МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и инворматики
Кафедра вычислительной математики

Отчет по лабораторной работе 2
"Приближение функций"
Вариант 5

Выполнил:
Карпович Артём Дмитриевич
студент 3 курса 7 группы

Преподаватель:
Репников Василий Иванович

Минск, 2024

Наилучшее среднеквадратичное приближение функции

Проблема наилучшего среднеквадратичного приближения формулируется следующим образом. Пусть задана функция
$$f(x) = x \ln(x+2)$$
на отрезке $[a, b]$. Тогда необходимо

- Имея некоторую функцию $f(x)$, которую трудно вычислить, мы будем заменять ее другой функцией $\varphi(x, a)$, где a — векторный параметр, которую легко вычислить;
- Имея значения функции $f(x_i)$ в одних точках, найти значения функции в других точках.

[1]:
```
import math
import numpy as np
import scipy.integrate as integrate
import scipy.special as special
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import pandas as pd

pd.options.display.float_format ='{:,.7f}'.format
```

[2]:
```
def f(x):
    return x * np.log(x + 2)
```

Задачи приближения функции можно классифицировать на линейные и нелинейные. Задача считается линейной, если множество, из которого мы берем функцию $\varphi(x)$ является линейным. Соответственно при решении задачи мы будем также разделять способы построения приближения на линейные и нелинейные.

Сперва рассмотрим алгоритм построения линейного наилучшего среднеквадратичного приближения. Поскольку в данном случае мы строим среднеквадратичное приближение в линейном пространстве, то в качестве такого пространства будем рассматривать гильбертово пространство H, так как из теории функционального анализа известно, что существует единственный элемент наилучшего приближения в таком пространстве.

Пусть подпространство Φ порождено элементами $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Обозначим Φ_0 — элемент наилучшего приближения к f в Φ. Поскольку $\Phi_0 \in \Phi$, то он представим в виде линейной комбинации
$$\Phi_0 = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i.$$
Задача отыскания Φ_0 равносильна отысканию коэффициентов $c_0, \ldots, c_n$ таких, чтобы выполнялось равенство
$$(f - \Phi_0, \varphi) = 0 \ \forall \varphi \in \Phi.$$
Последнее равенство равносильно системе условий вида
$$(f - \Phi_0, \varphi_j) = 0, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Эти равенства представляют собой систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} c_0(\varphi_0,\varphi_0)+\ldots+c_n(\varphi_n,\varphi_n)=(f,\varphi_0), \\ \vdots \\ c_0(\varphi_0,\varphi_n)+\ldots+c_n(\varphi_n,\varphi_n)=(f,\varphi_n) \end{cases}$$

Таким образом, для построения элемента наилучшего приближения в гильбертовом пространстве необходимо сделать два пункта 1. выбрать систему базисных элементов $\varphi_0,\ldots,\varphi_n$ подпространства Φ; 2. составить и решить систему указанную выше.

Пусть $H = L_2(p)[a,b]$ — пространство вещественнозначных функций интегрируемых с квадратом на отрезке $[a,b]$ по весу $p(x)$. Норма в этом пространстве задается как

$$||f|| = (f,f)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int\limits_a^b p(x)f^2(x)dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Скалярное произведение как

$$(f,g) = \int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)dx.$$

При этом вес $p(x)$ удовлетворяет условиям: 1. $p(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$; 2. $p(x)$ обращается в ноль не более чем на множестве меры нуль.

Наилучшее полиномиальное среднеквадратичное приближение для непрерывно заданной функции

Теоретические выкладки

В качестве системы базисных функций возьмем функции $1,x,\ldots,x^n$, или $\varphi_i = x^i$, $i=\overline{0,n}$. Обобщенный многочлен в этом случае превращается в алгебраический многочлен вида

$$\varphi = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i, \quad c_i\in\mathbb{R}$$

Согласно общей теории существует единственный элемент $\varphi^* = P_n^*(x)$, который дает наилучшее приближение данной функции f в пространстве H. Для того, чтобы задать P_n^* нужно решить систему с выбранными базисными функциями φ_i, которая в данном случае примет следующий вид

$$\begin{cases} c_0s_0+c_1s_1+\ldots+c_ns_n=m_0, \\ c_0s_1+c_1s_2+\ldots+c_ns_{n+1}=m_1, \\ \vdots \\ c_0s_n+c_1s_{n+1}+\ldots+c_ns_{2n}=m_n. \end{cases}$$

$$s_i = \int\limits_a^b p(x)x^i dx, \quad m_j = \int\limits_a^b p(x)f(x)x^j dx, \quad i=\overline{0,2n}, j=\overline{0,n}.$$

Построение приближения многочленом первой степени

Попробуем построить приближение функции $f(x) = x\ln(x+2)$ заданной на отрезке $[a, b] = [0, 1]$ с помощью линейной функции

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x.$$

Возьмем вес $p(x) = 1$. Для построения приближающей функции нам необходимо решить систему

$$\begin{cases} c_0 s_0 + c_1 s_1 = \int\limits_0^1 x\ln(x+2)dx, \\ c_0 s_1 + c_1 s_2 = \int\limits_0^1 x^2\ln(x+2)dx; \end{cases}$$

где

$$s_i = \int\limits_a^b x^i dx = \frac{x^{i+1}}{i+1}\Big|_a^b = \frac{b^{i+1}}{i+1} - \frac{a^{i+1}}{i+1} = \frac{1}{i+1}$$

Предварительно построим алгоритм, который будет составлять матрицу

$$G(n, a, b) = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы можем компьютерно сразу вычислять значение матрицы G, избегая подсчета достаточно простых интегралов.

[3]:
```python
n = 2
a, b = 0, 1

def G(n, a, b):
    g = np.zeros((n, n))

    for i in range(n):
        for j in range(n):
            g[i, j] = b**(i + j + 1) / (i + j + 1) - a**(i + j + 1) / (i + j + 1)

    return g

print(G(n, a, b))
```

```
[[1.         0.5       ]
 [0.5        0.33333333]]
```

Вычислим значения каждого из интегралов в правой части

$$\int\limits_0^1 x\ln(x+2)dx = \frac{(x+2)\left(2\left(x-2\right)\ln\left(x+2\right) - x + 6\right)}{4}\Big|_0^1,$$

$$\int_0^1 x^2 \ln(x+2)dx = \frac{(3x^3+24)\ln(x+2) - x^3 + 3x^2 - 12x}{9}\Big|_0^1$$

Найдем значения наших интегралов.

[4]:
```
def M():
    global a, b, n

    m = np.zeros(n)

    for i in range(n):
        m[i] = integrate.quad(lambda x: x**(i + 1) * np.log(x + 2), a, b)[0]

    m = np.reshape(m, (n, 1))

    return m

m = M()

print(m)
```

```
[[0.48837593]
 [0.33633327]]
```

Получили систему вида

$$\begin{cases} 1c_0 + 0.5c_1 = 0.48837593, \\ 0.5c_0 + 0.3333333c_1 = 0.33633327. \end{cases}$$

Решив которую, мы получим коэффициенты нашего многочлена, для этого воспользуемся схемой единственного деления, рассмотренную в курсе ВМА прошлого семестра.

[5]:
```
import system_solution

coef = system_solution.single_division_scheme(G(n, a, b), m, n)

print(coef)
```

```
[[-0.06449593]
 [ 1.10574371]]
```

Итого, получили, что $c_0 = -0.06449593, c_1 = 1.10574371$, и наш многочлен имеет вид

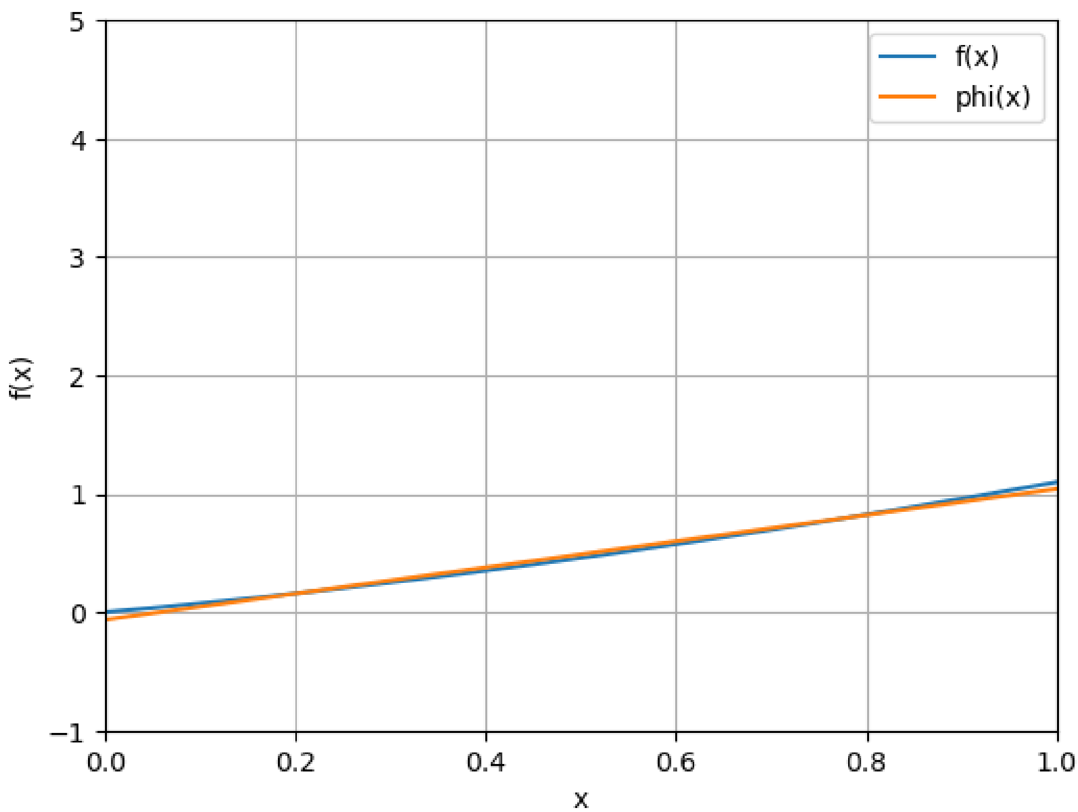
$$\varphi(x) = -0.06449593 + 1.10574371x$$

[6]:
```
def phi(x):
    global coef, n

    return sum(coef[i] * x**i for i in range(n))
```

Посмотрим на поведение построенной функции и нашей функции на отрезке $[0, 1]$.

