МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и инворматики
Кафедра вычислительной математики

Отчет по лабораторной работе 3
"Исследование устойчивости разнстных схем."
Вариант 5

Выполнил:
Карпович Артём Дмитриевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:
Репников Василий Иванович

Минск, 2024

Постановка задач

1. Исследовать устойчивость РС спектральным методом.
2. Исследовать устойчивость РС с помощью принципа максимума.
3. Выполнить машинную реализацию РС и проверить найденное условие устойчивости.

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, 0 < x < \infty, t > 0, a = \mathrm{const} > 0, \\
u(x,0) = u_0(x), x \geq 0, \\
u(0,t) = \mu(t), t \geq 0,
\end{cases}
$$

$$
a = 10; u_0(x) = x^2, \mu(t) = 100t^2.
$$

Задача 1

Постановка задачи. Исследовать устойчивость РС спектральным методом.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, 0 < x < \infty, t > 0, a = \text{const} > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), x \geq 0, \\ u(0,t) = \mu(t), t \geq 0, \end{cases}$$

где $a = 10; u_0(x) = x^2, \mu(t) = 100t^2$.

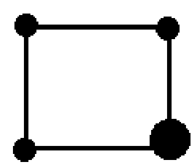
Построение разностной схемы. Для того, чтобы исследовать устойчивость разностной схемы, необходимо записать разностную схему для нашей задачи. Пусть задана равномерная сетка узлов:

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau,$$

где

$$\omega_h = \{x_k = kh, k = \overline{1,N}, h = \frac{1}{N}\},\ \omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{1,N}, \tau = \frac{1}{N}\}.$$

Воспользуемся данным нам шаблоном:



$$\text{Ш}(x,t) = \{(x,t), (x-h,t), (x,t+\tau), (x+h,t+\tau)\}.$$

С учетом этого шаблона можно построить разностную схему:

$$\begin{cases} y_t + a(\sigma \hat{y}_{\overline{x}} + (1-\sigma)y_{\overline{x}}) = 0, (x,t) \in \omega_{h\tau} \\ y(x,0) = u_0(x), (x,t) \in \omega_{h\tau} \\ y(0,t) = \mu(t), (x,t) \in \omega_{h\tau} \end{cases}$$

или в индексной форме:

$$\begin{cases} \frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + a\Big(\sigma \frac{y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}}{h} + (1-\sigma)\frac{y_k^j - y_{k-1}^j}{h}\Big) = 0, \\ y_k^0 = u_0(x), \\ y_0^j = \mu^j. \end{cases}$$

Для вычисления порядка данной разностной схемы необходимо найти порядок только уравнения, поскольку начальные и граничные условия аппроксимируются точно.

$$\psi_{h\tau}(x,t) = u_t + a(\sigma \hat{u}_{\overline{x}} + (1-\sigma)u_{\overline{x}}) = \dot{u} + \frac{\tau}{2}\ddot{u} + a\Big[u' + \frac{h}{2}u'' + \sigma\tau\dot{u}' + \sigma\tau\frac{h}{2}\dot{u}''\Big] + O(h^2) - \varphi =$$

$$= f + \frac{\tau}{2}\dot{f} + \frac{h}{2}f' - \varphi + a\tau\dot{u}'\Big(\sigma - \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau a}\Big) + O(h^2 + \tau^2).$$

Таким образом, при $\varphi = f + \frac{\tau}{2}\dot{f} + \frac{h}{2}f',\ \sigma = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{h}{a\tau}\Big)$ мы полчим РС порядка $O(h^2 + \tau^2)$.

Спектральный метод. Для того, чтобы исследовать разностную схему на устойчивость спектральным методом, необходимо в индексную форму построенной РС подставить выражение:

$$y_k^j = q^j e^{ik\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi).$$

Подставим в уравнение разностной схемы:

$$\Big(q^{j+1}e^{ik\varphi} - q^j e^{ik\varphi}\Big) + \frac{a\tau}{h}\Big(\sigma(q^{j+1}e^{ik\varphi} - q^{j+1}e^{i(k-1)\varphi}) + (1-\sigma)(q^j e^{ik\varphi} - q^j e^{i(k-1)\varphi})\Big) = 0.$$

Сократим на $q^{j+1}e^{i(k-1)\varphi}$:

$$(q-1) + \gamma\Big(\sigma(qe^{i\varphi} - q) + (1-\sigma)(e^{i\varphi} - 1)\Big) = 0.$$

Выразим отсюда q:

$$q = \frac{1 - \gamma(1-\sigma)(e^{i\varphi} - 1)}{1 + \gamma\sigma(e^{i\varphi} - 1)}.$$

