МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра компьютерных технологий и систем

Отчет по лабораторной работе 1
Вариант 5

Выполнил:
Карпович Артём Дмитриевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:
Каркоцкий Александр Геннадьевич

Минск, 2024

Условие

Решить следующие смешанные задачи методом разделения переменных. Произвести визуализацию с использованием пакета Wolfram Mathematica. Первая задача посвящена колебанию тонкой струны, вторая – прямоугольного контура. Сумма, при необходимости, должна состоять не менее чем из 100 слагаемых.

1.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x(2+t), 0 < x < 5, t > 0 \\ u|_{t=0} = x, \\ u_t|_{t=0} = 0, \\ u_x + 5u|_{x=0} = 1 - t, \\ u|_{x=5} = t. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=5} = 0, \\ u_y|_{y=0} = u|_{y=9} = 0, \\ u|_{t=0} = e^{x+y}, \\ u_t|_{t=0} = e^{x-y}. \end{cases}$$

Задача 1

Получение решения

Перепишем условие задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x(2+t), 0 < x < 5, t > 0 \\ u|_{t=0} = x, \\ u_t|_{t=0} = 0, \\ u_x + 5u|_{x=0} = 1 - t, \\ u|_{x=5} = t. \end{cases}$$

Решение задачи будем искать в виде суммы

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где функция $v(x,t)$ удовлетворяет смешанной задаче с однородными граничными условиями, а функция $w(x,t)$ - неоднородным граничным условиям.

Найдем функцию $w(x,t)$ из представления:

$$w(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t).$$

Подставим это представление в граничные условия:

$$w_x(0,t) + 5w(0,t) = b + 5c = 1 - t,$$

$$w(5,t) = 25a + 5b + c = t.$$

Положим $a(t) = 0$, тогда получим систему для b, c:

$$\begin{cases} b + 5c = 1 - t, \\ 5b + c = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4}(t - \frac{1}{6}), \\ c = \frac{1}{4}(\frac{5}{6} - t). \end{cases} \Rightarrow \omega = \frac{1}{4}(t - \frac{1}{6})x + \frac{1}{4}(\frac{5}{6} - t).$$

Тогда решение исходной задачи представимо в виде:

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{4}(t - \frac{1}{6})x + \frac{1}{4}(\frac{5}{6} - t).$$

Путём подстановки данного представления в исходную задачу получим задачу для $v(x,t)$ с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = x(2+t), \\ v|_{t=0} = \frac{5}{24}(5x - 1), \\ v_t|_{t=0} = \frac{1}{4}(1 - x), \\ v_x + 5v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=5} = 0. \end{cases}$$

Решение данной задачи будем искать в виде суммы:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t).$$

Составим задачу Штурма-Лиувилля для однородного уравнения:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda_k^2 X(x) = 0, \\ X'(0) + 5X(0) = 0, \\ X(5) = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение уравнения данной задачи:

$$X_k(x) = A_k cos\lambda_k x + B_k sin\lambda_k x,$$

подставляем в граничные условия для нахождения коэффициентов:

$$\begin{cases} \lambda_k B_k + 5A_k = 0, \\ A_k cos 5\lambda_k + B_k sin 5\lambda_k = 0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения A_k:

$$A_k = -\frac{\lambda_k}{5} B_k,$$

тогда, подставляя полученное во второе начальное условие, получим:

$$-\frac{\lambda_k}{5} B_k \cos 5\lambda_k + B_k \sin 5\lambda_k = 0, \Rightarrow (-\frac{\lambda_k}{5} \cos 5\lambda_k + \sin 5\lambda_k) B_k = 0$$

поскольку из выражения для A_k следует, что $B_k \neq 0$ (в противном случае получаем нулевое решение), то можем разделить уравнение на B_k и получим:

$$\sin 5\lambda_k = \frac{\lambda_k}{5} \cos 5\lambda_k \Rightarrow \operatorname{tg} 5\lambda_k = \frac{\lambda_k}{5}.$$

