МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра компьютерных технологий и систем

Отчет по лабораторной работе 2
Вариант 2

Выполнил:
Карпович Артём Дмитриевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:
Каркоцкий Александр Геннадьевич

Минск, 2024

Условие

Дан прямоугольный параллелепипед с рёбрами a, b, c. Найти электрический и магнитный потенциал, электрическую и магнитную напряжённость внутри этого параллелепипеда при заданных диэлектрической проницаемости ε, условиях на электрический и магнитный потенциал (u и v соответственно) на его гранях, и постоянной магнитной проницаемости, если распределение зарядов изменяется по закону $\rho(x, y, z)$. Сумма, при необходимости, должна состоять не менее чем из 50 слагаемых.

$$\varepsilon = 1,\ a = 2,\ b = 3,\ c = 6,\ \rho(x, y, z) = x + y + z;$$

$$u|_{x=0} = y^2 + z^2,\ u|_{x=a} = y^2 + z^2 + 2e^y,\ u|_{y=0} = z^2 + x,\ u|_{y=b} = z^2 + 9 + xe^3;$$
$$u|_{z=0} = y^2 + xe^y + x^2 \sin(3\pi x) \sin(2\pi y),\ u|_{z=c} = y^2 + 36 + xe^y + xy^2(x-2)(y-3).$$

$$v_x|_{x=0} = v_x|_{x=a} = v|_{y=0} = v_y|_{y=b} = 0;$$
$$v|_{z=0} = x^2(x-a)^3 \sin(\frac{4\pi y}{24}), v|_{z=c} = y(y-b)^3 \cos(6\pi x)$$

Задача 1

Получение решения

Перепишем условие задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon} = -(x+y+z), \\ u|_{x=0} = y^2 + z^2, \\ u|_{x=a} = y^2 + z^2 + 2e^y, \\ u|_{y=0} = z^2 + x, \\ u|_{y=b} = z^2 + 9 + xe^3, \\ u|_{z=0} = y^2 + xe^y + x\sin(3\pi x)\sin(2\pi y), \\ u|_{z=c} = y^2 + 36 + xe^y + xy^2(x-2)(y-3). \end{cases}$$

Первым делом проверим выполнение условий согласования.

1. Возьмем первое граничное условие:

   $$u|_{x=0} = y^2 + z^2,$$

   и подставим его в каждые граничные условия по y и по z:

   (a) $(u|_{x=0})|_{y=0} = z^2 = (u|_{y=0})|_{x=0} \Rightarrow$ условие выполняется;

   (b) $(u|_{x=0})|_{y=b} = b^2 + z^2 = 9 + z^2 = (u|_{y=b})|_{x=0} \Rightarrow$ условие выполняется;

   (c) $(u|_{x=0})|_{z=0} = y^2 = (u|_{z=0})|_{x=0} \Rightarrow$ условие выполняется;

   (d) $(u|_{x=0})|_{z=c} = y^2 + c^2 = y^2 + 36 = (u|_{z=c})|_{x=0} \Rightarrow$ условие выполняется;

2. Возьмем второе граничное условие:

   $$u|_{x=a} = y^2 + z^2 + 2e^y,$$

   и проведем аналогичные действия:

   (a) $(u|_{x=a})|_{y=0} = z^2 + 2 = (u|_{y=0})|_{x=a} \Rightarrow$ условие выполняется;

   (b) $(u|_{x=a})|_{y=b} = b^2 + z^2 + 2e^b = 9 + z^2 + 2e^3 = (u|_{y=b})|_{x=a} \Rightarrow$ условие выполняется;

   (c) $(u|_{x=a})|_{z=0} = y^2 + 2e^y = (u|_{z=0})|_{x=a} \Rightarrow$ условие выполняется;

   (d) $(u|_{x=a})|_{z=c} = y^2 + c^2 + 2e^y = y^2 + 36 + 2e^y = (u|_{z=c})|_{x=a} \Rightarrow$ условие выполняется;

