МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра компьютерных технологий и систем

Отчет по лабораторной работе 2
"Метод разделения переменных при решении смешанных задач с неоднородными граничными условиями для уравнения теплопроводности"
Вариант 5

Выполнил:
Карпович Артём Дмитриевич
студент 3 курса 7 группы

Преподаватель:
Козловская Инесса Станиславовна

Минск, 2024

Задача

Найти решение данной смешанной задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = -\frac{x}{(t+1)^2}, \\ u_x(0,t) = \frac{1}{t+1}, \\ u(l,t) = \frac{l}{t+1}, \\ u(x,0) = 2x. \end{cases} \tag{1}$$

Решение задачи будем искать в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где функция $v(x,t)$ удовлетворяет смешанной задаче с однородными граничными условиями, а функция $w(x,t)$ - неоднородным граничным условиям.

Найдем функцию $w(x,t)$ из представления:

$$w(x,t) = A(t)x + B(t).$$

Подставим это представление в граничные условия:

$$w(l,t) = A(t)l + B(t) = \frac{l}{t+1},$$

$$w_x(0,t) = A(t) = \frac{1}{t+1}.$$

Примем $A(t) = 0$, тогда

$$w(l,t) = \frac{1}{t+1}l + B(t) = \frac{l}{t+1} \Rightarrow B(t) = 0.$$

Таким образом, получаем представление функции $w(x,t)$:

$$w(x,t) = \frac{x}{t+1}.$$

И мы имеем, что

$$u(x,t) = \frac{x}{t+1} + v(x,t).$$

Для нахождения $v(x,t)$ составим задачу с однородными граничными условиями

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = -\frac{x}{(t+1)^2} - w_t + a^2 w_{xx} = 0, \\ \frac{1}{t+1} + v_x(0,t) = \frac{1}{t+1}, \\ \frac{l}{t+1} + v(l,t) = \frac{l}{t+1}, \\ x + v(x,0) = 2x. \end{cases} \tag{2}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, \\ v_x(0,t) = 0, \\ v(l,t) = 0, \\ v(x,0) = x. \end{cases} \tag{3}$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$v(x,t) = T(t)X(x),$$

подставив это представление в уравнение

$$v_t - a^2 v_{xx} = 0,$$

получим:

$$T'(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t),$$

причем

$$T(t) \neq 0, X(x) \neq 0$$

Разделим обе части уравнения на $a^2 X(x)T(t)$:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Поскольку левая часть зависит только от t, а правая - от x, то их можно приравнять к $-\lambda^2$(поскольку собственные значения задачи Штурма-Лиувилля являются положительными действительными числами).

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2. \tag{4}$$

Составим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X(l) = 0, \end{cases}$$

Найдем решение уравнения

$$X(x) = A(t)\cos(\lambda x) + B(t)\sin(\lambda x).$$

Подставим в граничные условия

$$X'(0) = B(t) = 0,$$

$$X(l) = A(t)\cos(\lambda l) = 0 \Rightarrow \cos(\lambda l) = 0.$$

Следовательно, собственные значения задачи Штурма-Лиувилля

$$\lambda_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2l}, k = 0, 1, 2, ...$$

Соответственно, собственные функции имеют вид

$$X_k(x) = \cos(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} x).$$

Вернемся к соотношению (4) и составим уравнения для нахождения $T(t)$

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$T(t) = Ae^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Таким образом, решение задачи (3) примет вид

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)X_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-a^2\left(\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)^2 t} \cos(\frac{\pi+2\pi k}{2l}x)$$

Подставим в начальное условие задачи (3)

$$v(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\frac{\pi+2\pi k}{2l}x) = x$$

Для нахождения A_k разложим функцию x в ряд Фурье по собственным функциями:

$$A_k = \varphi_k = \frac{\int_0^l xX_k(x)dx}{\int_0^l X_k^2(x)dx} = \frac{\int_0^l x\cos(\frac{\pi+2\pi k}{2l})dx}{\int_0^l \cos^2(\frac{\pi+2\pi k}{2l})dx} = \frac{I_1}{I_2}.$$