Для спектрального метода необходимо выполнение условия:

$$|q|^2 \leq 1,$$

следовательно,

$$(1 - \gamma(1-\sigma)(\cos(\varphi) - 1))^2 + (\gamma(1-\sigma)\sin(\varphi))^2 \leq (1 + \gamma\sigma(\cos(\varphi) - 1))^2 + (\gamma\sigma\sin(\varphi))^2, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - \gamma(1-\sigma)(\cos(\varphi) - 1) - 1 - \gamma\sigma(\cos(\varphi)) - 1) \cdot (1 - \gamma(1-\sigma)(\cos(\varphi) - 1) + 1 + \gamma\sigma(\cos(\varphi) - 1)) +$$

$$+ (\gamma(1-\sigma)\sin(\varphi) - \gamma\sigma\sin(\varphi))(\gamma(1-\sigma)\sin(\varphi) + \gamma\sigma\sin(\varphi)) \leq 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-\gamma\cos(\varphi) + \gamma)(2 - \gamma\cos(\varphi) + 2\gamma\sigma\cos(\varphi) + \gamma - 2\gamma\sigma) + (\gamma\sin(\varphi) - 2\gamma\sigma\sin(\varphi))\gamma\sin(\varphi) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma(1 - \cos(\varphi))(2 + \gamma(\cos(\varphi) - 1)(2\sigma - 1)) + \gamma^2\sin^2(\varphi)(1 - 2\sigma) \leq 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\gamma(1 - \cos(\varphi)) + \gamma^2(1 - \cos(\varphi))^2(1 - 2\sigma) + \gamma^2\sin^2(\varphi)(1 - 2\sigma) \leq 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\gamma(1 - \cos(\varphi)) + \gamma^2(1 - 2\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos^2(\varphi))(1 - 2\sigma) + \gamma^2\sin^2(\varphi)(1 - 2\sigma) \leq 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\gamma(1 - \cos(\varphi)) + \gamma^2(2 - \sin(2\varphi)) \cdot (1 - 2\sigma) \leq 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\gamma(\gamma(1 - 2\sigma\cos(\varphi)) + 1) \leq 0.$$

Рассмотрим два случая:

а) $a > 0$:

Тогда

$$1 - 2\sigma\cos(\varphi) \leq -\frac{1}{\gamma}, \Rightarrow \frac{1 + \frac{1}{\gamma}}{2\cos(\varphi)} \leq \sigma, \Rightarrow \frac{\gamma + 1}{2\gamma\cos(\varphi)} \leq \sigma, \Rightarrow \sigma \geq \frac{\gamma + 1}{2\gamma} = \frac{1}{2} + \frac{h}{2a\tau}.$$

Таким образом, получили условие устойчивости при $a > 0$.

б) $a < 0$:

Тогда

$$1 - 2\sigma\cos(\varphi) \geq -\frac{1}{\gamma}, \Rightarrow \sigma \leq \frac{\gamma + 1}{2\gamma\cos(\varphi)}, \Rightarrow \sigma \leq \frac{\gamma + 1}{2\gamma} = \frac{1}{2} + \frac{h}{2a\tau}.$$

Таким образом, получили условие устойчивости при $a < 0$, однако это условие нас интересовать не будет, так как нам задано $a = 10 > 0$.

Задача 2

Постановка задачи. Исследовать устойчивость РС с помощью принципа максимума.

Решение задачи. Для применения принципа максимум выпишем разностную схему, полученную в задании 1:

$$\begin{cases} y_t + a(\sigma \hat{y}_{\overline{x}} + (1-\sigma) y_{\overline{x}}) = 0, (x,t) \in \omega_{h\tau} \\ y(x,0) = u_0(x), (x,t) \in \omega_{h\tau} \\ y(0,t) = \mu(t), (x,t) \in \omega_{h\tau} \end{cases}$$

или в индексной форме:

$$\begin{cases} \frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + a\Big(\sigma \frac{y_k^{j+1} + y_{k-1}^{j+1}}{h} - (1-\sigma)\frac{y_k^j - y_{k-1}^j}{h}\Big) = 0, \\ y_k^0 = u_0(x), \\ y_0^j = \mu^j. \end{cases}$$

В качестве точки, отсносительно которой будем исследовать устойчивость, выберем точку $x = (x_k, t_{j+1})$. Выразим из уравнения y_k^j :

$$y_k^{j+1}\Big(\frac{1}{\tau} + \frac{a\sigma}{h}\Big) = y_k^j\Big(\frac{1}{\tau} + \frac{(1-\sigma)a}{h}\Big) + y_{k-1}^j \frac{(1-\sigma)a}{h} + y_{k-1}^{j+1}\frac{a\sigma}{h} + \varphi_k^j.$$

Проверим выполнение условий устойчивости:

$$A(x) = \frac{1}{\tau} + \frac{a\sigma}{h} > 0;\; B_1(x) = \frac{1}{\tau} + \frac{(1-\sigma)a}{h} > 0;\; B_2(x) = \frac{(1-\sigma)a}{h} > 0;\; B_3(x) = \frac{a\sigma}{h} > 0;$$

Сократим на $A(x)$:

$$A = 1 > 0;\; B_1(x) = 1 - \frac{\sigma a \tau}{h + a\tau} > 0 \Rightarrow h > a\tau(\sigma - 1);\; B_2(x) = \frac{(1-\sigma)a\tau}{h + a\sigma\tau} > 0 \Rightarrow \sigma < 1;\; B_3(x) = \frac{a\sigma\tau}{h + a\sigma\tau} > 0.$$

Таким образом, для устойчивости необходимо выполнение условий:

$$h > a\tau(\sigma - 1);\; 0 < \sigma < 1;\; a > 0.$$

Задача 3

Постановка задачи.

