МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра компьютерных технологий и систем

Отчет по лабораторной работе 2
Вариант 2

Выполнил:
Карпович Артём Дмитриевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:
Каркоцкий Александр Геннадьевич

Минск, 2024

Условие

Дан прямоугольный параллелепипед с рёбрами a, b, c. Найти электрический и магнитный потенциал, электрическую и магнитную напряжённость внутри этого параллелепипеда при заданных диэлектрической проницаемости ε, условиях на электрический и магнитный потенциал (u и v соответственно) на его гранях, и постоянной магнитной проницаемости, если распределение зарядов изменяется по закону $\rho(x, y, z)$. Сумма, при необходимости, должна состоять не менее чем из 50 слагаемых.

$$\varepsilon = 1,\ a = 2,\ b = 3,\ c = 6,\ \rho(x, y, z) = x + y + z;$$

$$u|_{x=0} = y^2 + z^2,\ u|_{x=a} = y^2 + z^2 + 2e^y,\ u|_{y=0} = z^2 + x,\ u|_{y=b} = z^2 + 9 + xe^3;$$

$$u|_{z=0} = y^2 + xe^y + x^2 \sin(3\pi x) \sin(2\pi y),\ u|_{z=c} = y^2 + 36 + xe^y + xy^2(x-2)(y-3).$$

$$v_x|_{x=0} = v_x|_{x=a} = v|_{y=0} = v_y|_{y=b} = 0;$$

$$v|_{z=0} = x^2(x-a)^3 \sin(\frac{4\pi y}{24}), v|_{z=c} = y(y-b)^3 \cos(6\pi x)$$

Задача 1

Получение решения

Перепишем условие задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon} = -(x+y+z), \\ u|_{x=0} = y^2 + z^2, \\ u|_{x=a} = y^2 + z^2 + 2e^y, \\ u|_{y=0} = z^2 + x, \\ u|_{y=b} = z^2 + 9 + xe^3, \\ u|_{z=0} = y^2 + xe^y + 4\sin(3\pi x)\sin(2\pi y), \\ u|_{z=c} = y^2 + 36 + xe^y + xy^2(x-2)(y-3). \end{cases}$$

Первым делом проверим выполнение условий согласования.

1. Возьмем первое граничное условие:

   $$u|_{x=0} = y^2 + z^2,$$

   и подставим его в каждые граничные условия по y и по z:

   (a) $(u|_{x=0})|_{y=0} = z^2 = (u|_{y=0})|_{x=0} \Rightarrow$ условие выполняется;

   (b) $(u|_{x=0})|_{y=b} = b^2 + z^2 = 9 + z^2 = (u|_{y=b})|_{x=0} \Rightarrow$ условие выполняется;

   (c) $(u|_{x=0})|_{z=0} = y^2 = (u|_{z=0})|_{x=0} \Rightarrow$ условие выполняется;

   (d) $(u|_{x=0})|_{z=c} = y^2 + c^2 = y^2 + 36 = (u|_{z=c})|_{x=0} \Rightarrow$ условие выполняется;

2. Возьмем второе граничное условие:

   $$u|_{x=a} = y^2 + z^2 + 2e^y,$$

   и проведем аналогичные действия:

   (a) $(u|_{x=a})|_{y=0} = z^2 + 2 = (u|_{y=0})|_{x=a} \Rightarrow$ условие выполняется;

   (b) $(u|_{x=a})|_{y=b} = b^2 + z^2 + 2e^b = 9 + z^2 + 2e^3 = (u|_{y=b})|_{x=a} \Rightarrow$ условие выполняется;

   (c) $(u|_{x=a})|_{z=0} = y^2 + 2e^y = (u|_{z=0})|_{x=a} \Rightarrow$ условие выполняется;

   (d) $(u|_{x=a})|_{z=c} = y^2 + c^2 + 2e^y = y^2 + 36 + 2e^y = (u|_{z=c})|_{x=a} \Rightarrow$ условие выполняется;

