МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра компьютерных технологий и систем

Отчет по лабораторной работе 2 "Метод разделения переменных при решении смешанных задач с неоднородными граничными условиями для уравнения теплопроводности" Вариант 5

Выполнил:
Карпович Артём Дмитриевич
студент 3 курса 7 группы

Преподаватель:
Козловская Инесса Станиславовна

Минск, 2024

Задача

Найти решение данной смешанной задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = -\frac{x}{(t+1)^2}, \\ u_x(0,t) = \frac{1}{t+1}, \\ u(l,t) = \frac{l}{t+1}, \\ u(x,0) = 2x. \end{cases} \tag{1}$$

Решение задачи будем искать в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где функция $v(x,t)$ удовлетворяет смешанной задаче с однородными граничными условиями, а функция $w(x,t)$ - неоднородным граничным условиям.

Найдем функцию $w(x,t)$ из представления:

$$w(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t).$$

Подставим это представление в граничные условия:

$$w(l,t) = A(t)l^2 + B(t)l + C(t) = \frac{l}{t+1},$$

$$w_x(0,t) = B(t) = \frac{1}{t+1}.$$

Примем $A(t) = 0$, тогда

$$w(l,t) = \frac{l}{t+1} + C(t) = \frac{l}{t+1} \Rightarrow C(t) = 0.$$

Таким образом, получаем представление функции $w(x,t)$:

$$w(x,t) = \frac{1}{t+1}x.$$

И мы имеем, что

$$u(x,t) = \frac{1}{t+1}x + v(x,t).$$

Для нахождения $v(x,t)$ составим задачу с однородными граничными условиями

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = -\frac{x}{(t+1)^2} - w_t + a^2 w_{xx} = 0, \\ \frac{1}{t+1} + v_x(0,t) = \frac{1}{t+1}, \\ \frac{l}{t+1} + v(l,t) = \frac{l}{t+1}, \\ x + v(x,0) = 2x. \end{cases} \tag{2}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, \\ v_x(0,t) = 0, \\ v(l,t) = 0, \\ v(x,0) = x. \end{cases} \tag{3}$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$v(x,t) = T(t)X(x),$$

подставив это представление в уравнение

$$v_t - a^2 v_{xx} = 0,$$

получим:

$$T'(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t),$$

причем

$$T(t) \neq 0, X(x) \neq 0$$

Разделим обе части уравнения на $a^2 X(x)T(t)$:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Поскольку левая часть зависит только от t, а правая - от x, то их можно приравнять к $-\lambda^2$(поскольку собственные значения задачи Штурма-Лиувилля являются положительными действительными числами).

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2. \tag{4}$$

Составим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X(l) = 0, \end{cases}$$

Найдем решение уравнения

$$X(x) = A(t)\cos(\lambda x) + B(t)\sin(\lambda x).$$

Подставим в граничные условия

$$X'(0) = B(t) = 0,$$

$$X(l) = A(t)\cos(\lambda l) = 0 \Rightarrow \cos(\lambda l) = 0.$$

Следовательно, собственные значения задачи Штурма-Лиувилля

$$\lambda_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2l}, k = 0, 1, 2, ...$$

Соответственно, собственные функции имеют вид

$$X_k(x) = \cos(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} x).$$

Вернемся к соотношению (4) и составим уравнения для нахождения $T(t)$

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$T(t) = Ae^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Таким образом, решение задачи (3) примет вид

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)X_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-a^2\left(\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)^2 t}\cos(\frac{\pi+2\pi k}{2l}x)$$

Подставим в начальное условие задачи (3)

$$v(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\frac{\pi+2\pi k}{2l}x) = x$$

Для нахождения A_k разложим функцию x в ряд Фурье по собственным функциями:

$$A_k = \varphi_k = \frac{2}{l}\int_0^l xX_k(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos(\frac{\pi+2\pi k}{2l}x)dx$$

Найдем решение с помощью WolframMathematica:

$$A_k = \frac{(-1)^k 8l - 8l}{(\pi+2\pi k)^2}.$$

Тогда общее решение задачи (3) имеет вид

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 8l - 8l}{(\pi+2\pi k)^2} e^{-\left(a\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)^2 t}\cos(\frac{\pi+2\pi k}{2l}x).$$

Тогда решение задачи (1) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{t+1}x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 8l - 8l}{(\pi+2\pi k)^2} e^{-\left(a\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)^2 t}\cos(\frac{\pi+2\pi k}{2l}x).$$