Положим $B = 1$, тогда собственные функции задачи Штурма-Лиувилля примут вид:

$$X_k(x) = \sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x.$$

Собственные значения найдем чуть позже, при визуализации полученного решения, используя Wolfram Mathematica. Таким образом, решение рассматриваемой задачи можно представить в виде:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x) T_k(t).$$

Подставим полученное представление в исходное уравнение и начальные условия рассматриваемой задачи:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x)(T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x) f_k, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x) T_k(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x) \varphi_k, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x) T_k'(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x) \psi_k. \end{cases}$$

Найдём соответствующие коэффициенты ряда Фурье:

$$f_k = \frac{\int_0^5 x(2+t) X_k(x) dx}{\int_0^5 X_k^2(x) dx},$$

$$\varphi_k = \frac{\int_0^5 \frac{5}{24}(5x-1)X_k(x)dx}{\int_0^5 X_k^2(x)dx},$$

$$\psi_k = \frac{\int_0^5 \frac{1}{4}(1-x)X_k(x)dx}{\int_0^5 X_k^2(x)dx}.$$

Для нахождения коэффициентов воспользуемся Wolfram Mathematica:

```
In[23]:= ClearAll[Xk, fk, phik, psik]

         Xk[x_] := Sin[λ * x] - (λ / 5) * Cos[λ * x]
         fk = Integrate[x * (2 + T) * Xk[x], {x, 0, 5}] / Integrate[Xk[x]^2, {x, 0, 5}]
         fk // Simplify
```

$$\text{Out[25]=}\ -\frac{20\,(2+T)\,(-\lambda+26\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+5\,(-1+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

$$\text{Out[26]=}\ -\frac{20\,(2+T)\,(-\lambda+26\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+5\,(-1+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

```
In[27]:= phik = Integrate[5 / 24 * (5 * x - 1) * Xk[x], {x, 0, 5}] / Integrate[Xk[x]^2, {x, 0, 5}]
         phik // Simplify
```

$$\text{Out[27]=}\ \frac{25\,(-125\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+(25-24\,\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{6\,\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

$$\text{Out[28]=}\ \frac{25\,(-125\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+(25-24\,\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{6\,\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

```
In[29]:= psik = Integrate[1 / 4 * (1 - x) * Xk[x], {x, 0, 5}] / Integrate[Xk[x]^2, {x, 0, 5}]
         psik // Simplify
```

$$\text{Out[29]=}\ \frac{5\,(4\,\lambda+21\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+(-5+4\,\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

$$\text{Out[30]=}\ \frac{5\,(4\,\lambda+21\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+(-5+4\,\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

Таким образом, получаем:

$$f_k = -\frac{20(t+2)\left(5\left(\lambda^2-1\right)\sin(5\lambda)-\lambda+26\lambda\cos(5\lambda)\right)}{\lambda\left((\lambda^2-25)\sin(10\lambda)+10\lambda\left(\lambda^2+\cos(10\lambda)+24\right)\right)},$$

$$\varphi_k = \frac{25\left((25-24\lambda^2)\sin(5\lambda)-125\lambda\cos(5\lambda)\right)}{6\lambda\left((\lambda^2-25)\sin(10\lambda)+10\lambda\left(\lambda^2+\cos(10\lambda)+24\right)\right)},$$

$$\psi_k = \frac{5\left(\left(4\lambda_k^2-5\right)\sin(5\lambda_k)+4\lambda_k+21\lambda_k\cos(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k\left(\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\left(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24\right)\right)}.$$