3. Возьмем третье граничное условие:

   $$u|_{y=0} = z^2 + x.$$

   (a) $(u|_{y=0})|_{z=0} = x = (u|_{z=0})|_{y=0} \Rightarrow$ условие выполняется;

   (b) $(u|_{y=0})|_{z=c} = c^2 + x = 36 + x = (u|_{z=c})|_{y=0} \Rightarrow$ условие выполняется;

4. Возьмем четвертое граничное условие:

   $$u|_{y=b} = z^2 + 9 + xe^3.$$

(a) $(u|_{y=b})|_{z=0} = 9 + xe^3 = (u|_{z=0})|_{y=b} \Rightarrow$ условие выполняется;

(b) $(u|_{y=b})|_{z=c} = c^2 + 9 + xe^3 = 45 + xe^3 = (u|_{z=c})|_{y=b} \Rightarrow$ условие выполняется;

Таким образом, все условия согласования выполняются, и задачу можно считать корректно поставленной.

Решение задачи ищем в виде
$$u = V + W.$$

Функцию W будем искать так, чтобы занулить граничные условия по x и по y, то есть в следующем в виде:

$$W = A_1(x)A_2(y)A_3(z) + B_1(x)B_2(y)B_3(z) + C_1(x)C_2(y)C_3(z).$$

Преположим, что вид нашей функции:

$$W = A_1(x)y^2A_3(z) + B_1(x)B_2(y)z^2 + xe^yC_3(z)$$

Подберем коэффициенты A_i, B_i, C_i так, что бы $v|_{x=0} = v|_{x=a} = v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0$ Подставим $x = 0$:

$$v|_{x=0} = u|_{x=0} - (A_1(0)y^2A_3(z) + B_1(0)B_2(y)z^2) = (1 - A_1(0)A_3(z))y^2 + (1 - B_1(0)B_2(y))z^2.$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} A_1(0)A_3(z) = 1, \\ B_1(0)B_2(y) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_3(z) = \frac{1}{A_1(0)}, \\ B_2(y) = \frac{1}{B_1(0)}, \end{cases} \Rightarrow [A_3(z) \text{ не зависит от } z \text{ и } B_2(y) \text{ не зависит от } y] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_3(z) = A_3, \\ B_2(y) = B_2. \end{cases}$$

Подставим $x = a = 2$.

$$v|_{x=2} = u|_{x=2} - (A_1(2)y^2A_3(z) + B_1(2)B_2z^2 + 2e^yC_3(z)) =$$
$$= (1 - A_1(2)A_3)y^2 + (1 - B_1(2)B_2)z^2 + 2(1 - C_3(z))e^y.$$

Отсюда получаем $C_3(z) = 1$. Более того, возьмем $A_3 = B_2 = 1$, тогда $A_3(z) = z,\ B_2(y) = y$. Тогда функция W примет вид

$$W = A_1(x)y^2 + B_1(x)z^2 + xe^y.$$

Подставим $y = 0:$
$$v|_{y=0} = u|_{y=0} - (B_1(x)z^2 + x) = (1 - B_1(x))z^2.$$

Отсюда $B_1(x) = 1$. Подставим теперь $y = b = 3:$

$$v|_{y=3} = u|_{y=3} - (9A_1(x) + z^2 + xe^3) = (1 - A_1(x))9.$$

Отсюда $A_1(x) = 1$, тогда получаем, что

$$W(x, y, z) = y^2 + z^2 + xe^y.$$

Теперь можем записать граничную задачу для V:

$$\begin{cases} \Delta V = -(x+y+z+xe^y+4), \\ V|_{x=0} = V|_{x=a} = V|_{y=0} = V|_{y=b} = 0, \\ V|_{z=0} = 4\sin(3\pi x)\sin(2\pi y), \\ V|_{z=c} = xy^2(x-2)(y-3). \end{cases}$$

Решение этой задачи будем искать в виде:

$$V = v + \omega,$$

после чего получим две задачи: для v с однородным уравненим и для ω с однородными граничными условиями. Рассмотрим сначала задачу для v:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \\ v|_{x=0} = v|_{x=a} = v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0, \\ v|_{z=0} = 4\sin(3\pi x)\sin(2\pi y), \\ v|_{z=c} = xy^2(x-2)(y-3). \end{cases}$$

