



تمرینات سری ۳

تمرینات برنامه‌نویسی پویا (dynamic programming):

۱- ثابت کنید الگوریتم بازگشتی فیبوناچی دارای زمان $O(2^n)$ است.

۲- الگوریتم چاپ مسیر در مسئله برنامه‌ریزی خط تولید کارخانه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

```
PRINT-STATIONS (l, n)
1  i ← l*
2  print "line " i ", station " n
3  for j ← n downto 2
4      do i ← li[j]
5      print "line " i ", station " j - 1
```

این الگوریتم را طوری تغییر دهید که ایستگاه‌ها را به ترتیب صعودی چاپ نماید. (راهنمایی: الگوریتم را بازگشتی بنویسید)

۳- فضای لازم برای محاسبه f^* و l^* مجموعاً $4n + 2$ است. آیا می‌توان این فضا را به $2n + 2$ کاهش داد؟ چگونه؟

۴- ماتریس‌هایی با ابعاد زیر داریم. ضمن تعیین حداقل تعداد ضرب‌های ممکن، با پرانتز گذاری، ترتیب ضرب بهینه را مشخص نمایید. (با ارائه مراحل کامل راه‌حل)

| | |
|-------|----|
| p_0 | 5 |
| p_1 | 10 |
| p_2 | 3 |
| p_3 | 12 |
| p_4 | 5 |
| p_5 | 50 |
| p_6 | 6 |

۵- می‌خواهیم حداکثر تعداد ضرب‌ها برای محاسبه حاصل ضرب یک دنباله از ماتریسها را بدست آوریم. آیا این مسئله با dynamic programming قابل حل است؟ توضیح دهید و یک مثال بزنید.

۶- بزرگترین زیر رشته مشترک (LCS) را برای $\langle 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1 \rangle$ و $\langle 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0 \rangle$ را با استفاده از روش پویا و با ذکر مراحل بیابید.

۷- نشان دهید که چگونه می‌توان طول LCS دو رشته به طولهای m و n را با جدولی به اندازه $2 \times (m, n)$ به جای $m \times n$ محاسبه نمود. آیا می‌توان این فضا را باز هم کاهش داد؟

۸- الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $O(n^2)$ طولانی‌ترین زیر دنباله اکیدا یکنواخت را در یک دنباله از اعداد بیابد.

۹- برای رسم درخت دودویی بهینه نیاز است تا علاوه بر محاسبه و نگهداری مقادیر w و هزینه بهینه (e)، بهترین ریشه در هر زیر مسئله که منجر به هزینه بهینه شده است نیز نگهداری شود. این جدول را root می‌نامیم. الگوریتم فرایندی به نام ConstructOptimalBest(root) را که مسئول تولید این درخت است را بنویسید. خروجی باید به صورت زیر باشد:

k_2 is the root
 k_1 is the left child of k_2
 d_0 is the left child of k_1
 d_1 is the right child of k_1
 k_5 is the right child of k_2
 k_4 is the left child of k_5
 k_3 is the left child of k_4
 d_2 is the left child of k_3
 d_3 is the right child of k_3
 d_4 is the right child of k_4
 d_5 is the right child of k_5

۱۰- درخت دودویی بهینه و هزینه آن را برای ۷ کلیدی که فرکانس‌های آنها به صورت زیر تعریف شده است را بیابید (با توصیف مراحل)

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|------|------|------|------|------|------|-------|------|
| p_i | | 0.04 | 0.06 | 0.08 | 0.02 | 0.10 | 0.012 | 0.14 |
| q_i | 0.06 | 0.06 | 0.06 | 0.06 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 |