Maciej Borowiec

4.2 Wibracje akustyczne warstwy materiału

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}-u=\sin x$$

Warunki brzegowe: $\begin{cases} u(0)=2 \\ \frac{du(2)}{dx}+u(2)=0 \end{cases}$

$u'(2)+u(2)=0$

$u'(2)=-u(2)$

Gdzie u to poszukiwana funkcja:

$$[0;2]\ni x \longmapsto u(x)\in \mathbb{R}$$

Mnożymy dane równanie przez funkcję testującą φ.

$\varphi(0)=0$, ponieważ mamy na tym brzegu warunek Dirichleta

$$\varphi(-u''-u)=\varphi\sin x$$

Całkujemy obustronnie na $\Omega=[0;2]$

$$-\int_0^2 u''\varphi dx \int_0^2 u\varphi dx \int_0^2 \varphi \sin x dx$$

Obliczenie lewej strony równania:

$$L=-\int_0^2 u''\varphi dx \int_0^2 u\varphi dx = -u'\varphi\Big|_0^2+\int_0^2 u'\varphi' dx-\int_0^2 u\varphi dx=$$

$$=-\Big(\underbrace{\underbrace{u'(2)}_{=-u(2)}\varphi(2)-u'(0)\underbrace{\varphi(0)}_{=0}}\Big)+\int_0^2 u'\varphi'dx-\int_0^2 u\varphi dx=$$

$$=u(2)\varphi(2)+\int_0^2 u'\varphi'dx-\int_0^2 u\varphi dx$$

Zatem po podstawieniu lewej strony mamy:

$$\underbrace{u(2)\varphi(2)+\int_0^2 u'\varphi'dx-\int_0^2 u\varphi dx}_{=B(u,\varphi)}=\underbrace{\int_0^2 \varphi \sin x dx}_{=L(\varphi)}$$

$$B(u,\varphi)=u(2)\varphi(2)+\int_0^2 u'\varphi'dx-\int_0^2 u\varphi dx$$

$$L(\varphi)=\int_0^2 \varphi \sin x dx$$

Shift warunków Drichleta dla brzegu w 0 $(u(0)=2)$

Podstawiamy $u = w + \tilde{u}$, takie, że $w(0)=0$

$$w(0)=0 \wedge u(0)=2 \Rightarrow \tilde{u}(0) = u(0)-w(0)=2$$

Przyjmijmy za $\tilde{u}$ funkcję $\tilde{u}(x)=2$

Po podstawieniu $u=w+\tilde{u}$ do równania:

$$B(w+\tilde{u},\varphi)=L(\varphi)$$

Z liniowości B względem pierwszego argumentu:

$$B(w+\tilde{u},\varphi)=B(w,\varphi)+B(\tilde{u},\varphi)$$

Zatem:

$$B(w,\varphi)+B(\tilde{u},\varphi)=L(\varphi)$$

$$B(w,\varphi)=\underbrace{L(\varphi)-B(\tilde{u},\varphi)}_{\tilde{L}(\varphi)}$$

$$B(w,\varphi)=w(2)\varphi(2)+\int_0^2 w'\varphi'\,dx-\int_0^2 w\varphi\,dx$$

$$\tilde{L}(\varphi)=\int_0^2\varphi\sin x\,dx-\left(\tilde{u}(2)\varphi(2)+\int_0^2\tilde{u}'\varphi'\,dx-\int_0^2\tilde{u}\varphi\,dx\right)=$$

$$=\int_0^2\varphi\sin x\,dx-2\varphi(2)+\int_0^2 2\varphi\,dx$$

Metoda Galerkina

$$w \approx \sum_{i=1}^{n} w_i e_i \quad \left(\text{wtedy } u \text{ przybliżymy jako } u(x) \approx \tilde{u}(x) + w(x) \approx 2 + \sum_{i=1}^{n} w_i e_i\right)$$

$\varphi = e_j$, dla $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Zatem:

$$B\left(\sum_{i=1}^{n} w_i e_i, e_j\right) = \tilde{L}(e_j) \quad \text{dla } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Z biliniowości B mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i B(e_i, e_j) = \tilde{L}(e_j) \quad \text{dla } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

W postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_2, e_1) & \cdots & B(e_n, e_1) \\ B(e_1, e_2) & B(e_2, e_2) & \cdots & B(e_n, e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_1, e_n) & B(e_2, e_n) & \cdots & B(e_n, e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{L}(e_1) \\ \tilde{L}(e_2) \\ \vdots \\ \tilde{L}(e_n) \end{bmatrix}$$

Przyjmujemy:

$$e_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{dla } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{dla } x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

$x_0 = 0 \qquad x_{n+1} = 2$

Zakładając równe odległości pomiędzy kolejnymi x_i: $h = \frac{2}{n+1}$

Wtedy: $x_i = x_0 + hi = hi$

Zatem:

$$e_i = \begin{cases} \frac{x}{h} - i + 1 & \text{dla } x \in (x_i - h, x_i) = (h(i-1), hi) \\ i + 1 - \frac{x}{h} & \text{dla } x \in (x_i, x_i + h) = (hi, h(i+1)) \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

$$e_i' = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{dla } x \in (x_i - h, x_i) = (h(i-1), hi) \\ -\frac{1}{h} & \text{dla } x \in (x_i, x_i + h) = (hi, h(i+1)) \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$