[7]:

```
x = np.linspace(0, 1, 10000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f(x), label='f(x)')
ax.plot(x, phi(x), label='phi(x)')
ax.set_xlim(0, 1)
ax.set_ylim(-1, 5)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

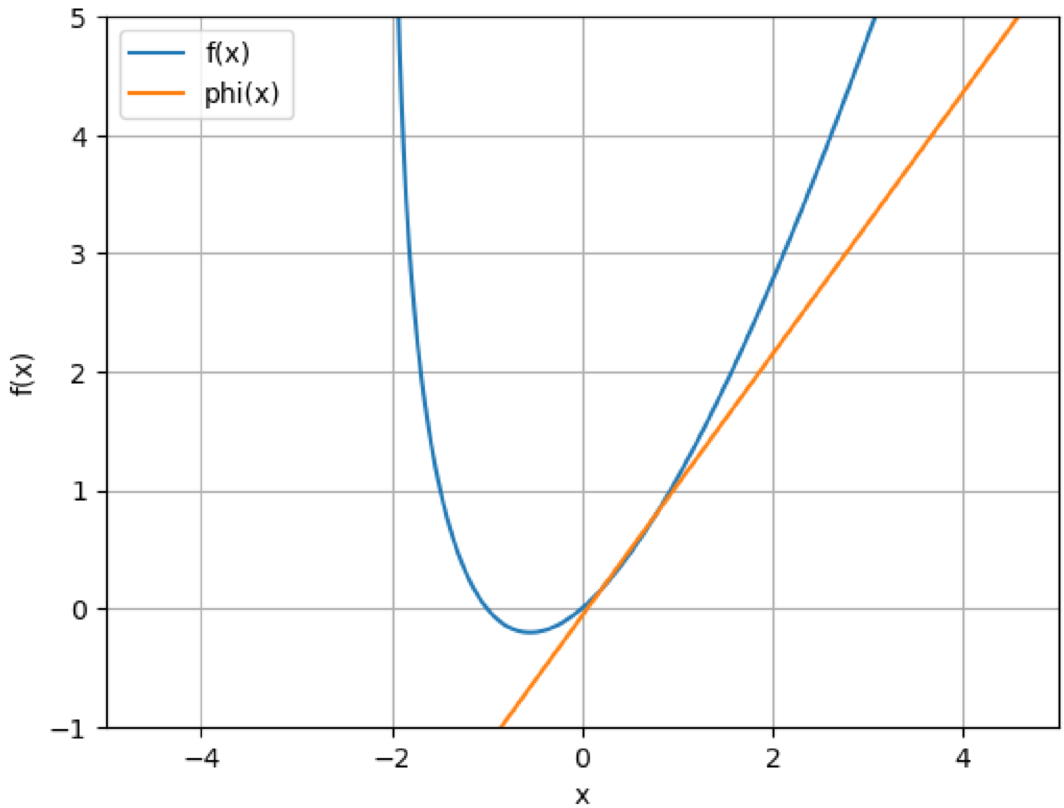


Для более четкой картины рассмотрим поведение функция на отрезке $[-5, 5]$.

[8]:

```
x = np.linspace(-5, 5, 10000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f(x), label='f(x)')
ax.plot(x, phi(x), label='phi(x)')
ax.set_xlim(-5, 5)
```

```
ax.set_ylim(-1, 5)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



Можно сделать вывод о том, что на рассматриваемом отрезке мы получили достаточно близкую функцию, однако на более широком отрезке видно, что простой прямой нам недостаточно.

Рассчитаем среднеквадратичное отклонение функции от ее приближения:

$$||f(x) - \varphi(x)||^2 = \int\limits_0^1 (x\ln(x+2) + 0.06449593 - 1.10574371x)^2 \, dx.$$

Вычисление этого интеграла реализуем компьютерными методами интегрирования, так как аналитическое интегрирование будет достаточно объемным. В качестве результата функция возвращает значение интеграла и погрешность его вычисления.

Для этого определим подинтегральную функцию для более удобной работы с функцией.

[9]:
```python
def func(x):
    return (f(x) - phi(x))**2
```

[10]:
```python
integrate.quad(func, a, b)
```

[10]: (0.0007377439531837763, 8.19060323102612e-18)

Таким образом,

$$||f(x) - \varphi(x)||^2 = 0.0007377439531837763.$$

В целом, на нашем отрезке, как и ожидалось, получился неплохой показатель, однако вспомним поведение функций на отрезке $[-5, 5]$ и сделаем вывод о том, что нам нужна более сложная функция, поэтому перейдём к построению многочлена второй степени.

Построение приближения многочленом второй степени

Попробуем построить приближение функции $f(x) = x \cos x$ заданной на отрезке $[a, b] = [0, 2]$ с помощью квадратичной функции

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2.$$

Возьмем вес $p(x) = 1$. Для построения приближающей функции нам необходимо решить систему

$$\begin{cases} c_0 s_0 + c_1 s_1 + c_2 s_2 = \int\limits_0^1 x \ln(x+2) dx, \\ c_0 s_1 + c_1 s_2 + c_2 s_3 = \int\limits_0^1 x^2 \ln(x+2) dx, \\ c_0 s_2 + c_1 s_3 + c_2 s_4 = \int\limits_0^1 x^3 \ln(x+2) dx; \end{cases}$$

где

$$s_i = \int\limits_a^b x^i dx = \frac{x^{i+1}}{i+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{i+1}.$$

[11]:
```python
n = 3

print(G(n, a, b))
```

```
[[1.         0.5        0.33333333]
 [0.5        0.33333333 0.25      ]
 [0.33333333 0.25       0.2       ]]
```

Вычислим значения каждого из интегралов в правой части

$$\int\limits_0^1 x \ln(x+2) dx = \frac{(x+2)\,(2\,(x-2)\ln(x+2) - x + 6)}{4}\Big|_0^1 = -\frac{3\ln(3)}{2} + 2\ln(2) + \frac{3}{4},$$

$$\int\limits_0^1 x^2 \ln(x+2) dx = \frac{(3x^3+24)\ln(x+2) - x^3 + 3x^2 - 12x}{9}\Big|_0^1 = 3\ln(3) - \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{10}{9},$$

$$\int_0^1 x^3\ln(x+2)dx = \frac{x^4\ln(x+2)}{4} - \frac{16\ln(x+2)+\frac{3x^4-8x^3+24x^2-96x}{12}}{4}\Big|_0^1 = -\frac{15\ln(3)}{4}+4\ln(2)+\frac{77}{48}.$$

Найдем значения наших интегралов.

[12]:
```
m = M()

print(m)
```

```
[[0.48837593]
 [0.33633327]
 [0.25695931]]
```

Получили систему вида

$$\begin{cases} c_0+0.5c_1+0.3333333c_2 = 0.48837593, \\ 0.5c_0+0.3333333c_1+0.25c_2 = 0.33633327, \\ 0.3333333c_0+0.25c_1+0.2c_2 = 0.25695931. \end{cases}$$

Решив которую, мы получим коэффициенты нашего многочлена, для этого воспользуемся схемой единственного деления, рассмотренную в курсе ВМА прошлого семестра.

