МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и инворматики
Кафедра вычислительной математики

Отчет по лабораторной работе 4
"Численное интегрирование"
Вариант 5

Выполнил:
Карпович Артём Дмитриевич
студент 3 курса 7 группы

Преподаватель:
Репников Василий Иванович

Минск, 2024

Численное интегрирование

Постановка задач

1. Построить квадратурную формулу максимально возможной степени точности вида

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(a) + A_1 f(b) + A_2 f'(a) + A_3 f'(b).$$

2. Определить алгебраическую степень точности указанной квадратурной формулы

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{6}[f(-1) + f(1)] + \frac{5}{6}[f(-\frac{1}{\sqrt{5}}) + f(\frac{1}{\sqrt{5}})].$$

3. Используя правило Рунге, провести сравнительный анализ квадратурных формул средних прямоугольников и трапеций на примере вычисления интеграла

$$I = \int_1^3 \frac{\ln(\sin^2 x + 3)}{x^2 + 2x - 1} dx.$$

4. Вычислить с точностью $\epsilon = 10^{-4}$ интеграл

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}} \frac{\sin x^2}{1 + \ln^2(x + 1)} dx.$$

5. Найти с точностью до $\epsilon = 10^{-4}$ решение уравнения

$$\int_0^X (t - 1)^6 (\lg \sqrt{t^2 + 1} + 2) dt = 5.$$

Задача 1

Для построения квадратурной формы с алгребраической степенью точности m необходимо составить соотношения

$$\begin{cases} \int\limits_a^b \rho(x) x^i dx = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x_k^i, \quad i = \overline{0, m}, \\ \int\limits_a^b \rho(x) x^{m+1} dx \neq \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x_k^i; \end{cases}$$

Из этих соотношений можно составить систему для нахождения коэффициентов A_0, A_1, A_2, A_3

$$\begin{cases} x^0 : \int\limits_a^b 1 dx = A_0 + A_1, \\ x^1 : \int\limits_a^b x dx = A_0 a + A_1 b + A_2 + A_3, \\ x^2 : \int\limits_a^b x^2 dx = A_0 a^2 + A_1 b^2 + 2A_2 a + 2A_3 b, \\ x^3 : \int\limits_a^b x^3 dx = A_0 a^3 + A_1 b^3 + 3A_2 a^2 + 3A_3 b^2. \end{cases}$$

Раскроем интегралы и получим

$$\begin{cases} b-a = A_0 + A_1, \\ \frac{(b-a)^2}{2} = A_0 a + A_1 b + A_2 + A_3, \\ \frac{(b-a)^3}{3} = A_0 a^2 + A_1 b^2 + 2A_2 a + 2A_3 b, \\ \frac{(b-a)^4}{4} = A_0 a^3 + A_1 b^3 + 3A_2 a^2 + 3A_3 b^2. \end{cases}$$

Найдем решение системы программно, используя инструменты языка Python

[4]:
```python
import math
import numpy as np
import sympy as sp
import pandas as pd

a, b, A0, A1, A2, A3 = sp.symbols('a b A0 A1 A2 A3')

eq1 = sp.Eq(b - a, A0 + A1)
eq2 = sp.Eq(((b - a)**2)/2, A0*a + A1*b + A2 + A3)
eq3 = sp.Eq(((b - a)**3)/3, A0*a**2 + A1*b**2 + 2*A2*a + 2*A3*b)
eq4 = sp.Eq(((b - a)**4)/4, A0*a**3 + A1*b**3 + 3*A2*a**2 + 3*A3*b**2)

solution = sp.solve((eq1, eq2, eq3, eq4), (A0, A1, A2, A3))

simplified_solution = {key: sp.simplify(value) for key, value in solution.
 ↪items()}

for key, value in simplified_solution.items():
    print(f"{key}: {value}")
```

```
A0: (-3*a**3 - a**2*b - a*b**2 + b**3)/(2*(a**2 - 2*a*b + b**2))
A1: (a**3 + 7*a**2*b - 5*a*b**2 + b**3)/(2*(a**2 - 2*a*b + b**2))
A2: (7*a**3 + 3*a**2*b + 3*a*b**2 - b**3)/(12*(a - b))
A3: (17*a**3 - 3*a**2*b - 3*a*b**2 + b**3)/(12*(a - b))
```

