение нашей задачи, тогда получим:

$$T''(t)V(x, y) = \Delta V(x, y)T(t),$$

разделим обе части уравнения на  $T(t)V(x, y)$ , тогда получим:

$$\frac{T''}{T} = \frac{\Delta V}{V} = -\lambda^2.$$

Отсюда составим задачу для  $V(x, y)$ :

$$\begin{cases} \Delta V + \lambda^2 V = 0, \\ V|_{x=0} = V_x|_{x=5} = 0, \\ V_y|_{y=0} = V|_{y=9} = 0. \end{cases}$$

Получившуюся задачу будем решать с помощью замены:

$$V(x, y) = X(x)Y(y),$$

подставим в уравнение рассматриваемой задачи и получим:

$$\frac{YX'' + XY''}{XY} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda^2 = -\mu^2.$$

Тогда получим два уравнения:

$$X'' + \mu^2 X = 0,$$

$$Y'' + \nu^2 Y = 0,$$

где  $\nu^2 = \lambda^2 - \mu^2$ . Воспользуемся граничными условиями исходной задачи и построим две задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(5) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Y'' + \nu^2 Y = 0, \\ Y(9) = 0, \\ Y'(0) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу для  $X(x)$ . Из уравнения имеем общее решение:

$$X(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x,$$

подставим в граничные условия:

$$\begin{cases} X(0) = A = 0, \\ X'(5) = \mu B \cos 5\mu, \end{cases} \Rightarrow \cos 5\mu = 0 \Rightarrow \mu_n = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, решение задачи Штурма-Лиувилля для  $X(x)$  имеет вид:

$$X_n(x) = \sin x\mu_n, \mu_n = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), n = 1, 2, \dots$$

Решим теперь вторую задачу, для  $Y(y)$ :

$$Y(y) = A \cos \nu y + B \sin \nu y,$$

$$\begin{cases} Y'(0) = B\nu = 0, \Rightarrow B = 0, \\ Y(9) = A \cos 9\nu = 0, \end{cases} \Rightarrow \nu_m = \frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right), m = 1, 2, \dots$$

Таким образом, решение данной задачи Штурма-Лиувилля имеет вид:

$$Y_m(y) = \cos y\nu_m, \nu_m = \frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right), m = 1, 2, \dots$$

Тогда решение исходной задачи примет вид:

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{nm}(t) \sin x\mu_n \cos y\nu_m.$$

Подставим в исходную задачу:

$$\begin{cases} \sum_{n,m=1}^{\infty} T''_{nm}(t) \sin x\mu_n \cos y\nu_m + \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{nm}(t)(\mu_n^2 \sin x\mu_n \cos y\nu_m + \nu_m^2 \sin x\mu_n \cos y\nu_m) = 0, \\ \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{nm}(0) \sin x\mu_n \cos y\nu_m = e^{x+y}, \\ \sum_{n,m=1}^{\infty} T'_{nm}(0) \sin x\mu_n \cos y\nu_m = e^{x-y}. \end{cases}$$

Заметим, что уравнение полученной задачи можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^{\infty} T''_{nm}(t) \sin x\mu_n + \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{nm}(t)(\mu_n^2 + \nu_m^2) &= 0, \Rightarrow T''_{nm}(t) + \lambda_{nm}^2 T_{nm}(t) = 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow T_{nm}(t) &= A_{nm} \cos \lambda_{nm} t + B_{nm} \sin \lambda_{nm} t. \end{aligned}$$

Тогда, подставляя в начальные условия, получим:

$$\begin{cases} \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin x\mu_n \cos y\nu_m = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{nm} \sin x\mu_n \cos y\nu_m, \\ \sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_{nm} B_{nm} \sin x\mu_n \cos y\nu_m = \sum_{n,m=1}^{\infty} \psi_{nm} \sin x\mu_n \cos y\nu_m, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{nm} = \varphi_{nm}, \\ B_{nm} = \frac{1}{\lambda_{nm}} \psi_{nm}. \end{cases}$$

