

## Laboratorium 8

### Rozwiązywanie równań nieliniowych

## 1. Wprowadzenie

Celem ćwiczenia było zrobienie czterech różnych zadań dotyczących równań nieliniowych. Zadania miały na celu zapoznanie się z różnymi metodami rozwiązywania tych równań oraz poznaniu ich wad i zalet.

## 2. Zadania

### 2.1. Zadanie 1.

W tym zadaniu zostały podane cztery funkcje i dopasowane do nich punkty początkowe, dla których znajdowanie pierwiastków metodą Newtona zawodzi. Należało wyjaśnić dlaczego i następnie znaleźć pierwiastki modyfikując wywołanie metody Newtona albo używając innej metody.

Podane zostały następujące funkcje i punkty początkowe:

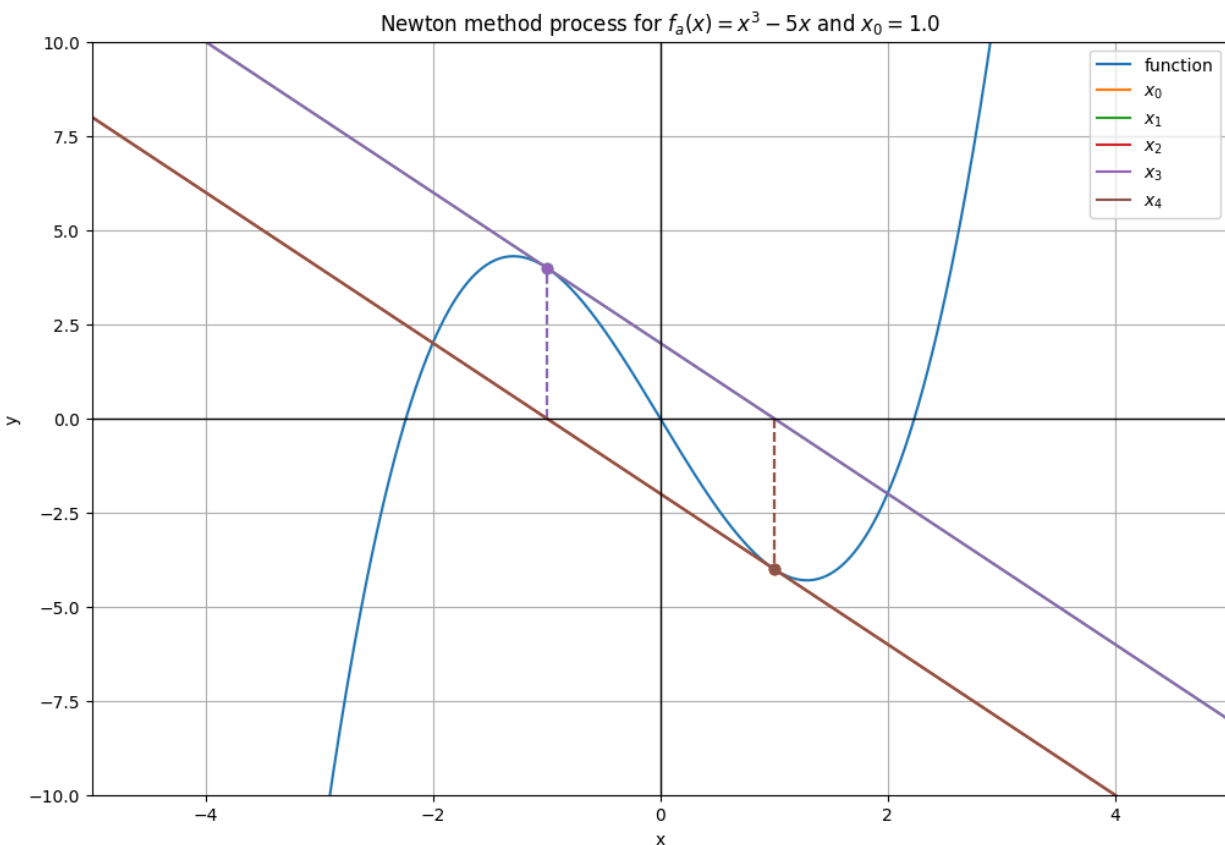
$$\text{a) } f_a(x) = x^3 - 5x, x_0 = 1$$

