МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра компьютерных технологий и систем

Отчет по лабораторной работе 1
Вариант 5

Выполнил:
Карпович Артём Дмитриевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:
Каркоцкий Александр Геннадьевич

Минск, 2024

Условие

Решить следующие смешанные задачи методом разделения переменных. Произвести визуализацию с использованием пакета Wolfram Mathematica. Первая задача посвящена колебанию тонкой струны, вторая – прямоугольного контура. Сумма, при необходимости, должна состоять не менее чем из 100 слагаемых.

1. $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x(2+t), 0 < x < 5, t > 0 \\ u|_{t=0} = x, \\ u_t|_{t=0} = 0, \\ u_x + 5u|_{x=0} = 1 - t, \\ u|_{x=5} = t. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} u_{tt}\Delta u, \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=5} = 0, \\ u_y|_{y=0} = u|_{y=9} = 0, \\ u|_{t=0} = e^{x+y}, \\ u_t|_{t=0} = e^{x-y}. \end{cases}$$

Задача 1

Решение задачи будем искать в виде суммы

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где функция $v(x,t)$ удовлетворяет смешанной задаче с однородными граничными условиями, а функция $w(x,t)$ - неоднородным граничным условиям.

Найдем функцию $w(x,t)$ из представления:

$$w(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t).$$

Подставим это представление в граничные условия:

$$w_x(0,t) + 5w(0,t) = b + 5c = 1 - t,$$

$$w(5,t) = 25a + 5b + c = t.$$

Положим $a(t) = 0$, тогда получим систему для b, c:

$$\begin{cases} b + 5c = 1 - t, \\ 5b + c = t. \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4}(t - \frac{1}{6}), \\ c = \frac{1}{4}(\frac{5}{6} - t). \end{cases} \quad \Rightarrow \omega = \frac{1}{4}(t - \frac{1}{6})x + \frac{1}{4}(\frac{5}{6} - t).$$

Для нахождения $v(x,t)$ составим задачу с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = x(2+t), \\ v|_{t=0} = \frac{5}{24}(5x - 1), \\ v_t|_{t=0} = \frac{1}{4}(1 - x), \\ v_x + 5v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=5} = 0. \end{cases}$$

Решение данной задачи будем искать в виде суммы:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$$

Составим задачу Штурма-Лиувилля для однородного уравнения:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda_k^2 X(x) = 0, \\ X'(0) + 5X(0) = 0, \\ X(5) = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение первого уравнения:

$$X_k(x) = A_k cos\lambda_k x + B_k sin\lambda_k x,$$

подставляем в граничные условия для нахождения коэффициентов:

$$\begin{cases} \lambda_k B_k + 5A_k = 0, \\ A_k cos 5\lambda_k + B_k sin 5\lambda_k = 0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения A_k:

$$A_k = -\frac{\lambda_k}{5} B_k, \tag{1}$$

тогда, подставив во второе уравнение, получим

$$-\frac{\lambda_k}{5} B_k \cos 5\lambda_k + B \sin 5\lambda_k = 0,$$

поскольку из выражения (1) следует, что $B \neq 0$ (в противном случае получаем нулевое решение), то можем сократить на B и получим:

$$\sin 5\lambda_k = \frac{\lambda_k}{5} \cos 5\lambda_k \Rightarrow \operatorname{tg} 5\lambda_k = \frac{\lambda_k}{5}.$$

Положим $B = 1$, тогда получим собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

$$X_k(x) = \sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x.$$

Собственные значения найдем чуть позже, при визуализации полученного решения, используя Wolfram Mathematica. Таким образом, решение рассматриваемой задачи можно представить в виде:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x) T_k(t).$$

Подставим полученное представление в исходное уравнение и начальные условия рассматриваемой задачи:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x)(T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x) f_k, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x) T_k(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x) \varphi_k, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x) T_k'(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sin \lambda_k x - \frac{\lambda_k}{5} \cos \lambda_k x) \psi_k. \end{cases}$$

Найдём соответствующие коэффициенты ряда Фурье:

$$f_k = \frac{\int_0^5 x(2+t)X_k(x)dx}{\int_0^5 X_k^2(x)dx},$$

$$\varphi_k = \frac{\int_0^5 \frac{5}{24}(5x-1)X_k(x)dx}{\int_0^5 X_k^2(x)dx},$$

$$\psi_k = \frac{\int_0^5 \frac{1}{4}(1-x)X_k(x)dx}{\int_0^5 X_k^2(x)dx}.$$

Воспользуемся его святейшеством, Wolfram Mathematica:

```
In[58]:= Xk[x] := Sin[λ*x] - (λ/5)*Cos[λ*x]
         fk = Integrate[x*(2+T)*Xk[x], {x, 0, 5}] / Integrate[Xk[x]^2, {x, 0, 5}]
         fk // Simplify
```