С помощью полученных коэффициентов составляем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = -\frac{20(t+2)\left(5\left(\lambda_k^2-1\right)\sin(5\lambda_k)-\lambda_k+26\lambda_k\cos(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k\left(\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\left(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24\right)\right)}, \\ T_k(0) = \frac{25\left(\left(25-24\lambda_k^2\right)\sin(5\lambda_k)-125\lambda_k\cos(5\lambda_k)\right)}{6\lambda_k\left(\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\left(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24\right)\right)}, \\ T_k'(0) = \frac{5\left(\left(4\lambda_k^2-5\right)\sin(5\lambda_k)+4\lambda_k+21\lambda_k\cos(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k\left(\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\left(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24\right)\right)}. \end{cases}$$

Решим эту задачу. Построим общее однородное решение уравнения рассматриваемой задачи Коши:

$$T_k^{\text{оо}}(t) = A_k cos\lambda_k t + B_k sin\lambda_k t.$$

По виду правой части выпишем частное решение неоднородного уравнения:

$$T_k^{\text{чн}}(t) = C_k t + D_k.$$

Подставим вид частного неоднородного решения в уравнение:

$$C_k\lambda_k^2 t + D_k\lambda_k^2 = f_k.$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты, получим:

$$\begin{cases} C_k = -\frac{20\left(5\left(\lambda_k^2-1\right)\sin(5\lambda_k)-\lambda_k+26\lambda_k\cos(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k^3\left(\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\left(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24\right)\right)}, \\ D_k = -\frac{40\left(5\left(\lambda_k^2-1\right)\sin(5\lambda_k)-\lambda_k+26\lambda_k\cos(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k^3\left(\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\left(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24\right)\right)}. \end{cases}$$

Тогда получаем общее решение неоднородного уравнения в виде суммы:

$$T_k^{\text{он}}(t) = T_k^{\text{оо}}(t) + T_k^{\text{чн}}(t) = A_k cos\lambda_k t + B_k sin\lambda_k t + C_k t + D_k.$$

Коэффициенты A_k, B_k получим, подставив полученное выражение в начальные условия:

$$\begin{cases} T_k(0) = B_k + D_k, \\ T_k'(0) = C_k - \lambda_k A_k, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_k = \varphi_k - D_k, \\ A_k = \frac{1}{\lambda_k}(C_k - \psi_k). \end{cases}$$

Снова прибегнем к помощи Wolfram Mathematica:

```
In[53]:= ClearAll[Ck, Dk, Bk]

         Ck[λ_] = -((20 (-λ + 26 λ Cos[5 λ] + 5 (-1 + λ^2) Sin[5 λ])) / (λ^3 (10 λ (24 + λ^2 + Cos[10 λ]) + (-25 + λ^2) Sin[10 λ])))
         Dk[λ_] = -((40 (-λ + 26 λ Cos[5 λ] + 5 (-1 + λ^2) Sin[5 λ])) / (λ^3 (10 λ (24 + λ^2 + Cos[10 λ]) + (-25 + λ^2) Sin[10 λ])))
         Bk[λ_] = phik - Dk[λ]
         Bk[λ] // Simplify
```

Out[54]=
$$-\frac{20\,(-\lambda+26\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+5\,(-1+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda^3\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

Out[55]=
$$-\frac{40\,(-\lambda+26\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+5\,(-1+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda^3\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

Out[56]=
$$\frac{25\,(-125\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+(25-24\,\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{6\,\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}+\frac{40\,(-\lambda+26\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+5\,(-1+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda^3\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

Out[57]=
$$-\frac{5\,(48\,\lambda+\lambda\,(-1248+625\,\lambda^2)\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+5\,(48-73\,\lambda^2+24\,\lambda^4)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{6\,\lambda^3\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2)+10\,\lambda\,\mathrm{Cos}[10\,\lambda]+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

```
In[58]:= ClearAll[Ak]

         Ak[λ_] = 1 / λ * (Ck[λ] - psik)
         Ak[λ] // Simplify
```

Out[59]=
$$\frac{-\frac{20\,(-\lambda+26\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+5\,(-1+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda^3\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}-\frac{5\,(4\,\lambda+21\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+(-5+4\,\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}}{\lambda}$$