$$\text{b) } f_b(x) = x^3 - 3x + 1, x_0 = 1$$

$$\text{c) } f_c(x) = 2 - x^5, x_0 = 0.01$$

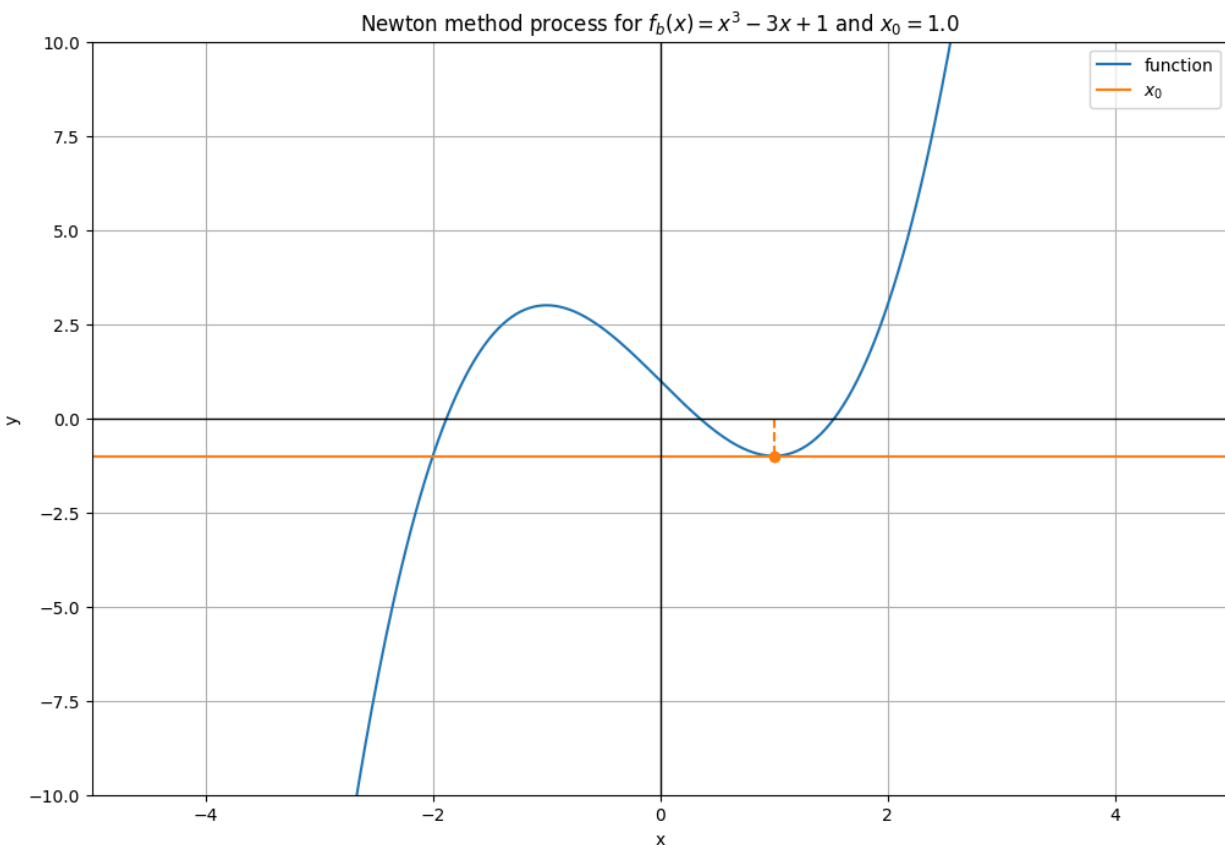
$$\text{d) } f_d(x) = x^4 - 4.29x^2 - 5.29, x_0 = 0.8$$

Poniżej zostały przedstawione wykresy, które przedstawiają funkcje oraz kolejne styczne. Dzięki temu można łatwo zobaczyć co powoduje, że metoda Newtona w tych początkowych punktach zawodzi dla nich.