3. Возьмем третье граничное условие:

   $$u|_{y=0} = z^2 + x.$$

   (a) $(u|_{y=0})|_{z=0} = x = (u|_{z=0})|_{y=0} \Rightarrow$ условие выполняется;

   (b) $(u|_{y=0})|_{z=c} = c^2 + x = 36 + x = (u|_{z=c})|_{y=0} \Rightarrow$ условие выполняется;

4. Возьмем четвертое граничное условие:

   $$u|_{y=b} = z^2 + 9 + xe^3.$$

(a) $(u|_{y=b})|_{z=0} = 9 + xe^3 = (u|_{z=0})|_{y=b} \Rightarrow$ условие выполняется;

(b) $(u|_{y=b})|_{z=c} = c^2 + 9 + xe^3 = 45 + xe^3 = (u|_{z=c})|_{y=b} \Rightarrow$ условие выполняется;

Таким образом, все условия согласования выполняются, и задачу можно считать корректно поставленной.

Решение задачи ищем в виде
$$u = V + W.$$

Функцию W будем искать так, чтобы занулить граничные условия по x и по y, то есть в следующем в виде:

$$W = A_1(x)A_2(y)A_3(z) + B_1(x)B_2(y)B_3(z) + C_1(x)C_2(y)C_3(z).$$

Преположим, что вид нашей функции:

$$W = A_1(x)y^2A_3(z) + B_1(x)B_2(y)z^2 + xe^yC_3(z)$$

Подберем коэффициенты A_i, B_i, C_i так, что бы $v|_{x=0} = v|_{x=a} = v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0$ Подставим $x = 0$:

$$v|_{x=0} = u|_{x=0} - (A_1(0)y^2A_3(z) + B_1(0)B_2(y)z^2) = (1 - A_1(0)A_3(z))y^2 + (1 - B_1(0)B_2(y))z^2.$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} A_1(0)A_3(z) = 1, \\ B_1(0)B_2(y) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_3(z) = \frac{1}{A_1(0)}, \\ B_2(y) = \frac{1}{B_1(0)}, \end{cases} \Rightarrow [A_3(z) \text{ не зависит от } z \text{ и } B_2(y) \text{ не зависит от } y] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_3(z) = A_3, \\ B_2(y) = B_2. \end{cases}$$

Подставим $x = a = 2$.

$$v|_{x=2} = u|_{x=2} - (A_1(2)y^2A_3(z) + B_1(2)B_2z^2 + 2e^yC_3(z)) =$$

$$= (1 - A_1(2)A_3)y^2 + (1 - B_1(2)B_2)z^2 + 2(1 - C_3(z))e^y.$$

Отсюда получаем $C_3(z) = 1$. Более того, возьмем $A_3 = B_2 = 1$, тогда $A_3(z) = z,\ B_2(y) = y$. Тогда функция W примет вид

$$W = A_1(x)y^2 + B_1(x)z^2 + xe^y.$$

Подставим $y = 0:$
$$v|_{y=0} = u|_{y=0} - (B_1(x)z^2 + x) = (1 - B_1(x))z^2.$$

Отсюда $B_1(x) = 1$. Подставим теперь $y = b = 3:$

$$v|_{y=3} = u|_{y=3} - (9A_1(x) + z^2 + xe^3) = (1 - A_1(x))9.$$

Отсюда $A_1(x) = 1$, тогда получаем, что

$$W(x, y, z) = y^2 + z^2 + xe^y.$$

Теперь можем записать граничную задачу для V:

$$\begin{cases} \Delta V = -(x+y+z+xe^y+4), \\ V|_{x=0} = V|_{x=a} = V|_{y=0} = V|_{y=b} = 0, \\ V|_{z=0} = x\sin(3\pi x)\sin(2\pi y), \\ V|_{z=c} = xy^2(x-2)(y-3). \end{cases}$$

Решение этой задачи будем искать в виде:

$$V = v + \omega,$$

после чего получим две задачи: для v с однородным уравненим и для ω с однородными граничными условиями. Рассмотрим сначала задачу для v:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \\ v|_{x=0} = v|_{x=a} = v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0, \\ v|_{z=0} = x\sin(3\pi x)\sin(2\pi y), \\ v|_{z=c} = xy^2(x-2)(y-3). \end{cases}$$