Решение этой задачи будем искать в виде:

$$v(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

После чего получим две задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(a) = 0. \end{cases} \Rightarrow X_n(x) = \sin(\frac{\pi n}{a}x), \lambda_n = \frac{\pi n}{a}, n = 1, 2, ...$$

$$\begin{cases} Y'' + \nu^2 Y = 0, \\ Y(0) = 0, \\ Y(b) = 0. \end{cases} \Rightarrow Y_m(y) = \sin(\frac{\pi m}{b}y), \nu_m = \frac{\pi m}{b}, m = 1, 2, ...$$

Рассмотрим уравнение для $Z(z)$:

$$\frac{Z''_{nm}}{Z_{nm}} = \mu^2_{nm} \Rightarrow Z''_{nm} - \mu^2_{nm} Z_{nm} = 0 \Rightarrow Z_{nm} = A_{nm} ch(\mu_{nm} z) + B_{nm} sh(\mu_{nm} z),$$

где $\mu^2_{nm} = \lambda^2_n + \nu^2_m$. Тогда решение рассматриваемой задачи будем искать в виде:

$$v(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} [(A_{nm} ch(\mu_{nm} z) + B_{nm} sh(\mu_{nm} z)) sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)].$$

Воспользуемся граничными условиями на z:

$$v(x,y,0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} [A_{nm} sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)] = 4\sin(3\pi x)\sin(2\pi y).$$

Отсюда получаем, что $A_{66} = 4,\ A_{nm} = 0\ \forall (n,m) \neq (6,6)$. Тогда, подставив $z = c$, получим:

$$v(x,y,c) = (4\operatorname{ch}(\mu_{66}c) + B_{66}\operatorname{sh}(\mu_{66}c))\sin(3\pi x)\sin(2\pi y) +$$

$$+\sum_{n,m=1,(n,m)\neq(6,6)}^{\infty}[B_{nm}sh(\mu_{nm}c)sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)]=xy^2(x-2)(y-3).$$

Отсюда $4\operatorname{ch}(\mu_{66}c)+B_{66}\operatorname{sh}(\mu_{66}c)=0,\Rightarrow B_{66}=-4\operatorname{cth}(\mu_{66}c),\ (n,m)=(6,6)$. Для остальных случаев разложим правую часть в ряд Фурье по собственным функциям.

$$\psi_{nm}=\frac{2}{3}\int_0^2\int_0^3 xy^2(x-2)(y-3)sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)dydx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^2 x(x-2)sin(\frac{\pi n}{a}x)\int_0^3 y^2(y-3)\sin(\frac{\pi m}{b}y)dydx.$$

Разделим это на два интеграла:

$$I_1=\int_0^3 y^2(y-3)\sin(\frac{\pi m}{b}y)dy=[\text{Wolfram Mathematica}]=\frac{162(1+2(-1)^m)}{\pi^3m^3}.$$

$$I_2=\int_0^2 x(x-2)sin(\frac{\pi n}{a}x)dx=[\text{Wolfram Mathematica}]=\frac{16((-1)^n-1)}{\pi^3n^3}.$$

Таким образом, получаем

$$\psi_{nm}=\frac{2}{3}I_1I_2=\frac{1728(1+2(-1)^m)((-1)^n-1)}{\pi^6m^3n^3}.$$

Отсюда следует, что

$$B_{nm}=\begin{cases}0, n=2k,\\ \frac{\psi_{2k+1,m}}{\operatorname{sh}(\mu_{2k+1,m}c)}, n=2k+1.\end{cases}$$

Тогда

$$v(x,y,z)=(4\operatorname{ch}(\lambda_{66}z)-4\operatorname{cth}(\lambda_{66}c)\operatorname{sh}(\lambda_{66}z))\sin(3\pi x)\sin(2\pi y)+$$
$$+\sum_{k,m=1,m\neq6}^{\infty}[\frac{\psi_{2k+1,m}}{\operatorname{sh}(\mu_{2k+1,m}c)}\operatorname{sh}(\mu_{2k+1,m}z)\sin(\frac{\pi(2k+1)}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)].$$