[13]:
```
coef = abs(system_solution.single_division_scheme(G(n, a, b), m, n))

print(coef)
```

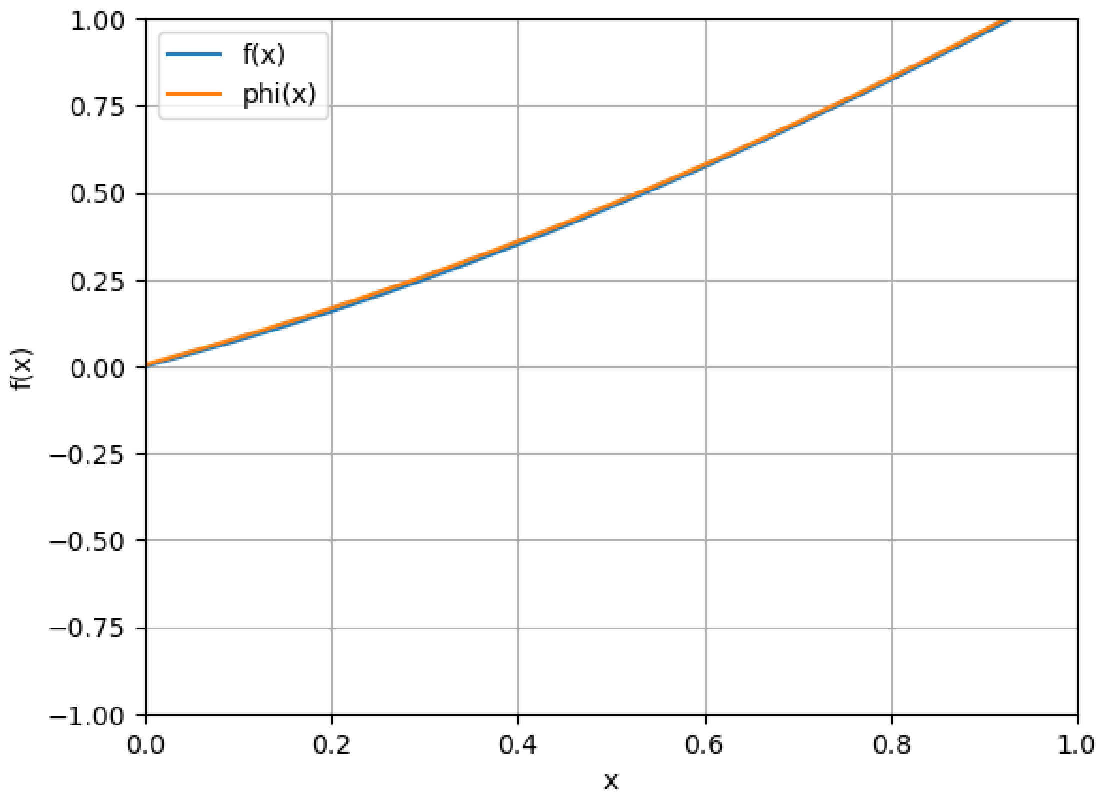
```
[[0.0038353 ]
 [0.74177993]
 [0.36396378]]
```

Итого, получили, что $c_0 = 0.0038353, c_1 = 0.74177993, c_2 = 0.36396378$, и наш многочлен имеет вид

$$\varphi(x) = 0.0038353 + 0.74177993x + 0.36396378x^2$$

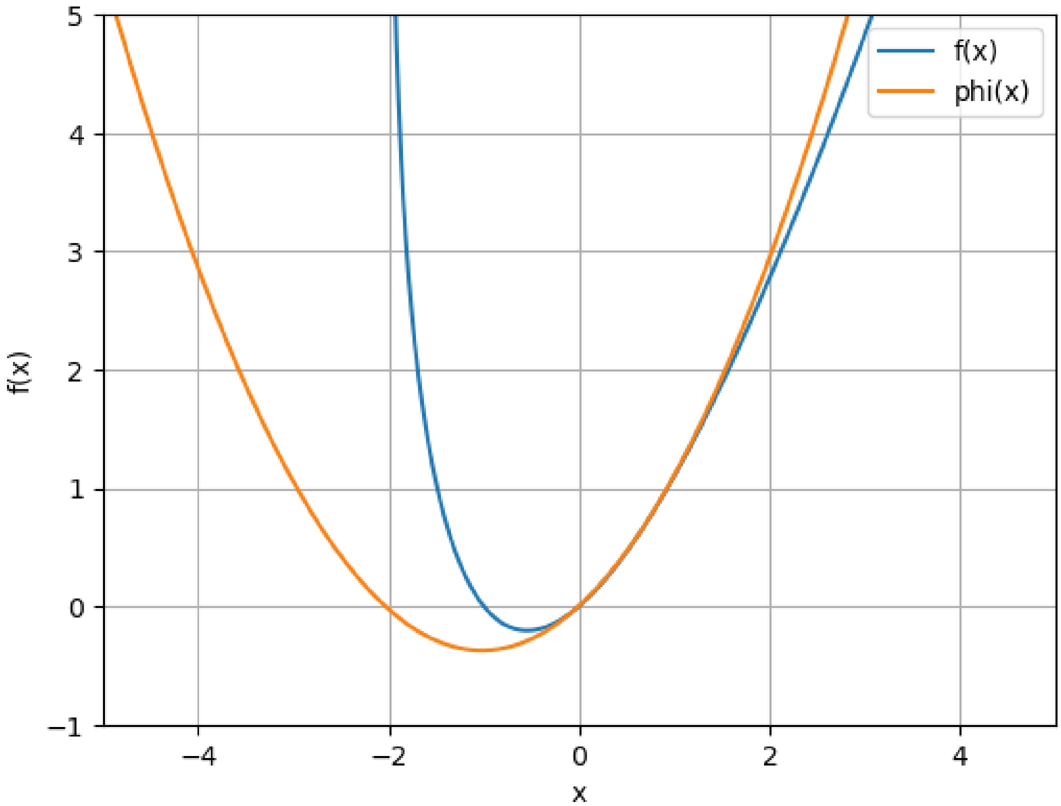
Посмотрим на поведение построенной функции и нашей функции на отрезке $[0, 1]$.

[14]:
```
x = np.linspace(0, 1, 10000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f(x), label='f(x)')
ax.plot(x, phi(x), label='phi(x)')
ax.set_xlim(0, 1)
ax.set_ylim(-1, 1)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



Опять-таки на нашем отрезке поведение функций похожи, рассмотрим поведение на более широком отрезке $[-5, 5]$.

[15]:
```
x = np.linspace(-5, 5, 10000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f(x), label='f(x)')
ax.plot(x, phi(x), label='phi(x)')
ax.set_xlim(-5, 5)
ax.set_ylim(-1, 5)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



В этот раз функция уже лучше себя ведет, но все еще не удовлетворительно.

Рассчитаем среднеквадратичное отклонение функции от ее приближения:

$$||f(x) - \varphi(x)||^2 = \int\limits_0^1 (x\ln(x+2) - 0.0038353 - 0.74177993x - 0.36396378x^2)^2 \; dx.$$

Вычисление этого интеграла реализуем компьютерными методами интегрирования, так как аналитическое интегрирование будет достаточно объемным. В качестве результата функция возвращает значение интеграла и погрешность его вычисления.

[16]:
```
integrate.quad(func, a, b)
```

[16]: (6.06395536080281e-05, 6.732342861862428e-19)

Таким образом,

$$||f(x) - \varphi(x)||^2 = 6.06395536080281 * 10^{-5}.$$

Отклонение стало еще меньше, но, на более широком отрезке расхождение достаточно сильное. Можно посмотреть на отклонение на отрезке $[-2, 2]$ для проверки этого факта.

[17]:
```
integrate.quad(func, -2, 2)
```

[17]: (7.705090586298117, 7.493224973842416e-08)

Получили отклонение равное 7.705090586298117, поэтому продолжаем увеличивать степень многочлена.

Построение приближения многочленом третьей степени

Попробуем построить приближение функции $f(x) = x\cos x$ заданной на отрезке $[a, b] = [0, 2]$ с помощью квадратичной функции

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3.$$

Возьмем вес $p(x) = 1$. Для построения приближающей функции нам необходимо решить систему

$$\begin{cases} c_0 s_0 + c_1 s_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 = \int\limits_0^1 x\ln(x+2)dx, \\ c_0 s_1 + c_1 s_2 + c_2 s_3 + c_3 s_4 = \int\limits_0^1 x^2\ln(x+2)dx, \\ c_0 s_2 + c_1 s_3 + c_2 s_4 + c_3 s_5 = \int\limits_0^1 x^3\ln(x+2)dx, \\ c_0 s_3 + c_1 s_4 + c_2 s_5 + c_3 s_6 = \int\limits_0^1 x^4\ln(x+2)dx \end{cases}$$

где

$$s_i = \int\limits_a^b x^i dx = \frac{x^{i+1}}{i+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{i+1}$$

Проведем те же операции, что выполнили в прошлых пунктах.

