برنامه‌نویسی پویا

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

ضرب چهار ماتریس زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \times & B & \times & C & \times & D \\ 20 \times 2 & & 2 \times 30 & & 30 \times 12 & & 12 \times 8 \end{array}$$

ابعاد هر ماتریس در زیر آن نشان داده شده است.

اپراتور ضرب ماتریس‌ها ویژگی انجمنی (associative) دارد.

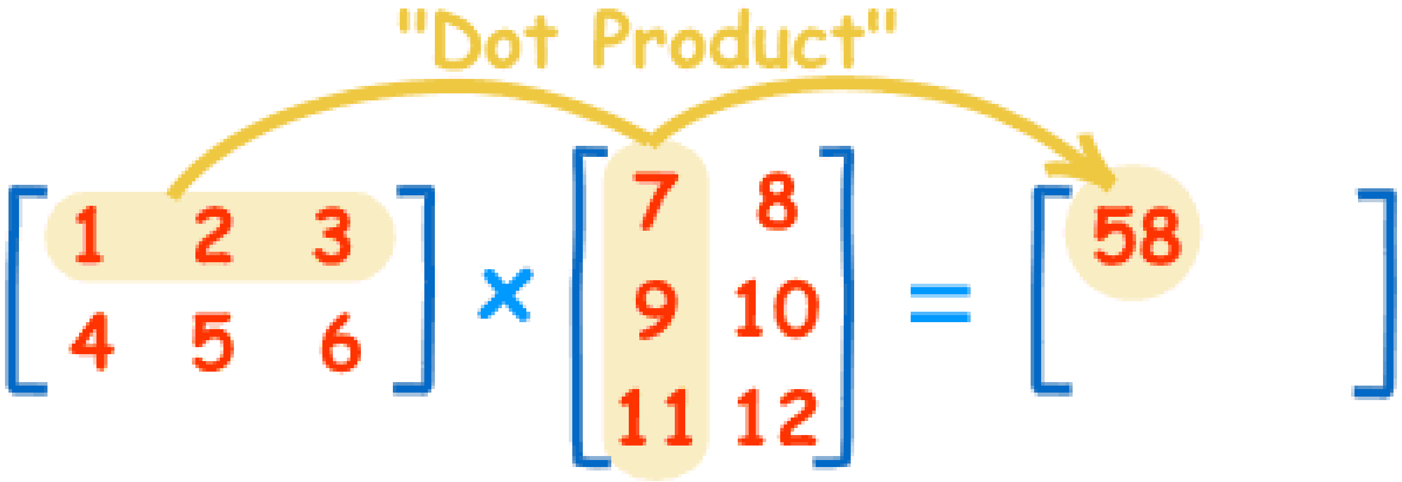
ویژگی انجمنی به این معنا است که ترتیب ضرب در نتیجه حاصل تاثیری ندارد.

برای مثال $A(B(CD))$ و $(AB(CD))$ هر دو نتیجه یکسانی دارند.

چهار ماتریس را با پنج ترتیب متفاوت می‌توان در هم ضرب کرد.

هر ترتیب ضرب تعداد عملیات ضرب پایه‌ای متفاوتی خواهد داشت.

ضرب دو ماتریس



$A_{p\times q}$ $B_{q\times r}$ $C_{p\times r}$

$$C[i,j]=\sum_{k=1}^{q}A[i,k]*B[k,j]$$

ضرب دو ماتریس

Input: Matrices $A_{p\times q}$ and $B_{q\times r}$ (with dimensions $p \times q$ and $q \times r$)

Result: Matrix $C_{p\times r}$ resulting from the product $A{\cdot}B$

```
MATRIX-MULTIPLY(A_{p×q}, B_{q×r})
    for i ← 1 to p
        for j ← 1 to r
            C[i, j] ← 0
            for k ← 1 to q
                C[i, j] ← C[i, j] + A[i, k] × B[k, j]
    return C
```

