МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и инворматики
Кафедра информационных систем управления

Отчет по лабораторной работе 7-8
Вариант 5

Выполнил:
Карпович Артём Дмитриевич
студент 3 курса 7 группы

Преподаватель:
Кваша Дарья Юрьевна

Минск, 2024

Задачи теории игр

Задача 1

Найти решение игры, заданной матрицей A_5:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

Решением матричной игры в чистых стратегиях называется пара чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игроков, которые образуют седловую точку матрицы A: $a_{ij_0} \le a_{i_0j_0} \le a_{i_0j}, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$.

Решением матричной игры в смешанных стратегиях называют пару смешанных стратегий (p_0, q_0), которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е.

$$E_A(p, q^0) \le E_A(p^0, q^0) \le E_A(p^0, q), p \in \Sigma_m, q \in \Sigma_n.$$

[1]:
```
import numpy as np

A = np.array([[-1, 3],
              [7, -2]])

row_min = np.min(A, axis=1)
column_max = np.max(A, axis=0)

row_min_max = np.max(row_min)
column_max_min = np.min(column_max)

if row_min_max == column_max_min:
    print("Седловая точка найдена: ", row_min_max)
else:
    print("Седловая точка не найдена.")
```

```
Седловая точка не найдена.
```

Результатом стало то, что седловой точки в этой задаче нет, тогда цена игры находится в пределах $-1 \le y \le 3$. Находим решение игры в смешанных стратегиях. Объясняется это тем, что игроки не могут объявить противнику свои чистые стратегии: им следует скрывать свои действия. Игру можно решить, если позволить игрокам выбирать свои стратегии случайным образом (смешивать чистые стратегии). Так как игроки выбирают свои чистые стратегии случайным образом, то выигрыш игрока I будет случайной величиной. В этом случае игрок I должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить максимальный средний выигрыш. Аналогично, игрок II должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать математическое ожидание игрока I.

Запишем систему уравнений. Для игрока I

$$-p_1 + 7p_2 = y,$$

$$3p_1 - 2p_2 = y,$$

$$p_1 + p_2 = 1.$$

Для игрока II

$$-q_1 + 3q_2 = y,$$

$$7q_1 - 2q_2 = y,$$

$$q_1 + q_2 = 1.$$

Решая эту систему получим следующее

$$v = \frac{19}{13} \ - \text{ стоимость игры,}$$

$$p_1 = \frac{9}{13} \ - \text{ вероятность применения 1-ой стратегии,}$$

$$p_2 = \frac{4}{13} \ - \text{ вероятность применения 2-ой стратегии.}$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока $I : P = (\frac{9}{13}; \frac{4}{13})$.

$$q_1 = \frac{5}{13} \ - \text{ вероятность применения 1-ой стратегии,}$$

$$q_2 = \frac{8}{13} \ - \text{ вероятность применения 2-ой стратегии.}$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока $II : Q = (\frac{5}{13}; \frac{8}{13})$.

Задача 2

Найдите решение игр, заданных матрицами $A_{5,1}$ и $A_{5,2}$:

$$A_{5,1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \ A_{5,2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

[18]:
```
import numpy as np

A1 = np.array([[4, 0, 2, 1],
               [-2, 5, -3, -1]])

row_min = np.min(A1, axis=1)
column_max = np.max(A1, axis=0)

row_min_max = np.max(row_min)
column_max_min = np.min(column_max)

if row_min_max == column_max_min:
    print("Седловая точка задачи 1 найдена: ", row_min_max)
else:
```

```
    print("Седловая точка задачи 1 не найдена.")

A2 = np.array([[2, 4],
               [6, -2],
               [4, 2]])

row_min = np.min(A1, axis=1)
column_max = np.max(A1, axis=0)

row_min_max = np.max(row_min)
column_max_min = np.min(column_max)

if row_min_max == column_max_min:
    print("Седловая точка задачи 2 найдена: ", row_min_max)
else:
    print("Седловая точка задачи 2 не найдена.")
```

```
Седловая точка задачи 1 не найдена.
Седловая точка задачи 2 не найдена.
```

Не удалось найти седловую точку ни в одной из задач, соответственно, необходимо искать решение в смешанных стратегиях.

Начнем с первой задачи, составим для нее следующие системы Для игрока I:

$$4p_1 - 2p_2 = y,$$

$$5p_2 = y,$$

$$2p_1 - 3p_2 = y,$$

$$p_1 - p_2 = y,$$

$$p_1 + p_2 = 1.$$

Для игрока II

$$4q_1 + 2q_3 + q_4 = y$$

$$-2q_1 + 5q_2 - 3q_3 - q_4 = y$$

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$$

Применим симплекс-метод и получим, что оптимальная смешанная стратегия игрока $I : P = (\frac{6}{7}; \frac{1}{7})$ Оптимальная смешанная стратегия игрока $II : Q = (0; \frac{2}{7}; 0; \frac{5}{7})$ Цена игры: $v = \frac{5}{7}$

Запишем систему уравнений для второй задачи. Для игрока I :

$$2p_1 + 6p_2 + 4p_3 = y$$

$$4p_1 - 2p_2 + 2p_3 = y$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Для игрока II :

$$2q_1 + 4q_2 = y$$

$$6q_1 - 2q_2 = y$$

$$4q_1 + 2q_2 = y$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

Применим симплекс-метод и получим, что оптимальная смешанная стратегия игрока $I : p = (\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$ Оптимальная смешанная стратегия игрока $II : q = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ Цена игры: $y = 3$.