$$\text{Out[59]=} \; -\frac{20\,(2+T)\,(-\lambda+26\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+5\,(-1+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

$$\text{Out[60]=} \; -\frac{20\,(2+T)\,(-\lambda+26\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+5\,(-1+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

```
In[17]:= phik = Integrate[5/24 * (5*x - 1)*Xk[x], {x, 0, 5}] / Integrate[Xk[x]^2, {x, 0, 5}]
         phik // Simplify
```

$$\text{Out[17]=} \; \frac{25\,(-125\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+(25-24\,\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{6\,\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

$$\text{Out[18]=} \; \frac{25\,(-125\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+(25-24\,\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{6\,\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

```
In[23]:= psik = Integrate[1/4 * (1 - x)*Xk[x], {x, 0, 5}] / Integrate[Xk[x]^2, {x, 0, 5}]
         psik // Simplify
```

$$\text{Out[23]=} \; \frac{5\,(4\,\lambda+21\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+(-5+4\,\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

$$\text{Out[24]=} \; \frac{5\,(4\,\lambda+21\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+(-5+4\,\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

То есть получаем

$$f_k = -\frac{20(t+2)\left(5\left(\lambda^2-1\right)\sin(5\lambda)-\lambda+26\lambda\cos(5\lambda)\right)}{\lambda\left(\left(\lambda^2-25\right)\sin(10\lambda)+10\lambda\left(\lambda^2+\cos(10\lambda)+24\right)\right)},$$

$$\varphi_k = \frac{25\left(\left(25-24\lambda^2\right)\sin(5\lambda)-125\lambda\cos(5\lambda)\right)}{6\lambda\left(\left(\lambda^2-25\right)\sin(10\lambda)+10\lambda\left(\lambda^2+\cos(10\lambda)+24\right)\right)},$$

$$\psi_k = \frac{5\left(\left(4\lambda_k^2-5\right)\sin(5\lambda_k)+4\lambda_k+21\lambda_k\cos(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k\left(\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\left(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24\right)\right)}.$$

Таким образом, получаем следующую задачу Коши

$$\begin{cases} T_k''(t)+\lambda_k^2T_k(t) = -\frac{20(t+2)\left(5\left(\lambda_k^2-1\right)\sin(5\lambda_k)-\lambda_k+26\lambda_k\cos(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k\left(\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\left(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24\right)\right)}, \\ T_k(0) = \frac{25\left(\left(25-24\lambda_k^2\right)\sin(5\lambda_k)-125\lambda_k\cos(5\lambda_k)\right)}{6\lambda_k\left(\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\left(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24\right)\right)}, \\ T_k'(0) = \frac{5\left(\left(4\lambda_k^2-5\right)\sin(5\lambda_k)+4\lambda_k+21\lambda_k\cos(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k\left(\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\left(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24\right)\right)}. \end{cases}$$

Решим задачу Коши. Построим общее однородное решение уравнения рассматриваемой задачи Коши:

$$T_k^{\text{оо}}(t) = A_k cos\lambda_k t + B_k sin\lambda_k t.$$

По виду правой части выпишем частное решение неоднородного уравнения:

$$T_k^{\text{чн}}(t) = C_k t + D_k.$$

Подставим вид частного неоднородного решения в уравнение:

$$C_k\lambda_k^2 t + D_k\lambda_k^2 = f_k.$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты, получим:

$$\begin{cases} C_k = -\frac{20\left(5\left(\lambda_k^2-1\right)\sin(5\lambda_k)-\lambda_k+26\lambda_k\cos(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k^3\left(\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\left(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24\right)\right)}, \\ D_k = -\frac{40\left(5\left(\lambda_k^2-1\right)\sin(5\lambda_k)-\lambda_k+26\lambda_k\cos(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k^3\left(\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\left(\lambda_k^2+\cos(10\lambda_k)+24\right)\right)}. \end{cases}$$

Тогда получаем общее решение неоднородного уравнения в виде суммы:

$$T_k^{\text{он}}(t) = T_k^{\text{оо}}(t) + T_k^{\text{чн}}(t) = A_k cos\lambda_k t + B_k sin\lambda_k t + C_k t + D_k.$$

Коэффициенты A_k, B_k получим, подставив полученное выражение в начальные условия:

$$\begin{cases} T_k(0) = B_k + D_k, \\ T_k'(0) = C_k - \lambda_k A_k, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_k = \varphi_k - D_k, \\ A_k = \frac{1}{\lambda_k}(C_k - \psi_k). \end{cases}$$