[18]:
```
n = 4

print(G(n, a, b))
```

```
[[1.         0.5        0.33333333 0.25      ]
 [0.5        0.33333333 0.25       0.2       ]
 [0.33333333 0.25       0.2        0.16666667]
 [0.25       0.2        0.16666667 0.14285714]]
```

[19]:
```
m = M()

print(m)
```

```
[[0.48837593]
 [0.33633327]
 [0.25695931]
 [0.20803248]]
```

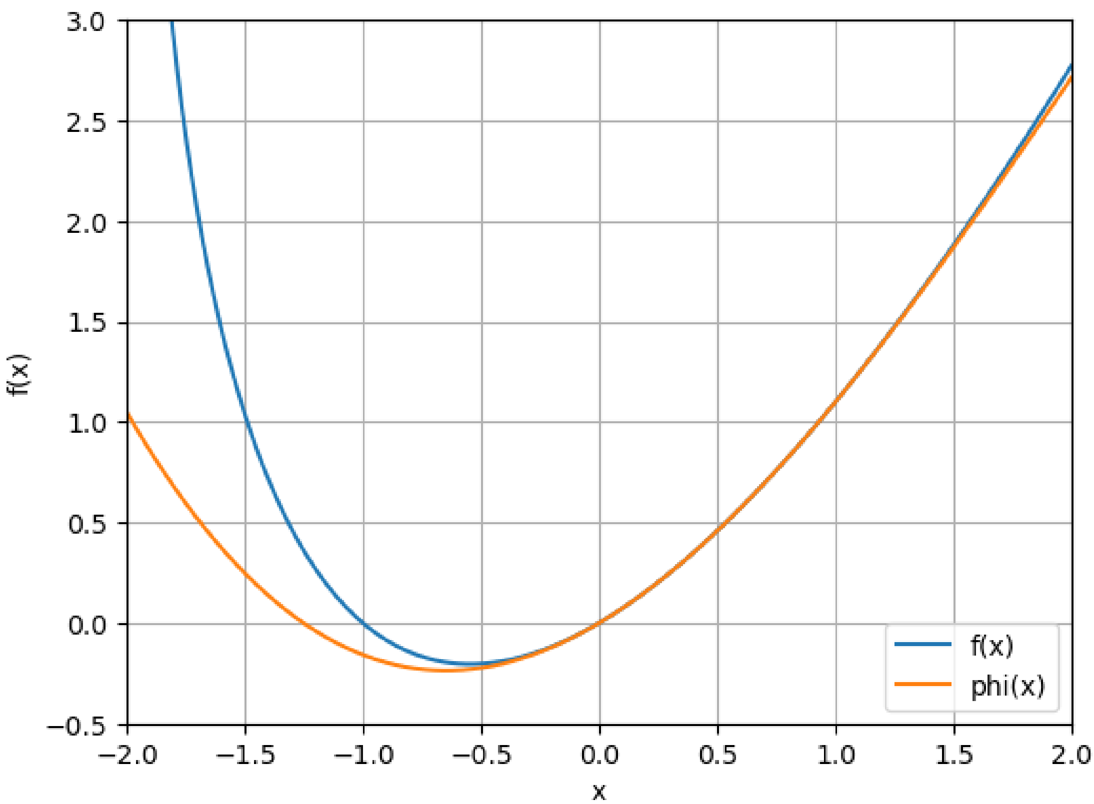
Получили коэффициенты для системы, решив которую, получим коэффициенты для нашего многочлена.

[20]:
```
coef = system_solution.single_division_scheme(G(n, a, b), m, n)

print(coef)
```

```
[[-2.92036160e-04]
 [ 6.99260795e-01]
 [ 4.70261618e-01]
 [-7.08652230e-02]]
```

Сразу, опираясь на предыдущий опыт, перейдем к рассмотрению отрезка $[-2, 2]$.

[21]:
```
x = np.linspace(-2, 2, 10000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f(x), label='f(x)')
ax.plot(x, phi(x), label='phi(x)')
ax.set_xlim(-2, 2)
ax.set_ylim(-0.5, 3)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



И снова можем наблюдать улучшения, однако достаточно хорошего совпадения всё еще нет. Вычислим среднеквадратичное отклонение.

[22]:
```
integrate.quad(func, 0, 1)
```

[22]: (8.003258165698814e-09, 8.885401487578119e-23)

Среднеквадратичное отклонения на нашем отрезке стало еще ниже, что ожидаемо, и теперь равно $8.003258165698814 * 10^{-9}$.Посмотрим, чему равно среднеквадратичное отклонения на отрезке $[-2, 2]$.

[23]:
```
integrate.quad(func, -2, 2)
```

[23]: (4.934646060901575, 1.794422033185583e-08)

В сравнении с прошлым случаем отклонение стало ниже, но не достаточно, поэтому перейдем к рассмотрению многочлена четвертой степени.

Построение приближения многочленом четвертой степени

Попробуем построить приближение функции $f(x) = x\ln(x+2)$ заданной на отрезке $[a, b] = [0, 1]$ с помощью квадратичной функции

$$\varphi(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4.$$

Возьмем вес $p(x) = 1$. Для построения приближающей функции нам необходимо решить систему

$$\begin{cases} c_0s_0 + c_1s_1 + c_2s_2 + c_3s_3 + c_4s_4 = \int\limits_0^1 x\ln(x+2)dx, \\ c_0s_1 + c_1s_2 + c_2s_3 + c_3s_4 + c_4s_5 = \int\limits_0^1 x^2\ln(x+2)dx, \\ c_0s_2 + c_1s_3 + c_2s_4 + c_3s_5 + c_4s_6 = \int\limits_0^1 x^3\ln(x+2)dx, \\ c_0s_3 + c_1s_4 + c_2s_5 + c_3s_6 + c_4s_7 = \int\limits_0^1 x^4\ln(x+2)dx, \\ c_0s_4 + c_1s_5 + c_2s_6 + c_3s_7 + c_4s_8 = \int\limits_0^1 x^5\ln(x+2)dx. \end{cases}$$

где

$$s_i = \int\limits_a^b x^i dx = \frac{x^{i+1}}{i+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{i+1}$$

[24]:
```
n = 5

print(G(n, a, b))

m = M()
```

```python
print(m)
```

```
[[1.         0.5        0.33333333 0.25       0.2       ]
 [0.5        0.33333333 0.25       0.2        0.16666667]
 [0.33333333 0.25       0.2        0.16666667 0.14285714]
 [0.25       0.2        0.16666667 0.14285714 0.125     ]
 [0.2        0.16666667 0.14285714 0.125      0.11111111]]
[[0.48837593]
 [0.33633327]
 [0.25695931]
 [0.20803248]
 [0.17480756]]
```

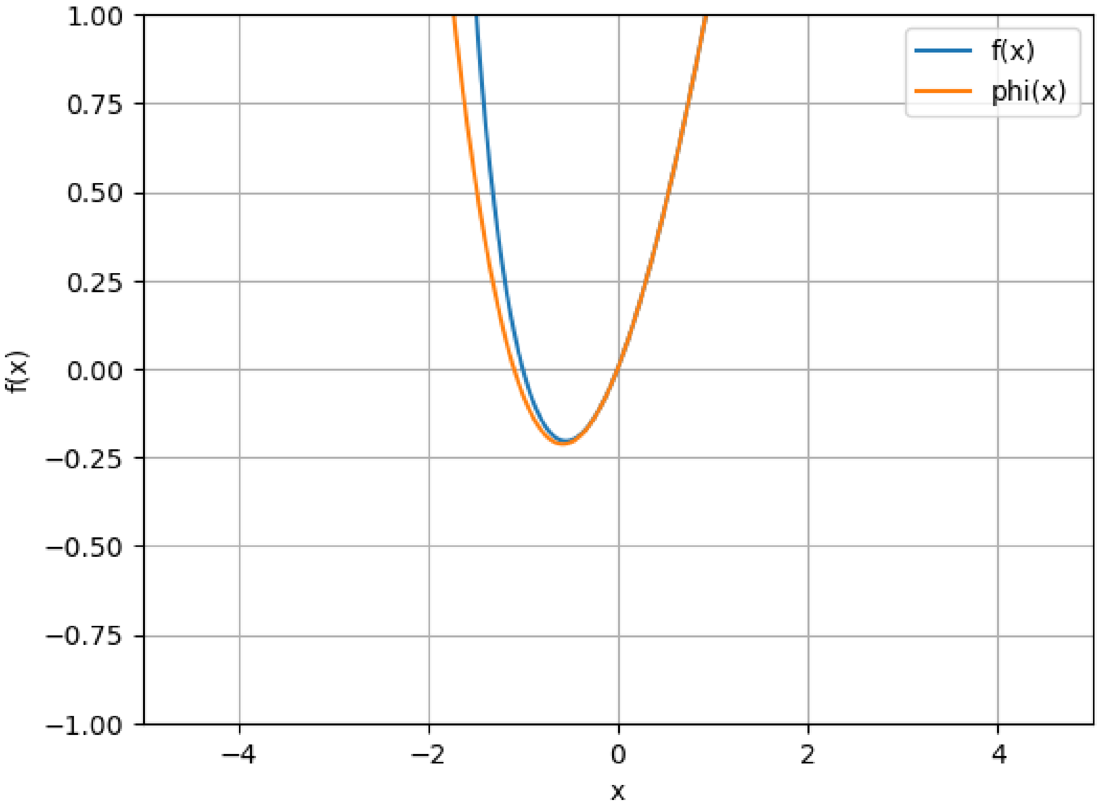
Решив эту систему получим коэффициенты для многочлена четвертой степени.

[25]:
```python
coef = system_solution.single_division_scheme(G(n, a, b), m, n)

print(coef)
```

```
[[-2.44155810e-05]
 [ 6.93908383e-01]
 [ 4.94347470e-01]
 [-1.08332104e-01]
 [ 1.87334406e-02]]
```

И снова, будем рассматривать сразу более широкий отрезок для наглядности.

[26]:
```python
x = np.linspace(-5, 5, 10000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f(x), label='f(x)')
ax.plot(x, phi(x), label='phi(x)')
ax.set_xlim(-5, 5)
ax.set_ylim(-1, 1)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



[27]:
```
integrate.quad(func, 0, 1)
```

[27]: (4.539433525664945e-11, 6.858357938669617e-22)

По сложившейся традиции, среднеквадратичное отклонение стало еще ниже на рассматриваемом отрезке. Вычислим отклонение на отрезке $[-2, 2]$.