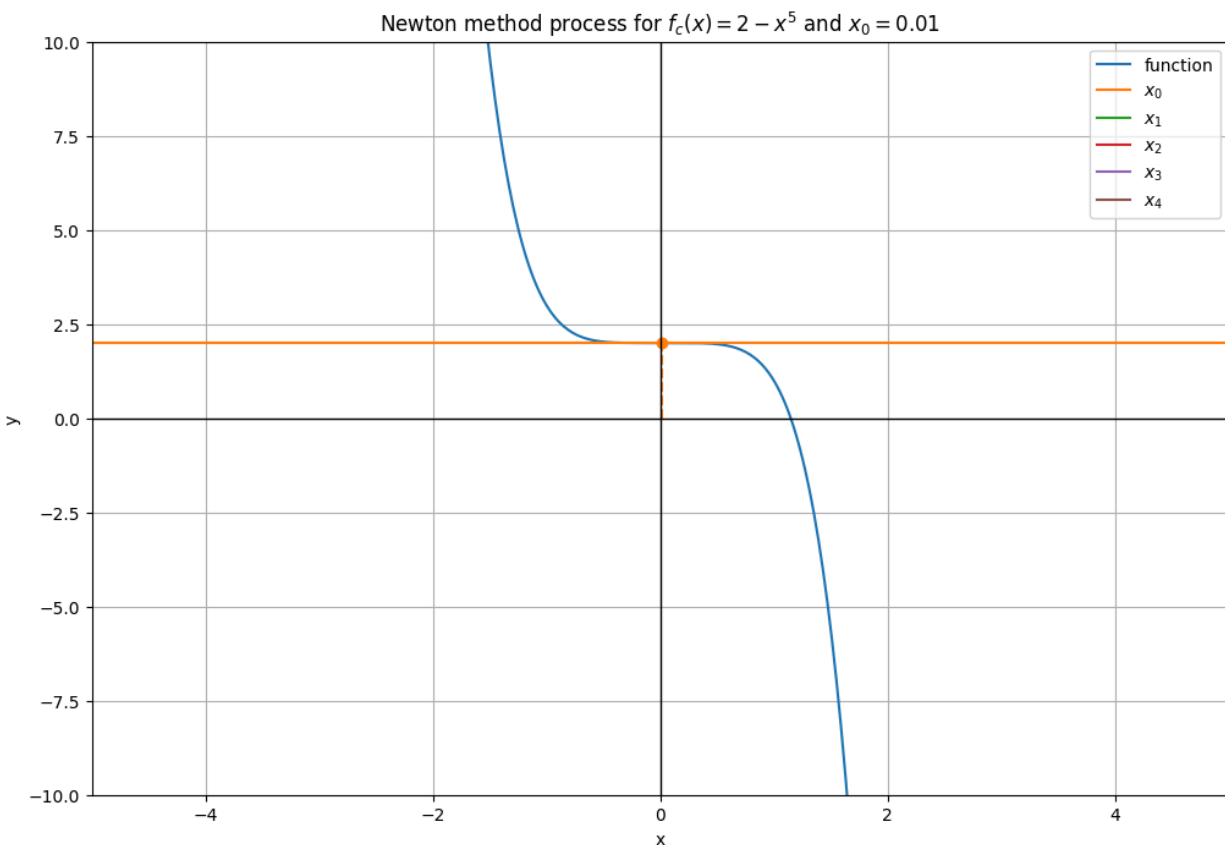
**Rys. 1.** Funkcja  $f_a$  i kolejne styczne dla tej funkcji

Na podanym wykresie (rys. 1) łatwo można zauważyć, że metoda Newtona popada w cykl, który uniemożliwia znalezienie pierwiastka dla tej funkcji. Znaleźć ten pierwiastek można wywołując metodę Newtona z przesuniętym punktem początkowym. Po przesunięciu  $x_0$  (z 1.0 na 0.98) otrzymano pierwiastek równy 0.0.