Получили, что

$$A_0 = \frac{(-3)a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}{2(a^2 - 2ab + b^2)},$$

$$A_1 = \frac{a^3 + 7a^2b - 5ab^2 + b^3}{2(a^2 - 2ab + b^2)},$$

$$A_2 = \frac{7a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{12(a-b)},$$

$$A_3 = \frac{17a^3 - 3a^2b - 3ab^2 + b^3}{12(a-b)}.$$

Проверим полученное решение с помощью тех же инструментов Python

[6]:
```python
eq1_sub = sp.simplify(eq1.subs(solution))
eq2_sub = sp.simplify(eq2.subs(solution))
eq3_sub = sp.simplify(eq3.subs(solution))
eq4_sub = sp.simplify(eq4.subs(solution))

print(eq1_sub)
print(eq2_sub)
print(eq3_sub)
print(eq4_sub)
```

```
True
True
True
True
```

Таким образом, решение получено правильно и, соответственно, квадратурная форма будет иметь вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(-3)a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}{2(a^2 - 2ab + b^2)} f(a) + \frac{a^3 + 7a^2b - 5ab^2 + b^3}{2(a^2 - 2ab + b^2)} f(b) +$$

$$+ \frac{7a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{12(a-b)} f'(a) + \frac{17a^3 - 3a^2b - 3ab^2 + b^3}{12(a-b)} f'(b)$$

Найдем АСТ для получившейся квадратурной формулы, для этого построим соотношение x^4 :

$$\int_a^b x^4 dx = A_0 a^4 + A_1 b^4 + 4A_2 a^3 + 4A_3 b^3.$$

Подставим коэффициенты и вычислим интеграл

$$\frac{(b-a)^5}{5} = \frac{(-3)a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}{2(a^2 - 2ab + b^2)} a^4 + \frac{a^3 + 7a^2b - 5ab^2 + b^3}{2(a^2 - 2ab + b^2)} b^4 +$$

$$+4 \frac{7a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{12(a-b)} a^3 + 4 \frac{17a^3 - 3a^2b - 3ab^2 + b^3}{12(a-b)} b^3$$

Посмотрим, выполняется ли равенство При подстановке мы получаем следующее

$$\frac{(a-b)^5}{5} \stackrel{?}{=} -\frac{10a^6 - 12a^5b - 18a^4b^2 + 23a^3b^3 - 27a^2b^4 + 15ab^5 - 3b^6}{12(a-b)}.$$

Раскроем левую часть

$$\frac{(a-b)^5}{5} = \frac{a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5}{5}$$

$$\frac{a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5}{5} \neq -\frac{10a^6 - 12a^5b - 18a^4b^2 + 23a^3b^3 - 27a^2b^4 + 15ab^5 - 3b^6}{12(a-b)}$$

Таким образом, алгебраическая степень точности равна тому i, для которого равенство выполнялось, в нашем случае это значение равно 3.

Задача 2

Рассмотрим обший вид квадратурной формулы

$$I(f) = \int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3).$$

Для построения квадратурной формы с алгребраической степенью точности m необходимо составить соотношения

$$\begin{cases} \int\limits_a^b \rho(x)x^i dx = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x_k^i, \quad i = \overline{0,m}, \\ \int\limits_a^b \rho(x)x^{m+1} dx \neq \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x_k^i; \end{cases}$$

Таким образом, в нашем примере мы имеем

$$[a,b] = [-1,1], \ \rho(x) = 1,$$

$$A_0 = A_1 = \frac{1}{6}, \ A_2 = A_3 = \frac{5}{6},$$

$$x_0 = -1, \ x_1 = 1, \ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \ x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Для определения алгебраической степени точности, необходимо строить по одному уравнению из нашего соотношения до тех пор, пока равенство не обратится в неравенство.