Выполнить машинную реализацию РС и проверить найденное условие устойчивости.

Решение задачи.

Спектральный метод. Зададим нашу сетку узлов.

[41]:
```
def generate_grids(left_border, right_border, num_x_points, upper_bound,␣
↪num_t_points):
    h = (right_border-left_border) / num_x_points
    nodes_x = np.linspace(left_border, right_border, num_x_points+1)
    tau = upper_bound / num_t_points
    nodes_t = np.linspace(0, upper_bound, num_t_points + 1)

    return nodes_x, nodes_t, h, tau
```

Определим функцию

$$u(x,t) = u_0(x - at)$$

соответствующую точному решению поставленной задачи Коши. Зададим $a = 10$ и $u_0(x) = x^2$, а также $\mu(t) = 100t^2$.

[42]:
```
def u(x, t, a, u_0):
    return u_0(x - a * t)

a = 10

def u_0(x):
    return x**2

def mu(t):
    return 100*t**2
```

Определим построенную разностную схему:

$$\begin{cases} \frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + a\left(\sigma \frac{y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}}{h} + (1-\sigma)\frac{y_k^j - y_{k-1}^j}{h}\right) = 0, \\ y_k^0 = u_0(x), \\ y_0^j = \mu^j. \end{cases}$$

Отсюда определим рекуррентную формулу:

$$y_k^{j+1} = (1+\sigma\gamma)^{(-1)}(y_k^j(1 - (1-\sigma)\gamma) + y_{k-1}^j((1-\sigma)\gamma) + y_{k-1}^{j+1}\sigma\gamma), \ \gamma = \frac{a\tau}{h}$$

Пусть $x \in [0,3]$, $t \in [0, \frac{1}{4}]$, разобьем каждый из отрезков на 5 частей. Также необходимо помнить, что для усточивости по принципу максимума необходимо, чтобы $\sigma \in (0,1)$, возьмем, например $\sigma = \frac{1}{2}$.

[43]:
```
def diff_scheme_solve(nodes_x, nodes_t, h, tau, sigma, u_0, a):
    gamma = a * tau / h
    y = np.zeros((len(nodes_x), len(nodes_t)))

    for k in range(len(nodes_x)):
        y[k, 0] = u_0(nodes_x[k])

    for j in range(len(nodes_t)):
        y[0, j] = mu(nodes_t[j])

    for k in range(len(nodes_x)-1):
        for j in range(len(nodes_t)-1):
            y[k, j + 1] = (1 + sigma * gamma)**(-1) * (y[k, j] * (1 - (1 -␣
↪sigma) * gamma) + y[k-1, j] * ((1 - sigma) * gamma) + y[k-1, j+1] * sigma *␣
↪gamma)

    return y
```

С учетом предложенных отрезков, получаем следующие шаги h, τ :

[44]:
```
nodes_x, nodes_t, h, tau = generate_grids(0, 3, 5, 1/4, 5)
sigma = 1 / 2

print(f'h = {h}')
print(f'tau = {tau}')
```

```
h = 0.6
tau = 0.05
```

Проверим выполнение условий устойчивости при полученных $h = 0.6$, $\tau = 0.05$, $\sigma = \frac{1}{2}$, а именно

$$h > a\tau(\sigma - 1).$$

[45]:
```
print(h > a * tau * (sigma - 1))
```

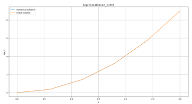
```
True
```

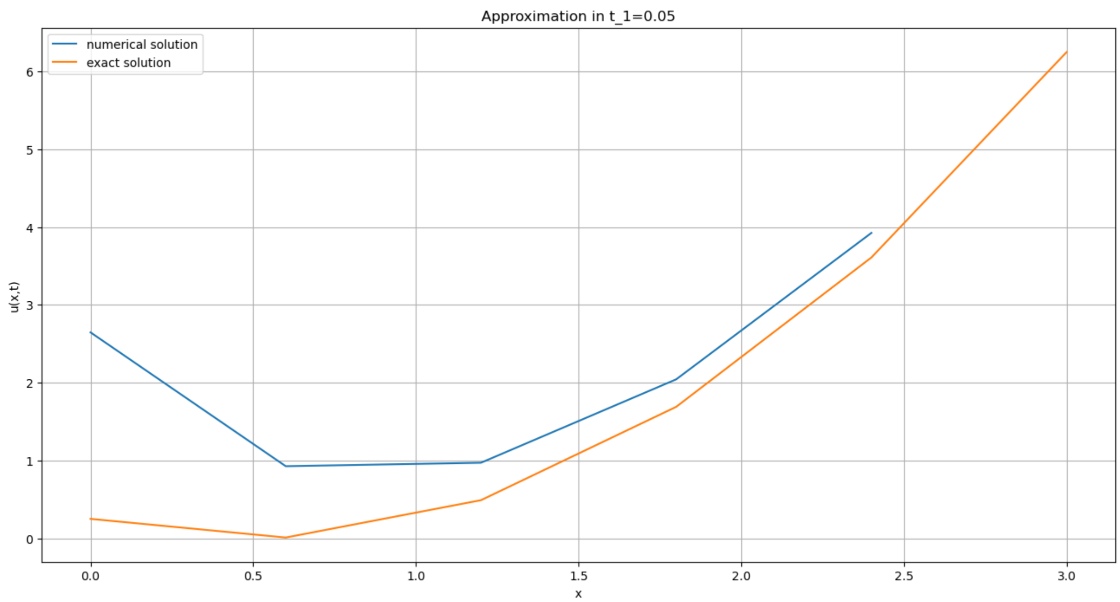
Условие выполняется, соответственно, по математическим обоснованиям построенная РС должны быть устойчивой.

