МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и инворматики
Кафедра вычислительной математики

Отчет по лабораторной работе 2
"Разностные схемы для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка."
Вариант 5

Выполнил:
Карпович Артём Дмитриевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:
Репников Василий Иванович

Минск, 2024

Постановка задач

1. Построить разностную схему, заменяя дифференциальные производные разностными.
2. Методом баланса построить консервативную разностную схему.

$$1,2. \begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} - q(x)u = -f(x), \ 0 < x < 1, \\ u(0) = A, \\ u(1) = B. \end{cases}$$

3. Построить вариационно-разностную схему методом наименьших квадратов.
4. Используя метод разностной прогонки, составить программу решения исходной задачи с помощью разностных схем п.п. 1.-2., выполнить контрольные расчеты на ЭВМ и провести сравнительный анализ результатов.

$$q(x) = \frac{7}{(x+1)^2}; f(x) = x + 1;$$

$$A = 1; B = 8.$$

точное решение $u(x) = (x+1)^3$.

Задача 1

Постановка задачи. Построить разностную схему, заменяя дифференциальные производные разностными.

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} - q(x)u = -f(x),\ 0 < x < 1, \\ u(0) = A, \\ u(1) = B, \end{cases}$$

где $q(x) = \frac{7}{(x+1)^2};\ f(x) = x+1;\ A = 1;\ B = 8$. Точное решение $u(x) = (x+1)^3$.

Решение задачи. В данном случае мы имеем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с уравнением

$$Lu(x) = \frac{d^2u}{dx^2} - q(x)u = -f(x).$$

Выберем равномерную сетку $\overline{\omega_h} = \{x_h = i \cdot h; i = \overline{0,N}; h = \frac{1}{N}\}$ и рассмотрим на ней трехточечный шаблон $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$. Тогда мы можем построить двухпараметрчиеское семейство разностных аппроксимаций:

$$L_h y(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q(x_i)y_i = -f(x_i),$$

Таким образом, разностная схема в индексной форме примет вид:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q(x_i)y_i = -f(x_i), \\ y_0 = A, \\ y_N = B. \end{cases}$$

Исследуем порядок аппроксимации построенной разностной схемы, для этого рассмотрим погрешность аппроксимации дифференциального уравнения:

$$\psi_h(x) = u_{\overline{x}x} - q(x)u(x) + f(x),$$

разложим производные в ряд Тейлора:

$$u_{\overline{x}x} = u'' + \frac{h^2}{12}u^{(\mathrm{IV})} + O(h^3).$$

Тогда

$$\psi_h(x) = u'' + \frac{h^2}{12}u^{(\mathrm{IV})} - q(x)u(x) + f(x) + O(h^3) = O(h^2).$$

Таким образом, аппроксимация дифференциального уравнения имеет второй порядок. Рассмотрим теперь аппроксимацию граничных условий. Поскольку ни в одном из граничных условий нет производных, то каждое из них аппроксимируется точно, то есть:

$$\begin{cases} \nu_h(0) = u(0) - A = 0, \\ \nu_h(1) = u(1) - B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, разностная схема примет вид:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q(x_i)y_i = -f(x_i), \\ y_0 = u_0, \\ y_N = u_1. \end{cases}$$

В итоге получаем, что полученная разностная схема имеет второй порядок аппроксимации. Поскольку порядок аппроксимации дифференциального уравнения никак не был понижен граничными условиями, то и повысить порядок мы не можем.

Докажем сходимость метода прогонки для полученной разностной схемы. Для выполнение метода прогонки нам необходимо выписать коэффициенты для трехдиагнольный матрицы вида:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
\gamma_0 & \beta_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & g_0 \\
\alpha_1 & \gamma_1 & \beta_1 & \dots & 0 & 0 & g_1 \\
0 & \alpha_1 & \gamma_2 & \dots & 0 & 0 & g_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{N-1} & \beta_{N-1} & g_{N-1} \\
0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_N & \gamma_N & g_N
\end{array}\right) \tag{1}$$

