Maciej Borowiec
03.05.2025

Laboratorium 7
Kwadratury adaptacyjne

1. Wprowadzenie

Celem ćwiczenia było dokonanie całkowania numerycznego używając kwadratur adaptacyjnych. Należało dokonać obliczeń dla funkcji z poprzedniego laboratorium i porównać wyniki. Należało dokonać również wszystkich całkowań (użyć kwadratur z poprzedniego laboratorium oraz kwadratur adaptacyjnych z tego) dla dwóch innych funkcji.

2. Zadania

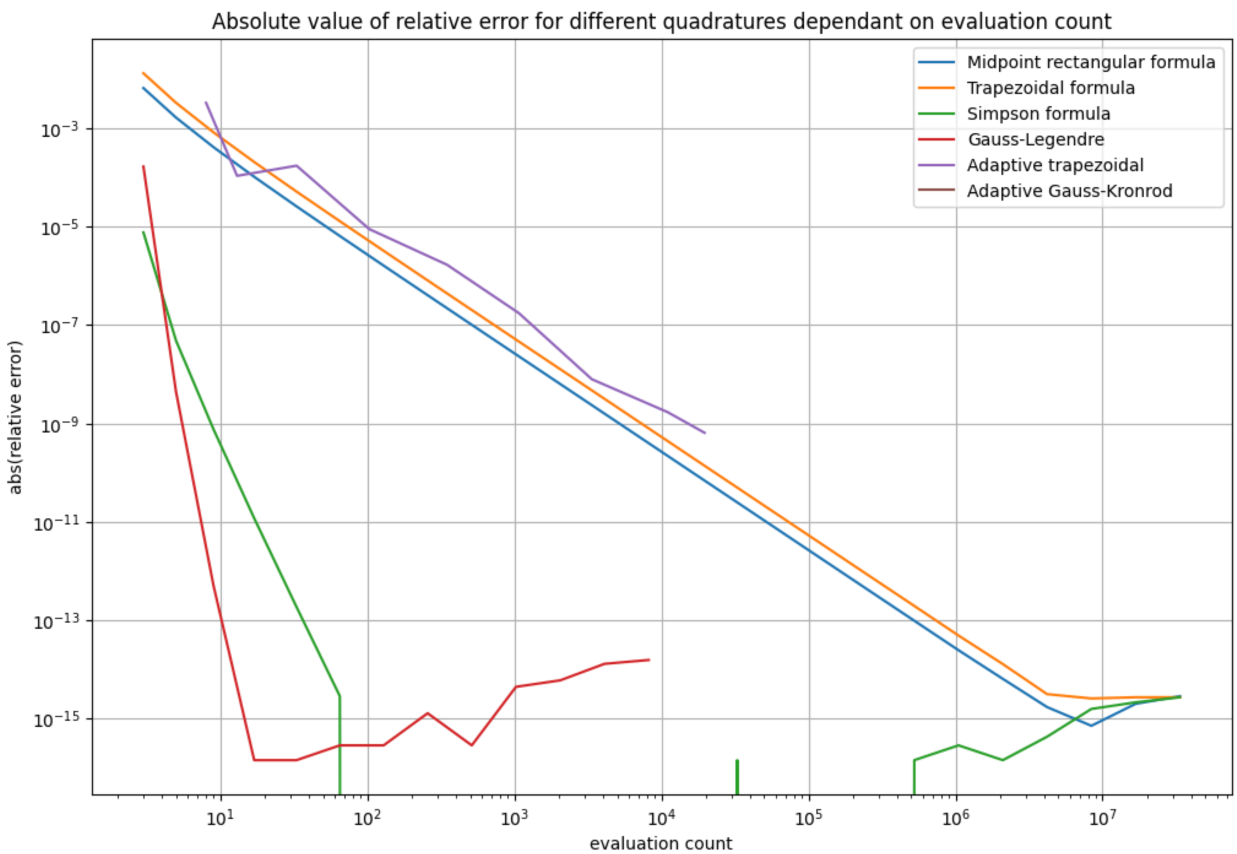
2.1. Zadanie 1.