تعداد ضرب‌های پایه‌ای مورد نیاز برای ضرب دو ماتریس

$$A_{3\times100} \times B_{100\times5}$$

- چندتا است ؟

$$3 \times 100 \times 5 = 1500$$

- برای ضرب زیر چطور ؟

$$A_{2\times500} \times B_{500\times1}$$

$$2 \times 500 \times 1 = 1000$$

ابعاد ماتریس حاصل در ضرب زنجیره‌ای

$$\begin{array}{ccccccc} A & \times & B & \times & C & \times & D \\ 20 \times 2 & & 2 \times 30 & & 30 \times 12 & & 12 \times 8 \end{array}$$

- ضرب فوق را در نظر بگیرید.
- اگر ترتیب ضرب این باشد:

$$\big((A \times B) \times (C \times D)\big)$$

- ماتریس حاصل چند بعدی است ؟
  - ✓ 20×8
- اگر ترتیب ضرب این باشد:

$$\big((A \times (B \times C)) \times D\big)$$

- ماتریس حاصل چند بعدی است ؟
  - ✓ 20×8

تعداد ضرب‌های پایه‌ای مورد نیاز در یک زنجیره

- مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$A_{3\times100} \times B_{100\times5} \times C_{5\times5}$$

- برای انجام آن دو راه وجود دارد:

✓ $A \times (B \times C)$

✓ $(A \times B) \times C$

- تعداد ضرب‌های پایه‌ای لازم برای مجاسبه حاصل در هر حالت، چقدر است؟

✓ $1500 + 2500 = 4000$

✓ $1500 + 75 = 1575$

تعداد ضرب‌های پایه‌ای مورد نیاز در یک زنجیره

- برای این پنج ماتریس تعداد عملیات‌های پایه‌ای ضرب آورده شده است.

$$\begin{array}{ccccccc} A & \times & B & \times & C & \times & D \\ 20\times 2 & & 2\times 30 & & 30\times 12 & & 12\times 8 \end{array}$$

$A(B(CD))$	$30\times 12\times 8 + 2\times 30\times 8 + 20\times 2\times 8 = 3,680$
$(AB)(CD)$	$20\times 2\times 30 + 30\times 12\times 8 + 20\times 30\times 8 = 8,880$
$A((BC)D)$	$2\times 30\times 12 + 2\times 12\times 8 + 20\times 2\times 8 = 1,232$
$((AB)C)D$	$20\times 2\times 30 + 20\times 30\times 12 + 20\times 12\times 8 = 10,320$
$(A(BC))D$	$2\times 30\times 12 + 20\times 2\times 12 + 20\times 12\times 8 = 3,120$

نمایش جدولی ابعاد

- در مسئله ضرب زنجیره‌ای، از آنجا که قصد ما انجام خود ضرب نیست، مسئله ضرب مثال قبل را می‌توان با یک جدول نشان داد.

$$A_{3\times100} \times B_{100\times5} \times C_{5\times5}$$
$$A_{p_0\times p_1} \times B_{p_1\times p_2} \times C_{p_2\times p_3}$$
$$A1_{p_0\times p_1} \times A2_{p_1\times p_2} \times A3_{p_2\times p_3}$$

p_0	3
p_1	100
p_2	5
p_3	5

- در این صورت، تعداد ضرب‌های لازم برای ضرب دو ماترس A_iA_{i+1} در یک دونباله به صورت زیر است:

$$p_{i-1}p_ip_{i+1}$$

- همینطور ابعاد ماتریس حاصل از دنباله $A_i \dots A_j$ به صورت زیر است:

$$p_{i-1} \times p_j$$

مسئله ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- می‌خواهیم تعدادی ماتریس را درهم ضرب کنیم.
- چندین راه (ترتیب) برای این کار وجود دارد.
- در هر ترتیب تعداد ضرب‌های پایه‌ای لازم متفاوت است.
- در مسئله ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها، می‌خواهیم ترتیبی با کمترین تعداد ضرب‌های پایه‌ای را بیابیم.
- می‌توان همه ترتیب‌های ممکن را لیست کرده و تعداد ضرب‌های لازم در هر کدام را محاسبه نموده و سپس ترتیبی با کمترین ضرب پایه‌ای لازم را انتخاب کنیم (جستجوی brute force).
- آیا این راه‌حل مناسب است؟