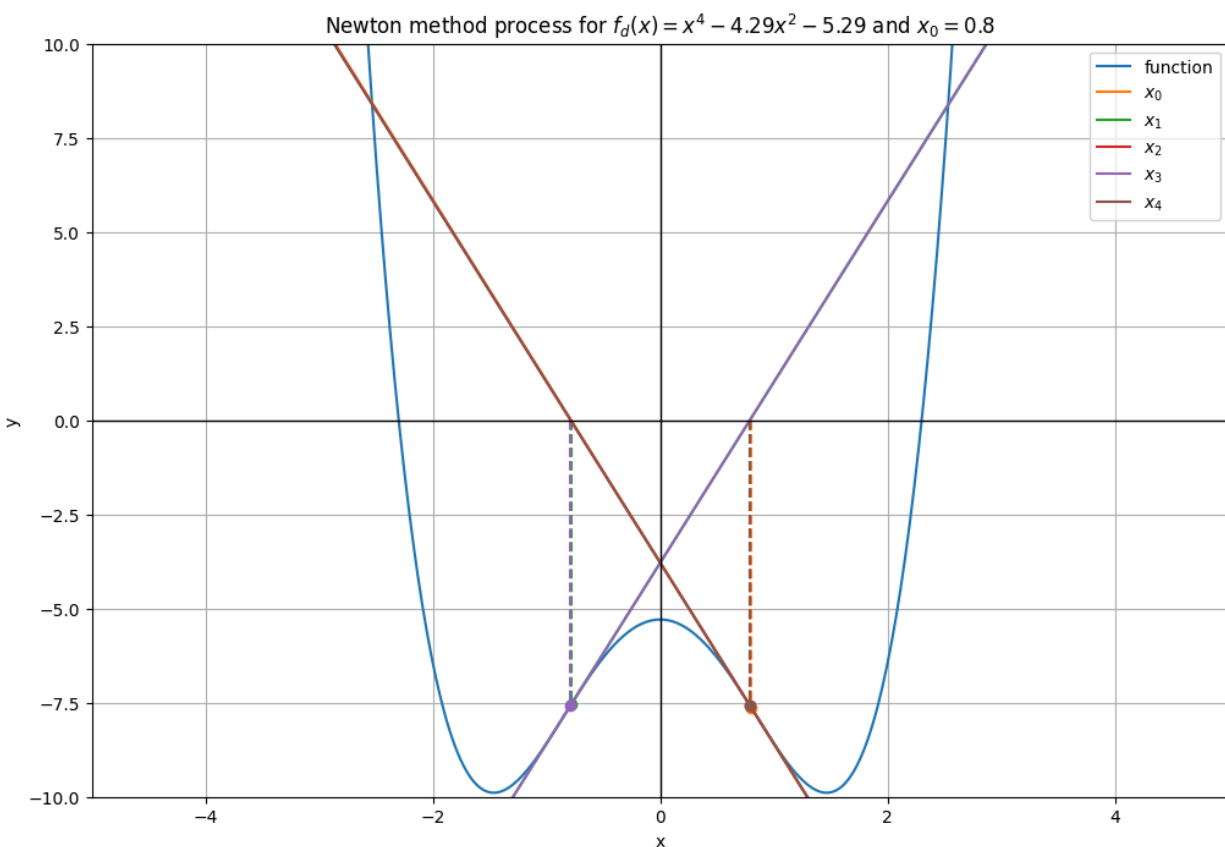
**Rys. 2.** Funkcja  $f_b$  i pierwsza styczna dla tej funkcji

Na podanym wykresie (rys. 2) widać, że pierwsza styczna jest równoległa do osi OX, co sprawia, że metoda Newtona nie potrafi znaleźć pierwiastka. Tutaj, ponownie, lekkie przesunięcie punktu startowego umożliwia znalezienie pierwiastka. Po wywołaniu metody Newtona z  $x_0$  równym 1.02 otrzymano pierwiastek dla  $x \approx 1.532$ .



**Rys. 3.** Funkcja  $f_c$  i kolejne styczne dla tej funkcji

Na podanym wykresie (rys. 3) widać jedynie pierwszą styczną, która jest bardzo bliska do bycia równoległą do osi OX. Przez to wartość  $x_1$  jest bardzo duża i nie widać kolejnych stycznych. Ponownie tutaj można przesunąć pierwszy punkt, jednakże tym razem, dla odmiany, zwiększyłem maksymalną liczbę iteracji co pozwoliło na “powrót” punktów do pierwiastka. Po wywołaniu funkcji ze zwiększoną maksymalną liczbą iteracji otrzymano pierwiastek  $x \approx 1.1487$ .



**Rys. 4.** Funkcja  $f_d$  i kolejne styczne dla tej funkcji

Na podanym wykresie (rys. 4) łatwo można zauważyć, że metoda Newtona, podobnie do pierwszego przypadku, popada w cykl, który uniemożliwia znalezienie pierwiastka dla tej funkcji. Pierwiastek można uzyskać zmieniając położenie punktu początkowego. Jeśli chcemy znaleźć pierwiastek dodatni to możemy przesunąć  $x_0$  do wartości ujemnej, bliskiej 0 lub do wartości po minimum w czwartej ćwiartce układu współrzędnych. Po wykonaniu metody Newtona z  $x_0 = 1.5$  otrzymano pierwiastek równy 2.3.