Найдем решение интеграла для любого i :

$$\int\limits_{-1}^{1} x^i dx = \frac{x^{i+1}}{i+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{i+1}}{i+1}$$

Подставим соотношение для $i-$го порядка:

$$\frac{1-(-1)^{i+1}}{i+1} = \frac{1}{6}\cdot(-1)^i + \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\cdot\Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}\Big)^i + \frac{5}{6}\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}\Big)^i$$

Нетрудно заметить, что при нечетных i и левая, и правая части будут равны 0, поэтому сразу будем рассматривать четные i, при которых получим

$$\frac{2}{i+1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3\cdot(\sqrt{5})^i}$$

Начнем с $i = 0$:

$$x^0 : 2 \overset{?}{=} \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = 2 \Rightarrow \text{Равенство выполняется.}$$

$$x^2 : \frac{2}{3} \overset{?}{=} \frac{1}{3} + \frac{5}{3\cdot 5} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{Равенство выполняется.}$$

$$x^4 : \frac{2}{5} \overset{?}{=} \frac{1}{3} + \frac{5}{3\cdot 5\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot\sqrt{5}} \neq \frac{2}{5} \Rightarrow \text{Равенство не выполняется.}$$

Таким образом, АСТ нашей квадратурной формулы равна 3, поскольку, как ранее было отмечено, при $i = 3$ мы получим равенство $0 = 0$.

Задача 3

Для применения к нашему интегралу

$$I = \int\limits_1^3 \frac{\ln(\sin^2 x + 3)}{x^2 + 2x - 1} dx$$

правила Рунге программно зададим подынтегральную функцию $f(x) = \dfrac{\ln(\sin^2 x + 3)}{x^2 + 2x - 1}$.

[12]:
```python
def f(x):
    return math.log(math.sin(x)**2 + 3) / (x**2 + 2*x - 1)

a, b = 1, 3
```

Рассмотрим общий вид составной квадратурной формулы средних прямоугольников

$$I_{\text{сс}} = h \sum_{k=0}^{N-1} f(a + (k + \frac{1}{2}h)),$$

и зададим его программно.

[14]:
```python
def mean_rect(a, b, f, h):
    I = 0
    N = int((b - a) / h)

    for k in range(N):
        I += f(a + (k + 1/2 * h))

    return h * I
```

Рассмотрим так же составную квадратурную формулу трапеций

$$I_{\text{тс}} = h\Big[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)\Big]$$

[16]:
```python
def trap(a, b, f, h):
    I = 0
    N = int((b - a) / h)

    x = np.linspace(a, b, N)

    for k in range(N):
        I += f(x[k])

    return h * ((f(a) + f(b)) / 2 + I)
```

Для использования правила Рунге используем выражение для главной части остатка квадратурной формулы

$$R(h, f) \approx \frac{I_{h_2} - I_{h_1}}{1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^m}$$

m – алгебраическая степень точности методов.

Для составной квадратурной формулы средних прямоугольников $m = 1$, для составной квадратурной формулы трапеций $m = 2$.

Подбирать шаги будем следующим образом

$$h_1 = \frac{b-a}{N},\ h_2 = \frac{h_1}{2}$$

Посмотрим, для какой квадратурной формулы мы быстрее сможем подобрать такие шаги h_1, h_2, при которых

$$|R(h, f)| \leq \epsilon$$

. Погрешность в этом задании возьмем $\epsilon = 10^{-4}$, начальные шаги

$$h_1 = b - a, h_2 = \frac{h_1}{2}$$

подбор будем делать по правилу

$$|R(h, f)| \nleq \epsilon \Rightarrow h_1 = h_2, h_2 = \frac{h_1}{2}$$

Если же неравенство будет выполняться, то мы подобрали шаг при котором, достигается нужная точность. Зададим правило Рунге программно

[18]:
```
def runge_rule(m, a, b, I, f, epsilon = 1e-4):
    h1 = b - a
    h2 = h1 / 2

    R = (I(a, b, f, h1) - I(a, b, f, h2)) / (1 - (h2 / h1)**m)
    array = [R]
    h_1 = [h1]
    h_2 = [h2]

    while abs(R) > epsilon:
        h1 = h2
        h2 = h1 / 2

        R = (I(a, b, f, h1) - I(a, b, f, h2)) / (1 - (h2 / h1)**m)

        array.append(R)

        h_1.append(h1)
        h_2.append(h2)
```

```
    return h_1, h_2, array, (I(a, b, f, h1) + R)
```