Używając całki oznaczonej z poprzedniego laboratorium:

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi$$

należało dokonać całkowania numerycznego używając kwadratur adaptacyjnych trapezów oraz Gaussa-Kronroda. Należało dodać do wykresu z poprzedniego laboratorium wartości bezwzględne błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji dla tych metod. Na liczbę ewaluacji należało pośrednio wpłynąć licząc wartość całki dla tolerancji z zakresu od 10^0 do 10^{-14}.

Na poniższym wykresie (rys. 1) przedstawione otrzymane wyniki. Metoda adaptacyjnych trapezów okazała się być bardzo zbliżona w dokładności do kwadratur trapezów i prostokątów, jednak jej wynik jest mniej dokładny. Natomiast wyniki dla metody Gaussa-Kronroda okazały się być bardzo interesujące, ponieważ dla każdej z podanych tolerancji dokonano dokładnie tyle samo ewaluacji (63) i otrzymano wynik na tyle dokładny, że został zrównany do zera.



Rys. 1. Wartości bezwzględne błędów względnych kwadratur w zależności od liczby ewaluacji podcałkowych

2.2. Zadanie 2.

W tym zadaniu należało dokonać całkowania numerycznego używając wszystkich metod z tego oraz poprzedniego laboratorium dla dwóch różnych całek oznaczonych:

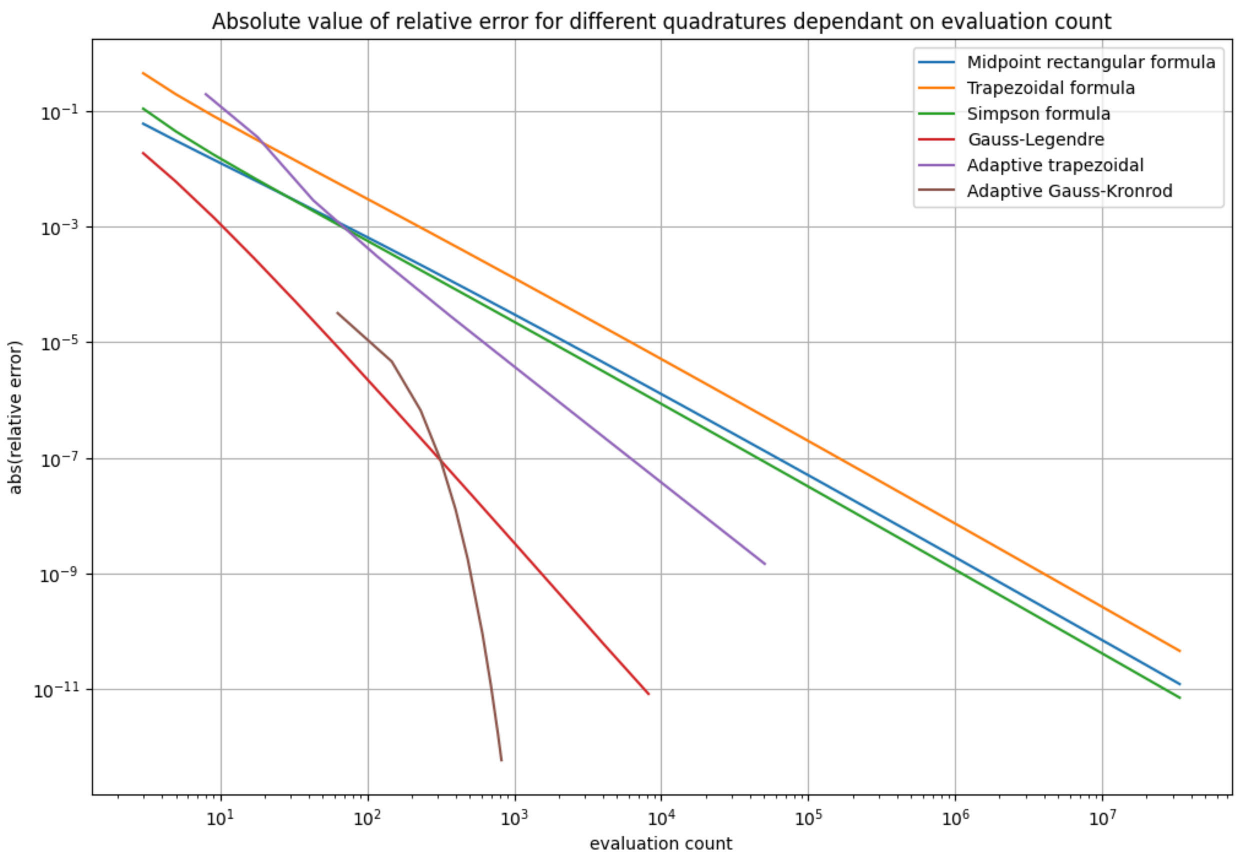
a) $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\log x dx = -\frac{4}{9}$