Out[60]=
$$-\frac{5\,(4\,\lambda\,(-1+\lambda^2)+\lambda\,(104+21\,\lambda^2)\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+(-20+15\,\lambda^2+4\,\lambda^4)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda^4\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2)+10\,\lambda\,\mathrm{Cos}[10\,\lambda]+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} A_k = -\frac{5\left(4\lambda_k\left(\lambda_k^2-1\right)+\lambda_k\left(21\lambda_k^2+104\right)\cos(5\lambda_k)+\left(4\lambda_k^4+15\lambda_k^2-20\right)\sin(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k^4\left(10\lambda_k\left(\lambda_k^2+24\right)+\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\cos(10\lambda_k)\right)}, \\ B_k = -\frac{5\left(\left(625\lambda_k^2-1248\right)\lambda_k\cos(5\lambda_k)+5\left(24\lambda_k^4-73\lambda_k^2+48\right)\sin(5\lambda_k)+48\lambda_k\right)}{6\lambda_k^3\left(10\lambda_k\left(\lambda_k^2+24\right)+\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\cos(10\lambda_k)\right)}. \end{cases}$$

Таким образом, из-за излишней громоздкости выражения подставим все найденные коэффициенты мысленно, и тогда мы сможем найти решение задачи для v, решение исходной задачи будет иметь вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}(\sin\lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5}\cos\lambda_k x)(A_k cos\lambda_k t + B_k sin\lambda_k t + C_k t + D_k) + \frac{1}{4}(t-\frac{1}{6})x + \frac{1}{4}(\frac{5}{6}-t),$$

где

$$A_k = -\frac{5\left(4\lambda_k\left(\lambda_k^2-1\right)+\lambda_k\left(21\lambda_k^2+104\right)\cos(5\lambda_k)+\left(4\lambda_k^4+15\lambda_k^2-20\right)\sin(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k^4\left(10\lambda_k\left(\lambda_k^2+24\right)+\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\cos(10\lambda_k)\right)},$$

$$B_k = -\frac{5\left(\left(625\lambda_k^2-1248\right)\lambda_k\cos(5\lambda_k)+5\left(24\lambda_k^4-73\lambda_k^2+48\right)\sin(5\lambda_k)+48\lambda_k\right)}{6\lambda_k^3\left(10\lambda_k\left(\lambda_k^2+24\right)+\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\cos(10\lambda_k)\right)},$$

$$C_k = -\frac{20\left(5\left(\lambda_k^2-1\right)\sin(5\lambda_k)-\lambda_k+26\lambda_k\cos(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k^3\left(\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\left(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24\right)\right)},$$

$$D_k = -\frac{40\left(5\left(\lambda_k^2-1\right)\sin(5\lambda_k)-\lambda_k+26\lambda_k\cos(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k^3\left(\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\left(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24\right)\right)},$$

λ_k найдем при визуализации из уравнения $\operatorname{tg} 5\lambda_k = \frac{\lambda_k}{5}$.

Визуализация решения

Для визуализации необходимо перенести полученное аналитически решение в Wolfram Mathematica, а так же вычислить недостающий на данном этапе элемент, а имеено собственные значения λ_k:

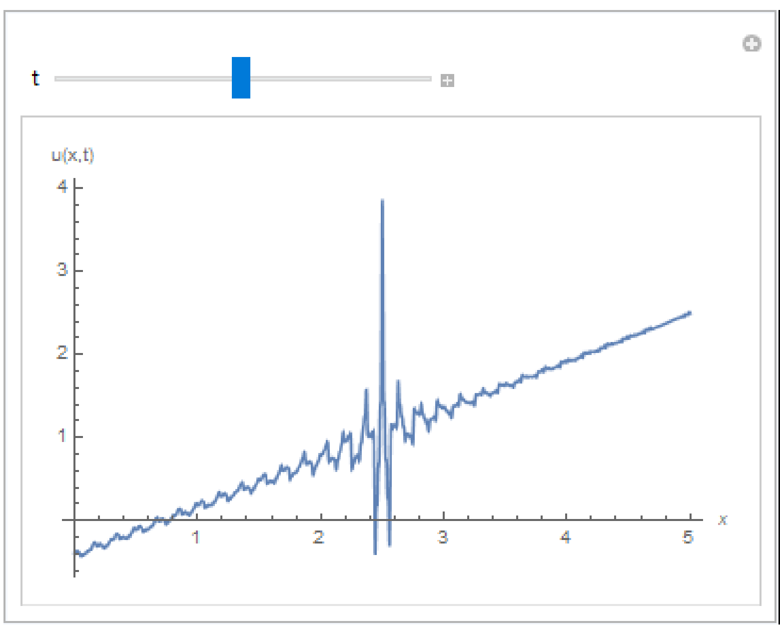
```
In[61]:= omega[x_, t_] := 1 / 4 * (t - 1 / 6) * x + 1 / 4 * (5 / 6 - t)
         root[n_] := NSolve[Tan[5 * λ] == λ / 5 && 100 * n < λ ≤ 100 * (n + 1), Reals];
         list = {};
         For[i = 0, i ≤ 3, i++, list = Join[list, Values[root[i]]]]

In[65]:= u[x_, t_] :=
          Sum[(Sin[list[[k]] * x] - list[[k]] / 5 * Cos[list[[k]] * x]) *
             (Ak[list[[k]]] Cos[list[[k]] * t] + Bk[list[[k]]] * Sin[list[[k]] * t] + Ck[list[[k]]] * t + Dk[list[[k]]]),
            {k, list // Length}] + omega[x, t]
```

Теперь построим две визуализации для нашей задачи:

1. Профиля струны во времени для конкретного момента времени с возможностью изменения:

```
In[66]:= Manipulate[Plot[Evaluate[u[x, t]], {x, 0, 5}, AxesLabel → {x, "u(x,t)"}], {t, 0, 5, 0.5}]
```

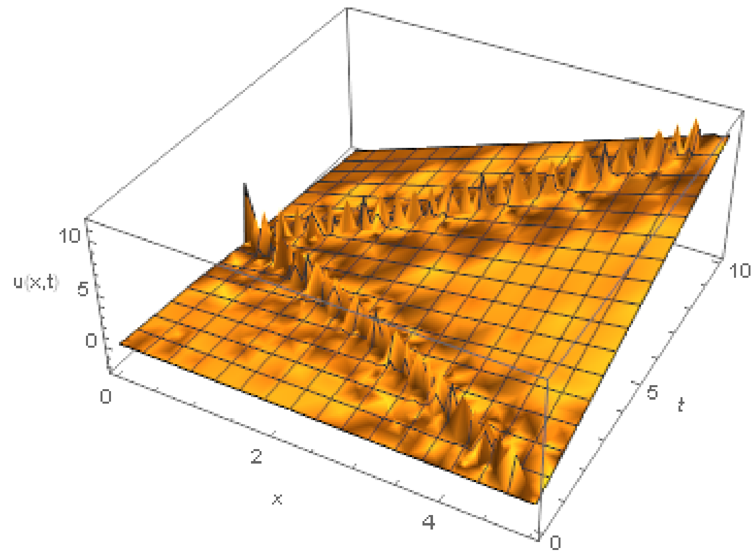
Out[66]=



2. Профиля струны во времени на всем промежутке времени:

```
In[71]:= Plot3D[Evaluate[u[x, t]], {x, 0, 5}, {t, 0, 10}, AxesLabel → {x, t, "u(x,t)"}]
```

Out[71]=



Задача 2

Получение решения

Перепишем условие задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=5} = 0, \\ u_y|_{y=0} = u|_{y=9} = 0, \\ u|_{t=0} = e^{x+y}, \\ u_t|_{t=0} = e^{x-y}. \end{cases}$$