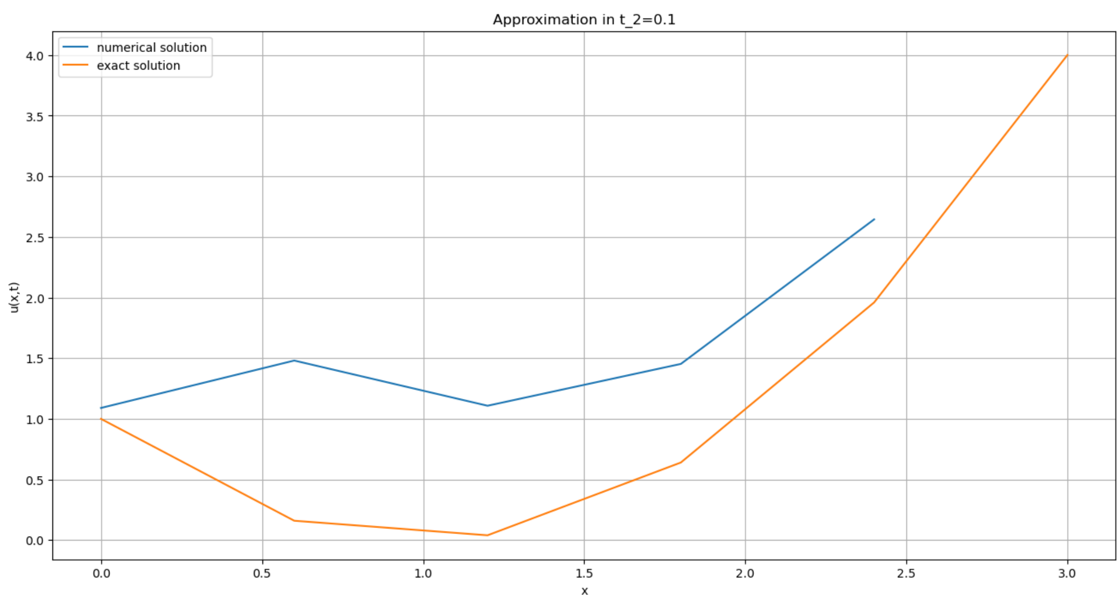
Построим график для решениея, полученного нашей разностной схемой и точного решения.

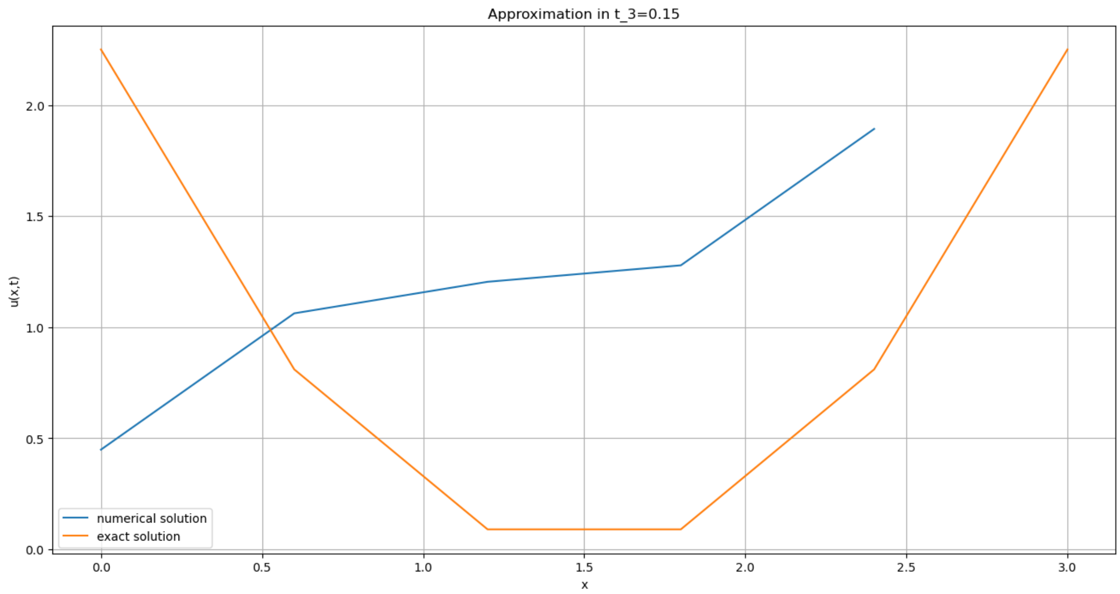
[46]:
```
y = diff_scheme_solve(nodes_x, nodes_t, h, tau, sigma, u_0, a)

for j, t in enumerate(nodes_t):
    plt.figure(figsize=(16, 8))
    plt.plot(nodes_x[:-1], y[:-1, j], label='numerical solution')
    plt.plot(nodes_x, u(nodes_x, t, a, u_0), label='exact solution')
    plt.grid(True)
    plt.xlabel('x')
```