## 2.2. Zadanie 2.

W tym zadaniu podana została następująca funkcja:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$$

oraz następujące funkcje, które definiują równoważny schemat iteracyjny:

$$\phi_1(x) = (x^2 + 2)/3$$

$$\phi_2(x) = \sqrt{3x - 2}$$

$$\phi_3(x) = 3 - 2/x$$

$$\phi_4(x) = (x^2 - 2)/(2x - 3)$$

Należało dla tych metod iteracji zbadać zbieżność i rząd zbieżności teoretycznie dla pierwiastka  $\alpha = 2$ , potwierdzić analizę empirycznie oraz przedstawić wykresy błędów względnych tych metod.

### Teoretyczna analiza zbieżności oraz rzędu zbieżności

Do analizy teoretycznej użyjemy wartości bezwzględnej pochodnych tych funkcji dla  $x = \alpha$ . Otrzymane wartości są następujące:

$$|\phi_1'(2)| = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

$$|\phi_2'(2)| = \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 2 - 2}} = \frac{3}{4}$$

$$|\phi_3'(2)| = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$$

$$|\phi_4'(2)| = \frac{2 \cdot 2(2 \cdot 2 - 3) - 2(2^2 - 2)}{(2 \cdot 2 - 3)^2} = 0$$

Dla funkcji pierwszej wartość pochodnej jest większa od 1, zatem ten schemat będzie rozbieżny. Funkcje druga i trzecia mają wartość pochodnej w przedziale (0; 1) zatem zapewne będą miały zbieżność liniową, z czego funkcja 3 będzie miała lepszą stałą, gdyż wartość pochodnej jest bliższa zeru. Natomiast wartość pochodnej funkcji czwartej jest równa 0, więc schemat powinien być co najmniej kwadratowy.

## Empiryczne potwierdzenie analizy teoretycznej

Na początek wykonamy 10 iteracji dla każdej z metod. Za punkt początkowy przyjąłem  $x_0 = 3.0$ . Otrzymane wyniki zostały przedstawione w tabeli poniżej.

	Wartość x w danej iteracji dla danych metod			
Iteracja	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_4$
0	3.0	3.0	3.0	3.0
1	3.666667	2.645751	2.333333	2.333333
2	5.148148	2.436648	2.142857	2.066667
3	9.501143	2.304332	2.066667	2.003922
4	$3.075724 \cdot 10^1$	2.216528	2.032258	2.000015
5	$3.160026 \cdot 10^2$	2.156289	2.015873	2.000000
6	$3.328655 \cdot 10^4$	2.113970	2.007874	2.000000
7	$3.693315 \cdot 10^8$	2.083725	2.003922	2.000000
8	$4.546858 \cdot 10^{16}$	2.061838	2.001957	2.000000
9	$6.891304 \cdot 10^{32}$	2.045853	2.000978	2.000000
10	$1.583003 \cdot 10^{65}$	2.034099	2.000489	2.000000

**Tab. 1.** Wartości x w każdej iteracji dla danych metod

Obliczmy również empirycznie rząd zbieżności dla każdej z metod. Możemy to zrobić używając podanego wzoru:

$$r = \ln \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}} / \ln \frac{\varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_k}$$

gdzie:

- $\varepsilon_k = |x_k - x_*|$
- $x_k$  to przybliżona wartość pierwiastka w iteracji  $k$
- $x_*$  to dokładna wartość pierwiastka

W poniższej tabeli przedstawiono otrzymane rzędy empiryczne.

Indeks $k$	Wartość rzędu empirycznego dla danej metody i indeksu $k$			
	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_4$
1	1.245021	0.894696	0.771244	1.464974
2	1.365183	0.922621	0.899495	1.760374
3	1.547766	0.942910	0.952498	1.958580
4	1.778874	0.957728	0.976872	1.998598
5	1.950815	0.968608	0.988585	-
6	1.997311	0.976632	0.994329	-
7	1.999987	0.982574	0.997173	-
8	2.000000	0.986987	0.998589	-
9	2.000000	0.990272	0.999295	-