Из нашей схемы получим

$$a_0 = 0,\ c_0 = 1,\ b_0 = 0,\ g_0 = u_0,$$
$$a_i = \frac{1}{h^2},\ c_i = -\frac{2}{h^2} - q(x_i),\ b_i = \frac{1}{h^2},\ g_i = -f(x_i),$$
$$a_N = 0,\ c_N = 1,\ b_N = 0,\ g_N = u_1.$$

Проверим выполнение условий сходимости:

$$|c_0| \geq |a_0| + |b_0| \Rightarrow 1 \geq 0 \Rightarrow \textit{Выполняется.}$$

$$|c_i| \geq |a_i| + |b_i| \Rightarrow |-\frac{2}{h^2} - q(x_i)| > \frac{2}{h^2} \Rightarrow \frac{7}{(x_i+1)^2} > 0 \Rightarrow \textit{Выполняется.}$$

$$|c_N| \geq |a_N| + |b_N| \Rightarrow 1 \geq 0 \Rightarrow \textit{Выполняется.}$$

Таким образом, получаем, что условия сходимости метода прогонки выполняются, что позволяет нам его применить.

Для реализации метода прогонки воспользуемся следующими формулами для вычисления коэффициентов

Задача 2

Постановка задачи. Методом баланса построить консервативную разностную схему.

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} - q(x)u(x) = -f(x), \ 0 < x < 1, \\ u(0) = A, \\ u(1) = B, \end{cases}$$

где $q(x) = \frac{7}{(x+1)^2}$; $f(x) = x + 1$; $A = 1$; $B = 8$. Точное решение $u(x) = (x + 1)^3$.

Решение задачи. Для использования метода баланса необходимо привести рассматриваемую задачу к виду:

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x), \ 0 < x < 1, \\ u(0) = \mu_0, \\ u(1) = \mu_1. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала дифференциальное уравнение:

$$(k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x),$$

раскроем первое слагаемое:

$$(k(x)u'(x))' = k'(x)u'(x) + k(x)u''(x) = u''(x).$$

Отсюда следует, что $k(x) = 1$. Воспользуемся ранее построенной разностной схемой $\overline{\omega_h}$, тогда разностная схема, полученная методом баланса, в безиндексной форме примет вид:

$$\begin{cases} (ay_{\overline{x}})_x - dy = -\varphi, \ x \in \omega_h, \\ y_0 = u_0, \\ y_N = u_1, \end{cases}$$

или в индексной форме:

$$\begin{cases} \frac{1}{h}\Big(a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\Big) - d_iy_i = -\varphi_i, \ i = \overline{1, N-1}, \\ y_0 = u_0, \\ y_N = u_1, \end{cases}$$

где коэффициенты сразу определим с учетом входных данных:

$$a_i = \Big[\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)}dx\Big]^{-1} = \Big[\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\Big]^{-1} = \frac{x_i - x_{i-1}}{h} = \frac{ih - (i-1)h}{h} = 1,$$

$$d_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)dx = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{7}{(x+1)^2}dx = \frac{7}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{1}{(x+1)^2}dx = -\frac{7}{h}\frac{1}{(x+1)}\Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} =$$

$$= -\frac{7}{h}\Big(\frac{1}{x_{i+\frac{1}{2}}+1} - \frac{1}{x_{i-\frac{1}{2}}+1}\Big) = -\frac{7}{h}\Big(\frac{x_{i-\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}}}{(x_{i+\frac{1}{2}}+1)(x_{i-\frac{1}{2}}+1)}\Big),$$

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (1+x)dx = \frac{1}{h}(x+\frac{x^2}{2})\Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{h}\Big(x_{i-\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(x_{i-\frac{1}{2}})^2 - (x_{i+\frac{1}{2}})^2}{2}\Big).$$

Таким образом, учитывая нашу задачу, разностная схема для нее, полученная методом баланса, примет вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right) - d_i y_i = -\varphi_i, \ i = \overline{1, N-1}, \\ y_0 = u_0, \\ y_N = u_1, \end{cases}$$

в которой мы исключили аппроксимацию граничных условий, поскольку они вычисляются точно.

Таким образом, мы имеем общую формулу для итераций и явные выражения для коэффициентов из этой разностной схемы.

