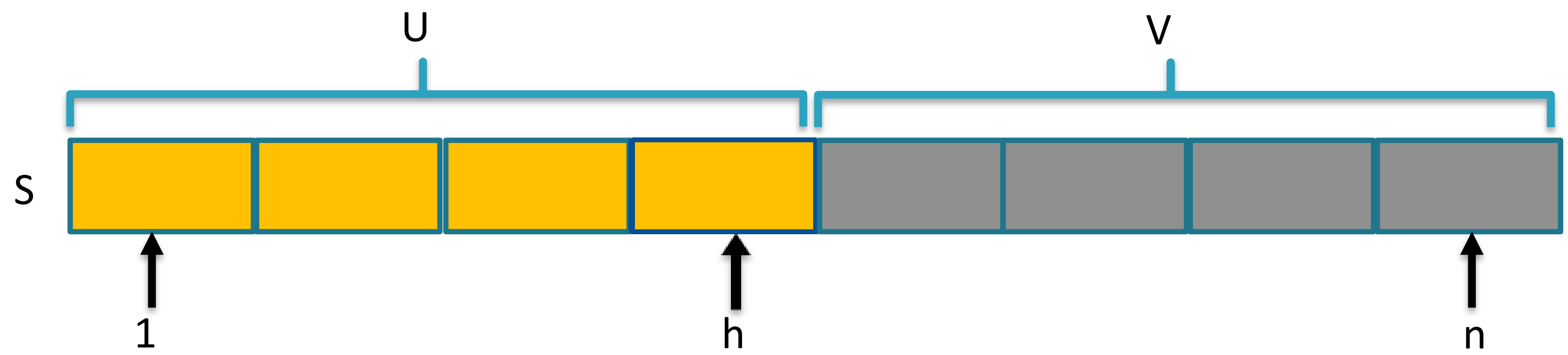
تحلیل زمانی الگوریتم‌های بازگشتی

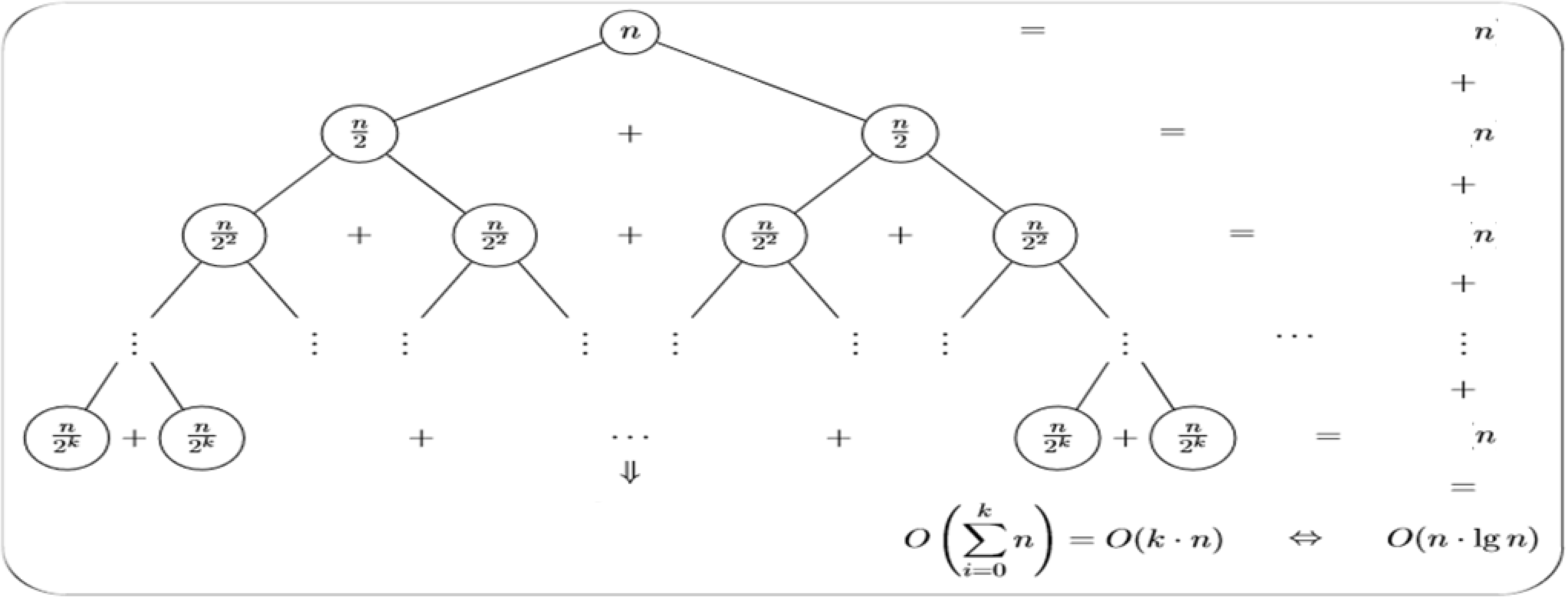
الگوریتم مرتب سازی ادغامی

```
Mergesort (S[] , n )
{
 h= [ n / 2 ] ;
 m = n – h ;
 if ( n > 1 )
     {
         copy S [ 1….h ] to U [ 1….h];
         copy S [h+1….n] to V  [1……m];
         mergesort (U,h );
         mergesort ( V,m );
         merge (U,h,V,m,S);
      }
}
```



