МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра компьютерных технологий и систем

Отчет по лабораторной работе 1
"Решение задач Коши и Гурса для уравнений в частных производных второго порядка при помощи Wolfram Mathematica"
Вариант 5

Выполнил:
Карпович Артём Дмитриевич
студент 3 курса 7 группы

Преподаватель:
Козловская Инесса Станиславовна

Минск, 2024

Задача

- Найти решение данной задачи Коши:

$$\begin{cases} u_{xy} - yu_x = 0, \\ u|_{x=e^y} = e^y, \\ u_x|_{x=e^y} = 1; \end{cases}$$

- Проверить полученное решение путём подстановки в уравнение и условия задачи;
- Построить график поверхности $z = u(x, y)$, где u – решение задачи.

Запишем задачу в $WolframMathematica$:

```
In[1]:= eq = Derivative[1, 1][u][x, y] == y*Derivative[1, 0][u][x, y];
        ic = {u[E^y, y] == E^y, Derivative[1, 0][u][E^y, y] == 1};
```

Можно заметить, что мы работает с каноническим видом уравнения гиперболического типа. Соответственно, можно сразу приступить к отысканию его общего решения. Введем замену

$$u_x = v,$$

подставив которую в исходное уравнение, получим уравнение вида

$$v_y = yv \Rightarrow v_u - yv = 0.$$

Получили обыкновенное линейное дифференциальное уравнение, решение которого найдем с помощью функции WolframMathematica DSolve.

Получаем

```
In[3]:= vsol = DSolve[Derivative[0, 1][v][x, y] == y*v[x, y], v, {x, y}]
```

$$\text{Out[3]= } \left\{\left\{v \to \text{Function}\left[\{x, y\}, e^{\frac{y^2}{2}} C[1][x]\right]\right\}\right\}$$

Итак, мы получили представление функции $v(x, y)$

$$v(x, y) = e^{y^2/2} \cdot C_1(x)$$

Сделаем обратную замену

$$u_x = e^{y^2/2} \cdot C_1(x).$$

И вновь мы получаем простейшее дифференциальное уравнение. Проинтегрируем обе части этого уравнения по x и получим

```
In[35]:= usol = u -> Function[{x, y}, C[2][y] + C[1][x]*E^(y^2/2)]
```

$$\text{Out[35]= } u \to \text{Function}\left[\{x, y\}, C[2][y] + C[1][x]\, e^{\frac{y^2}{2}}\right]$$

Получили вид общего решения

$$u(x,y) = e^{y^2/2} \cdot \tilde{C}_1(x) + C_2(y)$$

Поскольку нам необходимо найти частное решение, выполнив подстановку полученного общего решения в начальные условия

```
In[6]:= newic = ic /. usol
```

$$\text{Out[6]=}\ \left\{e^{\frac{y^2}{2}}\, C[1][e^y] + C[2][y] == e^y,\ e^{\frac{y^2}{2}}\, C[1]'[e^y] == 1\right\}$$

Получаем систему уравнений относительно функций $\tilde{C}_1(x), C_2(y)$ вида

$$\begin{cases} e^{y^2/2} \cdot \tilde{C}_1(e^y) + C_2(y) = e^y, \\ e^{y^2/2} \cdot \tilde{C}_1{}'(e^y) = 1 \end{cases}$$

Для нахождения наших функций начнем с нахождения функции $\tilde{C}_1(x)$.