[19]:
```
m = max(len(runge_rule(1, a, b, mean_rect, f)[2]), len(runge_rule(2, a, b, trap,␣
↪f)[2]))

h1 = runge_rule(1, a, b, mean_rect, f)[0]

df = pd.DataFrame(columns = ["Количество узлов", "Средние прямоугольники"])

N = [0] * m

for i in range(m):
    N[i] = int((b - a) / h1[i])

df["Количество узлов"] = N
df["Средние прямоугольники"] = runge_rule(1, a, b, mean_rect, f)[2]

df = pd.concat([df, pd.DataFrame(runge_rule(2, a, b, trap, f)[2],␣
↪columns=["Трапеции"])], axis=1, verify_integrity=True).fillna('')
df
```

[19]:

	Количество узлов	Средние прямоугольники	Трапеции
0	1	-0.121278	1.257883
1	2	0.173059	0.461537
2	4	0.252260	0.19429
3	8	0.198618	0.089161
4	16	0.122705	0.042803
5	32	0.068250	0.020992
6	64	0.035984	0.010399
7	128	0.018474	0.005176
8	256	0.009360	0.002582
9	512	0.004711	0.00129
10	1024	0.002363	0.000644
11	2048	0.001184	0.000322
12	4096	0.000592	0.000161
13	8192	0.000296	0.000081
14	16384	0.000148	
15	32768	0.000074	

Как можно заметить, с увеличением количества узлов значение остатка по правилу Рунге уменьшается как при использовании составной КФ средних прямоугольников, так и составной КФ трапеций, однако можно увидеть, что для КФ трапеций значения примерно в 2 раза меньше, начиная с количества узлов $h = 16$, чем для средних прямоугольников.

Задача 4

Для вычисления значения интеграла

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \frac{\sin x^2}{1+\ln^2(x+1)} dx$$

с точностью $\epsilon = 10^{-4}$ воспользуемся квадратурными формулами наивысшей алгебраической степени точности, или квадратурные формулы типа Гаусса.

Поскольку мы сразу можем выделить весовую функцию $p(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ и мы имеем отрезок интегрирования $[a, b] = [-1, 1]$, то мы сразу можем перейти к использованию квадратурной формулы Эрмита

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

В качестве узлов x_k выбираются

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi$$

Для

$$A_k = \frac{\pi}{n+1}$$

Остаток имеет вид

$$R_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n+2)!} \cdot f^{2n+2}(\eta), \eta \in [-1, 1].$$

Таким образом, получаем, что КФ имеет вид

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(\cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi)$$

Подставим нашу функцию

$$f(x) = \frac{\sin x^2}{1+\ln^2(x+1)}$$

и получим

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(\cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi)^2}{1+\ln^2(\cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi + 1)}$$

Погрешность будем оценивать следующим образом

$$\Delta = |I(f, n) - I(f, n-1)| < \epsilon = 10^{-4}$$

Из этого неравенства путем перебора найдем подходящее n.

Перейдем к программной реализации.

[22]:
```
def u(x):
    return np.sin(x**2)/(1+np.log(x+1)**2)
```

[23]:
```
def hermite_quadrature_formula(f, epsilon=10e-4):
    n = 1
```

```
    I_new = np.inf
    I_last = 0

    while abs(I_new - I_last) >= epsilon:
        I_last = I_new
        I_new = 0

        for k in range(n + 1):
            x_k = np.cos((2 * k + 1) / (2 * n + 2) * np.pi)

            A_k = np.pi / (n + 1)

            I_new += A_k * f(x_k)

        n += 1

    return I_new, n
```

[24]:
```
hermite_quadrature_formula(u)
```

[24]: (0.6831692972144928, 7)

Таким образом, получаем, что приближенное значение интеграла равно

$$I(f) \approx 0.6832$$

и получено оно было при $n = 7$ узлах.

Задача 5

Перепишем наше уравнение

$$\int\limits_0^X (t-1)^6(\lg\sqrt{t^2+1}+2)dt = 5$$

в виде

$$\int\limits_0^X (t-1)^6(\lg\sqrt{t^2+1}+2)dt - 5 = f(x).$$

Таким образом, решение этого уравнения совпадает с решением нелинейного уравнения

$$f(x) = 0,$$

которое будем решать методом Ньютона.

Вспомним первую лабораторную работу и рассмотрим теорему о сходимости метода Ньютона.