$$T\ (\ n\ )\ =\ 2T\ (n/2\ )\ +\ n$$
$$\rightarrow T\ (n) \in\ \theta\ (nlgn)$$

درخت مرتب سازی ادغامی (merge sort)



$$\frac{n}{2^k} = 1 \Longrightarrow k = \lg n$$

مثال ۲

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n = 1 \\ 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + \Theta(n^2) & n > 1 \end{cases}$$

حل مثال ٢

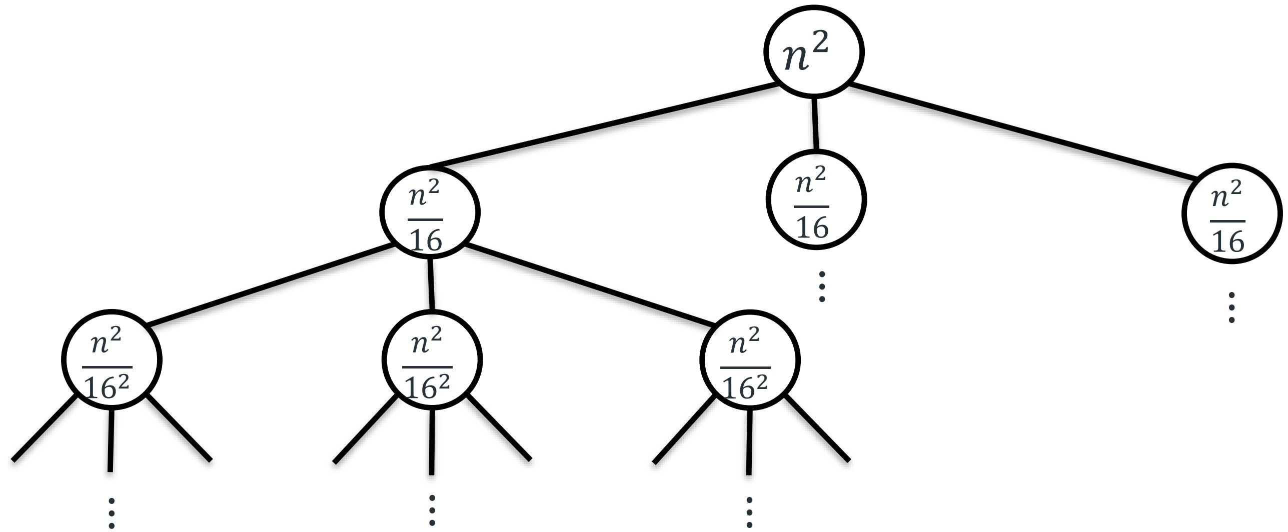
$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n = 1 \\ 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + \Theta(n^2) & n > 1 \end{cases}$$

