МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра компьютерных технологий и систем

Отчет по лабораторной работе 3
Вариант 2

Выполнил:
Карпович Артём Дмитриевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:
Каркоцкий Александр Геннадьевич

Минск, 2024

Условие

Найти электрический и магнитный потенциал, электрическую и магнитную напряжённость внутри шара (внутри сферического слоя) при заданных диэлектрической проницаемости ε, условиях на электрический и магнитный потенциал (u и v соответственно) на его поверхности (на границах сферического слоя), и постоянной магнитной проницаемости, если распределение зарядов изменяется по закону $\rho(r, \varphi, \theta)$.

$$\varepsilon = 3, \rho(r, \varphi, \theta) = 12r^5 \cos^2(\theta)(\sin^2(\theta)\cos(2\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi));$$
$$u|_{r=3} = 5\cos^2(\varphi)\sin^4(\theta)\cos(\theta).$$

$$v|_{r=2} = 4\sin(\varphi)\sin(\theta)\cos^2(\theta);$$
$$v|_{r=5} = 6\cos^2(\varphi)\sin^2(\theta)\cos(\theta).$$

Задача 1

Получение решения

Перепишем условие задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon} = -4r^5\cos^2(\theta)(\sin^2(\theta)\cos(2\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)), \\ u|_{r=3} = 5\cos^2(\varphi)\sin^4(\theta)\cos(\theta). \end{cases}$$

Решение задачи ищем в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = v(r,\theta,\varphi) + \omega(r,\theta,\varphi).$$

Функцию v будем искать так, чтобы занулить граничные условия, то есть получим задачу:

$$\begin{cases} \Delta v = -4r^5\cos^2(\theta)(\sin^2(\theta)\cos(2\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)), \\ v|_{r=3} = 0. \end{cases}$$

Для ω имеем задачу:

$$\begin{cases} \Delta \omega = 0, \\ \omega|_{r=3} = 5\cos^2(\varphi)\sin^4(\theta)\cos(\theta). \end{cases}$$

Сначала решим именно эту задачу. Решение ее представимо в виде:

$$\omega(r,\theta,\varphi) = \sum_{n,m=0}^{\infty}(A_{nm}\cos(m\varphi) + B_{nm}\sin(m\varphi))r^n P_n^{(m)}(\cos(\theta))$$

Воспользуемся граничными условиями:

$$\omega|_{r=3} = \sum_{n,m=0}^{\infty}(A_{nm}\cos(m\varphi) + B_{nm}\sin(m\varphi))3^n P_n^{(m)}(\cos(\theta)) = 5\Big(\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\Big)\sin^4(\theta)\cos(\theta) =$$

$$= \frac{5}{2}\sin^4(\theta)\cos(\theta)\cos(0\varphi) + \frac{5}{2}\sin^4(\theta)\cos(\theta)\cos(2\varphi).$$

Тогда:

$$A_{nm} = \begin{cases} A_{n0}, m = 0, \\ A_{n2}, m = 2, \\ 0, m \neq 1, \end{cases} \qquad B_{nm} = 0$$

Таким образом,

$$\omega|_{r=3} = \sum_{n=0}^{\infty}(A_{n0}P_n^{(0)}(\cos(\theta)) + A_{n2}\cos(2\varphi)P_n^{(2)}(\cos(\theta))3^n) = \frac{5}{2}\sin^4(\theta)\cos(\theta)\cos(0\varphi) + \frac{5}{2}\sin^4(\theta)\cos(\theta)\cos(2\varphi).$$

Тогда получим два уравнения:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3^n A_{n0}P_n^{(0)}(\cos(\theta)) = \frac{5}{2}\sin^4(\theta)\cos(\theta),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3^n A_{n2} P_n^{(2)}(\cos(\theta)) = \frac{5}{2}\sin^4(\theta)\cos(\theta)$$

Введем замену $\cos(\theta) = x$, тогда получим уравнение

$$\frac{5}{2}(1-x^2)^2 x = \frac{5}{2}(x^5 - 2x^3 + x),$$

то есть имеем уравнение пятой степени.