حل با جستجوی brute force

- برای زنجیره‌ای با n ماتریس، چند ترتیب ممکن ($f(n)$) وجود دارد؟
  - ✓ دنباله‌ای با 5 ماتریس را در نظر بگیرید:

$$(A_1)(A_2A_3A_4A_5) \rightarrow k = 1$$
$$(A_1A_2)(A_3A_4A_5) \rightarrow k = 2$$
$$(A_1A_2A_3)(A_4A_5) \rightarrow k = 3$$
$$(A_1A_2A_3A_4)(A_5) \rightarrow k = 4$$

در اینجا می‌توان دید که مسئله ماهیت بازگشتی دارد.

- ✓ $f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \times f(n-k)$
- ✓ $f(n) = \Omega(2^n)$

پس این راه‌حل مناسب نیست.

راه‌حل بازگشتی

- می‌خواهیم ترتیب ضرب بهینه‌ی n ماتریس $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ را پیدا کنیم.
- یعنی بررسی کنیم چگونه پرانتزگذاری شود که تعداد عمل ضرب مینیمم شود.

توصیف راه بازگشتی

- فرض می‌کنیم:
  - ✓ ماتریس A_i دارای ابعاد $p_{i-1}p_i$ می‌باشد.
    - مثلاً ماتریس A_1 یک ماتریس p_0p_1 می باشد.
- همچنین فرض می‌کنیم:
  - ✓ m_{ij} حداقل تعداد عملیات ضرب پایه برای محاسبه دنباله $A_i \times A_{i+1} \times \cdots \times A_j$ می باشد.
    - مثلاً m_{13} یعنی حداقل تعداد ضرب ماتریس های $A_1 \times A_2 \times A_3$
- به این ترتیب حداقل تعداد عملیات ضرب پایه برای مسئله کلی $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$ با m_{1n} نشان داده می‌شود.
- حالت اولیه مسئله بازگشتی زمانی اتفاق می‌افتد که زنجیره فقط حاوی یک ماتریس باشدیعنی:
  - ✓ $i = j$
  - ✓ که در آن صورت ضربی انجام نمی‌شود یعنی: $m_{ij} = 0$

- برای محاسبه ی m_{ij} فرض کنید ضرب $A_i \times A_{i+1} \times \cdots \times A_j$ را به صورت زیر نوشته‌ایم:

$$(A_i \times \cdots \times A_k).(A_{k+1j} \times \cdots \times A_j)$$

- تعداد ضرب‌های پایه در این حالت:

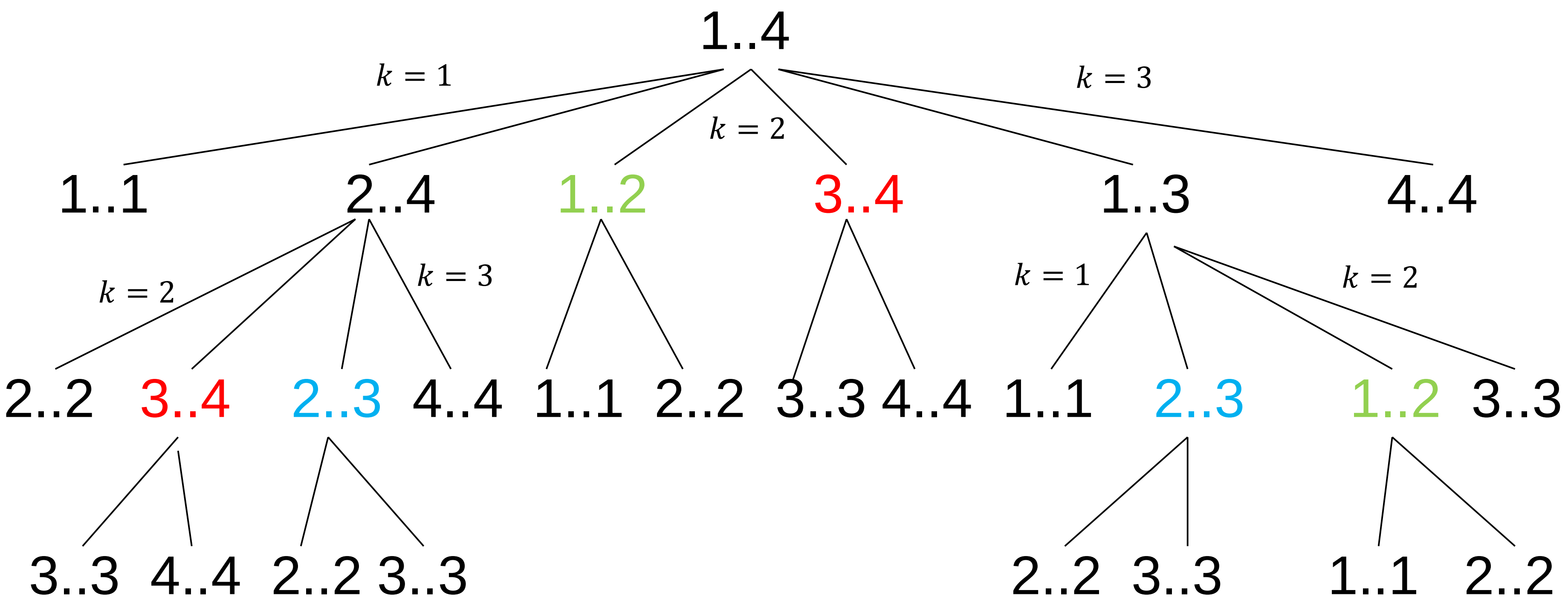
$$m_{ik} + m_{k+1,j} + p_{i-1} \times p_k \times p_j$$