$i = 0 \longrightarrow n \qquad\qquad \longrightarrow n^2$

$i = 1 \longrightarrow n/4 \qquad\qquad \longrightarrow \frac{3}{16}n^2$

$i = 3 \longrightarrow n/16 \qquad\qquad \longrightarrow \left(\frac{3}{16}\right)^2 n^2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$



$i = h =? \longrightarrow \frac{n}{4^h} \quad \Theta(1) \; \dots \; \Theta(1) \; \dots \; \Theta(1) \dots \Theta(1) \; \dots \; \Theta(1) \longrightarrow \left(\frac{3}{16}\right)^h n^2$

$h =?$

$$\frac{n}{4^h} = 1 \Longrightarrow h = \log_4 n$$

ادامه حل مثال ۲

$$T(n) < t + n^2 + \frac{3}{16}n^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 n^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{h-1} n^2 = n^2 \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i$$

$$we\ know\ that\colon\ 0 < x < 1\colon \sum_{i=0}^{\infty} (x)^i = \frac{1}{1-x}$$

$$and$$

$$and\ we\ know\ that\colon\ n^2 \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i < n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i$$

$$\Downarrow$$

$$T(n) < \frac{16}{13}n^2 + t$$

What about t?

$$t = \Theta\left(3^h\right) = \Theta\left(3^{\log_4 n}\right) = \Theta\left(n^{\log_4 3}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$T(n) = O(n^2)$$

ادامه حل مثال ۲

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(1) & n=1\\ 3T\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)+\Theta(n^2) & n>1\end{cases}$$

- آنچه تا کنون بدست آوردیم ($T(n)=O(n^2)$) یک حدس است و باید اثبات شود.
- برای اثبات درستی حدث بدست‌آمده از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم:
  - ✓ حکم استقرا: $T(n)\le cn^2$ (۱)
  - ✓ فرض استقرا: $T\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)\le c\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)^2$ (۲)
  - ✓ و باید از درستی فرض استقرا به درستی حکم رسید. (۳)

$$\left.\begin{array}{l}T(n)=3T\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)+\Theta(n^2)\\ T\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)\le c\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)^2\end{array}\right\}\overset{2}{\Rightarrow} T(n)\le 3c\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)^2+an^2\le\left(\frac{n}{4}\right)^2+an^2=\frac{n^2}{16}+an^2$$

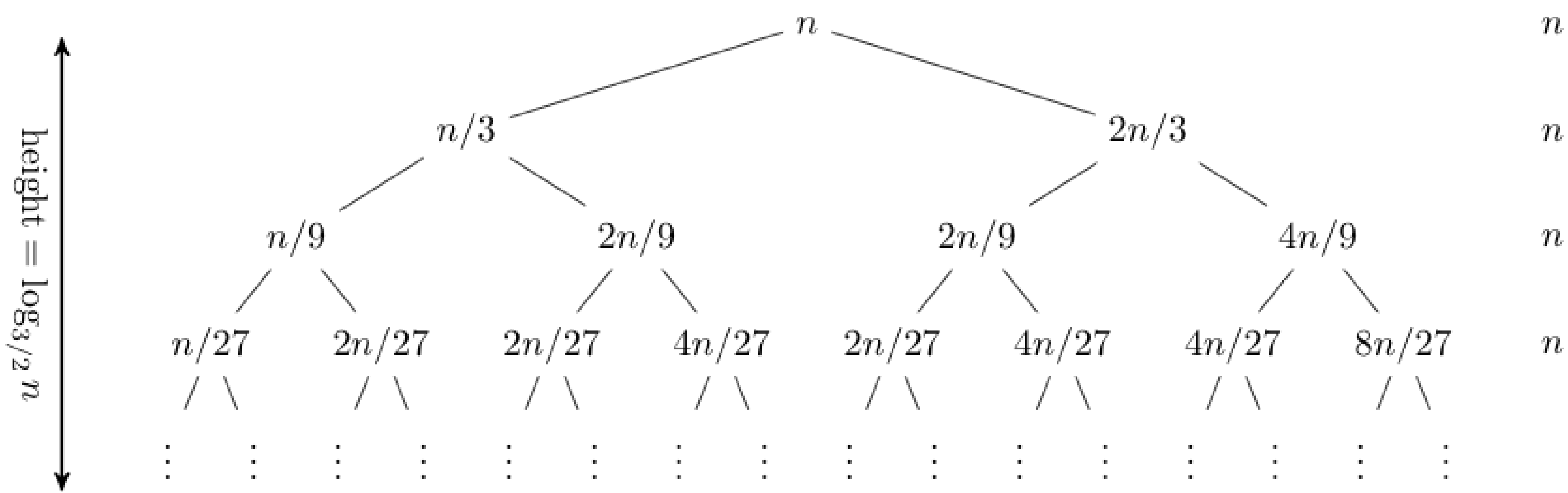
- طبق بحث فوق (۱ و ۳) می‌خواهیم:

$$\frac{n^2}{16}+an^2\le \mathrm{cn}^2$$

$$\xRightarrow{n>0} a-\frac{13}{16}c\le 0\Rightarrow c\ge\frac{16}{13}a$$

مثال ۳

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n = 1 \\ T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + \Theta(n) & n > 1 \end{cases}$$



حل مثال ۳

$$\left(\frac{2}{3}\right)^h n = 1 \Longrightarrow h = \log_{3/2} n$$

And now:

$$T(n) < \sum_{i=0}^{(\log_{3/2} n)-1} n$$

$$\Downarrow$$

$$T(n) < n \log_{3/2} n$$

$$T(n) = O\left(n \log_{3/2} n\right)$$

مثال ۴

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n = 1 \\ 2T\left(\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor\right) + \lg n & n > 1 \end{cases}$$

حل مثال ۴ - تغییر متغیر

$$n = 2^m \Longrightarrow m = \lg n$$

$$T(2^m) = 2T\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + m$$

- برای راحتی بیشتر:

$$S(m) = T(2^m)$$

- پس داریم:

$$S(m) = 2S\left(\frac{m}{2}\right) + m$$

- که می‌دانیم از مرتبه $m \lg m$ است، پس:

$$T(n) = \Theta(\lg n \lg(\lg n))$$

Master theorem

Let $a \geq 1$ and $b > 1$ be constants, let $f(n)$ be a function, and let $T(n)$ be defined on the nonnegative integers by the recurrence

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) ,$$

where we interpret n/b to mean either $\lfloor n/b \rfloor$ or $\lceil n/b \rceil$. Then $T(n)$ has the following asymptotic bounds:

1. If $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ for some constant $\epsilon > 0$, then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. If $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
3. If $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ for some constant $\epsilon > 0$, and if $af(n/b) \leq cf(n)$ for some constant $c < 1$ and all sufficiently large n, then $T(n) = \Theta(f(n))$.

قضیه اصلی

2. If $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$

یعنی اگر $f(n) = n^{\log_b a}$، آنگاه $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

فرض کنید می‌خواهیم مثال زیر را با استفاده از این روش حل کنیم:

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

مثال ۵ – شرط ۲ قضیه اصلی

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

a=2 and b=2 ➔ $n^{\log_2 2=1} = n$

پس داریم:

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_2 2} \lg n\right) = \Theta(n \lg n)$$

ادامه قضیه اصلی

1. If $f(n) = O(n^{\log_b a-\epsilon})$ for some constant $\epsilon > 0$, then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

یعنی اگر $f(n) < n^{\log_b a}$ حتی اگر یک مقدار کوچک مثل ε از روی $\log_b a$ برداشته شود، آنگاه $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