Рассмотрим второе уравнение

$$e^{y^2/2} \cdot \tilde{C}_1{}'(e^y) = 1.$$

Сделаем замену переменной y таким образом, чтобы аргумент функции C_1 равнялся этой замене, то есть в нашем случае $y = \ln(t)$

```
In[36]:= c1eq = newic[[2]] /. Solve[y == Log[t], y]
```

$$\text{Out[36]=}\ \left\{e^{\frac{\text{Log}[t]^2}{2}}\, C[1]'[t] == 1\right\}$$

Поскольку мы снова имеем обыкновенное дифференциальное уравнение, воспользуемся функцией DSolve для его решения

```
In[37]:= c1sol = DSolve[c1eq, C[1], t, GeneratedParameters -> k]
```

$$\text{Out[37]=}\ \left\{\left\{C[1] \to \text{Function}\left[\{t\}, \sqrt{\frac{e\,\pi}{2}}\ \text{Erf}\left[\frac{-1 + \text{Log}[t]}{\sqrt{2}}\right] + k[1]\right]\right\}\right\}$$

Вернемся к нашей системе, а именно к первому уравнению, и получем представление функции $C_2(y)$ с помощью функции $C_1(e^y)$, для этого воспользуемся функцией RSolve

```
In[38]:= c2sol = RSolve[newic[[1]], C[2], y]
```

$$\text{Out[38]=}\ \left\{\left\{C[2] \to \text{Function}\left[\{y\}, e^y - e^{\frac{y^2}{2}}\, C[1][e^y]\right]\right\}\right\}$$

Найдем нашу функцию $u(x,y)$, подставив полученные C_1, C_2 в представление функции $u(x,y)$

In[39]:= `u[x, y] /. usol /. c2sol[[1]] /. c1sol[[1]]`

Out[39]= $e^{y}-e^{\frac{y^2}{2}}\left(\sqrt{\frac{e\,\pi}{2}}\ \text{Erf}\left[\frac{-1+\text{Log}[e^{y}]}{\sqrt{2}}\right]+k[1]\right)+e^{\frac{y^2}{2}}\left(\sqrt{\frac{e\,\pi}{2}}\ \text{Erf}\left[\frac{-1+\text{Log}[x]}{\sqrt{2}}\right]+k[1]\right)$

Упростим полученное выражение для того, чтобы избавиться от введенной ранее постоянной

In[40]:= `% // Simplify`

Out[40]= $e^{y}-e^{\frac{1}{2}\left(1+y^2\right)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \text{Erf}\left[\frac{-1+\text{Log}[e^{y}]}{\sqrt{2}}\right]+e^{\frac{1}{2}\left(1+y^2\right)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \text{Erf}\left[\frac{-1+\text{Log}[x]}{\sqrt{2}}\right]$

Полученное решение имеет вид

$$u(x,y)=e^{y}+e^{\frac{1}{2}(1+y^2)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{-1+y}{\sqrt{2}}}e^{-t^2}dt-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{-1+\ln x}{\sqrt{2}}}e^{-t^2}dt\Big)$$

Выполним проверку полученного решения, выполнив подстановку в условия задачи Коши

In[41]:= $\text{Simplify}\left[\{\text{eq},\ \text{ic}\}\ /.\ u\to\text{Activate}\left[\text{Function}\left[\{x,\ y\},\ e^{y}-e^{\frac{y^2}{2}}\int_0^{E^{\wedge}y}e^{-\frac{(\text{Log}[t])^2}{2}}\,dt+e^{\frac{y^2}{2}}\int_0^{x}e^{-\frac{(\text{Log}[t])^2}{2}}\,dt\right]\right],\right.$

$\left.\quad y\in\text{Reals}\right]$

Out[41]= `{True, {True, True}}`

Можем заметить, что полученное решение действительно удовлетворяет нашей задаче Коши.

Построим график функции $z=u(x,y)$ с помощью функции $Plot3D$

In[19]:= $\text{Plot3D}\left[\left(e^{y}-e^{\frac{1}{2}\left(1+y^2\right)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \text{Erf}\left[\frac{-1+\text{Log}[e^{y}]}{\sqrt{2}}\right]+e^{\frac{1}{2}\left(1+y^2\right)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \text{Erf}\left[\frac{-1+\text{Log}[x]}{\sqrt{2}}\right]\right),\ \{x,\ 0,\ 30\},\ \{y,\ -20,\ 20\}\right]$

Out[19]=