Решение этой задачи будем искать в виде:

$$v(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

После чего получим две задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(a) = 0. \end{cases} \Rightarrow X_n(x) = \sin(\frac{\pi n}{a}x), \mu_n = \frac{\pi n}{a}, n = 1, 2, ...$$

$$\begin{cases} Y'' + \nu^2 Y = 0, \\ Y(0) = 0, \\ Y(b) = 0. \end{cases} \Rightarrow Y_m(y) = \sin(\frac{\pi m}{b}y), \nu_m = \frac{\pi m}{b}, m = 1, 2, ...$$

Рассмотрим уравнение для $Z(z)$:

$$\frac{Z''_{nm}}{Z_{nm}} = \lambda^2_{nm} \Rightarrow Z''_{nm} - \lambda^2_{nm}Z_{nm} = 0 \Rightarrow Z_{nm} = A_{nm}ch(\lambda_{nm}z) + B_{nm}sh(\lambda_{nm}z),$$

где $\lambda^2_{nm} = \mu^2_n + \nu^2_m$. Тогда решение рассматриваемой задачи будем искать в виде:

$$v(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} [(A_{nm}ch(\lambda_{nm}z) + B_{nm}sh(\lambda_{nm}z))sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)].$$

Воспользуемся граничными условиями на z:

$$v(x,y,0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} [A_{nm}sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)] = x\sin(3\pi x)\sin(2\pi y).$$

Отсюда получаем, что

$$A_{n6}=\frac{2}{a}\int_0^a x\sin(3\pi x)\sin(\frac{\pi n}{2}x)dx=[\text{Wolfram Mathematica}=\frac{48n((-1)^n-1)}{\pi^2\left(n^2-36\right)^2}.$$

Здесь видно, что при четный n $A_{n6}=0$, а при нечетных

$$A_{2k+1,6}=-\frac{96(2k+1)}{\pi^2\left((2k+1)^2-36\right)^2},\ n=2k+1.$$

Тогда, подставив $z=c$, получим:

$$v(x,y,c)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_{2k+1,6}\operatorname{ch}(\lambda_{2k+1,6}c)+B_{2k+1,6}\operatorname{sh}(\lambda_{2k+1,6}c))\sin(\frac{\pi(2k+1)}{a}x)\sin(2\pi y)+$$

$$+\sum_{n,m=1,m\neq 6}^{\infty}[B_{nm}sh(\lambda_{nm}c)sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)]=xy^2(x-2)(y-3).$$

Отсюда $A_{2k+1,6}\operatorname{ch}(\lambda_{2k+1,6}c)+B_{2k+1,6}\operatorname{sh}(\lambda_{2k+1,6}c)=0,\Rightarrow B_{2k+1,6}=-A_{2k+1,6}\operatorname{cth}(\lambda_{2k+1,6}c),\ \forall k,m=6.$

Разложим правую часть в ряд Фурье по собственным функциям.

$$\psi_{nm}=\frac{2}{3}\int_0^2\int_0^3 xy^2(x-2)(y-3)sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)dydx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^2 x(x-2)sin(\frac{\pi n}{a}x)\int_0^3 y^2(y-3)\sin(\frac{\pi m}{b}y)dydx.$$

Разделим это на два интеграла:

$$I_1=\int_0^3 y^2(y-3)\sin(\frac{\pi m}{b}y)dy=[\text{Wolfram Mathematica}]=\frac{162(1+2(-1)^m)}{\pi^3m^3}.$$

$$I_2=\int_0^2 x(x-2)sin(\frac{\pi n}{a}x)dx=[\text{Wolfram Mathematica}]=\frac{16((-1)^n-1)}{\pi^3n^3}.$$

Таким образом, получаем

$$\psi_{nm}=\frac{2}{3}I_1I_2=\frac{1728(1+2(-1)^m)((-1)^n-1)}{\pi^6m^3n^3}.$$

Отсюда следует, что

$$B_{nm}=\begin{cases}0, n=2k,\\ \frac{\psi_{2k+1,m}}{\operatorname{sh}(\lambda_{2k+1,m}c)}, n=2k+1.\end{cases}$$