Решение задачи будем искать в виде:

$$u(x, y, t) = T(t)V(x, y),$$

подставим данное представление в уравнение нашей задачи, тогда получим:

$$T''(t)V(x, y) = \Delta V(x, y)T(t),$$

разделим обе части уравнения на $T(t)V(x, y)$, тогда получим:

$$\frac{T''}{T} = \frac{\Delta V}{V} = -\lambda^2.$$

Отсюда составим задачу для $V(x, y)$:

$$\begin{cases} \Delta V + \lambda^2 V = 0, \\ V|_{x=0} = V_x|_{x=5} = 0, \\ V_y|_{y=0} = V|_{y=9} = 0. \end{cases}$$

Получившуюся задачу будем решать с помощью замены:

$$V(x, t) = X(x)Y(y),$$

подставим в уравнение рассматриваемой задачи и получим:

$$\frac{YX'' + XY''}{XY} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda^2 = -\mu^2.$$

Тогда получим два уравнения:

$$X'' + \mu^2 X = 0,$$
$$Y'' + \nu^2 Y = 0,$$

где $\nu^2 = \lambda^2 - \mu^2$. Воспользуемся граничными условиями исходной задачи и построим две задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(5) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Y'' + \nu^2 Y = 0, \\ Y(9) = 0, \\ Y'(0) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу для $X(x)$. Из уравнения имеем общее решение:

$$X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x,$$

подставим в граничные условия:

$$\begin{cases} X(0) = A = 0, \\ X'(5) = \mu B \cos 5\mu, \end{cases} \quad \Rightarrow \cos 5\mu = 0 \Rightarrow \mu_n = \frac{1}{5}(\frac{\pi}{2} + \pi n), n = 1, 2, ...$$

Таким образом, решение задачи Штурма-Лиувилля для $X(x)$ имеет вид:

$$X_n(x) = \sin x\mu_n, \mu_n = \frac{1}{5}(\frac{\pi}{2} + \pi n), n = 1, 2, ...$$

Решим теперь вторую задачу, для $Y(y)$:

$$Y(y) = A\cos\nu y + B\sin\nu y,$$

$$\begin{cases} Y'(0) = B\nu = 0, \Rightarrow B = 0, \\ Y(9) = A\cos 9\nu = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \nu_m = \frac{1}{9}(\frac{\pi}{2} + \pi m), m = 1, 2, ...$$

Таким образом, решение данной задачи Штурма-Лиувилля имеет вид:

$$Y_m(y) = \cos y\nu_m, \nu_m = \frac{1}{9}(\frac{\pi}{2} + \pi m), m = 1, 2, ...$$

Тогда решение исходной задачи примет вид:

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{nm}(t) \sin x\mu_n \cos y\nu_m.$$

Подставим в исходную задачу:

$$\begin{cases} \sum_{n,m=1}^{\infty} T''_{nm}(t) \sin x\mu_n \cos y\nu_m + \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{nm}(t)(\mu_n^2 \sin x\mu_n \cos y\nu_m + \nu_m^2 \sin x\mu_n \cos y\nu_m) = 0, \\ \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{nm}(0) \sin x\mu_n \cos y\nu_m = e^{x+y}, \\ \sum_{n,m=1}^{\infty} T'_{nm}(0) \sin x\mu_n \cos y\nu_m = e^{x-y}. \end{cases}$$

Заметим, что уравнение полученной задачи можно переписать в виде:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} T''_{nm}(t) \sin x\mu_n + \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{nm}(t)(\mu_n^2 + \nu_m^2) = 0, \Rightarrow T''_{nm}(t) + \lambda_{nm}^2 T_{nm}(t) = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{nm}(t) = A_{nm} \cos\lambda_{nm} t + B_{nm} \sin\lambda_{nm} t.$$

Тогда, подставляя в начальные условия, получим:

$$\begin{cases} \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin x\mu_n \cos y\nu_m = e^{x+y}, \\ \sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_{nm} B_{nm} \sin x\mu_n \cos y\nu_m = e^{x-y}. \end{cases}$$