Задача 3. Планирование посева

- Фермеру необходимо определить, в каких пропорциях засеять свое поле 5 культурами, если урожайность этих культур, а, значит, и прибыль, зависят от того, каким будет лето: прохладным и дождливым, нормальным, или жарким и сухим;
- Фермер подсчитал чистую прибыль с 1 га от разных культур в зависимости от погоды:

	погода 1	погода 2	погода 3	погода 4	погода 5
Культура 1	2	3	5	4	2
Культура 2	4	3	2	2	4
Культура 3	3	2	4	3	3
Культура 4	2	3	2	4	4
Культура 5	3	4	3	3	2

- Здесь у фермера нет реального противника;
- Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия;
- Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия, то можно считать Природу активным субъектом, который пытается создать наихудшую (с точки зрения фермера) погоду;
- В таком случае, мы можем смоделировать задачу фермера как матричную игру, в которой фермер является игроком 1, а Природа — игроком 2;
- Матрица А выигрышей в данной игре — это таблица доходов фермера.

Задание: сведите матричную игру к задаче ЛП; создайте модель в AMPL; создайте файл данных для своего варианта; решите пример; в отчет включите файлы и ответ

4	5	2	1	5
5	3	5	2	3
1	2	2	3	2
4	4	1	4	3
1	1	3	1	1

Запишем эту матрицу как задачу ЛП:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to max$$

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 \leq 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 1$$

$$4x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Построим модель в AMPL:

```
reset;
set I;
set J;
param M {I, J};
var X{J} >= 0;
var v;

maximize game: v;
subject to constraints {i in I}:
        v - sum {j in J} M[j, i]*X[j] <= 0;

subject to probability:
        sum {j in J} X[j]=1;

data;

set I := 1 2 3 4 5;
set J := 1 2 3 4 5;
param M:
    1   2   3   4   5:=
1   4   5   2   1   5
2   5   3   5   2   3
3   1   2   2   3   2
4   4   4   1   4   3
5   1   1   3   1   1;

option solver cplex;

solve;
print 'Стоимость игры';
display v;
print 'Оптимальная смешанная стратегия игрока 1';
display X;
```

Результат работы:

```
ampl: include Lab8.run
CPLEX 22.1.1.0: optimal solution; objective 3
3 dual simplex iterations (3 in phase I)
Стоимость игры
v = 3

Оптимальная смешанная стратегия игрока 1
X [*] :=
1  0
2  0.5
3  0
4  0.5
5  0
;
```

Таким образом, мы получили, что стоимость игры $v = 3$, а оптимальная смешанная стратегия игрока $I : p = [0, 0.5, 0, 0.5, 0]$.

Задание 4

Магазин имеет некоторый запас товаров ассортиментного минимума. Если запас товаров недостаточен, то необходимо завести его с базы; если запас превышает спрос, то магазин несет расходы по хранению нереализованного товара. Пусть спрос на товары лежит в пределах S $5 \leq S \leq 8$ единиц, расходы по хранению одной единицы товара составляют c руб., а расходы по завозу единицы товара k руб., цена за единицу товара составляет p руб. Составить платежную матрицу, элементами которой является прибыль магазина (доход от продажи с учетом расходов по хранению или по завозу). Определить оптимальную стратегию магазина по завозу товаров, используя критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица при $\alpha = 0.5$, Лапласа.

$$\boxed{p = 410, c = 50, k = 80}$$

В игре участвуют 2 игрока: А – магазин, П – покупатель (природа). Игрок А стремится реализовать свою продукцию так, чтобы получить максимальную прибыль.

Стратегиями игрока А являются:
А1 – реализовывать товар в расчете на спрос в 5 единиц;
А2 – реализовывать товар в расчете на спрос в 6 единиц.;
А3 – реализовывать товар в расчете на спрос в 7 единиц;
А4 – реализовывать товар в расчете на спрос в 8 единиц.

Состояния природы П могут быть следующими:
П1 – спрос на товар в 5 единиц;
П2 – спрос на товар в 6 единиц;
П3 – спрос на товар в 7 единиц;
П4 – спрос на товар в 8 единиц.