Тогда

$$v(x,y,z)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_{2k+1,6}\operatorname{ch}(\lambda_{2k+1,6}z)+B_{2k+1,6}\operatorname{sh}(\lambda_{2k+1,6}z))\sin(\frac{\pi(2k+1)}{a}x)\sin(2\pi y)+$$

$$+\sum_{k,m=1,m\neq 6}^{\infty}[\frac{\psi_{2k+1,m}}{\operatorname{sh}(\lambda_{2k+1,m}c)}\operatorname{sh}(\lambda_{2k+1,m}z)\sin(\frac{\pi(2k+1)}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)].$$

Теперь перейдем к задаче для ω:

$$\begin{cases} \Delta\omega = -(x + y + z + xe^y + 4), \\ \omega|_{x=0} = \omega|_{x=a} = \omega|_{y=0} = \omega|_{y=b} = \omega|_{z=0} = \omega|_{z=c} = 0. \end{cases}$$

Решение будем искать в виде:

$$\omega(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} [sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)Z_{nm}(z)].$$

Подставим данное представление в уравнение рассматриваемой задачи и разложим парвую часть в ряд Фурье по собственным функциям:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} [(Z''_{nm}(z) - \lambda^2_{nm}Z_{nm}(z))sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)] = \sum_{n,m=1}^{\infty} [f_{nm}sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)],$$

где

$$f_{nm} = -\frac{2}{3}\int_0^2\int_0^3 (x + y + z + xe^y + 4)sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)dydx = [\text{Wolfram Mathematica}] =$$

$$= \text{огромное выражение} = A_1 z + A_2.$$

Таким образом,

$$Z''_{nm}(z) - \lambda^2_{nm}Z_{nm}(z) = f_{nm}(z).$$

Воспользуемся граничными условиями:

$$\omega|_{z=0} = \sum_{n,m=1}^{\infty} [sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)Z_{nm}(0)] = 0, \Rightarrow Z_{nm}(0) = 0.$$

$$\omega|_{z=c} = \sum_{n,m=1}^{\infty} [sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)Z_{nm}(c)] = 0, \Rightarrow Z_{nm}(c) = 0.$$

Тогда, с учетом полученного, можем составить задачу Коши для отыскания Z_{nm} :

$$\begin{cases} Z''_{nm}(z) - \lambda^2_{nm}Z_{nm}(z) = f_{nm}(z), \\ Z_{nm}(0) = 0, \\ Z_{nm}(c) = 0. \end{cases}$$

Решение будем искать в виде сумма общего решения однородного и суммы частного решения неоднородного уравнения.

Решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$Z^{oo}_{nm}(z) = A_{nm}\operatorname{ch}(\lambda_{nm}z) + B_{nm}\operatorname{sh}(\lambda_{nm}z).$$

Искать частное решение неоднородного уравнения будем по виду правой части:

$$Z^{\text{чн}}_{nm}(z) = A_3 z + A_4.$$

Подставим данное представление в уравнение:

$$-\lambda_{nm}^2(A_3 z + A_4) = f_{nm}(z).$$

Сравним соответствующе коэффициенты, тогда получим:

$$\begin{cases} A_3 = -\frac{A_1}{\lambda_{nm}^2}, \\ A_4 = -\frac{A_2}{\lambda_{nm}^2}. \end{cases}$$

Данные вычисления проведем в Wolfram Mathematica, получив таким образом вид частного решения неоднородного уравнения:

$$Z_{nm}^{\text{чн}}(z) = -(\frac{A_1}{\lambda_{nm}^2} z + \frac{A_2}{\lambda_{nm}^2}).$$

В итоге, общее решение неоднородного будет иметь вид:

$$Z_{nm}^{\text{он}}(z) = A_{nm}\,\mathrm{ch}(\lambda_{nm} z) + B_{nm}\,\mathrm{sh}(\lambda_{nm} z) - (\frac{A_1}{\lambda_{nm}^2} z + \frac{A_2}{\lambda_{nm}^2}).$$