[28]:
```
integrate.quad(func, -2, 2)
```

[28]: (3.621002053772873, 2.7883077180490545e-08)

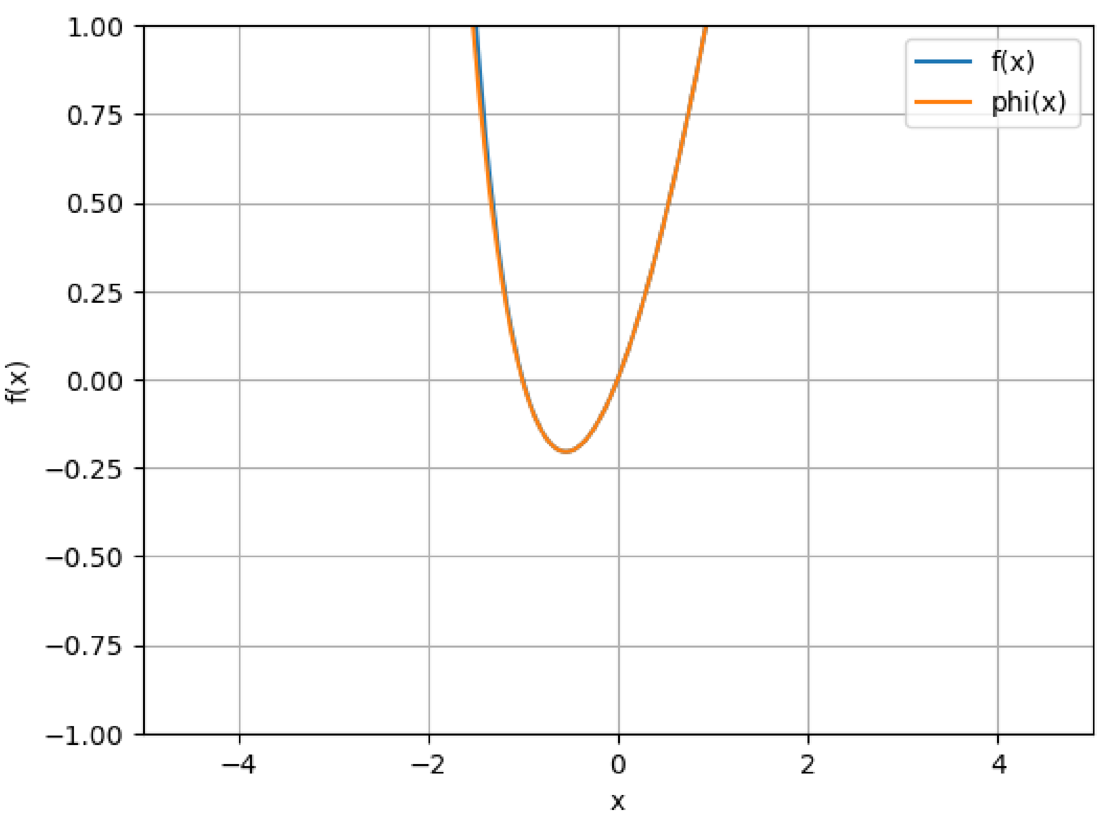
Оно практически не изменилось, но график визуально стал точнее, продолжим рассуждения подобным образом и сразу перейдем к рассмотрению многочлена восьмой степени.

Построение приближения многочлена восьмой степени

[29]:
```
n = 9

m = M()

coef = system_solution.single_division_scheme(G(n, a, b), m, n)
```

```python
print(coef)

x = np.linspace(-5, 5, 10000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f(x), label='f(x)')
ax.plot(x, phi(x), label='phi(x)')
ax.set_xlim(-5, 5)
ax.set_ylim(-1, 1)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

```
[[-1.75195775e-09]
 [ 6.93147340e-01]
 [ 4.99996421e-01]
 [-1.24965543e-01]
 [ 4.14906756e-02]
 [-1.50960922e-02]
 [ 5.26349870e-03]
 [-1.43101835e-03]
 [ 2.07010178e-04]]
```



Получили график, котрый практически полностью совпадает с графиком исходной функции. Посмотрим на среднеквадратичное отклонение на отрезке $[0, 1]$.

[30]:
```
integrate.quad(func, 0, 1)
```

[30]: (1.20968070061837e-19, 3.677310321705661e-26)

[31]:
```
integrate.quad(func, -2, 2)
```

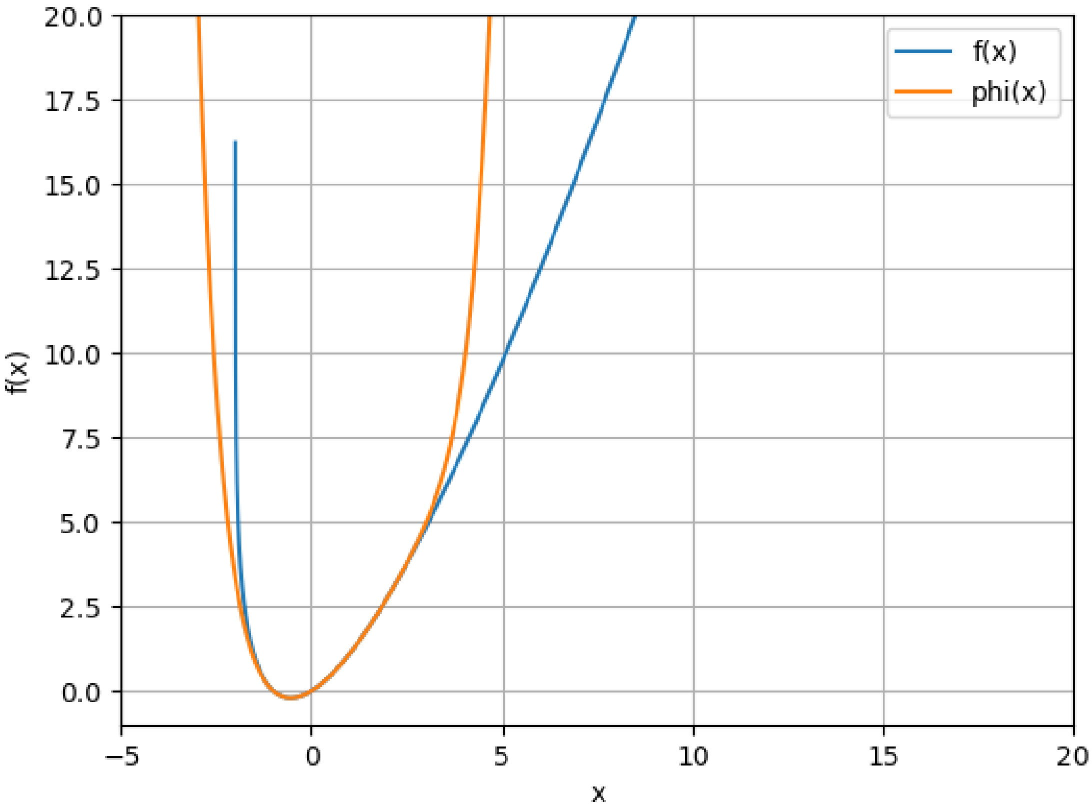
[31]: (1.7539650880427915, 7.184443040486599e-09)

Значение отклонения на отрезке $[0, 1]$ уже минимально, на отрезке $[-2, 2]$ оно уменьшается с увеличением степени многочлена.

Вывод

В ходе последовательного увеличения степени многочлена стало очевидно, что, чем выше его степень, тем ближе функцию мы получаем, но на отрезке $[0, 1]$ был получен практически идеальный результат, однако при расширении рассматриваемой области можно обнаружить некоторые несостыковки.

[32]:
```
x = np.linspace(-5, 20, 10000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f(x), label='f(x)')
ax.plot(x, phi(x), label='phi(x)')
ax.set_xlim(-5, 20)
ax.set_ylim(-1, 20)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



Метод наименьших квадратов

Теоретические выкладки

Предположим, что нам известны значения функции $f(x)$ на конечном множестве точек отрезка $[a, b]$. Рассмотрим алгоритм построения среднеквадратичного приближения для таблично заданной функции. В литературе такой алгоритм получил название метода наименьших квадратов. Пусть в точках x_i

$$ax_0 < x_1 < ... < x_N b$$

заданы значения функций $f(x_i), i = 0, 1, ..., N$. Для функций заданных таблично определим скалярное произведение следующим образом

$$(f, g) = \sum_{i=0}^{N} p(x_i) f(x_i) g(x_i)$$

Тогда многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения может быть построен по формуле

$$\varphi = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i, \quad c_i \in \mathbb{R},$$

где коэффициенты c_i являются решениями системы, которая в рассмат- риваемом случае примет вид

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{N}p(x_j)x_j^{i+k}\right)c_i=\sum_{j=0}^{N}p(x_j)f(x_j)x_j^k,\quad k=0,...,n$$

В нашем случае возьмем веса $p(x)=1$, тогда система примет вид

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{N}x_j^{i+k}\right)c_i=\sum_{j=0}^{N}f(x_j)x_j^k,\quad k=0,...,n,$$

и формула скалярного произведения

$$(f,g)=\sum_{i=0}^{N}f(x_i)g(x_i)$$

Перейдем к реализации.