Данная схема имеет второй порядок аппроксимации, а также для нее сходится метод прогонки, коэффициенты которого имеют вид:

$$\alpha_0 = 0, \ \gamma_0 = 1, \ \beta_0 = 0, \ g_0 = u_0,$$

$$\alpha_i = \frac{a_i}{h^2}, \ \gamma_i = -\frac{a_{i+1}+a_i}{h^2} - d_i, \ \beta_i = \frac{a_{i+1}}{h^2}, \ g_i = -\varphi_i,$$

$$\alpha_N = 0, \ \gamma_N = 1, \ \beta_N = 0, \ g_N = u_1.$$

Если подставить вычисленные ранее коэффициенты, то получим

$$\alpha_0 = 0, \ \gamma_0 = 1, \ \beta_0 = 0, \ g_0 = A,$$

$$\alpha_i = \frac{1}{h^2}, \ \gamma_i = -\frac{2}{h^2} + \frac{7}{h}\left(\frac{x_{i-\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}}}{(x_{i+\frac{1}{2}}+1)(x_{i-\frac{1}{2}}+1)}\right), \ \beta_i = \frac{1}{h^2}, \ g_i = -\frac{1}{h}\left(x_{i-\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(x_{i-\frac{1}{2}})^2 - (x_{i+\frac{1}{2}})^2}{2}\right),$$

$$\alpha_N = 0, \ \gamma_N = 1, \ \beta_N = 0, \ g_N = B.$$

Задача 3

Постановка задачи. Построить вариационно-разностную схему методом наименьших квадратов.

Заменено. Построить вариационно-разностную схему методом Ритца.

Решение. Вернемся к нашей равномерной сетке узлов $\overline{\omega_h}$. По методу Ритца мы можем построить трехдиагональную систему вида

$$\begin{cases} \alpha_{ii-1}y_{i-1} + \alpha_{ii}y_i + \alpha_{ii+1}y_{i+1} = \beta_i, \ i = \overline{1, N-1}, \\ \alpha_{00}y_0 + \alpha_{01}y_1 = \beta_0, \\ \alpha_{NN-1}y_{N-1} + \alpha_{NN}y_N = \beta_N, \end{cases}$$

где

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{h^2}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} k(x)dx + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x - x_{i-1})^2 dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x_{i+1} - x)^2 dx\right], \ i = \overline{1, N-1},$$

$$\alpha_{ii+1} = \frac{1}{h^2}\left[-\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x - x_i)(x_{i+1} - x)dx\right], \ i = \overline{0, N-1},$$

причем $\alpha_{ii+1} = \alpha_{i+1i}$. Тогда можно вычислить

$$\beta_i = \frac{1}{h}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - x_{i-1})dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1} - x)dx\right], \ i = \overline{1, N-1},$$

$$\alpha_{00} = \frac{1}{h^2}\left[\int\limits_0^h k(x)dx + \int\limits_0^h q(x)(x-h)^2 dx\right] + \sigma_1,$$

$$\alpha_{NN} = \frac{1}{h^2}\left[\int\limits_{1-h}^h k(x)dx + \int\limits_{1-h}^h q(x)(x - 1 + h)^2 dx\right] + \sigma_2,$$

$$\beta_0 = \frac{1}{h}\left[\int\limits_0^h f(x)(h-x)dx + \mu_1\right], \ \beta_N = \frac{1}{h}\left[\int\limits_{1-h}^1 f(x)(x - 1 + h)dx + \mu_2\right].$$

Систему, выписанную ранее можно привести к виду разностной схемы, полученной методом баланса, при этом у нас получится следующее соотношение между коэффициентами:

$$a_i = -h\alpha_{ii-1}, \ d_i = \frac{1}{h}(\alpha_{ii-1} + \alpha_{ii} + \alpha_{ii+1}, \ \varphi_i = \frac{1}{h}\beta_i, \ i = \overline{1, N-1}.$$