Для нахождения коэффициентов $A_{nm},\ B_{nm}$ воспользуемся начальными условиями:

$$Z_{nm}(0) = A_{nm} - \frac{A_2}{\lambda_{nm}^2} = 0 \Rightarrow A_{nm} = \frac{A_2}{\lambda_{nm}^2}.$$

$$Z_{nm}(c) = A_{nm}\,\mathrm{ch}(\lambda_{nm} c) + B_{nm}\,\mathrm{sh}(\lambda_{nm} c) - (\frac{A_1}{\lambda_{nm}^2} c + \frac{A_2}{\lambda_{nm}^2}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{nm} = \frac{1}{\mathrm{sh}(\lambda_{nm} c)}((\frac{A_1}{\lambda_{nm}^2} c + \frac{A_2}{\lambda_{nm}^2}) - A_{nm}\,\mathrm{ch}(\lambda_{nm} c)).$$

Таким образом, получили выражение для коэффициентов $Z_{nm}(z)$, что позволяет нам собрать решение исходной задачи.

$$\omega(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} [sin(\frac{\pi n}{a} x) \sin(\frac{\pi m}{b} y)(A_{nm}\,\mathrm{ch}(\lambda_{nm} z) + B_{nm}\,\mathrm{sh}(\lambda_{nm} z) - (\frac{A_1}{\lambda_{nm}^2} z + \frac{A_2}{\lambda_{nm}^2}))].$$

Тогда

$$V(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_{2k+1,6}\,\mathrm{ch}(\lambda_{2k+1,6} z) + B_{2k+1,6}\,\mathrm{sh}(\lambda_{2k+1,6} z)) \sin(\frac{\pi(2k+1)}{a} x) \sin(2\pi y) +$$

$$+ \sum_{n,m=1, m\neq 6}^{\infty} [\frac{\psi_{nm}}{\mathrm{sh}(\lambda_{nm} c)} \mathrm{sh}(\lambda_{nm} z) \sin(\frac{\pi n}{a} x) \sin(\frac{\pi m}{b} y)] +$$

$$+ \sum_{n,m=1}^{\infty} [sin(\frac{\pi n}{a} x) \sin(\frac{\pi m}{b} y)(A_{nm}\,\mathrm{ch}(\lambda_{nm} z) + B_{nm}\,\mathrm{sh}(\lambda_{nm} z) - (\frac{A_1}{\lambda_{nm}^2} z + \frac{A_2}{\lambda_{nm}^2}))].$$

И решение исходной задачи имеет вид

$$u = y^2 + z^2 + xe^y + \sum_{k=1}^{\infty}(A_{2k+1,6}\,\mathrm{ch}(\lambda_{2k+1,6} z) + B_{2k+1,6}\,\mathrm{sh}(\lambda_{2k+1,6} z)) \sin(\frac{\pi(2k+1)}{a} x) \sin(2\pi y) +$$

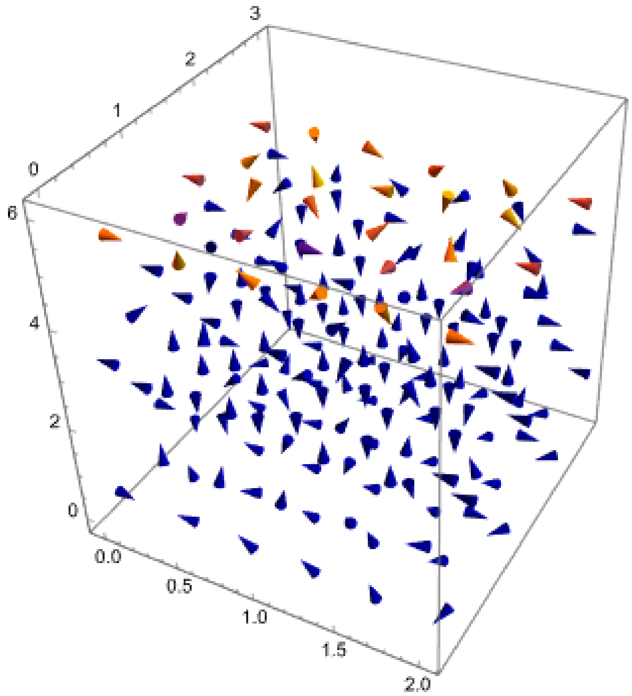
$$+ \sum_{n,m=1, m\neq 6}^{\infty} [\frac{\psi_{nm}}{\mathrm{sh}(\lambda_{nm} c)} \mathrm{sh}(\lambda_{nm} z) \sin(\frac{\pi n}{a} x) \sin(\frac{\pi m}{b} y)] +$$

