МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и инворматики
Кафедра вычислительной математики

Отчет по лабораторной работе 1
"Аппроксимация дифференциальных задач разностными операторами"
Вариант 5

Выполнил:
Карпович Артём Дмитриевич
студент 4 курса 7 группы

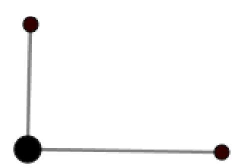
Преподаватель:
Репников Василий Иванович

Минск, 2024

Постановка задач

1. Построить разностную аппроксимацию оператора Lu методом неопределенных коэффициентов, где
$$Lu = u'(x_1);$$

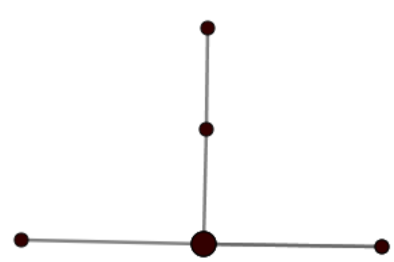
2. Построить разностную аппроксимацию оператора Lu методом неопределенных коэффициентов, где
$$Lu = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2};$$



3. Аппроксимировать дифференциальную задачу разностной схемой на заданном шаблоне. Опеределить погрешность аппроксимации;

4. Повысить порядок аппроксимации разностной схемы на минимальном шаблоне, используя вид дифференциальной задачи.

$$3, 4. \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t)u + f(x,t), 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x,t), 0 \le x \le 1, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \sigma_0 u(0,t) - \mu_0(t), u(1,t) = \mu_1(t), t \ge 0. \end{cases}$$



Задача 1

Постановка задачи. Построить разностную аппроксимацию оператора Lu методом неопределенных коэффициентов, где

$$Lu = u'(x_1);$$

Решение задачи.Рассмотрим равномерную сетку узлов с шагом h. И введем следующие обозначения:

$$x = x_1, \Rightarrow x_0 = x - h, x_2 = x + h, x_3 = x + 2h$$

Тогда наш шаблон примет вид

$$\text{Ш}(x) = \{x - h, x, x + h, x + 2h\}.$$

Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции u в точках шаблона, то есть:

$$L_h u(x) = a_0 u(x - h) + a_1 u(x) + a_2 u(x + h) + a_3 u(x + 2h).$$

Выпишем погрешность нашей аппроксимации:

$$\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x) = a_0 u(x - h) + a_1 u(x) + a_2 u(x + h) + a_3 u(x + 2h) - u'(x).$$

Разложим правую часть этого выражения в ряд Тейлора в окрестности точки x:

$$\psi(x) = a_0(u - hu' + \frac{h^2}{2}u'' - \frac{h^3}{6}u''') + a_1 u + a_2(u + hu' + \frac{h^2}{2}u'' + \frac{h^3}{6}u''') + a_3(u + 2hu' + 2h^2 u'' + \frac{4h^3}{3}u''') + O(h^4) - u' =$$

$$= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)u - h(a_0 - a_2 - 2a - 3 + \frac{1}{h})u' + \frac{h^2}{2}(a_0 + a_2 + 4a_3)u'' + \frac{h^3}{6}(-a_0 + a_2 + 8a_3)u''' + O(h^4).$$

Для того, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной, необходимо, чтобы коэффициенты при производных должны быть равны нулю, таким образом, мы можем сформировать систему для поиска коэффициентов a_k:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ a_0 - a_2 - 2a - 3 + \frac{1}{h} = 0, \\ a_0 + a_2 + 4a_3 = 0, \\ -a_0 + a_2 + 8a_3 = 0. \end{cases}$$