Тогда для нашей задачи получим разностную схему следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{a_i}{h^2}y_{i-1} - \left(\dfrac{a_i + a_{i+1}}{h} + d_i\right)y_i + \dfrac{a_{i+1}}{h^2}y_{i+1} = -\varphi_i, \ i = \overline{1, N-1} \\ y_0 = u_0, \\ y_N = u_1. \end{cases}$$

Выпишем коэффициенты для нашей задачи:

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{h^2}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{7}{(x+1)^2}(x-x_{i-1})^2 dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{7}{(x+1)^2}(x_{i+1}-x)^2 dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{h}\Big[2h - 7\Big(\Big(\frac{(x_{i-1}+1)^2}{x+1} - 2(x_{i-1}+1)\ln(x+1) + x\Big)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} +$$

$$+\Big(\frac{(x_{i+1}+1)^2}{x+1} - 2(x_{i+1}+1)\ln(x+1) + x\Big)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}\Big)\Big],$$

$$\alpha_{ii+1} = \frac{1}{h^2}\left[-h + 7\left(\frac{(x_i+1)(x_{i+1}+1)}{x+1} + \ln(x+1)(x_i + x_{i+1} + 2) - x\right)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}\right],$$

$$\alpha_{ii-1} = \frac{1}{h^2}\left[-h + 7\left(\frac{(x_i+1)(x_{i-1}+1)}{x+1} + \ln(x+1)(x_i + x_{i-1} + 2) - x\right)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}\right],$$

$$\beta_i = \frac{1}{h}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (x+1)(x-x_{i-1})dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (x+1)(x_{i+1}-x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{6h}\Big[x\left(2x^2 - 3x(x_{i-1}-1) - 6x_{i-1}\right)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + x\left(-2x^2 + 3x(x_{i+1}-1) + 6x_{i+1}\right)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}\Big].$$

Данная разностная схема обладает вторым порядком аппроксимации, и для нее сходится метод прогонки, коэффициенты которого имеют вид:

$$\alpha_0 = 0,\ \gamma_0 = 1,\ \beta_0 = 0,\ g_0 = u_0,$$

$$\alpha_i = \frac{a_i}{h^2},\ \gamma_i = -\frac{a_{i+1}+a_i}{h^2} - d_i,\ \beta_i = \frac{a_{i+1}}{h^2},\ g_i = -\varphi_i,$$

$$\alpha_N = 0,\ \gamma_N = 1,\ \beta_N = 0,\ g_N = u_1,$$

где

$$a_i = -h\alpha_{ii-1},\ d_i = \frac{1}{h}(\alpha_{ii-1} + \alpha_{ii} + \alpha_{ii+1},\ \varphi_i = \frac{1}{h}\beta_i,\ i = \overline{1, N-1}.$$

Задача 4

Постановка задачи.

Используя метод разностной прогонки, составить программу решения исходной задачи с помощью разностных схем п.п. 1.-2., выполнить контрольные расчеты на ЭВМ и провести сравнительный анализ результатов.

Решение задачи.

[1]:
```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

from sklearn.metrics import mean_squared_error
```

Метод прогонки для пункта 1.

Внесем в наш код данные нам параметры. Рассматривать функции будем на отрезке $[0, 1]$.

[2]:
```
def q(x):
    return 7 / (x + 1)**2

def f(x):
    return x + 1

def u(x):
    return (x + 1)**3

A, B = 1, 8
a, b, N = 0, 1, 1000
h = (b - a) / N

x = np.linspace(a, b, N + 1)
```

Внесем наши коэффициенты для метода прогонки.

[3]:
```
alpha = [0]
gamma = [1]
beta = [0]
g = [A]

for i in range(1, N):
    alpha.append(1 / h**2)
    gamma.append(-2 / h**2 - q(x[i]))
    beta.append(1 / h**2)
    g.append(-f(x[i]))

alpha.append(0)
gamma.append(1)
```