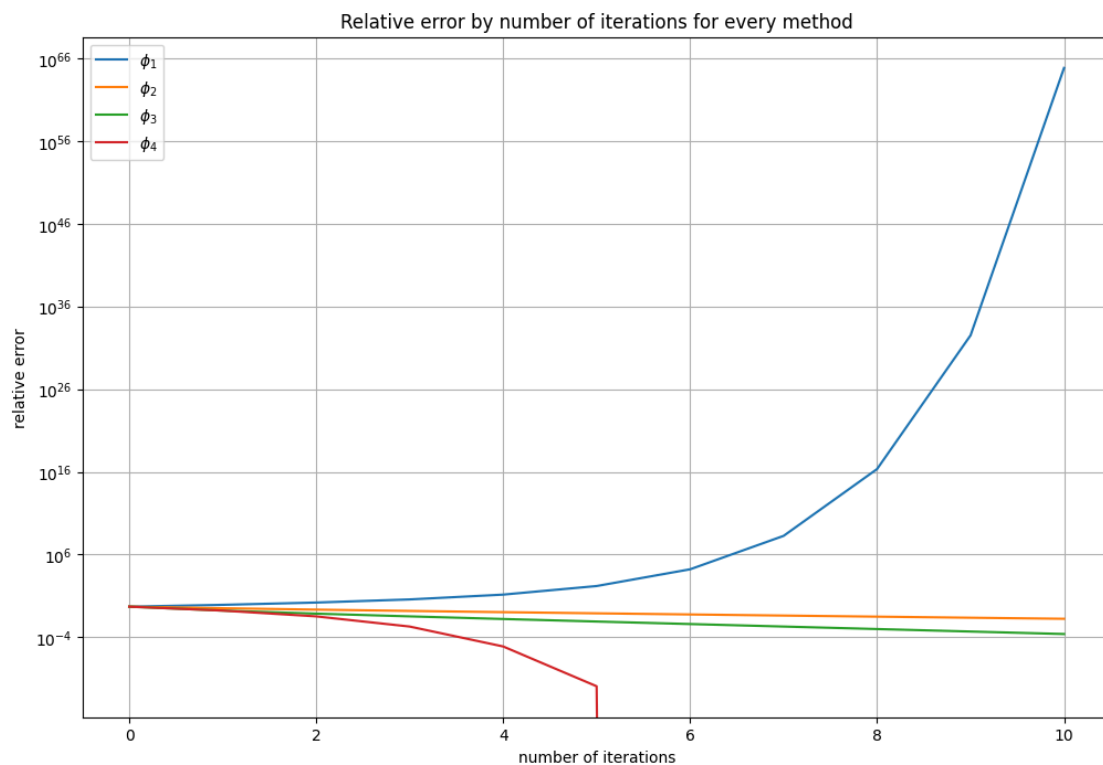
**Tab. 2.** Wartości rzędu empirycznego dla danych metod w zależności od indeksu  $k$

Z podanych tabel (tab. 1, tab. 2) wynika, że nasza analiza teoretyczna jest zgodna z rzeczywistością. Łatwo zauważyć, że schemat pierwszy w przeciwieństwie do innych jest rozbieżny. Ponadto rozbiega on kwadratowo. Zgodnie z przewidywaniami funkcja metoda druga oraz trzecia są liniowe i, ze względu na mniejszą stałą, funkcja trzecia jest bardziej dokładna. Schemat czwarty jest kwadratowy i już dla piątej iteracji otrzymała na tyle dokładną wartość, że została ona zrównana do 2.0. Przez to nie możemy obliczyć wartości rzędu empirycznego dla indeksu większego od 4, gdyż otrzymamy 0 pod logarytmem.