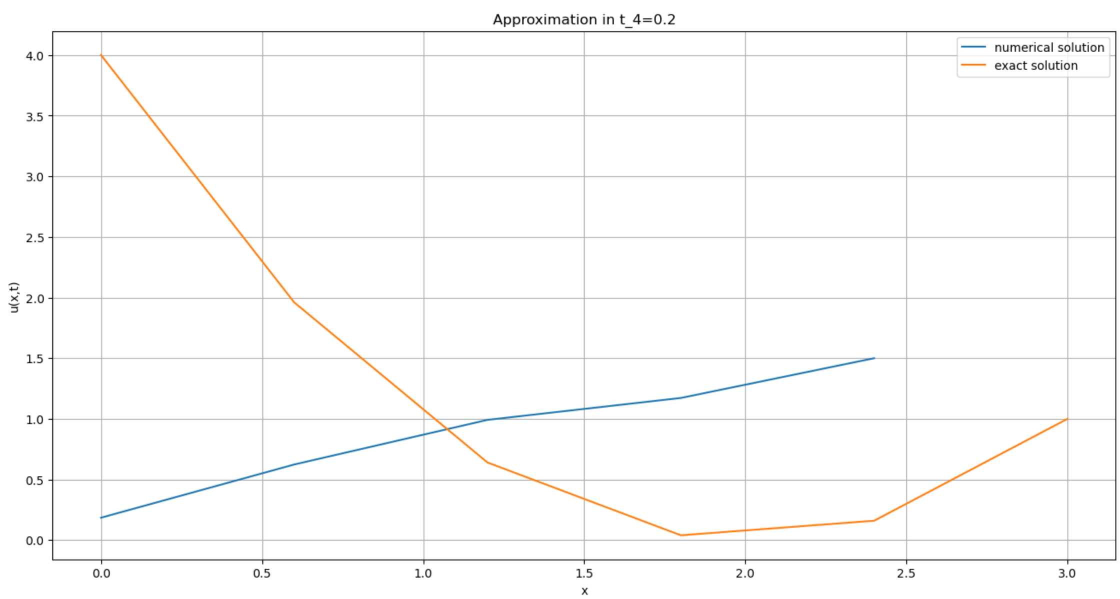
```python
    plt.ylabel('u(x,t)')
    plt.title('Approximation in t_' + str(j) + '=' + str(round(t, 2)))
    plt.legend()
    plt.show()
```

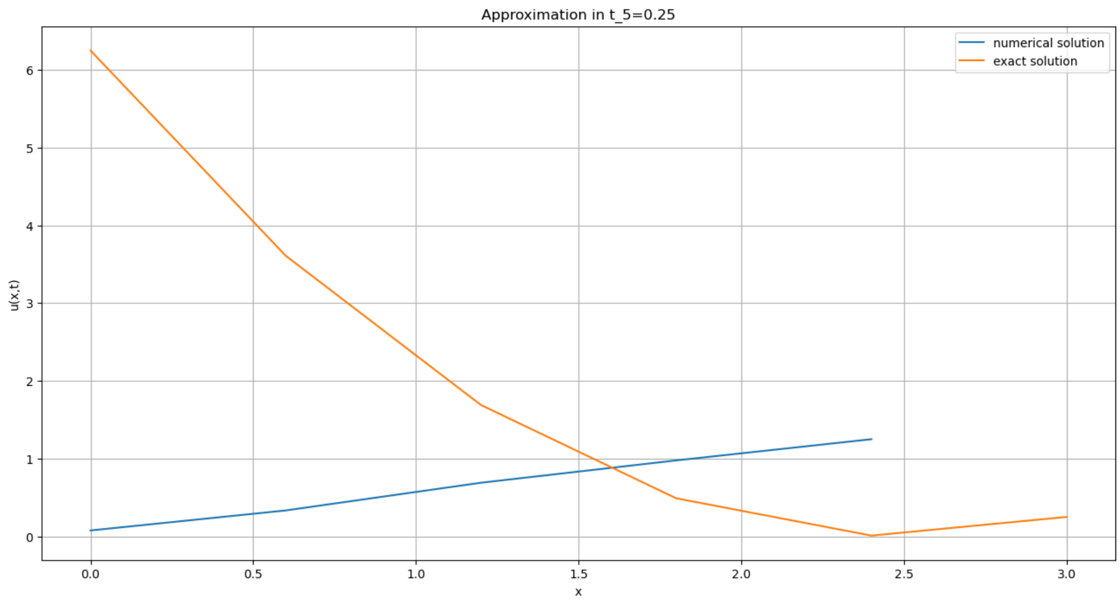







Approximation in t_3=0.15
u(x,t)
x
numerical solution
exact solution


Approximation in t_4=0.2
u(x,t)
x
numerical solution
exact solution



Как видим, с увеличением t точность решения ухудшается, но успешно описывает точное решение, то есть можно сделать вывод, что схема действительно оказалась устойчивой.