Выразим из третьего уравнения a_0 и выполним подстановку во все уравнения:

$$\begin{cases} a_0 = -4a_3 - a_2, \\ a_1 - 3a_3 = 0, \\ a_2 + 3a_3 = \frac{1}{2h}, \\ a_2 + 6a_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow [\text{Выражаем из последнего } a_2] \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -6a_3, \\ a_0 = 2a_3, \\ a_1 = 3a_3, \\ 3a_3 = -\frac{1}{2h}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -\frac{1}{3h}, \\ a_1 = -\frac{1}{2h}, \\ a_2 = \frac{1}{h}, \\ a_3 = -\frac{1}{6h}. \end{cases}$$

Таким образом, мы нашли коэффициенты, с помощью которых можем построить разностную аппроксимацию оператора $Lu = u'(x)$:

$$L_h u = -\frac{1}{h}(\frac{1}{3}u(x - h) + \frac{1}{2}u(x) - u(x + h) + \frac{1}{6}u(x + 2h)).$$

Задача 2

Постановка задачи.Построить разностную аппроксимацию оператора Lu методом неопределенных коэффициентов, где

$$Lu = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2};$$

Решение задачи. Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции u в точках шаблона, то есть:

$$L_h u(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1, x_2 + h_2) + a_2 u(x_1 + h_1, x_2).$$

Выпишем погрешность нашей аппроксимации:

$$\psi(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1, x_2 + h_2) + a_2 u(x_1 + h_1, x_2) - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}.$$

Разложим правую часть этого выражения в ряд Тейлора, используя формулу разложения функции двух переменных:

$$\psi(x) = a_0 u + a_1 (u + h_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{h_2^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}) + a_2 (u + h_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}) + O(h^3) - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = (a_0 + a_1 + a_2) u +$$

$$+ h_1 a_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + h_2 a_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{h_2^2}{2} a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{h_1^2}{2} (a_2 - \frac{2}{h_1^2}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + O(h^3).$$

Для того, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной, необходимо, чтобы коэффициенты при производных должны быть равны нулю, таким образом, мы можем сформировать систему для поиска коэффициентов a_k:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = \frac{2}{h_1^2}. \end{cases}$$

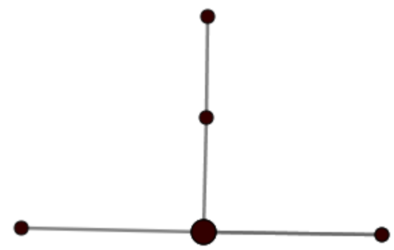
Как можно заметить, мы получили некое противоречие, что можно объяснить тем, что наш шаблон не удовлетворяет нашей задаче, поскольку нам для аппроксимации второй производной необходимо по крайней мере три точки, а на даны лишь две точки, помимо центральной.

Таким образом, можно сделать вид, что для нашего оператора на данном шаблоне построить разностную аппроксимацию невозможно.

Задача 3

Постановка задачи. Аппроксимировать дифференциальную задачу разностной схемой на заданном шаблоне. Опеределить погрешность аппроксимации;

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t)u + f(x,t), 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), 0 \le x \le 1, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \sigma_0 u(0,t) - \mu_0(t), u(1,t) = \mu_1(t), t \ge 0. \end{cases}$$



Решение. Запишем рассматриваемую задачу в безиндексной форме:

$$\begin{cases} y_{tt} = y_{\overline{x}x} + qy + f, x, t \in \omega_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x), \\ y_t(x,0) = u_1(x), \\ y_x(0,t) = \sigma_0 y(0,t) - \mu_0(t), \\ y(1,t) = \mu_1(t), \end{cases}$$

где $\omega_{h\tau}$– сетка рассматриваемых узлов.