Вычислим интегралы I_1 и I_2 в WolframMathematica

```
In[1]:= Integrate[x*Cos[(Pi+2*Pi*k)/(2*l)*x], {x, 0, l}]

         2 l^2 ((1 + 2 k) π Cos[k π] - 2 (1 + Sin[k π]))
Out[1]= -------------------------------------------------
                        (π + 2 k π)^2
```

```
In[3]:= Integrate[Cos[(Pi+2*Pi*k)/(2*l)*x]^2, {x, 0, l}]

         l π + 2 k l π - l Sin[2 k π]
Out[3]= ------------------------------
                2 π + 4 k π
```

Таким образом, получаем

$$I_1 = \frac{2l^2((-1)^k(1+2k)\pi - 2)}{(\pi+2\pi k)^2}, I_2 = \frac{l}{2}.$$

Подставим в выражение для A_k

$$A_k = \frac{4l((-1)^k(1+2k)\pi - 2)}{(\pi+2\pi k)^2} = \frac{(-1)^k 4l}{(\pi+2\pi k)} - \frac{8l}{(\pi+2\pi k)^2}$$

Тогда общее решение задачи (3) имеет вид

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{(-1)^k 4l}{(\pi+2\pi k)} - \frac{8l}{(\pi+2\pi k)^2}\Big) e^{-\left(a\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)^2 t} \cos(\frac{\pi+2\pi k}{2l}x). \tag{5}$$

Попробуем решить задачу (3), используя WolframMathematica:

```
In[1]:= $Assumptions = {a > 0, l > 0};
        eq = v^(0,1)[x, t] - a^2 v^(2,0)[x, t] == 0;
        cc = {v^(1,0)[0, t] == 0, v^(0,0)[l, t] == 0};
        bc = v[x, 0] == x

Out[4]= v[x, 0] == x

In[5]:= sol = DSolve[{eq, bc, cc}, v, {x, t}]
```

Out[5]= $\left\{\left\{v \to \text{Function}\left[\{x, t\}, \dfrac{2 \sum_{K[1]=0}^{\infty} \dfrac{2 e^{-\frac{a^2 \pi^2 t (1+2K[1])^2}{4 l^2}} l^2 \text{Cos}\left[\frac{\pi x (1+2K[1])}{2 l}\right] (\pi \text{Cos}[\pi K[1]] (1+2K[1]) - 2(1+\text{Sin}[\pi K[1]]))}{(\pi+2\pi K[1])^2}}{l}\right]\right\}\right\}$

Попробуем упростить полученное решение

$$v(x,t) = \frac{2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2l^2 e^{-\left(a\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)^2 t} \cos(\frac{\pi+2\pi k}{2l}x)(\pi\cos\pi k(1+2k)-2(1+\sin\pi k))}{(\pi+2\pi k)^2}}{l} =$$

$$= \frac{2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2l^2 e^{-\left(a\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)^2 t} \cos(\frac{\pi+2\pi k}{2l}x)((-1)^k\pi(1+2k)-2)}{(\pi+2\pi k)^2}}{l} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4l e^{-\left(a\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)^2 t} \cos(\frac{\pi+2\pi k}{2l}x)((-1)^k\pi(1+2k)-2)}{(\pi+2\pi k)^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{(-1)^k 4l}{(\pi+2\pi k)} - \frac{8l}{(\pi+2\pi k)^2}\Big) e^{-\left(a\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)^2 t} \cos(\frac{\pi+2\pi k}{2l}x).$$

Таким образом, получаем, что решение задачи (3), полученное вручную, совпадает с решением, полученным с помощью WolframMathemtica.

Тогда решение задачи (1) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{t+1}x + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{(-1)^k 4l}{(\pi+2\pi k)} - \frac{8l}{(\pi+2\pi k)^2}\Big) e^{-\left(a\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)^2 t} \cos(\frac{\pi+2\pi k}{2l}x).$$

К сожалению, возможности WolframMathematica не позволяют выполнить подстановку полученного решения из-за того, что мы работаем с бесконечной суммой.