Разложим наши функции  $\varphi(x, y) = e^{x+y}$ ,  $\psi(x, y) = e^{x-y}$  в ряд Фурье по собственным функциям:

$$A_{nm} = \frac{\int_0^5 \int_0^9 e^{x+y} \sin x\mu_n \cos y\nu_m dy dx}{\int_0^5 \int_0^9 (\sin x\mu_n \cos y\nu_m)^2 dy dx} = [\text{переобозначим}] = \frac{1}{I} \int_0^5 e^x \sin x\mu_n \int_0^9 e^y \cos y\nu_m dy dx,$$

$$B_{nm} = \frac{1}{I} \int_0^5 \int_0^9 e^{x-y} \sin x\mu_n \cos y\nu_m dy dx = \frac{1}{I} \int_0^5 e^x \sin x\mu_n \int_0^9 \frac{1}{e^y} \cos y\nu_m dy dx.$$

Посчитаем отдельно каждый из интегралов:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^5 \int_0^9 (\sin x \mu_n \cos y \nu_m)^2 dy dx = \int_0^5 \sin^2 x \mu_n \int_0^9 \cos^2 y \nu_m dy dx = \int_0^5 \frac{1 - \cos 2y \mu_n}{2} \int_0^9 \frac{1 + \cos 2y \nu_m}{2} dy dx = \\
&= \frac{9 + \frac{1}{2\nu_m} \sin 18\nu_m}{2} \int_0^5 \frac{1 - \cos 2y \mu_n}{2} dx = \frac{9 + \frac{1}{2\nu_m} \sin 18\nu_m}{2} \frac{5 - \frac{1}{2\mu_n} \sin 18\mu_n}{2} = [\text{подставим значения}] = \frac{45}{4} \\
I_1 &= \int_0^9 e^y \cos y \nu_m dy = [\text{решаем по частям}] = \left[ u = e^y \Rightarrow du = e^y dy, dv = \cos y \nu_m dy \Rightarrow v = \frac{1}{\nu_m} \sin y \nu_m \right] = \\
&= \frac{1}{\nu_m} \sin y \nu_m \cdot e^y \Big|_{y=0}^{y=9} - \frac{1}{\nu_m} \int_0^9 e^y \sin y \nu_m dy = \frac{1}{\nu_m} (\sin 9\nu_m \cdot e^9 - \int_0^9 e^y \sin y \nu_m dy) = [\text{снова по частям}] = \\
&= \frac{1}{\nu_m} (e^9 (\sin 9\nu_m + \frac{1}{\nu_m} \cos 9\nu_m) - \frac{1}{\nu_m} - \frac{1}{\nu_m} \int_0^9 e^y \cos y \nu_m dy), \Rightarrow \nu_m I_1 + \frac{1}{\nu_m} I_1 = e^9 (\sin 9\nu_m + \frac{1}{\nu_m} \cos 9\nu_m) - \frac{1}{\nu_m}, \\
&\Rightarrow (\frac{\nu_m^2 + 1}{\nu_m}) I_1 = e^9 (\sin 9\nu_m + \frac{1}{\nu_m} \cos 9\nu_m) - \frac{1}{\nu_m}, \Rightarrow I_1 = \frac{1}{1 + \nu_m^2} (e^9 (\nu_m \sin 9\nu_m + \cos 9\nu_m) - 1) = \\
&= [\text{частично подставим значение } \nu_m] = \frac{1}{1 + \nu_m^2} ((-1)^m e^9 - 1) \\
I_2 &= \int_0^5 e^x \sin x \mu_n dx = [\text{аналогично } I_1] = \frac{1}{1 + \mu_n^2} (1 - (-1)^n e^5) \\
I_3 &= \int_0^9 \frac{1}{e^y} \cos y \nu_m dy = [\text{аналогично } I_1] = \frac{1}{1 + \nu_m^2} ((-1)^m \frac{1}{e^9} - 1) \\
I_4 &= I_2 = \frac{1}{1 + \mu_n^2} (1 - (-1)^n e^5).
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned}
A_{nm} &= \frac{4}{45} \cdot \frac{1}{1 + \nu_m^2} ((-1)^m e^9 - 1) \cdot \frac{1}{1 + \mu_n^2} (1 - (-1)^n e^5) = \frac{4}{45} \cdot \frac{1}{(1 + \nu_m^2)(1 + \mu_n^2)} ((-1)^m e^9 - 1)(1 - (-1)^n e^5), \\
B_{nm} &= \frac{1}{\lambda_{nm}} \frac{4}{45} \cdot \frac{1}{1 + \nu_m^2} ((-1)^m \frac{1}{e^9} - 1) \cdot \frac{1}{1 + \mu_n^2} (1 - (-1)^n e^5) = \frac{4}{45 \lambda_{nm}} \cdot \frac{1}{(1 + \nu_m^2)(1 + \mu_n^2)} ((-1)^m \frac{1}{e^9} - 1)(1 - (-1)^n e^5).
\end{aligned}$$