Снова вспомним про нашего надежнейшего товарища по имени Wolfram Mathematica:

```
In[68]:= Ck =
          -((20 (-λ + 26 λ Cos[5 λ] + 5 (-1 + λ^2) Sin[5 λ])) /
             (λ^3 (10 λ (24 + λ^2 + Cos[10 λ]) + (-25 + λ^2) Sin[10 λ])))
         Dk =
          -((40 (-λ + 26 λ Cos[5 λ] + 5 (-1 + λ^2) Sin[5 λ])) /
             (λ^3 (10 λ (24 + λ^2 + Cos[10 λ]) + (-25 + λ^2) Sin[10 λ])))
         Bk = psik - Ck
         Bk // Simplify
```

Out[68]=
$$-\frac{20\,(-\lambda+26\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+5\,(-1+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda^3\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

Out[69]=
$$-\frac{40\,(-\lambda+26\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+5\,(-1+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda^3\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

Out[70]=
$$\frac{25\,(-125\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+(25-24\,\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{6\,\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}+\frac{20\,(-\lambda+26\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+5\,(-1+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda^3\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

Out[71]=
$$-\frac{5\,(24\,\lambda+\lambda\,(-624+625\,\lambda^2)\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+5\,(24-49\,\lambda^2+24\,\lambda^4)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{6\,\lambda^3\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2)+10\,\lambda\,\mathrm{Cos}[10\,\lambda]+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

```
In[72]:= Ak = 1 / λ * (Ck - phik)
         Ak // Simplify
```

Out[72]=
$$\frac{-\frac{20\,(-\lambda+26\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+5\,(-1+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda^3\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}-\frac{5\,(4\,\lambda+21\,\lambda\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+(-5+4\,\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2+\mathrm{Cos}[10\,\lambda])+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}}{\lambda}$$

Out[73]=
$$-\frac{5\,(4\,\lambda\,(-1+\lambda^2)+\lambda\,(104+21\,\lambda^2)\,\mathrm{Cos}[5\,\lambda]+(-20+15\,\lambda^2+4\,\lambda^4)\,\mathrm{Sin}[5\,\lambda])}{\lambda^4\,(10\,\lambda\,(24+\lambda^2)+10\,\lambda\,\mathrm{Cos}[10\,\lambda]+(-25+\lambda^2)\,\mathrm{Sin}[10\,\lambda])}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} A_k = -\frac{5\left(4\lambda_k\left(\lambda_k^2-1\right)+\lambda_k\left(21\lambda_k^2+104\right)\cos(5\lambda_k)+\left(4\lambda_k^4+15\lambda_k^2-20\right)\sin(5\lambda_k)\right)}{\lambda_k^4\left(10\lambda_k\left(\lambda_k^2+24\right)+\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\cos(10\lambda_k)\right)}, \\ B_k = -\frac{5\left(\left(625\lambda_k^2-624\right)\lambda_k\cos(5\lambda_k)+5\left(24\lambda_k^4-49\lambda_k^2+24\right)\sin(5\lambda_k)+24\lambda_k\right)}{6\lambda_k^3\left(10\lambda_k\left(\lambda_k^2+24\right)+\left(\lambda_k^2-25\right)\sin(10\lambda_k)+10\lambda_k\cos(10\lambda_k)\right)}. \end{cases}$$

Таким образом, из-за излишней громоздкости выражения подставим все найденные коэффициенты мысленно, и тогда мы сможем найти решение задачи для v, решение исходной задачи будет иметь вид:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}(\sin\lambda_k x-\frac{\lambda_k}{5}\cos\lambda_k x)(A_k cos\lambda_k t+B_k sin\lambda_k t+C_k t+D_k)+\frac{1}{4}(t-\frac{1}{6})x+\frac{1}{4}(\frac{5}{6}-t).$$

Перейдем к визуализации.

```
In[212]:= omega[x_, t_] := 1/4 * (t - 1/6) * x + 1/4 * (5/6 - t)

In[203]:= root[n_] := NSolve[Tan[5 * λ] == λ/5 && 100 * n < λ ≤ 100 * (n + 1), Reals];
          list = {};
          For[i = 0, i ≤ 3, i++, list = Join[list, Values[root[i]]]]

In[225]:= u[x_, t_] :=
           Sum[(Sin[list[[k]] * x] - list[[k]]/5 * Cos[list[[k]] * x]) *
              (Ak[list[[k]]] Cos[list[[k]] * t] + Bk[list[[k]]] * Sin[list[[k]] * t] + Ck[list[[k]]] * t + Dk[list[[k]]]),
             {k, list // Length}] + omega[x, t]

In[226]:= u[1, 0]

Out[226]= {0.166518}

In[227]:= Manipulate[Plot[Evaluate[u[x, t]], {x, 0, 5}, AxesLabel → {x, "u(x,t)"}], {t, 0, 5, 0.5}]
```

Out[227]=