- بنابراین m_{ij} از رابطه ی زیر به دست می‌آید:

$$m_{ij} = \min_k (m_{ik} + m_{k+1,j} + p_{i-1} \times p_k \times p_j)$$

- در این رابطه
  - ✓ m_{ik} تعداد حداقل ضرب لازم برای $A_i \times \cdots \times A_k$،
  - ✓ $m_{k+1,j}$ تعداد حداقل ضرب لازم برای $A_{k+1} \times \cdots \times A_j$ و
  - ✓ $p_{i-1} \times p_k \times p_j$ تعداد ضرب لازم برای ضرب دو ماتریس حاصل می‌باشد.

برنامه نویسی پویا



- ساختار بهینه قابل تعریف است.
- تکرار در حل زیرمسائل وجود دارد.
- پس سعی می‌کنیم مسئله را به صورت پایین به بالا حل کنیم.
- با چه ترتیبی ؟

برنامه نویسی پویا

- برگردیم به رابطه بازگشتی

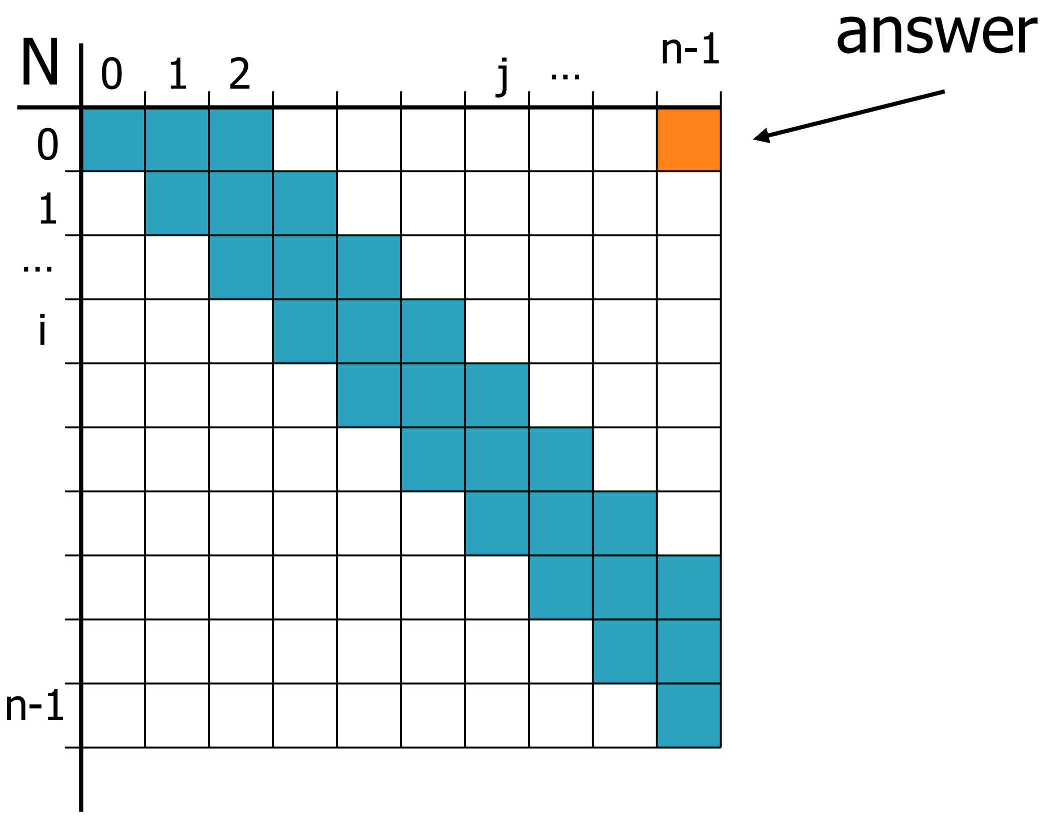
$$m_{ij} = \min_k \left(m_{ik} + m_{k+1,j} + p_{i-1} \times p_k \times p_j \right)$$