Для вычисления полиномов Лежандра воспользуемся формулой:

$$P_n^{(0)}(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

$$\deg P_n^{(0)}(x) = 2n - n \leq 5 \Rightarrow n \leq 5.$$

С помощью таблицы выпишем $P_n^{(0)}, n = \overline{0,5}$:

$$P_0^{(0)} = 1,$$

$$P_1^{(0)} = x,$$

$$P_2^{(0)} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3^{(0)} = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4^{(0)} = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5^{(0)} = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Подставим в первое из полученных ранее уравнений:

$$A_{00}+3A_{10}x+\frac{9}{2}A_{20}(3x^2-1)+\frac{27}{2}A_{30}(5x^3-3x)+\frac{81}{8}A_{40}(35x^4-30x^2+3)+\frac{243}{8}A_{50}(63x^5-70x^3+15x) =$$

$$= \frac{5}{2}(x^5 - 2x^3 + x)$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях:

$$\begin{cases} A_{50} = \frac{5\cdot 8}{2\cdot 243\cdot 63} = \frac{20}{15309}, \\ A_{40} = 0, \\ A_{30} = \frac{2}{27\cdot 5}(-5 + \frac{243\cdot 70}{8}A_{05}) = -\frac{8}{243}, \\ A_{20} = 0, \\ A_{10} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2} + \frac{81}{2}A_{30} - \frac{243\cdot 15}{8}A_{50}\right) = \frac{4}{21}, \\ A_{00} = \frac{9}{2}A_{02} - \frac{3\cdot 81}{8}A_{40} = 0 \end{cases}$$

Аналогичным образом поступим для второго уравнения. Полиномы Лежандра в этом случае вычисляются по формуле:

$$P_n^{(2)}(x) = \frac{1-x^2}{2^n n!}\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^2-1)^n,$$

$$\deg P_n^{(2)} = 2 + 2n - (n+2) = n \leq 5.$$

Используя таблицу, выпишем для $n = \overline{2,5}$:

$$P_2^{(2)}(x) = 3(1-x^2),$$

$$P_3^{(2)}(x) = 15x(1-x^2),$$

$$P_4^{(2)}(x) = \frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2),$$

$$P_5^{(2)}(x) = \frac{105}{2}(3x^3-x)(1-x^2).$$

Подставим в уравнение:

$$(1-x^2)(9A_{22}\cdot 3 + 27A_{32}\cdot 15x + 81A_{42}\frac{15}{2}(7x^2-1) + 243A_{52}\frac{105}{2}(3x^3-x)) = \frac{5}{2}(1-x^2)^2x,$$

сократим на $1-x^2$:

$$27(A_{22} + 15A_{32}x + \frac{45}{2}A_{42}(7x^2-1) + \frac{945}{2}A_{52}(3x^3-x)) = \frac{5}{2}(x-x^3).$$

Найдем коэффициенты:

$$\begin{cases} A_{52} = -\frac{5\cdot 2}{54\cdot 945\cdot 3} = -\frac{1}{15309}, \\ A_{42} = 0, \\ A_{32} = \frac{1}{15}(\frac{5}{54} + \frac{945}{2}A_{52}) = \frac{1}{243}, \\ A_{22} = \frac{45}{2}A_{42} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получаем:

$$\omega(r,\theta,\varphi) = \left(r\cdot\frac{4}{21}P_1^{(0)}(\cos(\theta)) - r^3\cdot\frac{8}{243}P_3^{(0)}(\cos(\theta)) + r^5\cdot\frac{20}{15309}P_5^{(0)}(\cos(\theta))\right)\cos(0\varphi)+$$

$$+\left(r^3\cdot\frac{1}{243}P_3^{(2)}(\cos(\theta)) - r^5\frac{1}{15309}P_5^{(2)}(\cos(\theta))\right)\cos(2\varphi)$$

Вернемся к задаче для v:

$$\begin{cases} \Delta v = -4r^5\cos^2(\theta)(\sin^2(\theta)\cos(2\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)), \\ v|_{r=3} = 0. \end{cases}$$

По виду правой части запишем

$$-4r^5\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\cos(2\varphi) + 4r^5\cos^2(\theta)\sin(\theta)\sin(\varphi) = r^5\cos(2\varphi)\sum_{n=0}^{\infty}A_{n2}P_n^{(2)}(\cos(\theta))+$$

$$+r^5\sin(\varphi)\sum_{n=0}^{\infty}B_{n1}P_n^{(1)}(\cos(\theta)).$$

Тогда получим два уравнения:

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_{n2}P_n^{(2)}(\cos(\theta)) = -4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n1} P_n^{(1)}(\cos(\theta)) = 4\cos^2(\theta)\sin(\theta).$$

Рассмотрим правую часть первого уравнения, введя замену $x = \cos(\theta)$:

$$-4x^2(1-x^2) = -4x^2 + 4x^4, \Rightarrow \deg P_n^{(2)} = n \leq 4.$$

Полиномы Лежандра до $n = 4$ у нас уже есть, поэтому подставим их в наше уравнение:

$$A_{22} 3(1-x^2) + A_{32} 15x(1-x^2) + A_{42}\frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2) = -4x^2(1-x^2),$$

сократим на $1-x^2$:

$$3A_{22} + 15A_{32}x + \frac{15}{2}A_{42}(7x^2-1) = -4x^2.$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях:

$$\begin{cases} A_{42} = -\frac{2\cdot 4}{15\cdot 7} = -\frac{8}{105}, \\ A_{32} = 0, \\ A_{22} = \frac{15}{2\cdot 3}A_{42} = -\frac{4}{21}. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение. Полиному Лежандра в этом случае считаем по формуле

$$P_n^{(1)}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2^n n!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n = 1 + 2n - (n+1) = n \leq \deg(x^2\sqrt{1-x^2}) = 3, \Rightarrow n \leq 3.$$

Воспользуемся таблицей и выпишем полиномы Лежандра для $n = \overline{1,3}$:

$$P_1^{(1)} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$P_2^{(1)} = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$P_3^{(1)} = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставим во второе уравнение:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(B_{11} + 3B_{21}x + \frac{3}{2}B_{31}(5x^2-1)) = 4x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Сократим на $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$:

$$B_{11} + 3B_{21}x + \frac{3}{2}B_{31}(5x^2-1) = 4x^2.$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях:

$$\begin{cases} B_{31} = \frac{4\cdot 2}{3\cdot 5} = \frac{8}{15}, \\ B_{21} = 0, \\ B_{11} = \frac{3}{2}B_{31} = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, неоднородность представима в виде:

$$r^5\cos(2\varphi)\Big(-\frac{4}{21}P_2^{(2)}(\cos(\theta)) - \frac{8}{105}P_4^{(2)}(\cos(\theta))\Big) + r^5\sin(\varphi)\Big(\frac{4}{5}P_1^{(1)}(\cos(\theta)) + \frac{8}{15}P_3^{(1)}(\cos(\theta))\Big)$$

Введем замены $\cos(2\varphi)P_n^{(2)}(\cos(\theta)) = Y_n^{(2)}(\theta,\varphi)$, $\sin(\varphi)P_n^{(1)}\cos(\theta) = Y_n^{(1)}(\theta,\varphi)$. Тогда неоднородность примет вид:

$$r^5\Big(-\frac{4}{21}Y_2^{(2)}(\theta,\varphi) - \frac{8}{105}Y_4^{(2)}(\theta,\varphi) + \frac{4}{5}Y_1^{(1)}(\theta,\varphi) + \frac{8}{15}Y_3^{(1)}(\theta,\varphi)\Big)$$

Следовательно, решение задачи ищем в виде:

$$v(r,\theta,\varphi) = Z_1(r)Y_2^{(2)}(\theta,\varphi) + Z_2(r)Y_4^{(2)}(\theta,\varphi) + Z_3(r)Y_1^{(1)}(\theta,\varphi) + Z_4(r)Y_3^{(1)}(\theta,\varphi)$$