Теорема 1 (о сходимости метода Ньютона) *Пусть выполняются следующие условия:*

1. *Функция $f(x)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема на отрезке*

$$s_0 = [x^0; x^0 + 2h_0], \quad h_0 = -\frac{f(x^0)}{f'(x^0)}.$$

При этом на концах отрезка $f(x)f'(x) \neq 0$.

2. *Для начального приближения x^0 выполняется неравенство*

$$2|h_0|M \leq |f'(x_0)|, \quad M = \max_{x\in s_0}|f''(x)|.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Внутри отрезка s_0 уравнение $f(x) = 0$ имеет корень x^* и при этом этот корень единственный.*
2. *Последовательность приближений x^k, $k = 1, 2, \ldots$ может быть построена по формуле с заданным приближением x^0.*
3. *Последовательность x^k сходится к корню x^*, то есть $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x^*$.*
4. *Скорость сходимости характеризуется неравенством*

$$|x^* - x^{k+1}| \leq |x^{k+1} - x^k| \leq \frac{M}{2|f'(x^*)|}\cdot(x^k - x^{k-1})^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Начнем с монотонности функции, для этого рассмотрим ее производную, вычисленную по теореме Барроу

$$f'(x) = (x-1)^6(\lg\sqrt{x^2+1}+2).$$

Поскольку функции $(x-1)^6$ и $\lg\sqrt{x^2+1}+2$ являются строго положительными на отрезке $[0,+\infty)$, тогда и

$$f'(x) > 0,\ x \in [0,+\infty],$$

следовательно, наша исходная функция является монотонно возрастающей на нашем множестве.

Для определения знака на концах отрезка, необходимо приближенно вычислить интеграл

$$\int\limits_0^X (t-1)^6(\lg\sqrt{t^2+1}+2)dt.$$

Для этого определим подынтегральную функцию

$$g(x) = (t-1)^6(\lg\sqrt{t^2+1}+2).$$

[28]:
```
def g(x):
    return (x - 1)**6 * (np.log(np.sqrt(x**2 + 1)) + 2)
```

Для вычисления интеграла воспользуемся правилом Рунге, а именно приближенное значение будем искать в виде

$$\int\limits_0^X (t-1)^6(\lg\sqrt{t^2+1}+2)dt \approx I_h(f) + R(h,f),$$

где $I_h(f)$ - квадратурная формула, $R(h,f)$ - остаток составной квадратурной формулы.

Опираясь на заданее 3, будем использовать составную формулу трапеций, поскольку этот метод сошелся быстрее в рассматриваемом случае, для $\epsilon = 10^{-4}$.

Возьмем значение $x = 2$

[48]:
```
def f(x):
    return runge_rule(2, 0, x, trap, g)[3] - 5
```

[50]:
```
print(f(2))
```

```
-4.318882467251919
```

То есть

$$f(2) < 0.$$

Так как мы помним, что наша функция является момнотонно возрастающей, то все значения слева будут точно отрицательными.

Для рассмотрения правого конца отрезка возьмем значение из отрезка $(2,+\infty)$, например, $x = 2.5$

[52]:
```
print(f(2.5))
```

```
2.4211806131149247
```

Таким образом,

$$f(2.5) > 0,$$

что, опираясь на монотонность функции гарантирует, что во всех точках находящихся правее, значения функции будут положительны.

Следовательно, мы получили, что на отрезке $[2, 2.5]$ наша функция монотонна и имеет разные по знаку значения на его концах, что говорит о том, что на данном отрезке есть единственный корень.

Сведем наш отрезок к минимум, применив метод деления отрезка пополам

[61]:
```
a, b = 2, 2.5
epsilon_2 = 1e-1

dichotomy_table = [[a, b, b - a, f(a), f(b) , (a + b)/2]]
c = 0

while b - a > epsilon_2:
    c = (a + b) / 2

    if f(c) * f(a) >= 0:
        a = c

    else:
        b = c

    dichotomy_table.append([a, b, b - a, f(a), f(b) , (a + b) / 2])

pd.DataFrame(dichotomy_table, columns = ['a', 'b', 'b-a', 'f(a)', 'f(b)', '(a+b)/
↪2'])
```

[61]:

	a	b	b-a	f(a)	f(b)	(a+b)/2
0	2.000	2.5000	0.5000	-4.318882	2.421181	2.25000
1	2.250	2.5000	0.2500	-2.777240	2.421181	2.37500
2	2.375	2.5000	0.1250	-0.886216	2.421181	2.43750
3	2.375	2.4375	0.0625	-0.886216	0.547190	2.40625

Таким образом, получаем, что корень находится на отрезке $[2.375, 2, 4375]$.