Итого, мысленно подставив полученные коэффициенты в решение уравнения рассматриваемой задачи, получим решение рассматриваемой задачи Коши:

$$T_{nm}(t) = A_{nm} \cos \lambda_{nm} t + B_{nm} \sin \lambda_{nm} t,$$

где

$$\lambda_{nm}^2 = \nu_m^2 + \mu_n^2 = \left(\frac{1}{9} \left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)\right)^2.$$

Итого, решение исходной задачи представимо в виде:

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} (A_{nm} \cos \lambda_{nm} t + B_{nm} \sin \lambda_{nm} t) \sin x \mu_n \cos y \nu_m,$$

где

$$A_{nm} = \frac{4}{45} \cdot \frac{1}{(1 + \nu_m^2)(1 + \mu_n^2)} ((-1)^m e^9 - 1)(1 - (-1)^n e^5),$$

$$B_{nm} = \frac{4}{45\lambda_{nm}} \cdot \frac{1}{(1 + \nu_m^2)(1 + \mu_n^2)} \left( (-1)^m \frac{1}{e^9} - 1 \right) (1 - (-1)^n e^5),$$

$$\mu_n = \frac{1}{5} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n = 1, 2, \dots, \quad \nu_m = \frac{1}{9} \left( \frac{\pi}{2} + \pi m \right), m = 1, 2, \dots,$$

$$\lambda_{nm} = \sqrt{\mu_n^2 + \nu_m^2}$$

## Визуализация решения

Перенесём полученное ранее аналитическое решение в Wolfram Mathematica:

```
In[40]:= ClearAll[v, μ, A, B, λ, u]

v[m_] := 1/9 * (π/2) + π * m
μ[n_] := 1/5 * (π/2) + π * n
A[n_, m_] := (4/45) * (1/(1 + v[m]^2)) * ((-1)^m * E^9 - 1) * (1/(1 + μ[n]^2)) * (1 - (-1)^n * E^5)
B[n_, m_] := (4/45) * (1/(1 + v[m]^2)) * ((-1)^m * (1/E^9) - 1) * (1/(1 + μ[n]^2)) * (1 - (-1)^n * E^5)
λ[n_, m_] := Sqrt[v[m]^2 + μ[n]^2]
u[x_, y_, t_] := Sum[(A[n, m] * Cos[λ[n, m] * t] + B[n, m] / λ[n, m] * Sin[λ[n, m] * t]) * Sin[x * μ[n]] * Cos[y * v[m]], {n, 1, 100}, {m, 1, 100}]
```

После этого строим визуализацию прямоугольного контура во времени для конкретного времени с возможностью изменения:

```
In[47]:= Manipulate[Plot3D[Evaluate[u[x, y, t]], {x, 0, 5}, {y, 0, 9}, AxesLabel -> {x, y, "u(x,t)"}], {t, 0, 10, 0.5}]
```