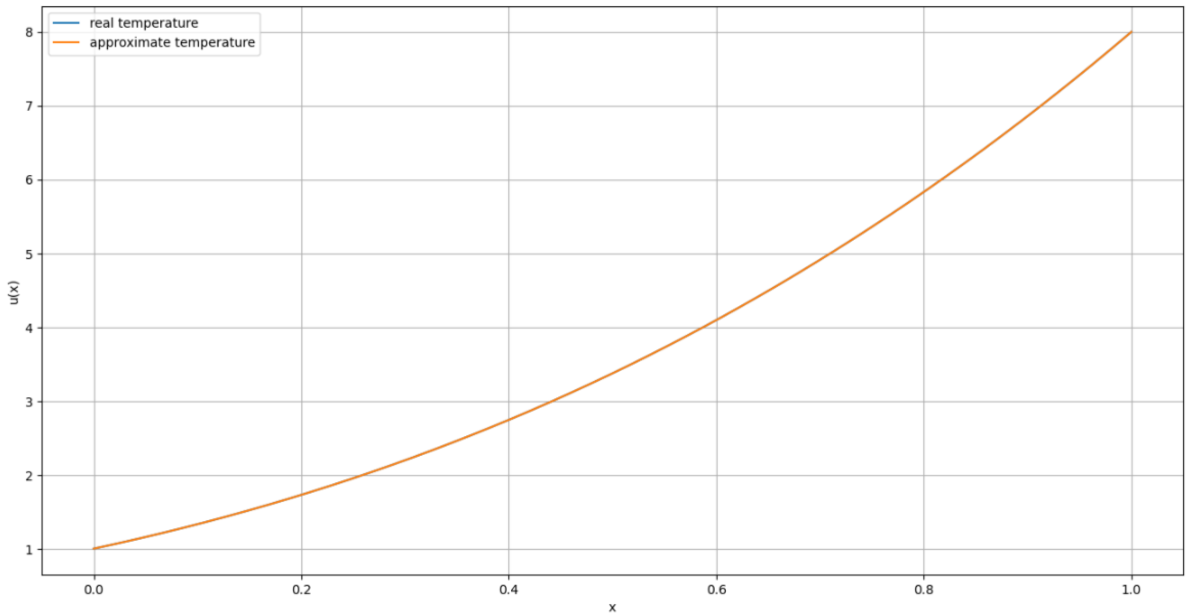
```
beta.append(0)
g.append(B)
```

Реализуем метод прогонки для нашей разностной схемы.

[4]:
```
def tridiagonal_algorithm(a,b,c,f):
    a, b, c, f = tuple(map(lambda k_list: list(map(float, k_list)), (a, b, c,␣
 ↪f)))

    alpha = [-b[0] / c[0]]
    beta = [f[0] / c[0]]
    n = len(f)
    x = [0]*n

    for i in range(1, n):
        alpha.append(-b[i]/(a[i]*alpha[i-1] + c[i]))
        beta.append((f[i] - a[i]*beta[i-1])/(a[i]*alpha[i-1] + c[i]))

    x[n-1] = beta[n - 1]

    for i in range(n - 1, 0, -1):
        x[i - 1] = alpha[i - 1] * x[i] + beta[i - 1]

    return x

u_approx = tridiagonal_algorithm(alpha, beta, gamma, g)
```

Построим графики реального решения и полученного с помощью метода прогонки.

[5]:
```
plt.figure(figsize=(16, 8))
plt.plot(x, u(x), label='real temperature')
plt.plot(x, u_approx, label='approximate temperature')
plt.grid(True)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('u(x)')
plt.legend()
plt.show()
```



Графики получились идентичными, для того, чтобы в этом убедиться, посчитаем средний квадрат ошибки, который вычисляется следующим образом:

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} u(x_i) - \hat{u}(x_i),$$

где $u(x_i)$– точное решение, $\hat{u}(x_i)$– приближенное решение.

[6]:
```
mean_squared_error(u(x), u_approx)
```

[6]: 7.600835806367376e-25

И правда, ошибка у нас равна крайне малому значению, что позволяет сделать вывод о том, что решение, полученное методом прогонки является достаточно качественным.

Метод прогонки для пункта 2.

Внесем все полученные коэффициенты, используемые в разностной схеме, полученной методом баланса.