Вспоминая метод Ньютона, имеем следующую формулу

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^0)}, \quad k = 0, 1, \dots; \quad x_0$$

Перейдем непосредственно к сходимости метода.

Выберем x_0 из полученного отрезка, например, $x_0 = 2.4$ и перейдем к проверке условий теоремы

[77]:
```
x0 = 2.4
print(f'Начальное приближение: {x0}')
```

```
h0 = -f(x0) / g(x0)
print(f'h_0: {h0}')

s0 = np.linspace(x0, x0 + 2 * h0, 1000)
print('s_0 = [', s0[0], ';', s0[-1], ']')
```

```
Начальное приближение: 2.4
h_0: 0.016157779181961252
s_0 = [ 2.4 ; 2.432315558363922 ]
```

Проверяем, чтобы на концах отрезка значение функции и ее производной не обращались в ноль одновременно:

[83]:
```
f(s0[0]) * g(s0[0])
```

[83]:
```
-8.001720689288327
```

[85]:
```
f(s0[-1]) * g(s0[0])
```

[85]:
```
9.1880804429428
```

Функция на концах отрезка не обращается в ноль.

Вычислим вторую производную для функции $f(x)$:

$$f''(x) = 3(x-1)^5 \ln(x^2+1) + \frac{(x-1)^5(12x^2+12) + (x-1)^6 x}{x^2+1}.$$

Зададим ее программно.

[95]:
```
def f_second_derivative(x):
    return 3 * (x - 1)**5 * np.log(x**2 + 1) + ((x - 1)**5 * (12 * x**2 + 12) +␣
 ↪(x - 1)**6 * x) / (x**2 + 1)
```

Найдем

$$M = \max_{x \in s_0} |f''(x)|$$

и сразу проверим выполнение условия 2 теоремы.

[103]:
```
M = np.max(np.absolute(f_second_derivative(s0)))
print(f'M: {M}')

2 * np.absolute(h0) * M <= np.absolute(g(x0))
```

```
M: 110.3495484134902
```

[103]:
```
True
```

Таким образом, получаем $M = 110.35$, и необходимое уловие выполняется. Что говорит о том, что все условия теоремы выполняются, следовательно, метод Ньютона на отрезке $[2.375, 2.475]$ сойдется.

Перейдем непосредственно к реализации метода Ньютона

[120]:
```
def newton_method(x0, epsilon=1e-4, max_iterations=100):
    x_prev = x0
    x_next = x_prev - f(x_prev) / g(x_prev)
    iterations = 1

    x_k = []

    while abs(x_next - x_prev) > epsilon and iterations < max_iterations:
        x_k.append([x_next, abs(x_next - x_prev)])

        x_prev = x_next
        x_next = x_prev - f(x_prev) / g(x_prev)
        iterations += 1

    if iterations == max_iterations:
        print("Максимальное количество итераций достигнуто!")

    x_k.append([x_next, abs(x_next - x_prev)])
    return x_k, x_next

x_k, x = newton_method(x0)

df = pd.DataFrame(x_k, columns=['Решение', 'Погрешность'])
df
```

[120]:

	Решение	Погрешность
0	2.416158	1.615778e-02
1	2.415611	5.471562e-04
2	2.415610	6.347148e-07

Таким образом, мы смогли достичь нужной степени точности за 3 итерации, и корнем нашего уравнения является значение

$$x \approx 2.415610.$$

Выполним проверку

[118]:
```
f(2.415610)
```

[118]: 2.79332797781251e-07

Получаем, что

$$f(2.415610) \approx 2.79 \cdot 10^{-7} < 10^{-4} = \epsilon,$$

Следовательно, полученное решение действительно является решением уравнения при заданной точности $\epsilon = 10^{-4}$.