Многочлен первой степени

Попробуем построить приближение функции $f(x)=x\ln(x+2)$ заданной на отрезке $[a,b]=[0,1]$ с помощью линейной функции

$$\varphi(x)=c_0+c_1x$$

Функцию мы определили еще в первой части работы. Возьмем количество точке $N=10$.

[33]:
```
N = 10
n = 2

def system():
    global N, n, a, b

    A = np.zeros((n, N))
    B = np.zeros((n, 1))

    x = np.linspace(a, b, N)

    for k in range(n):
        for i in range(N):
            A[k, i] = np.sum(x**(i+k))

        B[k] = np.sum(f(x) * (x**k))

    return A, B

A, B = system()
```

```
print(A)
print(B)
```

```
[[10.         5.         3.51851852 2.77777778 2.33699131 2.04618198
  1.84104162 1.68941613 1.57343768 1.48238155]
 [ 5.         3.51851852 2.77777778 2.33699131 2.04618198 1.84104162
  1.68941613 1.57343768 1.48238155 1.4094195 ]]
[[4.95152929]
 [3.59973973]]
```

Получили систему, решив которую методом единственного деления, получим коэффициенты для нашего многочлена.

[34]:
```
coef = system_solution.single_division_scheme(A, B, n)

print(coef)
```

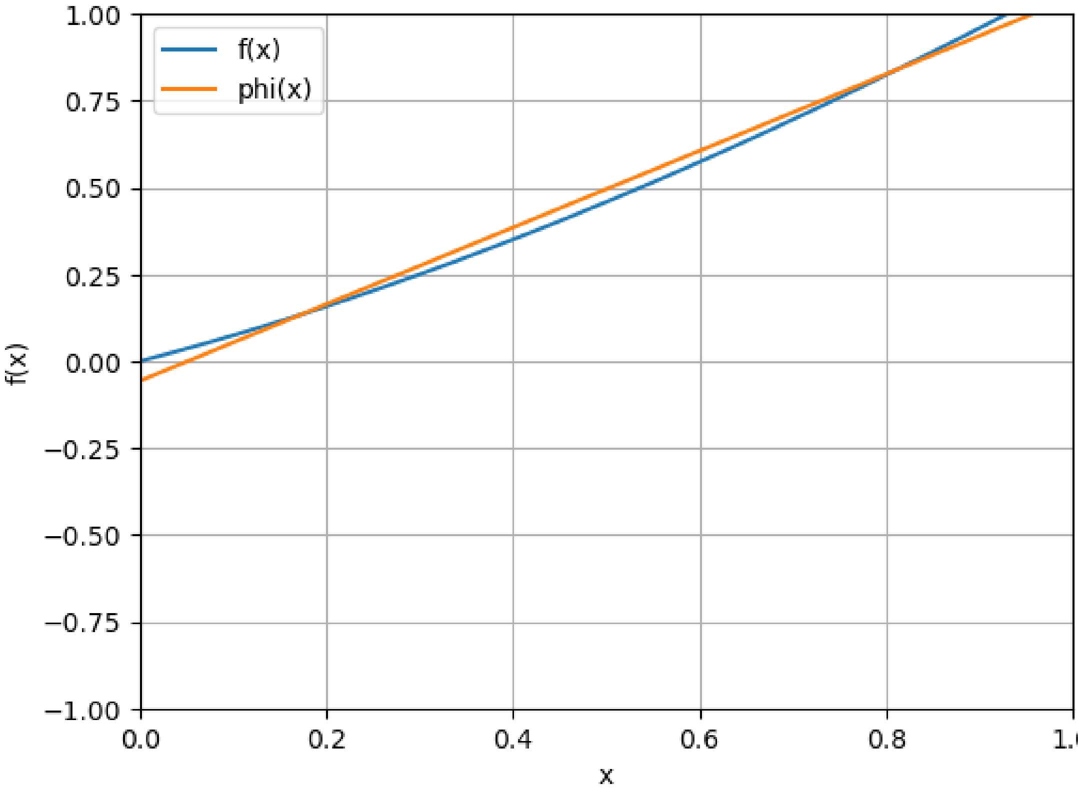
```
[[-0.05661666]
 [ 1.10353917]]
```

Получили коэффициенты $c_0 = -0.05661666, c_1 = 1.10353917$ и многочлен примет вид

$$\varphi(x) = -0.05661666 + 1.10353917x.$$

Посмотрим на поведение функции на отрезке $[0, 1]$.

[35]:
```
x = np.linspace(0, 1, 1000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f(x), label='f(x)')
ax.plot(x, phi(x), label='phi(x)')
ax.set_xlim(0, 1)
ax.set_ylim(-1, 1)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



На данном отрезке видим небольшие расхождения, вычислим среднеквадратичное отклонение по следующей формуле.

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}(f(x_i) - \varphi(x_i))^2.$$

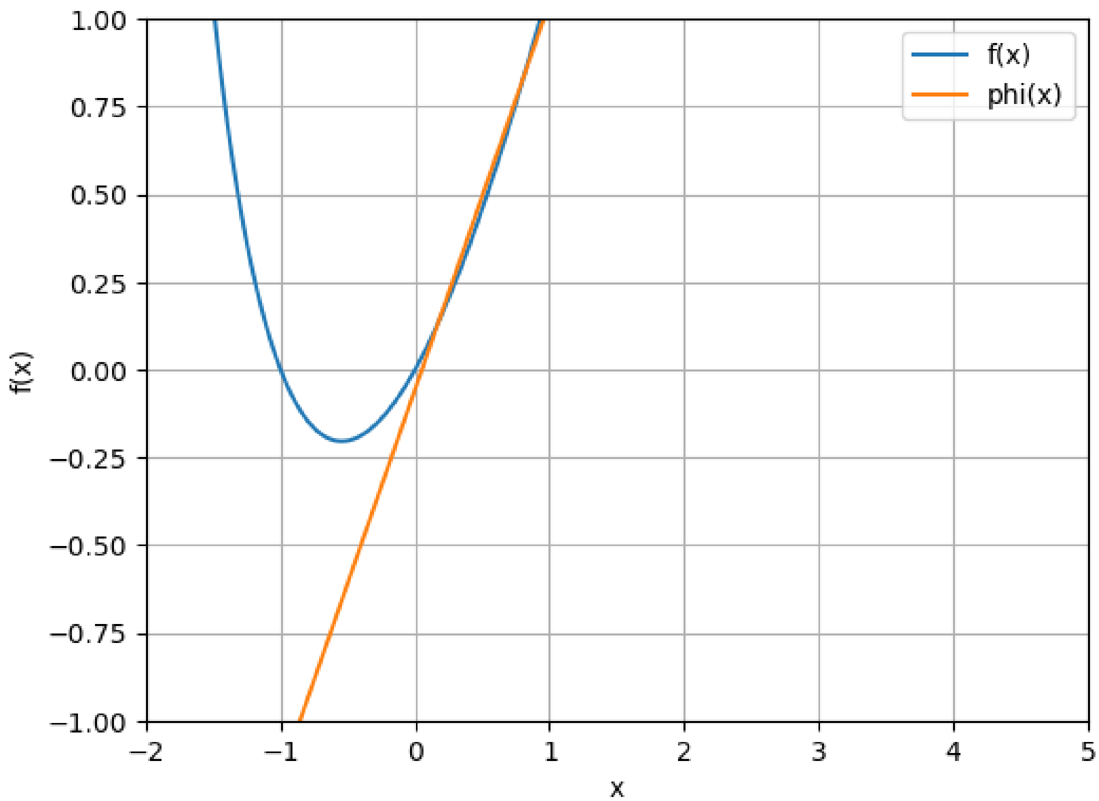
[36]:
```
def mse(x):
    return 1/N * np.sum((f(x) - phi(x))**2)

print(mse(x))
```

```
0.0786237963993482
```

Получили отклонение, равное примерно 0.001, что является крайне хорошим результатом. Рассмотрим более широкий отрезок $[-2, 5]$.

[37]:
```
x = np.linspace(-2, 5, 1000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f(x), label='f(x)')
ax.plot(x, phi(x), label='phi(x)')
```

```
ax.set_xlim(-2, 5)
ax.set_ylim(-1, 1)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



Многочлен четвертой степени

Опираясь на опыт работы со среднеквадратичным приближением, повысим степень многочлена сразу до четвертой

$$\varphi(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + {}_3x^3 + c_4x^4$$

Функцию мы определили еще в первой части работы. Возьмем количество точке тем же, $N = 10$.

Построим систему, решив которую найдем коэффициенты для многочлена $\varphi(x)$.