فرض کنید می‌خواهیم مثال زیر را با استفاده از این روش حل کنیم:

$$T(n) = 3T(n/2) + n\log n$$

مثال۶ – شرط ۱ قضیه اصلی

$$T(n) = 3T(n/2) + n\log n$$

a=3 and b=4 ➔ $n^{\log_2 3 = 1.58} > n\log n$

حال اگر یک ε از $\log_2 3$ کم شود، باز هم رابطه فوق برقرار است؟

بله زیرا می‌دانیم:

رشد n برای هیچ توان مثبتی از آن، کوچکتر از رشد $\log n$ نیست، پس:

(0<ε<0.58)

بنابراین داریم:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$$

ادامه قضیه اصلی

3. If $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$ for some constant $\epsilon > 0$, and if $af(n/b) \le cf(n)$ for some constant $c < 1$ and all sufficiently large n, then $T(n) = \Theta(f(n))$.

یعنی اگر $n^{\log_b a} < f(n)$ حتی اگر یک مقدار کوچک مثل ε به $\log_b a$ اضافه شود،
و بتوان یک مقدار $c < 1$ پیدا کرد که برای تمام nهای بزرگتر از مقداری، $af(n/b) \le cf(n)$
آنگاه $T(n) = \Theta\big(f(n)\big)$

فرض کنید می‌خواهیم مثال زیر را با استفاده از این روش حل کنیم:

$$T(n) = 3T(n/4) + n\log n$$

مثال ۷ – شرط ۳ قضیه اصلی

$$T(n) = 3T(n/4) + n\log n$$

a=3 and b=4 ➔ $n^{\log_4 3 = 0.793} < n\log n$

حال اگر یک ε به آن اضافه کنیم، باز هم رابطه برقرار است؟(0<ε<0.207)

بله، پس:

$$3f\left(\frac{n}{4}\right) \le cf(n) \ \Rightarrow \frac{3n}{4}\log\frac{n}{4} \le c\,\mathrm{n}\log n \ \overset{c=\frac{3}{4}}{\Longrightarrow} \ \forall\, n \ge 0$$

شرط دوم هم برقرار هست بنابراین داریم:

$$T(n) = \Theta(n\lg n)$$

مثال ۸ – عدم امکان حل با قضیه اصلی

$$T(n) = 2T(n/2) + n\log n$$

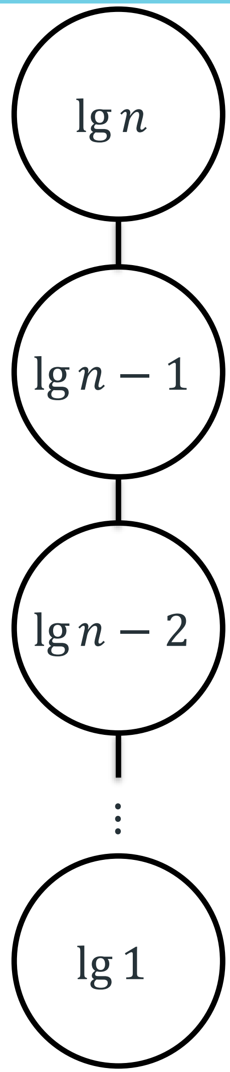
a=2 and b=2 ➔ $n < n\log n$

حال اگر یک ε به آن اضافه کنیم، باز هم رابطه برقرار است؟

خیر(چرا؟)

پس این سوال با استفاده از قضیه اصلی حل نمی‌شود.

مثال ۹ – عدم امکان حل با قضیه اصلی



$$T(n) = T(n-1) + \log n$$

نمی‌توان این سوال را با قضیه اصلی حل کرد چون فرم $aT(n/b)$ را ندارد.

با استفاده از درخت می‌توان بدست آورد که:

$$T(n) < \lg(n) + \lg(n-1) + \cdots + \lg(1) = \sum_{i=0}^{n-1} \lg(n-i) =$$

$$\lg(1) + \lg(2) + \cdots + \lg(n) = \sum_{i=1}^{n} \lg(i) \le \sum_{i=1}^{n} \lg(n) = n \lg n$$

$$\Longrightarrow T(n) = O(n \log n)$$

ادامه حل مثال ۹

حالا باید این موضوع را اثبات کنیم.