Подставим данное представление в

$$\Delta v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin(\theta)) + \frac{v_{\varphi\varphi}}{r^2\sin^2(\theta)} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\Big[(2rZ_1'(r)+r^2Z_1''(r))Y_2^{(2)}+(2rZ_2'(r)+r^2Z_2''(r))Y_4^{(2)}+(2rZ_3'(r)+r^2Z_3''(r))Y_1^{(1)}+(2rZ_4'(r)+r^2Z_4''(r))Y_3^{(1)}\Big]+$$

$$+\frac{Z_1}{r^2}\Big(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}((Y_2^{(2)})_\theta\sin(\theta)) + \frac{(Y_2^{(2)})_{\varphi\varphi}}{\sin^2(\theta)} + 6Y_2^{(2)} - 6Y_2^{(2)}\Big)+$$

$$+\frac{Z_2}{r^2}\Big(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}((Y_4^{(2)})_\theta\sin(\theta)) + \frac{(Y_4^{(2)})_{\varphi\varphi}}{\sin^2(\theta)} + 20Y_4^{(2)} - 20Y_4^{(2)}\Big)+$$

$$+\frac{Z_3}{r^2}\Big(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}((Y_1^{(1)})_\theta\sin(\theta)) + \frac{(Y_1^{(1)})_{\varphi\varphi}}{\sin^2(\theta)} + 2Y_1^{(1)} - 2Y_1^{(2)}\Big)+$$

$$+\frac{Z_4}{r^2}\Big(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}((Y_3^{(1)})_\theta\sin(\theta)) + \frac{(Y_3^{(1)})_{\varphi\varphi}}{\sin^2(\theta)} + 12Y_3^{(1)} - 12Y_3^{(1)}\Big) =$$

$$= r^5\Big(-\frac{4}{21}Y_2^{(2)}(\theta,\varphi) - \frac{8}{105}Y_4^{(2)}(\theta,\varphi) + \frac{4}{5}Y_1^{(1)}(\theta,\varphi) + \frac{8}{15}Y_3^{(1)}(\theta,\varphi)\Big).$$

Поскольку мы работаем со сферическими функциями, то

$$\Big(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}((Y_n^{(m)})_\theta\sin(\theta)) + \frac{(Y_n^{(m)})_{\varphi\varphi}}{\sin^2(\theta)} + n(n+1)Y_n^{(m)}\Big) = 0.$$

Таким образом, для каждого $Z_i(r), i=\overline{1,4}$ мы можем составить задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\Big(2rZ_1'(r) + r^2Z_1''(r) - 6Z_1\Big) = -r^5\frac{4}{21}, \\ Z_1(3) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение данной задачи:

$$r^2Z_1''(r) + 2rZ_1'(r) - 6Z_1(r) = -\frac{4r^7}{21}$$

Найдем общее решение однородного уравнения. Для этого будем искать решение в виде $Z_1(r) = r^k$, тогда, подставив, получим:

$$(k^2-k)r^k + 2kr^k - 6r^k = 0, \Rightarrow k^2+k-6=0, \Rightarrow k_{1,2} = 2, -3.$$

Таким образом, получаем, что

$$Z_1^{\text{oo}}(r) = C_1 r^2.$$

Частное решение неоднородного ищем в виде

$$Z_1^{\text{чн}}(r) = Ar^7 \Rightarrow 42Ar^7 + 14Ar^7 - 6Ar^7 = -\frac{4r^7}{21}, \Rightarrow 50A = -\frac{4}{21}, \Rightarrow A = -\frac{2}{525}.$$

Таким образом,

$$Z_1^{\text{он}}(r) = C_1 r^2 - \frac{2}{525} r^7.$$

Подставим начальное условие:

$$Z_1(3) = 9C_1 - \frac{2 \cdot 3^7}{525} = 0, \Rightarrow C_1 = \frac{2 \cdot 3^5}{525} \Rightarrow Z_1(r) = \frac{486}{525} r^2 - \frac{2}{525} r^7.$$

Аналогичным образом найдем и остальные $Z_i(r)$:

$Z_2(r)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\Big(2rZ_2'(r) + r^2 Z_2''(r) - 20Z_2(r)\Big) = -r^5 \frac{8}{105}, \\ Z_2(3) = 0. \end{cases}$$

$$Z_2^{\text{оо}}(r) = C_1 r^4,$$

$$Z_2^{\text{чн}}(r) = -\frac{2}{945} r^7,$$

$$Z_2(3) = 3^4 C_1 - \frac{2 \cdot 3^7}{945} = 0, \Rightarrow C_1 = \frac{54}{945}, \Rightarrow Z_2(r) = \frac{54}{945} r^4 - \frac{2}{945} r^7.$$