Построим разностную аппроксимацию для оператора $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ с помощью метода неопределенных коэффициентов аналогично тому, как делали это во втором задании. Для этого воспользуемся представлением в виде линейной комбинации значений функции u в точках шаблона:

$$L_h u(x,t) = a_0 u(x,t) + a_1 u(x, t+\tau) + a_2 u(x, t+2\tau)$$

Выпишем погрешность аппроксимации:

$$\psi(x,t) = L_h u - Lu = a_0 u(x,t) + a_1 u(x,t+\tau) + a_2 u(x,t+2\tau) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Разложим данное выражение в ряд Тейлора, сразу приводя подобные:

$$\psi(x,t) = (a_0 + a_1 + a_2)u + \tau(a_1 + 2a_2)\frac{\partial u}{\partial t} + \tau^2(\frac{a_1}{2} + 2a_2 - \frac{1}{\tau^2})\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + O(\tau^3).$$

Аналогично первым двум заданиям, строим систему для зануления коэффициентов:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + 2a_2 = 0, \\ \frac{a_1}{2} + 2a_2 - \frac{1}{\tau^2} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\tau^2}, \\ a_1 = -\frac{2}{\tau^2}, \\ a_2 = \frac{1}{\tau^2}. \end{cases}$$

Таким образом, вторая разностная производная принимает вид:

$$L_h u(x,t) = \frac{u(x,t) - 2u(x,t+\tau) + u(x,t+2\tau)}{\tau^2}.$$

Используя получившееся выражение, запишем нашу задачу в индексной форме:

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+2} - 2y_i^{j+1} + y_i^j}{\tau^2} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} + q(x_i, t_j)y_i^j + f(x_i, t_j), i = \overline{1, N-1}, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \\ \frac{y_{i+1}^1 - y_{i+1}^0}{h} = u_1(x), \\ \frac{y_1^{j+1} - y_0^{j+1}}{h} = \sigma_0 y_0^j - \mu_0(t_j), \\ y_1^{j+1} = \mu_1(t_j) \end{cases}$$

Таким образом, мы получили разностную схему данной задачи. Перейдем к определению погрешности аппроксимации.

$$\psi(x,t) = \frac{u(x,t) - 2u(x,t+\tau) + u(x,t+2\tau)}{\tau^2} - u_{\bar{x}x} - q(x,t)u - f(x,t).$$

Разложим в ряд Тейлора почленно:

$$\frac{u(x,t) - 2u(x,t+\tau) + u(x,t+2\tau)}{\tau^2} = \frac{1}{\tau^2}(u - 2(u + \tau\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}) + u + 2\tau\frac{\partial u}{\partial t} + 2\tau^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\tau^3}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} +$$

$$+ O(\tau^4)) = \frac{1}{\tau^2}(\tau^3\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(\tau^4)) = O(\tau).$$

$$u_{\bar{x}x} = [\text{выводили на паре}] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{h^4}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O(h^7) = O(h^2).$$

Подставляем:

$$\psi(x,t) = O(\tau) + O(h^2) = O(\tau + h^2).$$

Таким образом, получаем, что аппроксимации для t имеет первый порядок, для $x-$ 2й порядок. Найдем погрешность аппроксимации для граничных условий:

$$\begin{cases} \nu(0,t) = u_x(0,t) - \sigma_0 u(0,t) + \mu_0(t) = u_x(0,t) + \frac{h}{2}u_{xx}(0,t) + O(h^2) - \sigma_0 u(0,t) + \mu_0(t) = O(h), \\ \nu(1,t) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, правое граничное условие аппроксимируется с первым порядком по x, второе аппроксимируется точно.

Рассмотрим теперь начальные условия. Первое начальное условие аппроксимируется точно, поэтому рассмотрим второе:

$$\nu(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} - u_1(x) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} + O(\tau^2) - u_1(x) = O(\tau^2).$$

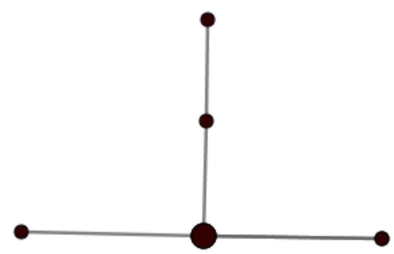
Таким образщом, второе начальное условие имеет первый порядок аппроксимации по t.

Итак, получаем, что построенная разностаня схема имеет первый порядок аппроксимации как по x, так и по t.