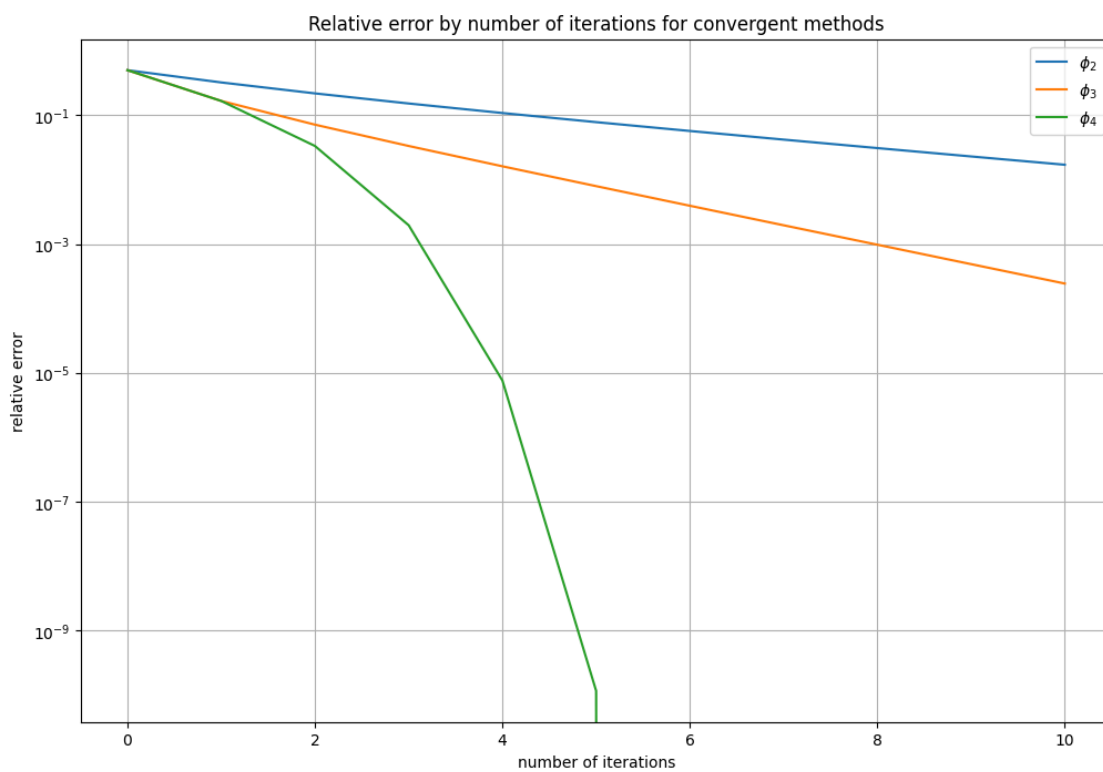
### Wykresy błędu względnego każdej metody

Przedstawmy również wykres błędu względnego dla każdej metody w zależności od liczby wykonanych iteracji. Przedstawimy dwa wykresy - wykres z każdą metodą oraz wykres jedynie z metodami zbieżnymi. Zrobimy tak, ponieważ metoda rozbieżna uniemożliwi dokładną analizę dla metod zbieżnych przy użyciu tylko jednego wykresu. Poniżej zostały przedstawione wymienione wykresy.





**Rys. 5.** Wykres błędu względnego od liczby iteracji dla wszystkich metod



**Rys. 6.** Wykres błędu względnego od liczby iteracji dla metod zbieżnych

Powyższe wykresy (rys. 5, rys. 6) są kolejnym potwierdzeniem rzędów zbieżności danych metod. Na wykresie pierwszym widać głównie rozbieżność metody pierwszej. Widać, że błąd tej metody zwiększa się kwadratowo. Na drugim wykresie dokładniej można zauważyć rząd zbieżności metod zbieżnych. Metody 2 i 3 zgodnie z przewidywaniami zmniejszają błąd liniowo oraz metoda trzecia jest dokładniejsza dzięki lepszej stałej. Schemat czwarty zmniejsza błąd kwadratowo i dla liczby iteracji większej od 5 jest na tyle mały, że nie widać go na wykresie.

## 2.3. Zadanie 3.

W tym zadaniu należało napisać schemat iteracji wg metody Newtona dla trzech równań nieliniowych podanych poniżej:

a)  $x^3 - 2x - 5 = 0$

b)  $e^{-x} = x$

c)  $x \sin x = 1$

Następnie, zakładając, że  $x_0$  jest przybliżeniem pierwiastka z 4-bitową dokładnością należało odpowiedzieć na pytanie, ile iteracji należy wykonać, by osiągnąć 24-bitową dokładność oraz 53-bitową dokładność.