$Z_3(r)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\Big(2rZ_3'(r) + r^2 Z_3''(r) - 2Z_3(r)\Big) = r^5 \frac{4}{5}, \\ Z_3(3) = 0. \end{cases}$$

$$Z_3^{\text{оо}}(r) = C_1 r,$$

$$Z_3^{\text{чн}}(r) = \frac{2}{135} r^7,$$

$$Z_3(3) = 3C_1 + \frac{2 \cdot 3^7}{135} = 0, \Rightarrow C_1 = -\frac{2 \cdot 3^6}{135} = -\frac{54}{5}, \Rightarrow Z_3(r) = -\frac{54}{5} r + \frac{2}{135} r^7.$$

$Z_4(r)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\Big(2rZ_4'(r) + r^2 Z_4''(r) - 12Z_4(r)\Big) = r^5 \frac{8}{15}, \\ Z_4(3) = 0. \end{cases}$$

$$Z_4^{\text{оо}}(r) = C_1 r^3,$$

$$Z_4^{\text{чн}}(r) = \frac{2}{165} r^7,$$

$$Z_4(3) = 3^3 C_1 + \frac{2 \cdot 3^7}{165} = 0, \Rightarrow C_1 = -\frac{54}{55}, \Rightarrow Z_4(r) = -\frac{54}{55} r^3 + \frac{2}{165} r^7.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи представимо в виде:

$$v(r,\theta,\varphi) = \Big(\frac{486}{525} r^2 - \frac{2}{525} r^7\Big) \cos(2\varphi) P_2^{(2)}(\cos(\theta)) + \Big(\frac{54}{945} r^4 - \frac{2}{945} r^7\Big) \cos(2\varphi) P_4^{(2)}(\cos(\theta)) +$$

$$+ \Big(-\frac{54}{5} r + \frac{2}{135} r^7\Big) \sin(\varphi) P_1^{(1)} \cos(\theta) + \Big(-\frac{54}{55} r^3 + \frac{2}{165} r^7\Big) \sin(\varphi) P_3^{(1)} \cos(\theta).$$

И решение исходной задачи имеет вид:

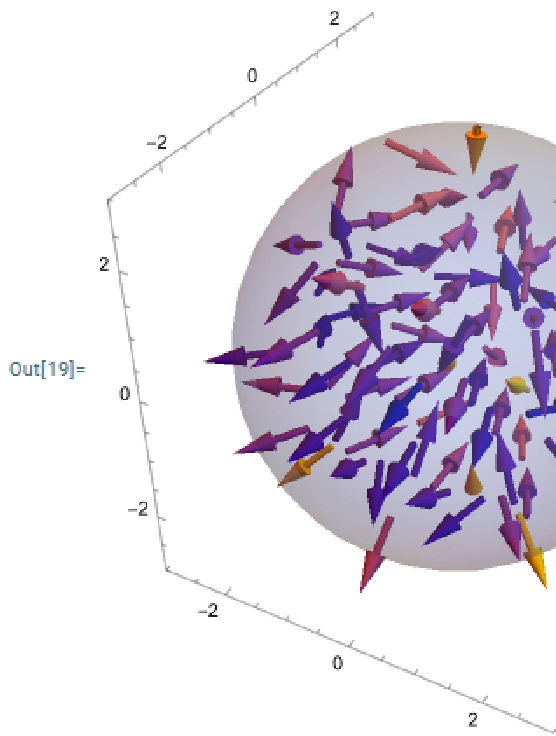
$$u(r,\theta,\varphi) = \Big(\frac{486}{525}r^2 - \frac{2}{525}r^7\Big)\cos(2\varphi)P_2^{(2)}(\cos(\theta)) + \Big(\frac{54}{945}r^4 - \frac{2}{945}r^7\Big)\cos(2\varphi)P_4^{(2)}(\cos(\theta)) +$$

$$+\Big(-\frac{54}{5}r + \frac{2}{135}r^7\Big)\sin(\varphi)P_1^{(1)}\cos(\theta) + \Big(-\frac{54}{55}r^3 + \frac{2}{165}r^7\Big)\sin(\varphi)P_3^{(1)}\cos(\theta) +$$

$$+\Big(r\cdot\frac{4}{21}P_1^{(0)}(\cos(\theta)) - r^3\cdot\frac{8}{243}P_3^{(0)}(\cos(\theta)) + r^5\cdot\frac{20}{15309}P_5^{(0)}(\cos(\theta))\Big)\cos(0\varphi) +$$

$$+\Big(r^3\cdot\frac{1}{243}P_3^{(2)}(\cos(\theta)) - r^5\frac{1}{15309}P_5^{(2)}(\cos(\theta))\Big)\cos(2\varphi)$$