Задача 4

Постановка задачи.Повысить порядок аппроксимации разностной схемы на минимальном шаблоне, используя вид дифференциальной задачи.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t)u + f(x,t), 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), 0 \le x \le 1, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \sigma_0 u(0,t) - \mu_0(t), u(1,t) = \mu_1(t), t \ge 0. \end{cases}$$



Решение задачи. Из предыдущего задани мы выяснили, что наша задача аппроксимируется разностной схемой с погрешностью $O(h+\tau^2)$ для самого уравнения и $O(\tau)$, $O(h)$ для начального и краевого условий соответственно. Нам необходимо за счет повышение порядка аппроксимации начального и краевого условий повысить порядок аппроксимации разностной схемы с $O(h+\tau)$ до $O(h^2+\tau^2)$.

Для повышения порядка аппроксимации по времени, поднимем порядок аппроксимации второго начального условия, не расширяя шаблона, для этого будем искать новое разностное условие в следующем виде:

$$u_t(x,0) = \overline{u_1(x)},$$

Опеределим погрешность аппроксимации начального условия:

$$\nu(x,0) = u_t(x,0) - \overline{u_1(x)} = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} + O(\tau^2) - \overline{u_1(x)} = u_1(x) + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} + O(\tau^2) - \overline{u_1(x)}.$$

Таким образом, в качестве $\overline{u_0(x)}$ можно взять, например,

$$\overline{u_1(x)} = u_1(x) + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2}.$$

Для повышения порядка аппроксимации по x, поднимем порядок аппроксимации первого граничного условия, не расширяя шаблона, для этого будем искать новое разностное условие в следующем виде:

$$u_x(0,t) = \overline{\sigma_0}u(0,t) - \overline{\mu_0(t)}.$$

Определим погрешность аппроксимации:

$$\nu(0,t) = u_x(0,t) - \overline{\sigma_0}u(0,t) + \overline{\mu_0(t)} = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + O(h^2) - \overline{\sigma_0}u(0,t) + \overline{\mu_0(t)} =$$

$$= \sigma_0 u(0,t) - \mu_0(t) + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + O(h^2) - \overline{\sigma_0}u(0,t) + \overline{\mu_0(t)}.$$

Таким образом, в качестве $\overline{\sigma_0}u(0,t)-\overline{\mu_0(t)}$ можно взять, например

$$\overline{\sigma_0}u(0,t)-\overline{\mu_0(t)}=\sigma_0 u(0,t)-\mu_0(t)+\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}.$$

Выразим из уравнения исходной задачи

$$\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2}-q(x,0)u(x,0)-f(x,0)=\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2}-q(x,0)u_0(x)-f(x,0)=-q(x,0)u_0(x)-f(x,0).$$

Тогда получим:

$$\overline{\sigma_0}u(0,t)-\overline{\mu_0(t)}=\sigma_0 u(0,t)-\mu_0(t)+\frac{h}{2}(\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2}-q(x,0)u_0(x)-f(x,0)).$$

Таким образом, разностная схема второго порядка по x и второго порядка по времени в индексной форме будет иметь вид:

$$\begin{cases}\frac{y_i^{j+2}-2y_i^{j+1}+y_i^j}{\tau^2}=\frac{y_{i+1}^j-2y_i^j+y_{i-1}^j}{h^2}+q(x_i,t_j)y_i^j+f(x_i,t_j), i=\overline{1,N-1},\\ y_i^0=u_0(x_i),\\ \frac{y_{i+1}^1-y_{i+1}^0}{h}=u_1(x)+\frac{y_i^2-2y_i^1+y_i^0}{2\tau},\\ \frac{y_1^{j+1}-y_0^{j+1}}{h}=\sigma_0 y_0^j-\mu_0(t_j)+\frac{h}{2}(\frac{y_0^{j+2}-2y_0^{j+1}+y_0^j}{\tau^2}-q(x_i,0)u_0(x_i)-f(x_i,0)),\\ y_1^{j+1}=\mu_1(t_j)\end{cases}$$