[38]:
```
N = 10
n = 5
```

```
def system():
    global N, n, a, b

    A = np.zeros((n, N))
    B = np.zeros((n, 1))

    x = np.linspace(a, b, N)

    for k in range(n):
        for i in range(N):
            A[k, i] = np.sum(x**(i+k))

        B[k] = np.sum(f(x) * (x**k))

    return A, B

A, B = system()

print(A)
print(B)
```

```
[[10.          5.          3.51851852  2.77777778  2.33699131  2.04618198
   1.84104162  1.68941613  1.57343768  1.48238155]
 [ 5.          3.51851852  2.77777778  2.33699131  2.04618198  1.84104162
   1.68941613  1.57343768  1.48238155  1.4094195 ]
 [ 3.51851852  2.77777778  2.33699131  2.04618198  1.84104162  1.68941613
   1.57343768  1.48238155  1.4094195   1.34999647]
 [ 2.77777778  2.33699131  2.04618198  1.84104162  1.68941613  1.57343768
   1.48238155  1.4094195   1.34999647  1.30095648]
 [ 2.33699131  2.04618198  1.84104162  1.68941613  1.57343768  1.48238155
   1.4094195   1.34999647  1.30095648  1.2600432 ]]
[[4.95152929]
 [3.59973973]
 [2.89552903]
 [2.46530354]
 [2.17636175]]
```

Применим к системе схему единственного деления.

[39]:
```
coef = system_solution.single_division_scheme(A, B, n)

print(coef)
```

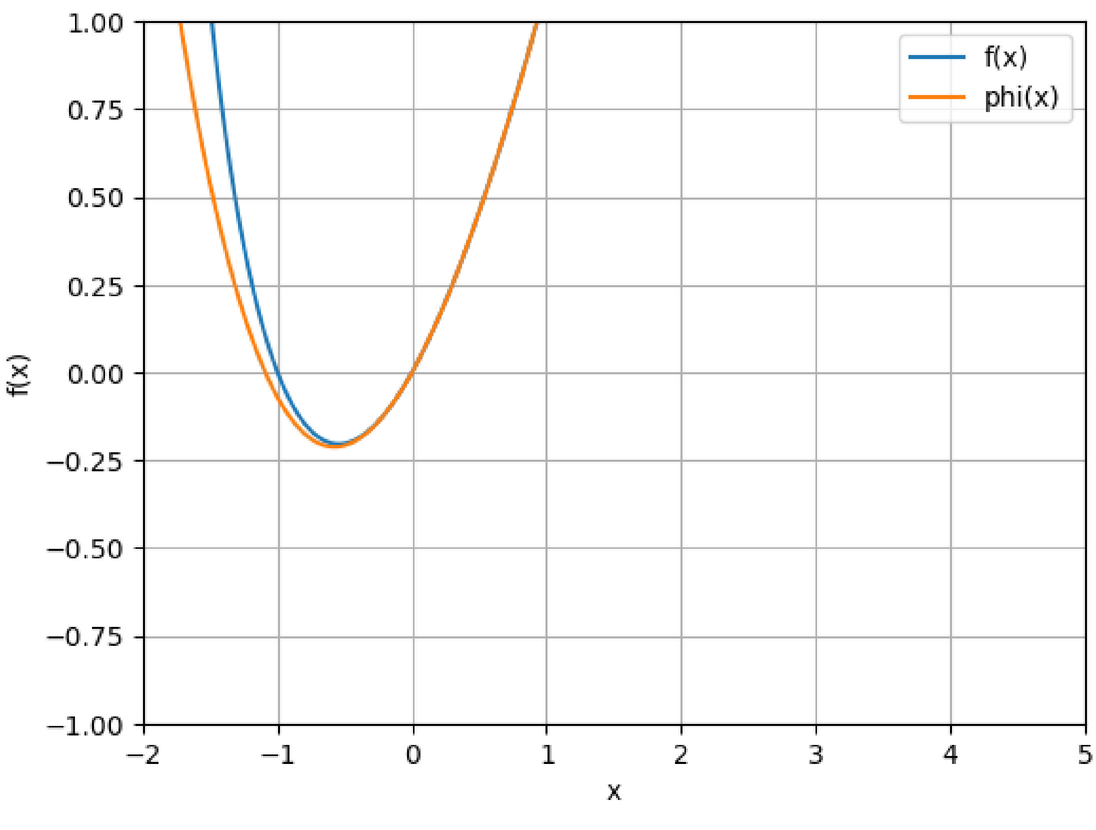
```
[[-5.94615274e-06]
 [ 6.93735550e-01]
 [ 4.94786093e-01]
 [-1.08697542e-01]
 [ 1.87996356e-02]]
```

Получили коэффициенты $c_0 = -5.946 * 10^{-6}, c_1 = 0.6937, c_2 = 0.4948, c_3 = -0.1087, c_4 = 0.19$, следовательно, многочлен примет вид

$$\varphi(x) = -5.946 * 10^{-6} + 0.6937x + 0.4948x^2 - 0.1087x^3 + 0.19x^4.$$

Рассмотрим поведение функций сразу на отрезке $[-2, 5]$.

[40]:
```
x = np.linspace(-2, 5, 1000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f(x), label='f(x)')
ax.plot(x, phi(x), label='phi(x)')
ax.set_xlim(-2, 5)
ax.set_ylim(-1, 1)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



На графике видно, что на отрезке $[0, 1]$ совпадение практически идеальное, однако на более широком отрезке, различия существенны. Посмотрим на отклонение.

[41]:
```
x = np.linspace(0, 1, N)

print(mse(x))
```

```
7.119289320966203e-11
```

Предположение о практически идельном совпадении на отрезке $[0, 1]$ подтверждается отклонением, которое равно $7.12 * 10^{-11}$. Посмотрим на отклонени на отрезке $[-1.99, 5]$

[42]:
```
x = np.linspace(-1.99, 5, N)

print(mse(x))
```

```
7.729244406872342
```

Отклонение равно 7.73, что является значительным показателем, поэтому либо необходимо повысить степень многочлена, либо увеличить количество точек.

Ради интереса выберем второй вариант, пусть количество точек $N = 50$. Будем использовать многочлен той же степени. Сразу будем рассматривать коэффициенты.

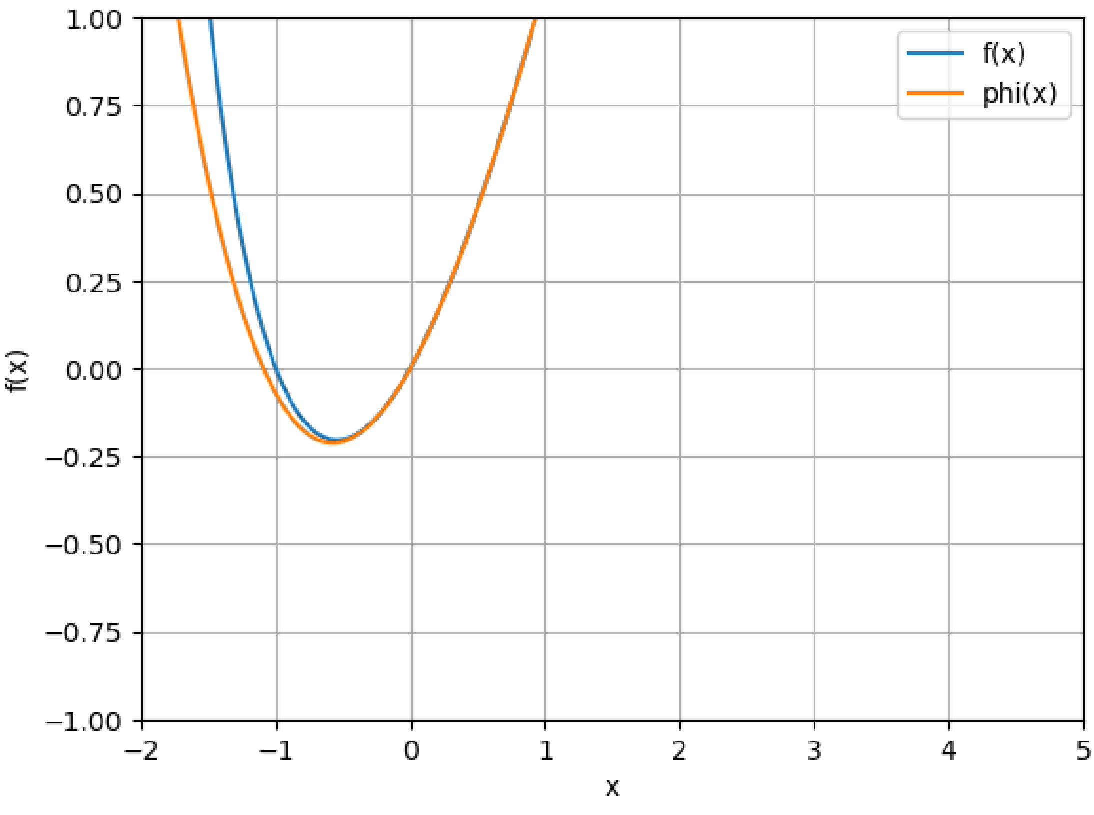
[43]:
```
N = 50
n = 5

def system():
    global N, n, a, b

    A = np.zeros((n, N))
    B = np.zeros((n, 1))

    x = np.linspace(a, b, N)

    for k in range(n):
        for i in range(N):
            A[k, i] = np.sum(x**(i+k))

        B[k] = np.sum(f(x) * (x**k))

    return A, B

A, B = system()

coef = system_solution.single_division_scheme(A, B, n)

print(coef)
```

```
[[-1.96130226e-05]
 [ 6.93862139e-01]
 [ 4.94468309e-01]
 [-1.08438105e-01]
```

```
 [ 1.87563144e-02]]
```

Коэффициенты получились следующими $c_0 = -1.96130226 * 10^{-5}, c_1 = 0.69386214, c_2 = 0.49446831, c_3 = -0.10843811, c_4 = 0.01875631$. Рассмотрим поведение функций на отрезке $[-2, 5]$.

[44]:
```
x = np.linspace(-2, 5, 1000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f(x), label='f(x)')
ax.plot(x, phi(x), label='phi(x)')
ax.set_xlim(-2, 5)
ax.set_ylim(-1, 1)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



Не сложно заметить, что больших изменений на графике не произошло, проверим это с помощью отклонения.