[18]:
```
def d_i(x, h):
    return -7 / h * (1 / (x + h / 2 + 1) - 1 / (x - h / 2 + 1))

def phi_i(x, h):
    return 1 / h * (x - h / 2 - x - h / 2 + ((x - h / 2)**2 - (x + h / 2)**2) /
 ↪2)
```

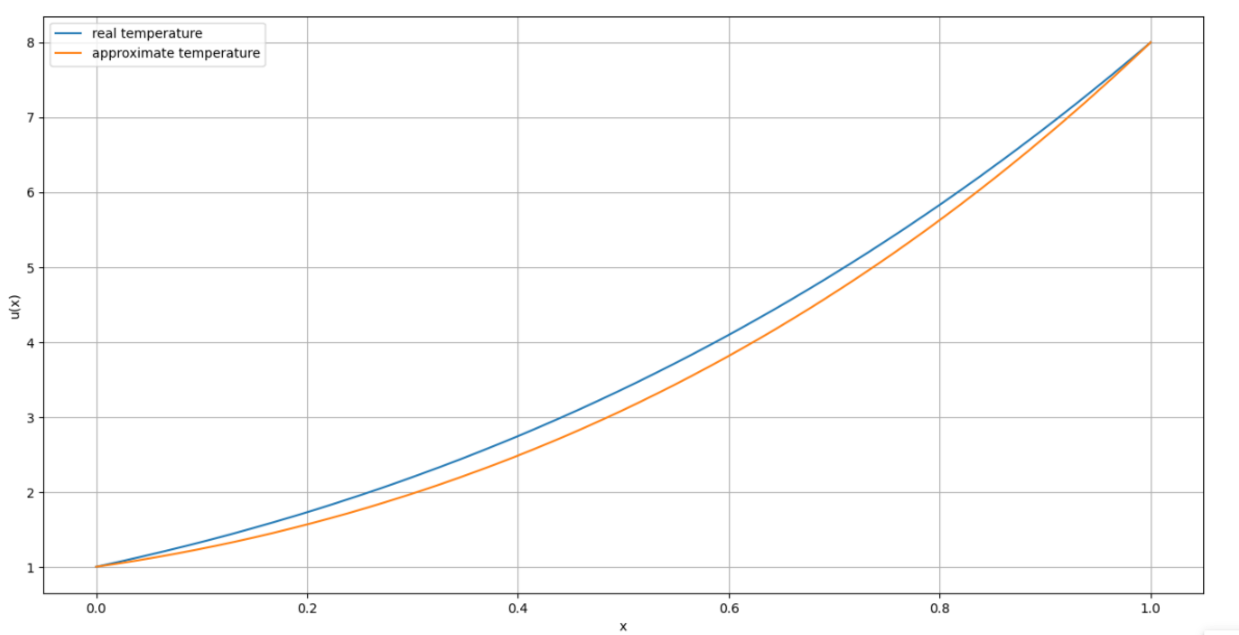
Зададим коэффициенты метода прогонки

[42]:
```
alpha = [0]
gamma = [1]
```

```
beta = [0]
g = [A]

for i in range(1, N):
    alpha.append(1 / h**2)
    gamma.append(- (2) / h**2 - d_i(x[i], h))
    beta.append(1 / h**2)
    g.append(-phi_i(x[i], h))

alpha.append(0)
gamma.append(1)
beta.append(0)
g.append(B)
```

Перейдем к визуализации.

[43]:
```
u_approx = tridiagonal_algorithm(alpha, beta, gamma, g)

plt.figure(figsize=(16, 8))
plt.plot(x, u(x), label='real temperature')
plt.plot(x, u_approx, label='approximate temperature')
plt.grid(True)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('u(x)')
plt.legend()
plt.show()
```



Видно, что кривые немного отличаются. Для того, чтобы оценить эту неточность, посчитаем, анлогично первому пункту, MSE.

[45]:
```
mean_squared_error(u(x), u_approx)
```

[45]: 0.04293360244618271

Из этого можно сделать вывод о том, что метод прогонки для разностной схемы, построенной методом баланса, работает неплохо, но не идеально.

Вывод

По полученным результатам можно сделать вывод, что метод прогонки для пункта 1 позволяет найти более точное решение, чем для пункта 2. На это указывает как график, так и выбранная метрика.