b) $\int\limits_0^1 (\frac{1}{(x-0.3)^2+a} + \frac{1}{(x-0.9)^2+b} - 6)dx \approx 128.244$

gdzie w całce b) należało przyjąć $a = 0.001$ oraz $b = 0.004$, a wartość całki została obliczona używając zależności:

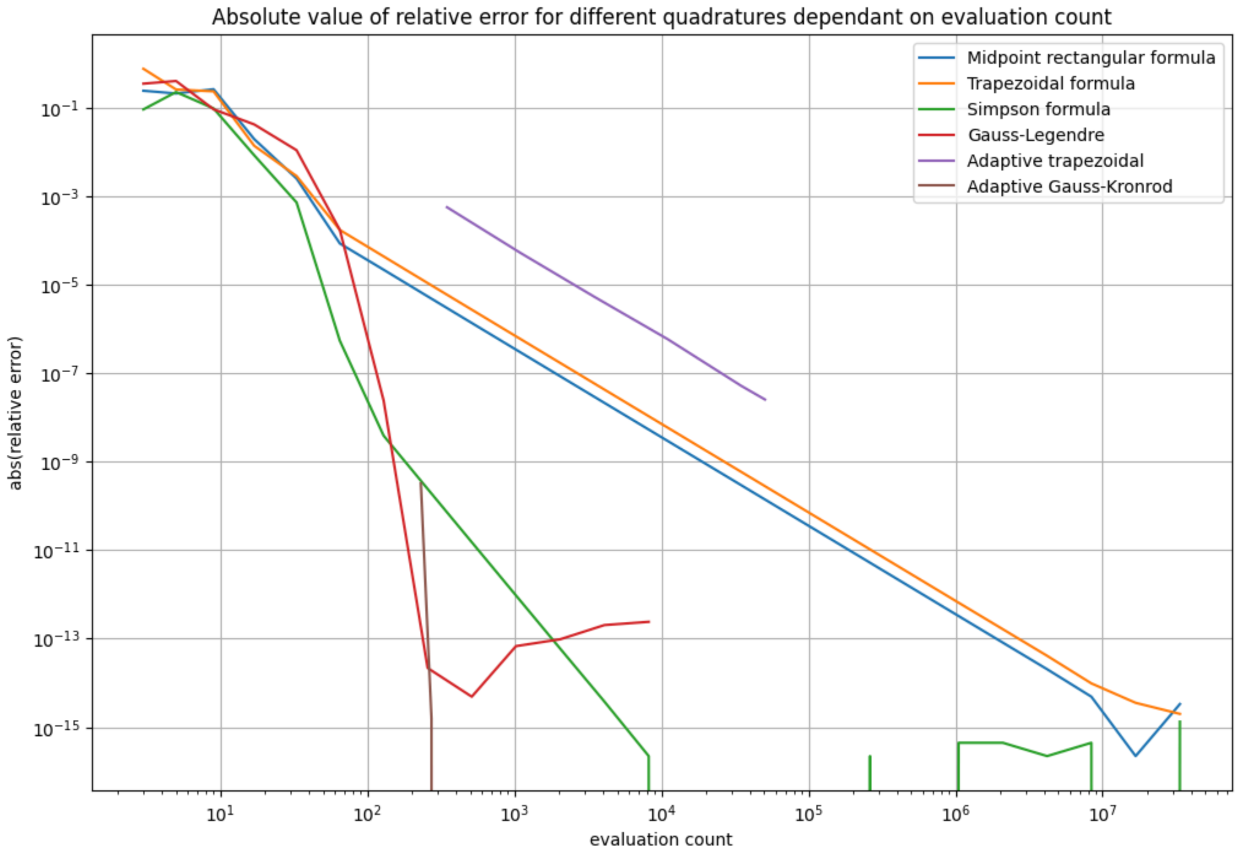
$$\int\limits_0^1 \frac{1}{(x-x_0)^2+a}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}(\arctan \frac{1-x_0}{\sqrt{a}} + \arctan \frac{x_0}{\sqrt{a}})$$

Poniżej przedstawione zostały otrzymane wyniki dla obu tych całek.