Рассчитаем элементы платежной матрицы (прибыль магазина, руб.):

Стратегии игрока А

Стратегии	A1	A2	A3	A4
5 ед.	$5 \cdot 410 - 5 \cdot 80 = 1650$	$5 \cdot 410 - 5 \cdot 80 = 1650$	$5 \cdot 410 - 5 \cdot 80 = 1650$	$5 \cdot 410 - 5 \cdot 80 = 1650$
6 ед.	$5 \cdot 410 - (6 \cdot 80 + 1 \cdot 50) = 1520$	$6 \cdot 410 - (6 \cdot 80) = 1980$	$6 \cdot 410 - (6 \cdot 80) = 1980$	$6 \cdot 410 - (6 \cdot 80) = 1980$
7 ед.	$5 \cdot 410 - (7 \cdot 80 + 2 \cdot 50) = 1390$	$6 \cdot 410 - (7 \cdot 80 + 1 \cdot 50) = 1850$	$7 \cdot 410 - 7 \cdot 80 = 2310$	$7 \cdot 410 - 7 \cdot 80 = 2310$
8 ед.	$5 \cdot 410 - (8 \cdot 80 + 3 \cdot 50) = 1260$	$6 \cdot 410 - (8 \cdot 80 + 2 \cdot 50) = 1720$	$7 \cdot 410 - (7 \cdot 80 + 1 \cdot 50) = 2260$	$8 \cdot 410 - 8 \cdot 80 = 2640$

Стратегии	П1	П2	П3	П4
A1	1650	1650	1650	1650
A2	1520	1980	1980	1980
A3	1390	1850	2310	2310
A4	1260	1720	2260	2640

Окончательно, платежная матрица примет вид Найдем седловую точку.

$$\alpha(A) = \max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} = 1650$$

$$\beta(A) = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le n} a_{ij} = 1650.$$

Соответственно мы нашли седловую точку $(1;1)$, цена игры в этой точке $v = 1650$. Значит, оптимальное решение $(A1; \Pi 1)$.

Магазин (игрок А) получит гарантированную прибыль в размере 1650 руб. , если будет реализовывать свою продукцию при реализации товара в расчете на спрос в 5 ед. Применим различные критерии для решения задачи.

Критерий Лапласа

Вероятность состояний природы оценивается субъективно как равнозначные.

$$q_i = \frac{1}{n}$$

$$\sum q_i = \sum \frac{1}{n} = 1.$$

Этот принцип называется — принцип недостаточного основания Лапласа. В нашем случае $q_i = \dfrac{1}{4}$

Стратегии	П1	П2	П3	П4	$\frac{1}{n}\sum a_{ij}$
A1	1650	1650	1650	1650	1650
A2	1520	1980	1980	1980	1865
A3	1390	1850	2310	2310	1965
A4	1260	1720	2260	2640	1970

Для определения оптимальной стратегии выбираем

$$L = \max_{i \in \{1,\dots,m\}} \frac{1}{n} \sum a_{ij} = 1970 \Rightarrow \textbf{Выбираем стратегию A4}.$$

Критерий Вальда

Критерий Вальда (критерий гарантированного результата, максиминный критерий) позволяет выбрать наибольший элемент матрицы доходности из её минимально возможных элементов

$$W = \max_i \min_j a_{ij}$$

Критерий Вальда предназначен для выбора из рассматриваемых вариантов стратегий варианта с наибольшим показателем эффективности из минимально возможных показателей для каждого из этих вариантов. Для определения оптимальной стратегии выбираем

Стратегии	П1	П2	П3	П4	$\min a_{ij}$
A1	1650	1650	1650	1650	1650
A2	1520	1980	1980	1980	1520
A3	1390	1850	2310	2310	1390
A4	1260	1720	2260	2640	1260

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = 1650 \Rightarrow \textbf{Выбираем стратегию A1}.$$

Критерий Сэвиджа

Критерий Сэвиджа (критерий минимаксного риска Сэвиджа) предназначен для выбора максимального элемента матрицы рисков из её минимально возможных элементов:

$$S = \min_i \max_j r_{ij},$$

где

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}.$$

Построим матрицу рисков

Стратегии	П1	П2	П3	П4	$\max r_{ij}$
A1	0	330	660	990	990
A2	130	0	330	660	660
A3	260	130	0	330	330
A4	390	260	50	0	390

Для определения оптимальной стратегии выбираем

$$S = \min_i \max_j r_{ij} = 330 \Rightarrow \textbf{Выбираем стратегию A3}.$$

Критерий Гурвица.

Критерий Гурвица (взвешивает пессимистический и оптимистический подходы к анализу неопределенной ситуации) предназначен для выбора некоторого среднего элемента матрицы доходности, отличающегося от крайних состояний – от минимального и максимального элементов:

$$H = \max_i (\lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \min_j a_{ij}),$$

Стратегии	П1	П2	П3	П4	$0.5 \cdot \max_j a_{ij} + 0.5 \cdot \min_j a_{ij}$
A1	1650	1650	1650	1650	1650
A2	1520	1980	1980	1980	1750
A3	1390	1850	2310	2310	1850
A4	1260	1720	2260	2640	1950

где λ — коэффициент оптимизма, $0 \leq \lambda \leq 1$, в нашем случае он равен $\lambda = 0.5$.

Для определения оптимальной стратегии выбираем

$$H = \max_i \left(\lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1-\lambda) \cdot \min_j a_{ij}\right) = 1950 \Rightarrow \textbf{Выбираем стратегию A4}.$$