[45]:
```python
x = np.linspace(0, 1, N)

print(mse(x))
```

```
5.452157181039786e-11
```

На отрезке $[0, 1]$ отклонение незначительно увеличилось.

[46]:
```python
x = np.linspace(-1.99, 5, N)

print(mse(x))
```

```
2.5831496094345856
```

На отрезке $[-1.99, 5]$ отклонение заметно уменьшилось.

Однако я считаю, что наилучшим шагом будет сразу увеличить степень многочлена до восьмой.

Построение многочлена восьмой степени

[47]:
```python
n = 9

m = M()

coef = system_solution.single_division_scheme(G(n, a, b), m, n)

print(coef)

x = np.linspace(-5, 5, 10000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f(x), label='f(x)')
ax.plot(x, phi(x), label='phi(x)')
ax.set_xlim(-5, 5)
ax.set_ylim(-1, 1)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

```
[[-1.75195775e-09]
 [ 6.93147340e-01]
 [ 4.99996421e-01]
 [-1.24965543e-01]
 [ 4.14906756e-02]
 [-1.50960922e-02]
 [ 5.26349870e-03]
```

```
[-1.43101835e-03]
[ 2.07010178e-04]]
```

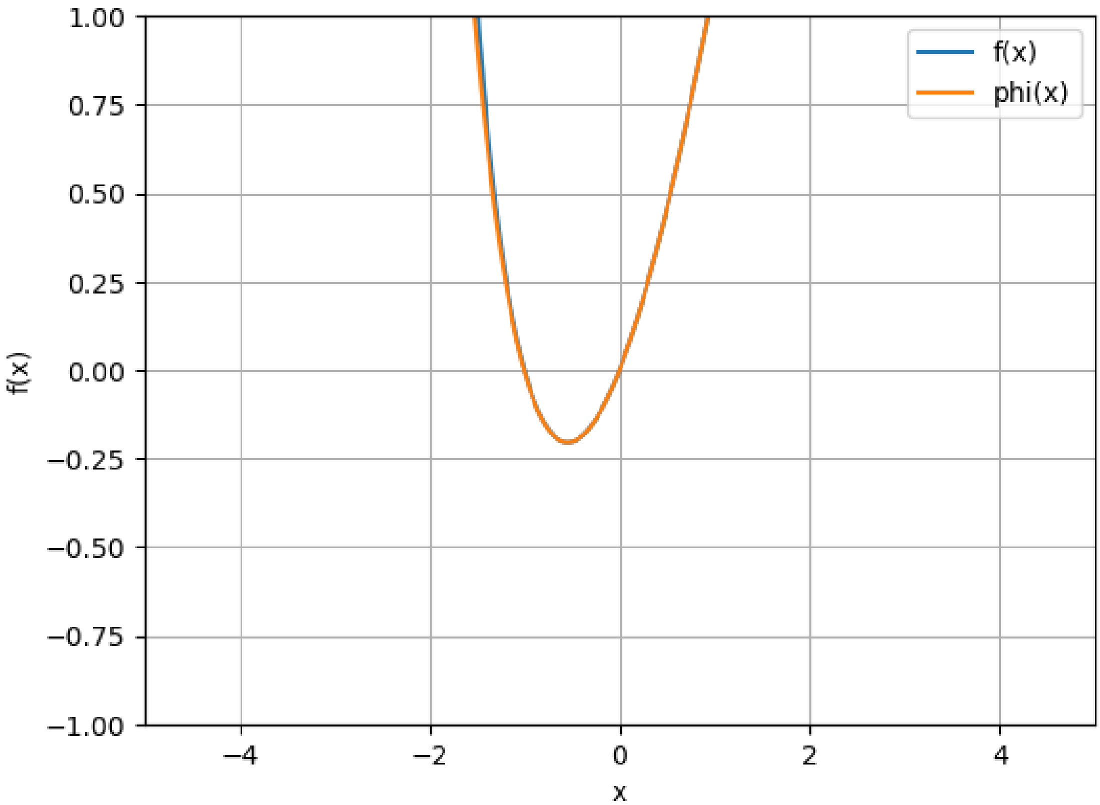


График выглядит вполне приемлимо при количестве точек $N = 50$ и степени многочлена, равной восьми. Посмотрим, как выглядит отклонение.

[48]:
```
x = np.linspace(0, 1, N)

print(mse(x))
```

```
1.9322627862362974e-19
```

На отрезке $[0, 1]$ значение отклонения сильно уменьшилось и стало практически равным нулю, что меня вполне устраивает.

[50]:
```
x = np.linspace(-1.99, 5, N)

print(mse(x))
```

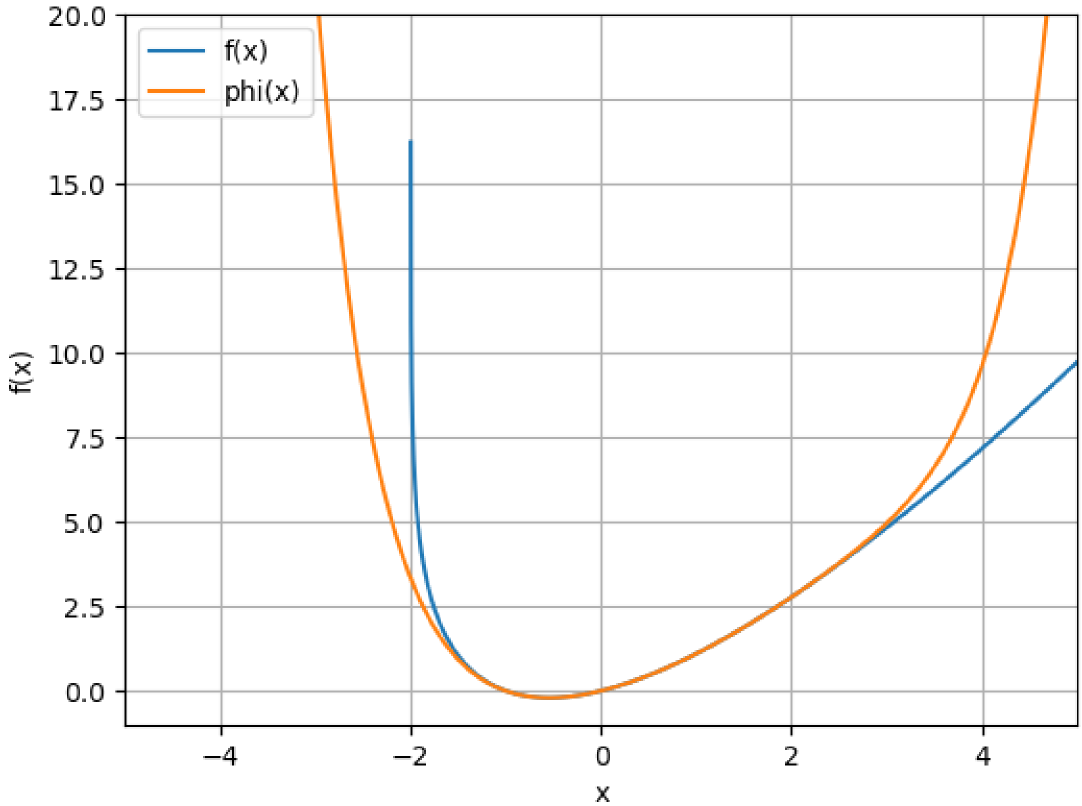
```
0.818756941663536
```

Однако на отрезке $[-1.99, 5]$ оно значительно увеличилось, что может говорить о том, что выше графики значительно расходятся.

[51]:

```
n = 9

m = M()

coef = system_solution.single_division_scheme(G(n, a, b), m, n)

print(coef)

x = np.linspace(-5, 5, 10000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f(x), label='f(x)')
ax.plot(x, phi(x), label='phi(x)')
ax.set_xlim(-5, 5)
ax.set_ylim(-1, 20)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

```
[[-1.75195775e-09]
 [ 6.93147340e-01]
 [ 4.99996421e-01]
 [-1.24965543e-01]
 [ 4.14906756e-02]
 [-1.50960922e-02]
 [ 5.26349870e-03]
 [-1.43101835e-03]
 [ 2.07010178e-04]]
```



Вывод

Ситуация аналогична среднеквадратичному приближению, на рассматриваемом отрезке удалось получить практически идеальное приближения, однако, расширив отрезок, получили то, что различия значительны.