Разложим наши функции $\varphi(x, y) = e^{x+y}, \psi(x, y) = e^{x-y}$ в ряд Фурье по собственным функциям:

$$A_{nm} = \frac{\int_0^5 \int_0^9 e^{x+y} \sin x\mu_n \cos y\nu_m dydx}{\int_0^5 \int_0^9 (\sin x\mu_n \cos y\nu_m)^2 dydx} = [\text{переобозначим}] = \frac{1}{I} \int_0^5 e^x \sin x\mu_n \int_0^9 e^y \cos y\nu_m dydx,$$

$$B_{nm} = \frac{1}{I} \int_0^5 \int_0^9 e^{x-y} \sin x\mu_n \cos y\nu_m dydx = \frac{1}{I} \int_0^5 e^x \sin x\mu_n \int_0^9 \frac{1}{e^y} \cos y\nu_m dydx.$$

Посчитаем отдельно каждый из интегралов:

$$I=\int_0^5\int_0^9(\sin x\mu_n\cos y\nu_m)^2dydx=\int_0^5\sin^2 x\mu_n\int_0^9\cos^2 y\nu_m dydx=\int_0^5\frac{1-\cos 2y\mu_n}{2}\int_0^9\frac{1+\cos 2y\nu_m}{2}dydx=$$

$$=\frac{9+\frac{1}{2\nu_m}\sin 18\nu_m}{2}\int_0^5\frac{1-\cos 2y\mu_n}{2}dx=\frac{9+\frac{1}{2\nu_m}\sin 18\nu_m}{2}\frac{5-\frac{1}{2\mu_n}\sin 18\mu_n}{2}=[\text{подставим значения}]=\frac{45}{4}$$

$$I_1=\int_0^9 e^y\cos y\nu_m dy=[\text{решаем по частям}]=\left[u=e^y\Rightarrow du=e^y dy, dv=\cos y\nu_m dy\Rightarrow v=\frac{1}{\nu_m}\sin y\nu_m\right]=$$

$$=\frac{1}{\nu_m}\sin y\nu_m\cdot e^y|_{y=0}^{y=9}-\frac{1}{\nu_m}\int_0^9 e^y\sin y\nu_m dy=\frac{1}{\nu_m}(\sin 9\nu_m\cdot e^9-\int_0^9 e^y\sin y\nu_m dy)=[\text{снова по частям}]=$$

$$=\frac{1}{\nu_m}(e^9(\sin 9\nu_m+\frac{1}{\nu_m}\cos 9\nu_m)-\frac{1}{\nu_m}-\frac{1}{\nu_m}\int_0^9 e^y\cos\nu_m y dy),\Rightarrow \nu_m I_1+\frac{1}{\nu_m}I_1=e^9(\sin 9\nu_m+\frac{1}{\nu_m}\cos 9\nu_m)-\frac{1}{\nu_m},$$

$$\Rightarrow(\frac{\nu_m^2+1}{\nu_m})I_1=e^9(\sin 9\nu_m+\frac{1}{\nu_m}\cos 9\nu_m)-\frac{1}{\nu_m},\Rightarrow I_1=\frac{1}{1+\nu_m^2}(e^9(\nu_m\sin 9\nu_m+\cos 9\nu_m)-1)=$$

$$=[\text{частично подставим значение }\nu_m]=\frac{1}{1+\nu_m^2}((-1)^m e^9-1)$$

$$I_2=\int_0^5 e^x\sin x\mu_n dx=[\text{аналогично }I_1]=\frac{1}{1+\mu_n^2}(1-(-1)^n e^5)$$

$$I_3=\int_0^9\frac{1}{e^y}\cos y\nu_m dy=[\text{аналогично }I_1]=\frac{1}{1+\nu_m^2}((-1)^m\frac{1}{e^5}-1)$$