$$+ \sum_{n,m=1}^{\infty} [sin(\frac{\pi n}{a} x) \sin(\frac{\pi m}{b} y)(A_{nm}\,\mathrm{ch}(\lambda_{nm} z) + B_{nm}\,\mathrm{sh}(\lambda_{nm} z) - (\frac{A_1}{\lambda_{nm}^2} z + \frac{A_2}{\lambda_{nm}^2}))]$$

Визуализация решения

In[251]:=
```
VectorPlot3D[Evaluate[-Grad[u[x, y, z], {x, y, z}]], {x, 0, 2}, {y, 0, 3}, {z, 0, 6}]
```

Out[251]=



Задача 2

Получение решения

Перепишем условие задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \\ v_x|_{x=0} = v_x|_{x=a} = v|_{y=0} = v_y|_{y=b} = 0, \\ v|_{z=0} = x^3(x-a)^3 \sin\left(\frac{4\pi y}{24}\right), \\ v|_{z=c} = y(y-b)^3 \cos(6\pi x). \end{cases}$$

Проверим выполнение условий согласования:

1. $v|_{z=0} = x^3(x-a)^3 \sin\left(\frac{4\pi y}{24}\right)$:
   (a) $(v|_{z=0})_x|_{x=0} = 0 = (v_x|_{x=0})|_{z=0}, \Rightarrow$ условие выполняется;
   (b) $(v|_{z=0})_x|_{x=a} = 0 = (v_x|_{x=a})|_{z=0}, \Rightarrow$ условие выполняется;
   (c) $(v|_{z=0})|_{y=0} = 0 = (v|_{y=0})|_{z=0}, \Rightarrow$ условие выполняется;
   (d) $(v|_{z=0})_y|_{y=b} = 0 = (v_y|_{y=b})|_{z=0}, \Rightarrow$ условие выполняется.
2. $v|_{z=c} = y(y-b)^3 \cos(6\pi x)$:
   (a) $(v|_{z=c})_x|_{x=0} = 0 = (v_x|_{x=0})|_{z=c}, \Rightarrow$ условие выполняется;
   (b) $(v|_{z=c})_x|_{x=a} = 0 = (v_x|_{x=a})|_{z=c}, \Rightarrow$ условие выполняется;
   (c) $(v|_{z=c})|_{y=0} = 0 = (v|_{y=0})|_{z=c}, \Rightarrow$ условие выполняется;
   (d) $(v|_{z=c})_y|_{y=b} = 0 = (v_y|_{y=b})|_{z=c}, \Rightarrow$ условие выполняется.

Решение этой задачи ищем в виде:

$$v(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Подставим в уравнение рассматриваемой задачи и получим:

$$\Delta v = X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0.$$

Разделим на XYZ:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0.$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2.$$

$$-\frac{Y''}{Y} - \lambda^2 = \frac{X''}{X} = -\mu^2.$$

$$\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 + \mu^2 = -\nu^2.$$

Рассмотрим две задачи Штурма-Лиувилля для $X(x)$ и $Y(y)$.