Принцип максимума. Поскольку нам задано $a = 10 > 0$, то проверять устойчивость будем для случая $a > 0$, а именно неравенство:

$$\sigma \geq \frac{\gamma + 1}{2\gamma} = \frac{1}{2} + \frac{h}{2a\tau}$$

[47]:
```
print(sigma > 1/2 + h / (2 * a * tau))
```

```
False
```

Отсюда получаем, что для спектрального метода $\sigma = \frac{1}{2}$ не подходит, выберем $\sigma = \frac{5}{4}$ и проверим условие.

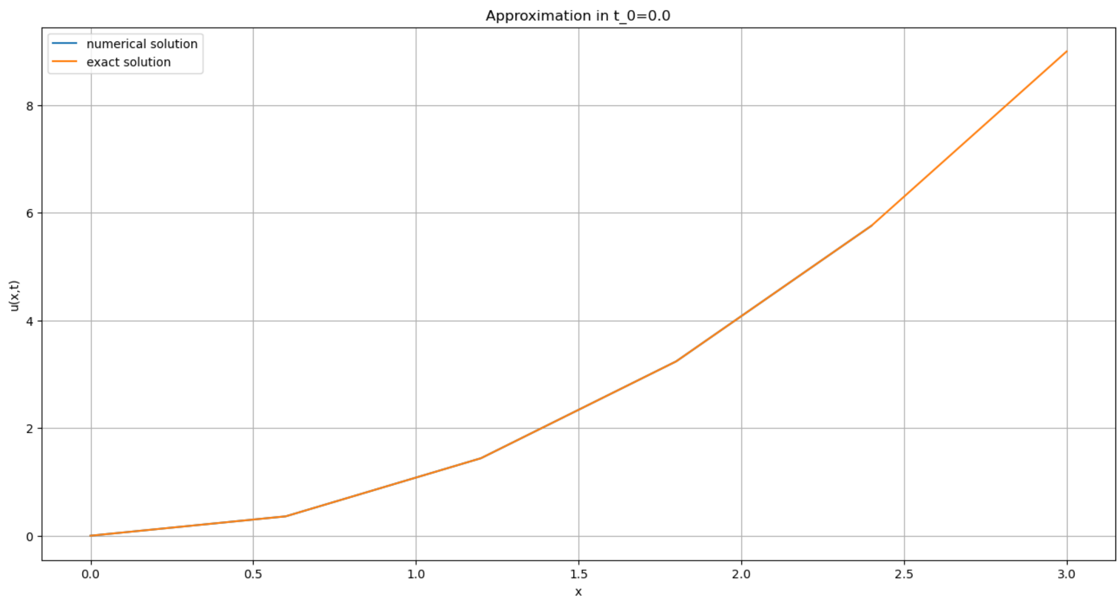
[48]:
```
sigma = 5 / 4

print(sigma > 1 / 2 + h / (2 * a * tau))
```