Визуализация решения



Задача 2

Получение решения

Перепишем условие задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \\ v|_{r=2} = 4\sin(\varphi)\sin(\theta)\cos^2(\theta), \\ v|_{r=5} = 6\cos^2(\varphi)\sin^2(\theta)\cos(\theta). \end{cases}$$

Решение этой задачи ищем в виде:

$$v(r,\varphi,\theta) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{nm}r^n + B_{nm}r^{-(n+1)})\cos(m\varphi) + (C_{nm}r^n + D_{nm}r^{-(n+1)})\sin(m\varphi))P_n^{(m)}(\cos(\theta)).$$

Подставим граничные условия:

$$v|_{r=2} = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{nm}2^n + B_{nm}2^{-(n+1)})\cos(m\varphi) + (C_{nm}2^n + D_{nm}2^{-(n+1)})\sin(m\varphi))P_n^{(m)}(\cos(\theta)) =$$

$$= 4\sin\varphi\sin\theta\cos^2\theta.$$

Отсюда,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(C_{n1}2^n + D_{n1}2^{-(n+1)})P_n^{(1)}(\cos(\theta)) = 4\sin(\theta)\cos^2(\theta).$$

Введем замену $\cos(\theta) = x$, тогда правая часть примет вид:

$$4x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, \Rightarrow \deg(P_n^{(1)}) \leq 3.$$

Полиномы Лежандра для $n = \overline{1,3}$ мы уже использовали. Распишем правую часть через полиномы Лежандра:

$$4\sin(\theta)\cos^2(\theta) = \frac{8}{15}P_3^{(1)}(\cos(\theta)) + \frac{4}{5}P_1^{(1)}(\cos(\theta)).$$

Подставим:

$$(2C_{11} + 2^{-2}D_{11})P_1^{(1)}(\cos(\theta)) + (2^2C_{21} + 2^{-3}D_{21})P_2^{(1)}(\cos(\theta)) + (2^3C_{31} + 2^{-4}D_{31}))P_3^{(1)}(\cos(\theta)) =$$

$$= \frac{8}{15}P_3^{(1)}(\cos(\theta)) + \frac{4}{5}P_1^{(1)}(\cos(\theta)).$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} 2C_{11} + 2^{-2}D_{11} = \frac{4}{5}, \\ 2^2C_{21} + 2^{-3}D_{21} = 0, \\ 2^3C_{31} + 2^{-4}D_{31} = \frac{8}{15}. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь второе граничное условие:

$$v|_{r=5} = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{nm}5^n + B_{nm}5^{-(n+1)})\cos(m\varphi) + (C_{nm}5^n + D_{nm}5^{-(n+1)})\sin(m\varphi))P_n^{(m)}(\cos(\theta)) =$$

$$= 6\cos^2(\varphi)\sin^2(\theta)\cos(\theta) = 3\sin^2(\theta)\cos(\theta) + 3\cos(2\varphi)\sin^2(\theta)\cos(\theta).$$

Таким образом, получаем два уравнения:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n0}5^n + B_{n0}5^{-(n+1)})P_n^{(0)}(\cos(\theta)) = 3\sin^2(\theta)\cos(\theta),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n2}5^n + B_{n2}5^{-(n+1)})P_n^{(2)}(\cos(\theta)) = 3\sin^2(\theta)\cos(\theta).$$

Рассмотрим первое уравнение. Степень правой части по $\cos(\theta)$ равна 3, следовательно $\deg(P_n^{(0)}) = n \leq 3$. Подставим $P_n^{(0)}, n = \overline{0,3}$ из первого задания:

$$(A_{00} + B_{n0}5^{-1})P_0^{(0)}(\cos(\theta)) + (A_{10}5 + B_{10}5^{-2})P_1^{(0)}(\cos(\theta)) + (A_{20}5^2 + B_{20}5^{-3})P_2^{(0)}(\cos(\theta)) +$$

$$+(A_{30}5^3 + B_{30}5^{-4})P_3^{(0)}(\cos(\theta)) = \frac{6}{5}P_1^{(0)}(\cos(\theta)) - \frac{6}{5}P_3^{(0)}(\cos(\theta)).$$

Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} A_{00} + B_{00}5^{-1} = 0, \\ A_{10}5 + B_{10}5^{-2} = \frac{6}{5}, \\ A_{20}5^2 + B_{20}5^{-3} = 0, \\ A_{30}5^3 + B_{30}5^{-4} = -\frac{6}{5}. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение, $\deg(P_n^{(2)}) = n \leq 3$. Тоже воспользуемся прошлым заданием и сразу подставим:

$$(A_{22}5^2 + B_{22}5^{-3})P_2^{(2)}(\cos(\theta)) + (A_{32}5^3 + B_{32}5^{-4})P_3^{(2)}(\cos(\theta)) = \frac{1}{5}P_3^{(2)}.$$

Отсюда:

$$\begin{cases} A_{22}5^2 + B_{22}5^{-3} = 0, \\ A_{32}5^3 + B_{32}5^{-4} = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Для разрешения полученных систем возьмем недостающие уравнения из соседнего граничного условия, то есть для уравнений, полученных из второго граничного условия, возьмем уравнения, полученные из первого граничного условия и наоборот.

$$\begin{cases} A_{10}5 + B_{10}5^{-2} = \frac{6}{5}, \\ A_{10}2 + B_{10}2^{-2} = 0, \end{cases} , \Rightarrow \text{[Wolfram Mathematica]}, \Rightarrow \begin{cases} A_{10} = \frac{10}{39}, \\ B_{10} = -\frac{80}{39}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{30}5^3 + B_{30}5^{-4} = -\frac{6}{5}, \\ A_{30}2^3 + B_{30}2^{-4} = 0, \end{cases} , \Rightarrow \text{[Wolfram Mathematica]}, \Rightarrow \begin{cases} A_{30} = -\frac{250}{25999}, \\ B_{30} = \frac{32000}{25999}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{32}5^3 + B_{32}5^{-4} = \frac{1}{5}, \\ A_{32}2^3 + B_{32}2^{-4} = 0, \end{cases} , \Rightarrow \text{[Wolfram Mathematica]}, \Rightarrow \begin{cases} A_{32} = \frac{125}{77997}, \\ B_{32} = -\frac{16000}{77997}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{11}2 + D_{11}2^{-2} = \frac{4}{5}, \\ C_{11}5 + D_{11}5^{-3} = 0, \end{cases} , \Rightarrow \text{[Wolfram Mathematica]}, \Rightarrow \begin{cases} C_{11} = -\frac{16}{585}, \\ D_{11} = \frac{400}{117}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{31}2^3 + D_{31}2^{-4} = \frac{8}{15}, \\ C_{31}5^3 + D_{31}5^{-4} = 0, \end{cases} , \Rightarrow \text{[Wolfram Mathematica]}, \Rightarrow \begin{cases} C_{31} = -\frac{128}{1169955}, \\ D_{31} = \frac{2000000}{233991}. \end{cases}$$

Таким образом, подставив получившиеся коэффициенты в полученные ранее представления, получим решение рассматриваемой задачи.

$$v(r,\varphi,\theta) = \Big((\frac{10}{39}r - \frac{80}{39}r^{-2})P_1^{(0)}(\cos(\theta)) + (-\frac{250}{25999}r^3 + \frac{32000}{25999}r^{-4})P_3^{(0)}(\cos(\theta)) \Big)\cos(0\varphi) +$$

$$+ \Big((\frac{125}{77997}r^3 - \frac{16000}{77997}r^{-4})P_3^{(2)}(\cos(\theta)) \Big)\cos(2\varphi) +$$

$$+ \Big((-\frac{16}{585}r + \frac{400}{117}r^{-2})P_1^{(1)}(\cos(\theta)) + (-\frac{128}{1169955}r^3 + \frac{2000000}{233991}r^{-4})P_3^{(1)}(\cos(\theta)) \Big)\sin(\varphi)$$

Визуализация решения

Out[ ]=