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X'(a) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x, \\ X'(0) = B = 0, \\ X'(a) = -\mu A \sin\mu a = 0. \end{cases}$$

Решением задачи Штурма-Лиувилля для $X(x)$ является:

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right),$$

$$\mu_n = \frac{\pi n}{a}, n = 1, 2, ...$$

Задача для $Y(y)$:

$$\begin{cases} Y'' + \nu^2 Y = 0, \\ Y(0) = 0, \\ Y'(b) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y(y) = A\cos\nu y + B\sin\nu y, \\ Y(0) = A = 0, \\ Y'(b) = \nu B\cos\nu b = 0. \end{cases}$$

Решением задачи Штурма-Лиувилля для $Y(y)$ является:

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi m}{b} y\right),$$

$$\nu_m = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi m}{b}, m = 0, 1, ...$$

Рассмотрим уравнение для $Z(z)$:

$$\frac{Z''_{nm}}{Z_{nm}} = \lambda_{nm}^2 \Rightarrow Z''_{nm} - \lambda_{nm}^2 Z_{nm} = 0 \Rightarrow Z_{nm} = A_{nm} ch(\lambda_{nm} z) + B_{nm} sh(\lambda_{nm} z),$$

где $\lambda_{nm}^2 = \mu_n^2 + \nu_m^2$.

Таким образом, решение задачи для v представимо в виде:

$$v(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} (A_{nm} ch(\lambda_{nm} z) + B_{nm} sh(\lambda_{nm} z)) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi m}{b} y\right).$$

Для нахождения коэффициентов A_{nm} и B_{nm} воспользуемся граничными условиями на z.

$$v|_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\left(\frac{\pi}{2b} + \frac{\pi m}{b}\right) y\right) = x^3(x-a)^3 \sin\left(\frac{\pi y}{6}\right).$$

Отсюда получаем, что $A_{nm} = 0,\ \forall m \neq 0$, а

$$A_{n0} = \frac{2}{a}\int_0^a x^3(x-a)^3 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) dx = [Wolfram\ Mathematica] = -\frac{768\left(\pi^2 n^2 - 60\right)\left((-1)^n + 1\right)}{\pi^6 n^6}.$$

Здесь видно, что при нечетных n $A_{n0} = 0$, тогда получаем, что

$$A_{n0} = -\frac{1536\left(4\pi^2 k^2 - 60\right)}{64\pi^6 k^6},\ n = 2k.$$

Тогда

$$v|_{z=c} = \sum_{k=1}^{\infty} (A_{2k0} \operatorname{ch}(\lambda_{2k0} c) + B_{2k0} \operatorname{sh}(\lambda_{2k0} c)) \cos\left(\frac{2\pi k}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi y}{6}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} \operatorname{sh}(\lambda_{nm} c) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi m}{b} y\right) = y(y-b)^3 \cos(6\pi x).$$

Отсюда получаем, что $A_{2k0}\,\mathrm{ch}(\lambda_{2k0}c) + B_{2k0}\,\mathrm{sh}(\lambda_{2k0}c) = 0$, при $m = 0$, то есть $B_{2k0} = -A_{2k0}\,\mathrm{cth}(\lambda_{2k0}c)$ $\forall\ n = 2k \neq 12$, а для $n = 12$:

$$B_{12m} = \frac{2}{b}\int_0^b y(y-b)^3 \sin\big(\frac{\frac{\pi}{2}+\pi m}{b}y\big)dy = -\frac{96b^4\left((2\pi m+\pi)^2 + 2\pi(2m+1)(-1)^m - 16\right)}{(2\pi m+\pi)^5}.$$

В остальных случаях $B_{nm} = 0$. Таким образом, получаем, что решение исходной задачи принимает вид:

$$v(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_{2k0}\,\mathrm{ch}(\lambda_{2k0}c) + B_{2k0}\,\mathrm{sh}(\lambda_{2k0}c))\cos(\frac{2\pi k}{a}x)\sin\big(\frac{\pi y}{6}\big)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} B_{12m}\,\mathrm{sh}(\lambda_{12m}z)\cos(6\pi x)\sin\big(\frac{\frac{\pi}{2}+\pi m}{b}y\big)$$

Визуализация решения

```
In[17]:= VectorPlot3D[Evaluate[-Grad[v[x, y, z], {x, y, z}]], {x, 0, 2}, {y, 0, 3}, {z, 0, 6}]
```

Out[17]=