Rys. 2. Wartości bezwzględne błędów względnych kwadratur w zależności od liczby ewaluacji podcałkowych dla całki a)

Na wykresie (rys. 2) widać, że w przypadku tej funkcji kwadratury prostokątów, trapezów i Simpsona zachowują się bardzo podobnie. Metoda Simpsona ponownie okazała się najdokładniejsza z tych trzech, ale różnica pomiędzy nimi nie jest tak drastyczna jak przedtem. Błąd dla metody adaptacyjnych trapezów dla tej funkcji szybciej zbiega do 0 od tych trzech metod. Kwadratura Gaussa-Legendre'a ponownie osiąga bardzo mały błąd. Najdokładniejsza ponownie okazała się być metoda Gaussa-Kronroda. Błąd dla tej metody znacznie szybciej zbiega do zera od metod pozostałych. Osiąga ona najmniejszy błąd ze wszystkich metod dla znacznie mniejszej liczby ewaluacji. Warto zauważyć, że błąd dla każdej z tych metod maleje w całym przedziale, nie widać tutaj minimum błędu dla żadnej z metod. Widoczna przewaga kwadratur adaptacyjnych jest tu widoczna, ponieważ dana funkcja podcałkowa w większości danego przedziału ma spokojne zmiany wartości w zależności od argumentu. Jedynie dla wartości bliskich zera funkcja szybko zmienia wartości.



Rys. 3. Wartości bezwzględne błędów względnych kwadratur w zależności od liczby ewaluacji podcałkowych dla całki b)

Na wykresie (rys. 3) można zauważyć, że metoda adaptacyjnych trapezów okazała się być zdecydowanie najgorsza. Kwadratury trapezów i prostokątów ponownie są bardzo zbliżone do siebie dokładnością, jednakże metoda Simpsona znowu zyskała dużo większą dokładność od nich, tak jak w całce pierwszej. Metoda Gaussa-Legendre'a potrzebowała znacznie większej liczby ewaluacji niż w poprzednich całkach, by osiągnąć większą dokładność od wcześniej wspomnianych czterech metod. Natomiast metoda Gaussa-Kronroda, w przeciwieństwie do dwóch wcześniejszych całek, do momentu, w którym błąd numeryczny zaczyna przeważać nad błędem metody w metodzie Gaussa-Legendre'a, nie osiąga znacznie dokładniejszych wyników od tej właśnie metody. W tym przypadku, funkcja podcałkowa jest bardzo zmienna w przedziale całkowania, więc zalety metod adaptacyjnych są tu mniej widoczne niż w poprzednich przypadkach - szczególnie dla metody adaptacyjnych trapezów, której dokładność jest najmniejsza. Mimo tego metoda Gaussa-Kronroda nadal okazała się być najlepsza - osiąga bardzo dokładny wynik dla mniejszej liczby ewaluacji od reszty metod.

5. Podsumowanie

Użycie sześciu różnych metod całkowania numerycznego pokazała wady i zalety każdej z metod. Szczególnie można było zauważyć jak duży wpływ na dokładność wyniku dla metod adaptacyjnych ma funkcja podcałkowa. W przypadku całki 2a), która zmienia się bardzo łagodnie na większości przedziału można było zauważyć, że metody adaptacyjne osiągały dużą dokładność. Natomiast dla całki 2b), która zmienia się gwałtownie na całym przedziale całkowania, metody adaptacyjne traciły swoją przewagę, a w przypadku kwadratur adaptacyjnych trapezów osiągany wynik był znacznie gorszy od odpowiednika.

6. BIbliografia

- Materiały zamieszczone wraz z zadaniem