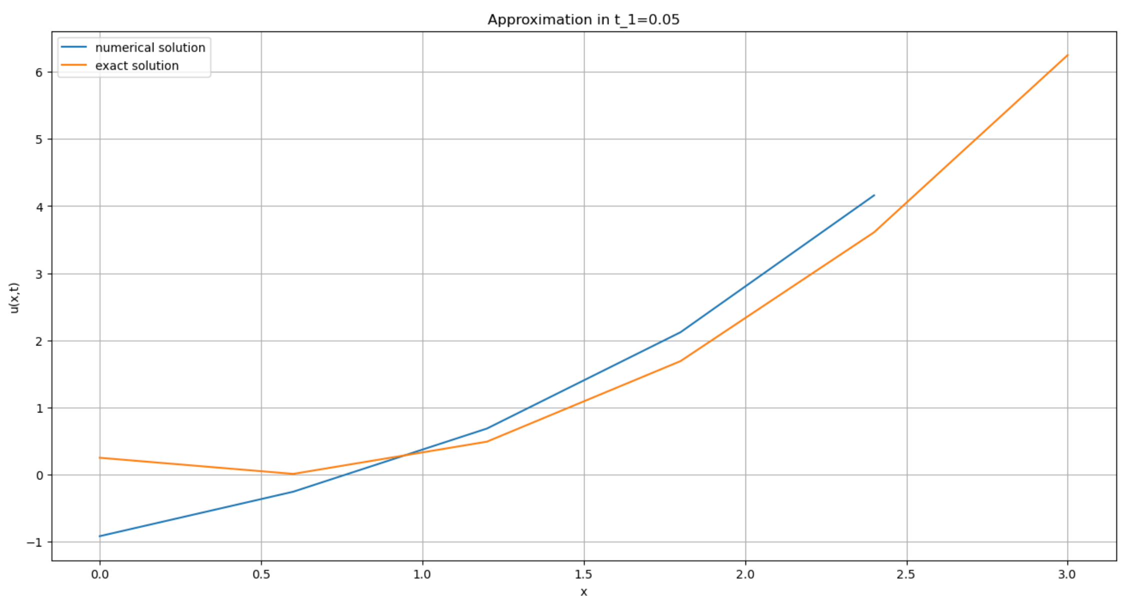
```
True
```

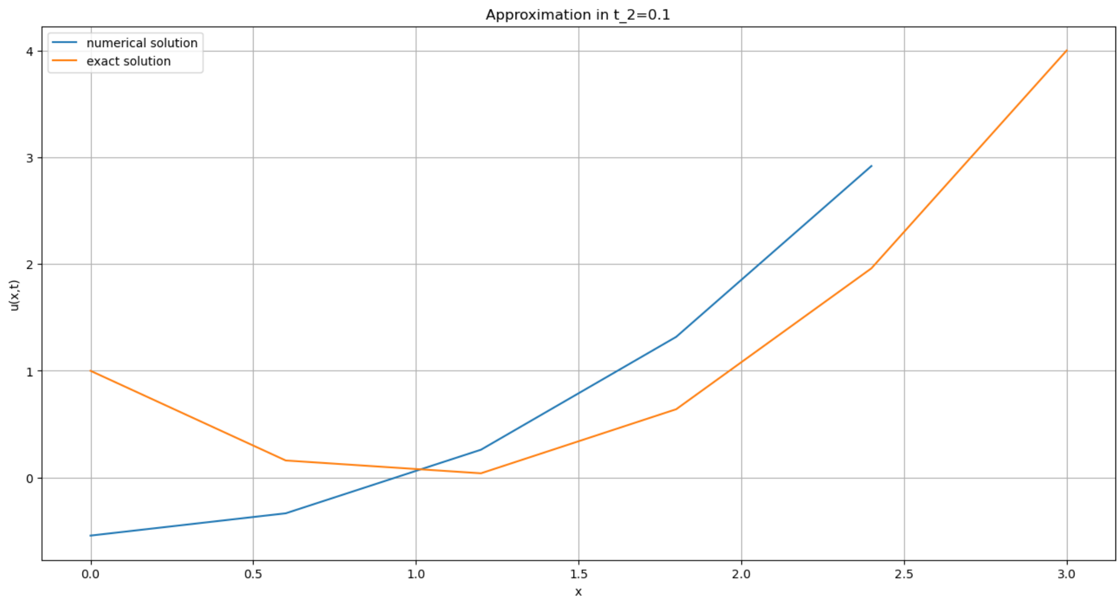
Проверим РС с новым параметром $\sigma = \frac{5}{4}$.

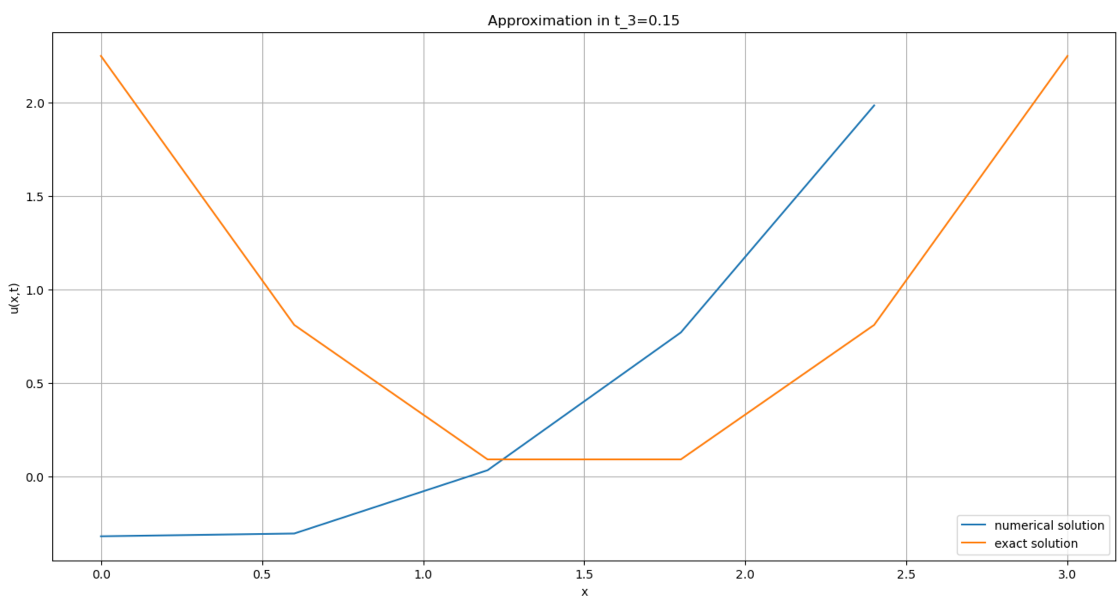
[50]:
```
y = diff_scheme_solve(nodes_x, nodes_t, h, tau, sigma, u_0, a)

for j, t in enumerate(nodes_t):
    plt.figure(figsize=(16, 8))
    plt.plot(nodes_x[:-1], y[:-1, j], label='numerical solution')
    plt.plot(nodes_x, u(nodes_x, t, a, u_0), label='exact solution')
    plt.grid(True)
```