Теперь перейдем к задаче для ω:

$$\begin{cases}\Delta\omega=-(x+y+z+xe^y+4),\\ \omega|_{x=0}=\omega|_{x=a}=\omega|_{y=0}=\omega|_{y=b}=\omega|_{z=0}=\omega|_{z=c}=0.\end{cases}$$

Решение будем искать в виде:

$$\omega(x,y,z)=\sum_{n,m=1}^{\infty}[sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)Z_{nm}(z)].$$

Подставим данное представление в уравнение рассматриваемой задачи и разложим парвую часть в ряд Фурье по собственным функциям:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}[(Z''_{nm}(z)-\mu_{nm}^2Z_{nm}(z))sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)]=\sum_{n,m=1}^{\infty}[f_{nm}sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)],$$

где

$$f_{nm}=-\frac{2}{3}\int_0^2\int_0^3(x+y+z+xe^y+4)sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)dydx=[\text{Wolfram Mathematica}]=$$

$$= \text{огромное выражение} = A_1 z + A_2.$$

Таким образом,

$$Z''_{nm}(z) - \mu_{nm}^2 Z_{nm}(z) = f_{nm}(z).$$

Воспользуемся граничными условиями:

$$\omega|_{z=0} = \sum_{n,m=1}^{\infty} [sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y) Z_{nm}(0)] = 0, \Rightarrow Z_{nm}(0) = 0.$$

$$\omega|_{z=c} = \sum_{n,m=1}^{\infty} [sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y) Z_{nm}(c)] = 0, \Rightarrow Z_{nm}(c) = 0.$$

Тогда, с учетом полученного, можем составить задачу Коши для отыскания Z_{nm} :

$$\begin{cases} Z''_{nm}(z) - \mu_{nm}^2 Z_{nm}(z) = f_{nm}(z), \\ Z_{nm}(0) = 0, \\ Z_{nm}(c) = 0. \end{cases}$$

Решение будем искать в виде сумма общего решения однородного и суммы частного решения неоднородного уравнения.

Решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$Z_{nm}^{oo}(z) = A_{nm}\operatorname{ch}(\mu_{nm} z) + B_{nm}\operatorname{sh}(\mu_{nm} z).$$

Искать частное решение неоднородного уравнения будем по виду правой части:

$$Z_{nm}^{\text{чн}}(z) = A_3 z + A_4.$$

Подставим данное представление в уравнение:

$$-\lambda_{nm}^2 (A_3 z + A_4) = f_{nm}(z).$$

Сравним соответствующе коэффициенты, тогда получим:

$$\begin{cases} A_3 = -\frac{A_1}{\mu_{nm}^2}, \\ A_4 = -\frac{A_2}{\mu_{nm}^2}. \end{cases}$$

Данные вычисления проведем в Wolfram Mathematica, получив таким образом вид частного решения неоднородного уравнения:

$$Z_{nm}^{\text{чн}}(z) = -(\frac{A_1}{\mu_{nm}^2} z + \frac{A_2}{\mu_{nm}^2}).$$

В итоге, общее решение неоднородного будет иметь вид:

$$Z_{nm}^{\text{он}}(z) = A_{nm}\operatorname{ch}(\mu_{nm} z) + B_{nm}\operatorname{sh}(\mu_{nm} z) - (\frac{A_1}{\mu_{nm}^2} z + \frac{A_2}{\mu_{nm}^2}).$$

Для нахождения коэффициентов $A_{nm},\ B_{nm}$ воспользуемся начальными условиями:

$$Z_{nm}(0) = A_{nm} - \frac{A_2}{\mu_{nm}^2} = 0 \Rightarrow A_{nm} = \frac{A_2}{\mu_{nm}^2}.$$

$$Z_{nm}(c) = A_{nm}\operatorname{ch}(\mu_{nm}c) + B_{nm}\operatorname{sh}(\mu_{nm}c) - (\frac{A_1}{\mu_{nm}^2}c + \frac{A_2}{\mu_{nm}^2}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{nm} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\mu_{nm}c)}((\frac{A_1}{\mu_{nm}^2}c + \frac{A_2}{\mu_{nm}^2}) - A_{nm}\operatorname{ch}(\mu_{nm}c)).$$