$$I_4=I_2=\frac{1}{1+\mu_n^2}(1-(-1)^n e^5).$$

Таким образом, получаем:

$$A_{nm}=\frac{4}{45}\cdot\frac{1}{1+\nu_m^2}((-1)^m e^9-1)\cdot\frac{1}{1+\mu_n^2}(1-(-1)^n e^5)=\frac{4}{45}\cdot\frac{1}{(1+\nu_m^2)(1+\mu_n^2)}((-1)^m e^9-1)((1-(-1)^n e^5)),$$

$$B_{nm}=\frac{4}{45}\cdot\frac{1}{1+\nu_m^2}((-1)^m\frac{1}{e^5}-1)\cdot\frac{1}{1+\mu_n^2}(1-(-1)^n e^5)=\frac{4}{45}\cdot\frac{1}{(1+\nu_m^2)(1+\mu_n^2)}((-1)^m\frac{1}{e^5}-1)(1-(-1)^n e^5).$$

Итого, мысленно подставив полученные коэффициенты в решение уравнения рассматриваемой задачи, получим решение рассматриваемой задачи Коши:

$$T_{nm}(t)=A_{nm}\cos\lambda_{nm}t+B_{nm}\sin\lambda_{nm}t,$$

где

$$\lambda_{nm}^2=\nu_m^2+\mu_n^2=(\frac{1}{9}(\frac{\pi}{2}+\pi m))^2+(\frac{1}{5}(\frac{\pi}{2}+\pi n))^2.$$

Итого, решение исходной задачи представимо в виде:

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{\infty}(A_{nm}\cos\lambda_{nm}t+B_{nm}\sin\lambda_{nm}t)\sin x\mu_n\cos y\nu_m,$$

где

$$A_{nm}=\frac{4}{45}\cdot\frac{1}{(1+\nu_m^2)(1+\mu_n^2)}((-1)^m e^9-1)((1-(-1)^n e^5)),$$

$$B_{nm} = \frac{4}{45} \cdot \frac{1}{(1+\nu_m^2)(1+\mu_n^2)}((-1)^m \frac{1}{e^5} - 1)(1-(-1)^n e^5),$$

$$\mu_n = \frac{1}{5}(\frac{\pi}{2} + \pi n), n = 1, 2, ..., \;\; \nu_m = \frac{1}{9}(\frac{\pi}{2} + \pi m), m = 1, 2, ...,$$

$$\lambda_{nm} = \sqrt{\mu_n^2 + \nu_m^2}$$

Визуализация решения

Перенесём полученное ранее аналитическое решение в Wolfram Mathematica:

```
In[25]:= ClearAll[ν, μ, A, B, λ, u]

         ν[m_] := 1/9 * ((π/2) + π * m)
         μ[n_] := 1/5 * ((π/2) + π * n)
         A[n_, m_] := (4/45) * (1/(1+ν[m]^2)) ((-1)^m * E^9 - 1) (1/(1+μ[n]^2)) (1 - (-1)^n * E^5)
         B[n_, m_] := (4/45) * (1/(1+ν[m]^2)) ((-1)^m * (1/E^5) - 1) (1/(1+μ[n]^2)) (1 - (-1)^n * E^5)
         λ[n_, m_] := Sqrt[ν[m]^2 + μ[n]^2]
         u[x_, y_, t_] := Sum[(A[n, m] * Cos[λ[n, m] * t] + B[n, m] * Sin[λ[n, m] * t]) * Sin[x * μ[n]] * Cos[y * ν[m]], {n, 1, 100}, {m, 1, 100}]
```

После этого строим визуализацию прямоугольного контура во времени для конкретного времени с возможностью изменения:

```
In[32]:= Manipulate[Plot3D[Evaluate[u[x, y, t]], {x, 0, 5}, {y, 0, 9}, AxesLabel → {x, y, "u(x,t)"}], {t, 0, 10, 0.5}]
```

Out[32]=