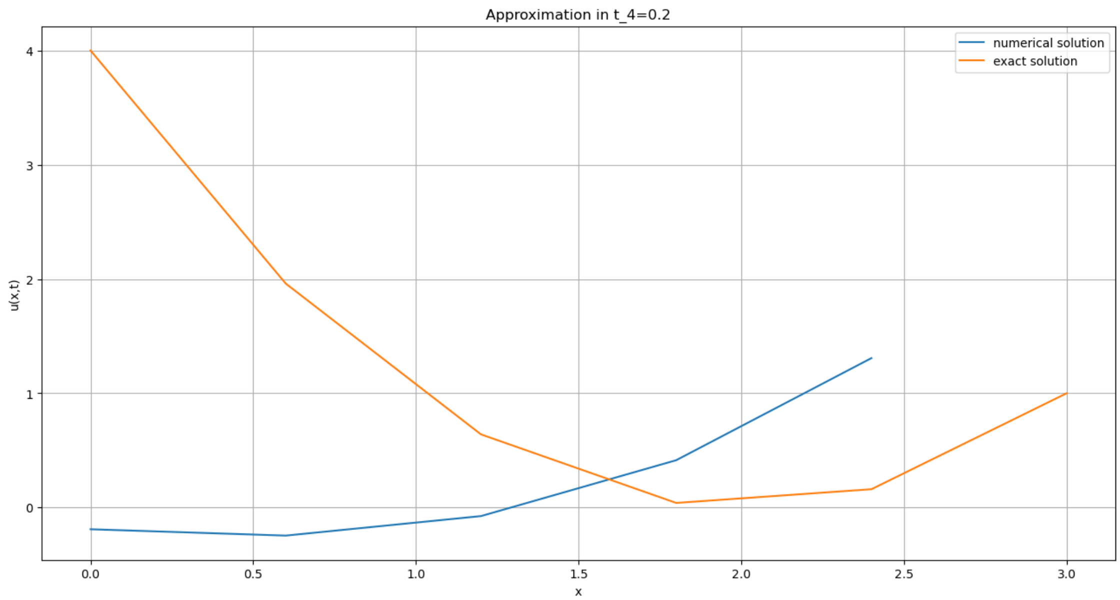
```
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('u(x,t)')
    plt.title('Approximation in t_' + str(j) + '=' + str(round(t, 2)))
    plt.legend()
    plt.show()
```

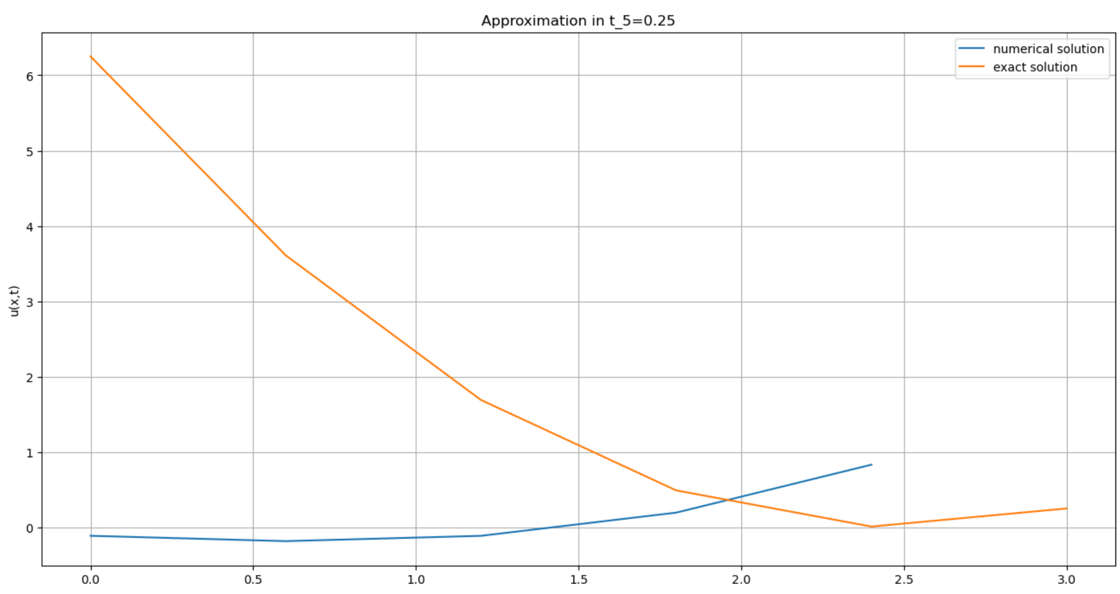





Approximation in t_2=0.1
numerical solution
exact solution
u(x,t)
x


Approximation in t_3=0.15
numerical solution
exact solution
u(x,t)
x





На графиках видно, что решение, полученное с помощью разностной схемы, описывает точное решение, что говорит об устойчивости нашей РС.