Poniżej została przedstawiona tabela z otrzymanymi wynikami:

	Równanie a)		Równanie b)	
Dokładność	Pierwiastek	Iteracje z 4-bit	Pierwiastek	Iteracje z 4-bit
4-bit	2.09456812	0	0.56714317	0
24-bit	2.09455148	2	0.56714329	2
53-bit	2.09455148	3	0.56714329	3
	Równanie c)			
Dokładność	Pierwiastek	Iteracje z 4-bit		
4-bit	1.11415713	0		
24-bit	1.11415714	1		
53-bit	1.11415714	1000		

**Tab. 3.** Wartości pierwiastków i liczba iteracji dla danych równań i dokładności

Przewidywaną liczbą iteracji by osiągnąć dokładność 24-bitową i dokładność 53-bitową z dokładności 4-bitowej jest odpowiednio 3 i 4. Z podanej tabeli (tab. 3) widać jednak, że dla tych równań (za wyjątkiem dokładności 53-bitowej równania c) te dokładności została osiągnęte szybciej. Jest to najprawdopodobniej spowodowane tym, że pierwiastek początkowy może mieć dokładność większą niż 4 bity. Algorytm nie zdołał znaleźć pierwiastka o dokładności 53-bitowej w równaniu c). Popadł on najprawdopodobniej w cykl, w którym żadna wartość nie osiągała tej dokładności.

## 2.4.. Zadanie 4.

W tym zadaniu należało, wykorzystując metodę Newtona, znaleźć rozwiązania następującego układu równań nieliniowych:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$x_1^2 - x_2 = 0$$

Następnie korzystając z faktu, że rozwiązanie tego układu to:

$$x_1 = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

należało wyznaczyć błąd względny znalezionej rozwiązania.

Możemy zdefiniować potrzebne funkcje następująco:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$$

$x_n$  - wektor  $(x_1, x_2)$  w danej iteracji

$$F(x_n) = (f_1(x_n), f_2(x_n))$$

$J(x_n)$  - jacobian funkcji  $F$

Wtedy możemy dokonać iteracji wg metody Newtona następująco:

$$x_{n+1} = x_n - J(x_n)^{-1} F(x_n)$$

Po przekształceniu, by ominąć odwracanie macierzy:

$$J(x_n)(x_{n+1} - x_n) = F(x_n)$$

Wtedy możemy rozwiązać to równanie funkcją **numpy.linalg.solve** i dodać otrzymany wynik do wartości w iteracji  $n$ , by otrzymać wartość następnej iteracji.

Za wektor początkowy przyjęto  $(1.0, 1.0)$  (powinien zostać wtedy otrzymany wynik, gdzie  $x_1$  jest dodatnie) i dokonano pięciu iteracji. Otrzymane wyniki zostały przedstawione w poniższej tabeli:

	Wartość prawdziwa	Wartość otrzymana	Błąd względny
$x_1$	0.7861513777574233	0.7861513777574233	0.0
$x_2$	0.6180339887498949	0.6180339887498948	$1.79638 \cdot 10^{-16}$

**Tab. 4.** Porównanie wartości otrzymanych z prawdziwymi rozwiązaniami

Z podanej tabeli (tab. 4) widać, że dla tego układu, metoda Newtona potrafiła otrzymać bardzo dokładne rozwiązanie dla bardzo małej liczby iteracji. Błąd pierwszej zmiennej jest na tyle mały, że został zrównany do zera. Natomiast druga zmienna różni się od wartości prawdziwej dopiero na szesnastym miejscu po przecinku.

## 5. Podsumowanie

Wykonane zadania pokazały głównie wady i zalety metody Newtona w rozwiązywaniu równań nieliniowych. Zadanie pierwsze pokazało, że trzeba być bardzo ostrożnym przy wybieraniu punktu początkowego, gdyż nawet punkt, który wydaje się być dobrym wyborem może prowadzić do sytuacji, w której metoda Newtona nie będzie w stanie znaleźć pierwiastka. Szczególnie należy uważać na możliwość powstania cyklu. W zadaniu trzecim można było zauważyć jak szybko metoda Newtona, ze względu na bycie metodą kwadratową, może poprawić dokładność pierwiastka. Tam też jednak ukazała się wada metody Newtona, gdyż nie była ona w stanie osiągnąć pożądanej dokładności w jednym równaniu. Zadanie czwarte również pokazało jak szybko metoda Newtona potrafi osiągnąć bardzo dokładne rozwiązanie.

W zadaniu drugim pokazane zostało jak duży wpływ na dokładność rozwiązania ma wybór schematu. Należy oczywiście uważać na schematy rozbieżne, ale też nie powinno się używać pierwszego, lepszego schematu zbieżnego. Jednakże najlepszym schematem okazał się schemat o najbardziej skomplikowanym wzorze, więc taki schemat mógłby być ciężki do znalezienia.

## 6. Bibliografia

- Materiały zamieszczone wraz z zadaniem