Таким образом, получили выражение для коэффициентов $Z_{nm}(z)$, что позволяет нам собрать решение исходной задачи.

$$\omega(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty}[sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)(A_{nm}\operatorname{ch}(\mu_{nm}z) + B_{nm}\operatorname{sh}(\mu_{nm}z) - (\frac{A_1}{\mu_{nm}^2}z + \frac{A_2}{\mu_{nm}^2}))].$$

Тогда

$$V(x,y,z) = (4\operatorname{ch}(\mu_{66}z) - 4\operatorname{cth}(\mu_{66}c)\operatorname{sh}(\mu_{66}z))\sin(3\pi x)\sin(2\pi y) +$$

$$+ \sum_{k,m=1,m\neq 6}^{\infty}[\frac{\psi_{2k+1,m}}{\operatorname{sh}(\mu_{2k+1,m}c)}\operatorname{sh}(\mu_{2k+1,m}z)\sin(\frac{\pi(2k+1)}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)] +$$

$$+ \sum_{n,m=1}^{\infty}[sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)(A_{nm}\operatorname{ch}(\mu_{nm}z) + B_{nm}\operatorname{sh}(\mu_{nm}z) - (\frac{A_1}{\mu_{nm}^2}z + \frac{A_2}{\mu_{nm}^2}))].$$

И решение исходной задачи имеет вид

$$u = y^2 + z^2 + xe^y + (4\operatorname{ch}(\mu_{66}z) - 4\operatorname{cth}(\mu_{66}c)\operatorname{sh}(\mu_{66}z))\sin(3\pi x)\sin(2\pi y) +$$

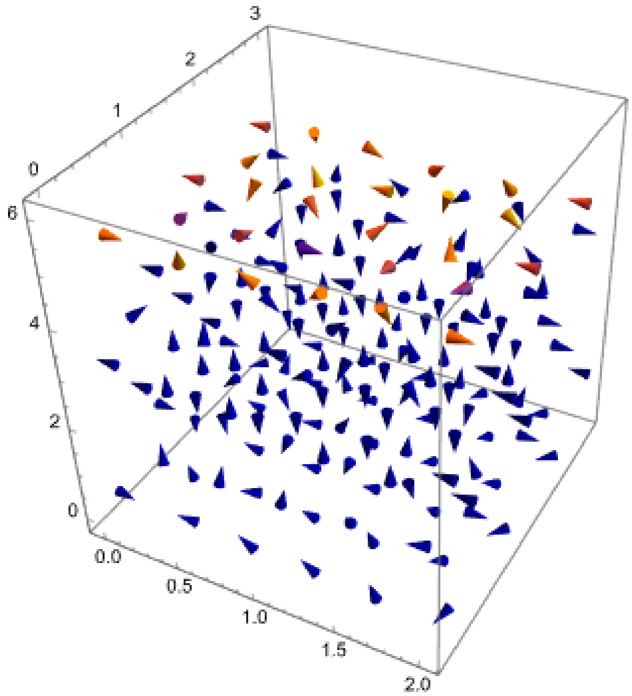
$$+ \sum_{k,m=1,m\neq 6}^{\infty}[\frac{\psi_{2k+1,m}}{\operatorname{sh}(\mu_{2k+1,m}c)}\operatorname{sh}(\mu_{2k+1,m}z)\sin(\frac{\pi(2k+1)}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)] +$$

$$+ \sum_{n,m=1}^{\infty}[sin(\frac{\pi n}{a}x)\sin(\frac{\pi m}{b}y)(A_{nm}\operatorname{ch}(\mu_{nm}z) + B_{nm}\operatorname{sh}(\mu_{nm}z) - (\frac{A_1}{\mu_{nm}^2}z + \frac{A_2}{\mu_{nm}^2}))].$$