فرض استقراء:

$$\begin{cases} T(n-1) \le c(n-1)\log(n-1) \\ T(n) = T(n-1) + \log n \end{cases}$$

حکم استقراء: $T(n) \le c(n)\log(n)$

پس:

$$T(n-1) \le c(n-1)\log(n-1) \Rightarrow T(n) \le c(n-1)\log(n-1) + \log n$$

$$T(n) \le cn\log(n-1) - c\log(n-1) + \log n$$

$$\xRightarrow{\log n \ge \log(n-1) \ge \log\frac{n}{2}} T(n) \le cn\log n \ - c\log\left(\frac{n}{2}\right) + \log n = cn\log n - c\log n + c + \log n$$

اگر عبارت زیر برقرار باشد می‌توان حکم را نتیجه گرفت:

$$-c\log n + c + \log n \le 0 \ \Rightarrow \log n(c-1) \ge c \Rightarrow \log n \ge \frac{c}{c-1}$$

یعنی برای هر c یک n_0 متفاوت داریم. پس حداقل یک مقدار درست برای c قابل یافتن است. مثلا $c = 2$ که در آن صورت $n_0 = 4$.

مثال ۱۰

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n$$

- مسئله ظاهری شبیه به مرتب‌سازی ادغام دارد و چون داخل پرانتز یک مقدار ثابت داریم می‌توان حدس زد که زمان آن همان $O(n \lg n)$ است.
- حال باید ثابت کنیم:

فرض استقراء: $T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) \le c(\lfloor n/2 \rfloor + 17)\log(\lfloor n/2 \rfloor + 17)$

حکم استقراء: $T(n) \le cn\log(n)$

پس:

$$T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) \le c(\lfloor n/2 \rfloor + 17)\log(\lfloor n/2 \rfloor + 17) \Rightarrow T(n) \le c(\lfloor n/2 \rfloor + 17)\log(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n$$

$$T(n) \le (cn + 34c)\lg(n/2 + 17) + n \le (cn + 34c)\lg(n/2 + n/4) + n$$

مقداری کمتر از $n/2$

$n/4 > 17 \rightarrow n \ge 68$

ادامه حل مثال ۱۰

$$= (cn + 34c)\lg(n/(4/3)) + n = (cn + 34c)(\lg n - \lg 4/3) + n$$

$$= cn\lg n - cna + 34c\lg n - 34ca + n \Longrightarrow -cna + 34c\lg n - 34ca + n \le 0$$

یعنی:

اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد تا عبارت داخل پرانتز مثبت شود

$$\Rightarrow n \ge c(an - 34\lg n + 34a) \Rightarrow \frac{n}{an - 34\lg n + 34a} \ge c$$

یعنی برای هر c یک n_0 متفاوت داریم. پس حداقل یک مقدار درست برای c قابل یافتن است.

مثال ۱۱ و ۱۲

$$T(n) = T(\sqrt[3]{n}) + \lg n$$

$$T\left(2^k\right) = 4T\left(2^{k-1}\right) + 2^k$$

حل مثال ۱۱

$$n = 2^m \Longrightarrow m = \lg n$$

$$T(2^m) = 2T\left(2^{\frac{m}{3}}\right) + m$$

- برای راحتی بیشتر:

$$S(m) = T(2^m)$$

- پس داریم:

$$S(m) = S\left(\frac{m}{3}\right) + m$$

- این مسئله را با درخت بازگشت حل میکنیم و متغیرها را باز می‌گردانیم. در نهایت خواهیم داشت $O(m)$ پس:

$$T(n) = O(\lg n)$$

حل مثال ۱۲

$$2^k = n$$

$$T(n) = 4T(n/2) + n$$

- که قابل حل با شرط اول قضیه اصلی قابل حل است:

- پس داریم:

$$\mathrm{T}(n) = \Theta(n^2)$$

- پس:

$$T(2^k) = \Theta(2^{2k})$$