- پس براساس این رابطه، برای محاسبه هر جمله، کدام جملات را باید داشته باشیم؟
  - ✓ تمام جملاتی با طول کمتر
- مثلا:

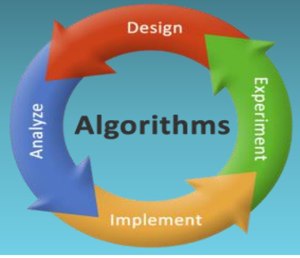
✓ $m_{24} = \min_k \left(m_{2k} + m_{k+1,4} + p_1 \times p_k \times p_4 \right)$

- $K = 2 \rightarrow m_{22}, m_{34}$
- $K = 3 \rightarrow m_{22}, m_{34}$

$$m_{ij} = \min_{k}\left(m_{ik} + m_{k+1,j} + p_{i-1} \times p_k \times p_j\right)$$



مثال



- مسئله زیر را در نظر بگیرید:

p_0	10
p_1	20
p_2	50
p_3	1
p_4	100

- یعنی می‌خواهیم ترتیبی را بیابیم که با کمترین تعداد ضرب پایه، حاصل ضرب ماتریس‌های ما A_1 و A_2 و A_3 و A_4 به ترتیب با ابعاد 20×10 و 10×50 و 50×20 و 1×50 و 100×1 را محاسبه نماید.

مثال

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = m_{44} = 0$$

$$m_{12} = min(m_{11} + m_{22} + 10 \times 20 \times 50)_{=10000}$$
$$m_{23} = min(m_{22} + m_{33} + 20 \times 50 \times 1)_{=1000}$$
$$m_{34} = min(m_{33} + m_{44} + 50 \times 1 \times 100)_{=5000}$$

$$m_{13} = min\begin{pmatrix} m_{11} + m_{23} + 10 \times 20 \times 1, \\ m_{12} + m_{33} + 10 \times 50 \times 1 \end{pmatrix}_{=1200}$$
$$m_{24} = min\begin{pmatrix} m_{22} + m_{34} + 20 \times 50 \times 100, \\ m_{23} + m_{44} + 20 \times 1 \times 100 \end{pmatrix}_{=3000}$$

مثال

$$m_{14} = min\begin{pmatrix} m_{11} + m_{24} + 10 \times 20 \times 100, \\ m_{12} + m_{34} + 10 \times 50 \times 100, \\ m_{13} + m_{44} + 10 \times 1 \times 100 \end{pmatrix} = 2200$$

خلاصه ی عملیات فوق در جدول زیر آمده است:

مرحله ی ۰	$m_{11} = 0$	$m_{22} = 0$	$m_{33} = 0$	$m_{44} = 0$
مرحله ی ۱	$m_{12} = 10000$	$m_{23} = 1000$	$m_{34} = 5000$	
مرحله ی ۲	$m_{13} = 1200$	$m_{24} = 3000$		
مرحله ی ۳	$m_{14} = 2200$			

مثال

- آرایه‌ی m برای مثال قبل عبارت است از:
  - ✓ که m[1][4]=2200 تعداد حداقل ضرب چهار ماتریس گفته شده را نشان می‌دهد.

$$m = \begin{bmatrix} 0 & 10000 & 1200 & 2200 \\ & 0 & 1000 & 3000 \\ & & 0 & 5000 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

- برای تعیین ترتیب ضرب بهینه ماتریس‌ها، آرایه‌ی دیگری به نام p که ابعاد آن برابر ابعاد m است تعریف می‌کنیم و هر بار مقدار k را که به ازای آن m_{ij} مینیمم شد در محل p_{ij} ذخیره می‌کنیم.
- در مثال ضرب $M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4$ دیدیم m_{14} از رابطه‌ی زیر بدست آمد:

$$m_{14} = min(23000{,}65000, 2200)_{=2200}$$

$$k = 1 \quad k = 2 \quad k = 3$$

مثال

- یعنی مینیمم ضرب m_{14} به ازای k=3 به دست آمد.
  - ✓ یعنی $(M_1 \times M_2 \times M_3).(M_4)$
- حال برای اینکه ببینیم نقطه شکست $M_1 \times M_2 \times M_3$ کجاست به m_{14} نگاه می‌کنیم:

$$m_{14} = min(1200,10500)=1200$$

$$k = 1 \quad k = 2$$

- پس نقطه شکست $M_1 \times M_2 \times M_3$، $k = 1$ است.
  - ✓ یعنی $(M_1).(M_2 \times M_3)$
- ماتریس p به صورت مقابل می‌باشد:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ & 2 & 3 \\ & & 3 \\ & & \end{bmatrix}$$

جمع‌بندی راه‌حل پویا

- ❑ به طور کلی مراحل زیر باید انجام شوند تا به m_{1n} برسیم:

- ❑ **مرحله ی** •:دنباله‌های ممکن به طول ۱. این مرحله معادل $(i = 1,2, \dots ,n)$ $m_{ii} = 0$ است.
- ❑ **مرحله ی** •:دنباله‌های ممکن به طول ۲. در این مرحله کلیه مقادیر $m_{i,i+1}$ $(i = 1,2, \dots ,n-1)$ را محاسبه و در جدول می‌گذاریم.
- ❑ **مرحله ی ۲**: •:دنباله‌های ممکن به طول ۳. در این مرحله کلیه ی مقادیر $(i = 1,2, \dots ,n-2)$ $m_{i,i+2}$ را محاسبه و در جدول می‌گذاریم.

⋮

- ❑ **مرحله ی n**: •:دنباله‌های ممکن به طول $n-1$. در این مرحله m_{1n} را محاسبه می‌کنیم.

الگوریتم برنامه‌نویسی پویا برای ضرب زنجیره‌ای

- الگوریتم optmm تعداد حداقل ضرب را برای n ماتریس به دست می آورد:

Algorithm optmm(S, $int\ n$):

Input: sequence S of n matrices to be multiplied

Output: number of operations in an optimal aranethization of S

for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**

  $m_{ii} \leftarrow 0$

for $l \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**

  for $i \leftarrow 1$ **to** $n-l$ **do**

    $j \leftarrow i+l$

    $m_{ij} \leftarrow +\infty$

    for $k \leftarrow i$ **to** $j-1$ **do**

      $m_{ij} = \min_{k}(m_{ik} + m_{k+1,j} + p_{i-1} \times p_k \times p_j)$

پیچیدگی محاسباتی

- پیچیدگی زمانی الگوریتم فوق از مرتبه ی $O(n^3)$ است.

زیرا تعداد اعضای جمله اصلی که همان مینیمم‌گیری است برابر است با:

$$\sum_{L=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-L}\sum_{k=1}^{i+L-1} 1 = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{6}$$