Визуализация решения

```
In[251]:= VectorPlot3D[Evaluate[-Grad[u[x, y, z], {x, y, z}]], {x, 0, 2}, {y, 0, 3}, {z, 0, 6}]
```

Out[251]=



Задача 2

Получение решения

Перепишем условие задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \\ v_x|_{x=0} = v_x|_{x=a} = v|_{y=0} = v_y|_{y=b} = 0, \\ v|_{z=0} = x^3(x-a)^3 \sin\left(\frac{4\pi y}{24}\right), \\ v|_{z=c} = y(y-b)^3 \cos(6\pi x). \end{cases}$$

Решение этой задачи ищем в виде:

$$v(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Подставим в уравнение рассматриваемой задачи и получим:

$$\Delta v = X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0.$$

Разделим на XYZ:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0.$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} = -\mu^2.$$

$$-\frac{Y''}{Y} - \mu^2 = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

$$\frac{Y''}{Y} = \lambda^2 - \mu^2 = -\nu^2.$$

Рассмотрим две задачи Штурма-Лиувилля для $X(x)$ и $Y(y)$.

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X'(a) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x, \\ X'(0) = B = 0, \\ X'(a) = -\lambda A \sin\lambda a = 0. \end{cases}$$

Решением задачи Штурма-Лиувилля для $X(x)$ является:

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right),$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a}, n = 1, 2, ...$$

$$X_0(x) = 1,\ \lambda_0 = 0.$$

Задача для $Y(y)$:

$$\begin{cases} Y'' + \nu^2 Y = 0, \\ Y(0) = 0, \\ Y'(b) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y(y) = A\cos\nu y + B\sin\nu y, \\ Y(0) = A = 0, \\ Y'(b) = \nu B \cos\nu b = 0. \end{cases}$$

Решением задачи Штурма-Лиувилля для $Y(y)$ является:

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi m}{b} y\right),$$

$$\nu_m = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi m}{b}, m = 0, 1, ...$$

Таким образом, решение задачи для v представим в виде:

$$v(x, y, z) = Z_{00}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(z) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi m}{b} y\right).$$

Воспользуемся граничными условиями на z и получим систему:

$$\begin{cases} Z_{00}'' + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (Z_{nm}'' - \mu_{nm}^2 Z_{nm}) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\pi m}{b} y\right) = 0, \\ Z_{00}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(0) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\pi m}{b} y\right) = x^3 (x - a)^3 \sin\left(\frac{4\pi y}{24}\right), \\ Z_{00}(c) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(c) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\pi m}{b} y\right) = y (y - b)^3 \cos(6\pi x) \end{cases}$$

Рассмотрим задачу для четырех случаев:

1. Рассмотрим задачу для $n = m = 0$:

$$\begin{cases} Z_{00}'' - \nu_0 Z_{00} = 0, \\ Z_{00}(0) = x^3 (x - a)^3, \\ Z_{00}(c) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_{00}(z) = A_{00} \operatorname{ch}(\nu_0 z) + B_{00} \operatorname{sh}(\nu_0 z), \\ A_{00} = \frac{1}{a} \int_0^a x^3 (x - a)^3 dx = -\frac{16}{35}, \\ B_{00} = \frac{16}{35} \operatorname{cth}(\nu_0 c), \end{cases}$$

Таким образом,

$$Z_{00}(z) = -\frac{16}{35} \operatorname{ch}(\nu_0 z) + \frac{16}{35} \operatorname{cth}(\nu_0 c) \operatorname{sh}(\nu_0 z).$$

2. Рассмотрим задачу для $(n, m) \neq (0, 0)$.

$$\begin{cases} Z_{nm}''(z) - \mu_{nm}^2 Z_{nm}(z) = 0, \\ Z_{nm}(0) = 0, \\ Z_{nm}(c) = \begin{cases} \psi_{12,m}, n = 12, \\ 0, \forall (n, m) \neq (0, 0), n \neq 12 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_{nm}(z) = A_{nm} \operatorname{ch}(\mu_{nm} z) + B_{nm} \operatorname{sh}(\mu_{nm} z), \\ Z_{nm}(0) = A_{nm} = 0, \\ Z_{mn}(c) = B_{nm} = \begin{cases} \frac{\psi_{12,m}}{\operatorname{sh}(\mu_{nm} c)}, n = 12, \\ 0, \forall (n, m) \neq (0, 0), n \neq 12. \end{cases} \end{cases}$$

$$\psi_{12,m} = \frac{2}{b} \int_0^b y (y - b)^3 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi m}{b} y\right) dy = -\frac{7776 \left((2\pi m + \pi)^2 + 2\pi (2m + 1)(-1)^m - 16\right)}{(2\pi m + \pi)^5}$$

Таким образом,

$$Z_{12,m}(z) = \frac{\psi_{12,m}}{\operatorname{sh}(\mu_{nm} c)} \operatorname{sh}(\mu_{nm} z).$$

3. Рассмотрим задачу для $n \neq 0, m = 0$.

$$\begin{cases} Z_{n0}''(z) - \mu_{n0}^2 Z_{n0}(z) = 0, \\ Z_{n0}(0) = \varphi_{n0}, \\ Z_{n0}(c) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_{n0}(z) = A_{n0} \operatorname{ch}(\mu_{n0} z) + B_{n0} \operatorname{sh}(\mu_{n0} z), \\ Z_{n0}(0) = A_{n0} = \varphi_{n0}, \\ Z_{n0}(c) = B_{n0} = -\varphi_{n0} \operatorname{cth}(\mu_{n0} c). \end{cases}$$

$$\varphi_{n0} = \frac{2}{a}\int_0^a x^3(x{-}a)^3\cos(\frac{\pi n}{a}x)dx = [Wolfram\,Mathematica] = -\frac{768\left(\pi^2 n^2-60\right)\left((-1)^n+1\right)}{\pi^6 n^6}.$$

Не сложно заметить, что при нечетных n, $\varphi_{n0}=0$, тогда

$$\varphi_{2k,0} = -\frac{24\left(4\pi^2k^2-60\right)}{\pi^6k^6}$$

Таким образом,

$$Z_{2k,0}(z) = \varphi_{2k,0}\operatorname{ch}(\mu_{2k,0}z) - \varphi_{n0}\operatorname{cth}(\mu_{n0}c)\operatorname{sh}(\mu_{n0}z).$$

4. Рассмотрим задачу для $n=0, m\neq 0$:

$$\begin{cases} Z''_{0m}(z) - \nu_m^2 Z_{0m}(z) = 0, \\ Z_{0m}(0) = 0, \\ Z_{0m}(c) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_{0m}(z) = A_{0m}\operatorname{ch}(\nu_m z) + B_{0m}\operatorname{sh}(\nu_m z), \\ Z_{0m}(0) = A_{0m} = 0, \\ Z_{0m}(c) = B_{0m} = 0. \end{cases}$$

Таким образом

$$Z_{0m}(z) = 0.$$

Таким образом, получаем, что решение исходной задачи принимает вид:

$$v(x,y,z) = (-\frac{16}{35}\operatorname{ch}(\nu_0 z) + \frac{16}{35}\operatorname{cth}(\nu_0 c)\operatorname{sh}(\nu_0 z))\sin(\frac{\pi y}{6}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_{2k,0}\operatorname{ch}(\mu_{2k,0}z) - \varphi_{2k,0}\operatorname{cth}(\mu_{2k,0}c)\operatorname{sh}(\mu_{2k,0}z))\cos(\frac{2\pi k}{a}x)\sin(\frac{\pi y}{6}) +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi_{12,m}}{\operatorname{sh}(\mu_{12,m}c)}\operatorname{sh}(\mu_{12,m}z)\cos(6\pi x)\sin(\frac{\frac{\pi}{2}+\pi m}{b}y)$$

Визуализация решения

```
In[19]:= VectorPlot3D[Evaluate[-Grad[v[x, y, z], {x, y, z}]], {x, 0, 2}, {y, 0, 3}, {z, 0, 6}]
```

Out[19]=