Maciej Borowiec
23.04.2025

# Laboratorium 6
# Kwadratury

# 1. Wprowadzenie

Celem ćwiczenia było zrobienie dwóch zadań dotyczących kwadratur,

W pierwszym zadaniu należało obliczyć całkę oznaczoną z danej funkcji używając trzech różnych złożonych kwadratur. Należało porównać ich błędy, wyznaczyć odległość między punktami dla najmniejszego błędu oraz empiryczny rząd zbieżności.

W drugim zadaniu należało obliczyć tę samą całkę używając kwadratury Gaussa-Legendre'a i porównać jej jakość z poprzednimi kwadraturami.

# 2. Zadania

## 2.1. Zadanie 1.

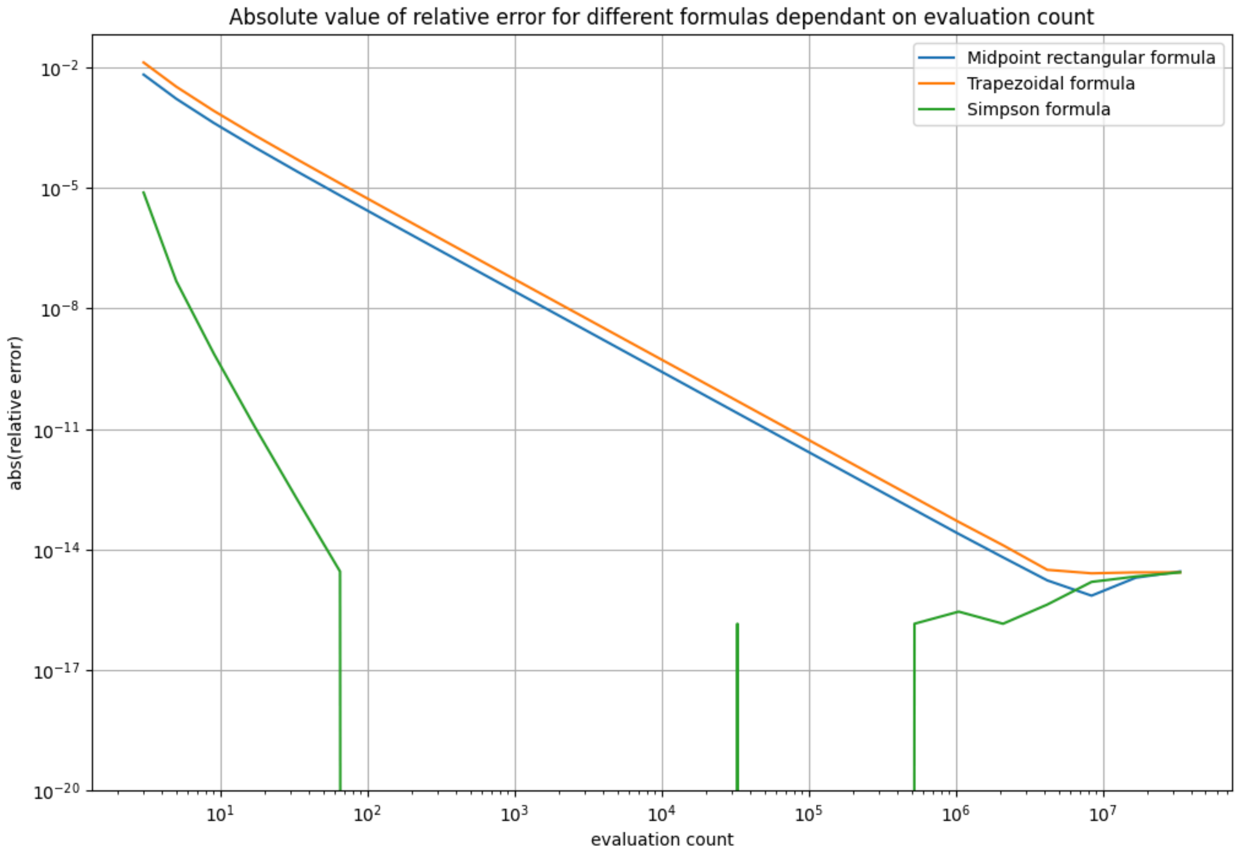
Wiedząc, że:

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi$$

należało obliczyć przybliżoną wartość $\pi$ używając całkowania numerycznego. Należało obliczyć wartość tej całki używając złożonej kwadratury prostokątów, trapezów i Simpsona. Należało rozmieścić $2^m + 1$ równoodległych węzłów dla $m = 1, 2, ..., 25$ i obliczyć dla nich błędy względne całkowania. Następnie używając otrzymane wyniki trzeba było wyznaczyć $h_{min}$ - krok, dla którego wartość bezwzględna błędu względnego jest najmniejsza oraz wyznaczyć empiryczny rząd zbieżności dla tych metod i porównać go z rzędem zbieżności teoretycznym.

### Wykres wartości bezwzględnych błędu względnego

Zaczynamy od przedstawienia wartości bezwzględnych błędu względnego otrzymanych wyników całkowania numerycznego na wykresie. Poniżej znajduje się wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji podcałkowych.




**Rys. 1.** Wartości bezwzględne błędów względnych kwadratur
w zależności od liczby ewaluacji podcałkowych

Na przedstawionym wykresie (rys. 1) widać, że metody prostokątów i trapezów mają bardzo podobne błędy dla każdej wartości $m$, ale metoda prostokątów ma dla każdego $m$ wartości błędu mniejsze od metody trapezów. Metoda Simpsona okazała się być najdokładniejsza. Nawet dla małej liczby ewaluacji osiąga błąd tak mały, że nie jest w stanie się zmieścić na wykresie. Jednakże, dla większej liczby ewaluacji błąd się zwiększa z powodu zwiększającego się błędu numerycznego.

## Wyznaczenie $h_{min}$

| **Kwadratura** | $h_{min}$ |
|---|---|
| Prostokątów | $1.1921 \cdot 10^{-7}$ |
| Trapezów | $1.1921 \cdot 10^{-7}$ |
| Simpsona | $7.8125 \cdot 10^{-3}$ |

**Tab. 1.** Wartości $h_{min}$ w zależności od metody

W tabeli wyżej (tab. 1) przedstawiono kroki $h$, dla których błąd jest minimalny. Wartości dla kwadratur prostokątów i trapezów są sobie równe. Są one również bardzo zbliżone do wartości wyznaczonych w pierwszym laboratorium ($h_{min} \approx 10^{-7}$). Natomiast $h_{min}$ jest dużo większe dla metody Simpsona, ponieważ błąd metody szybciej zmierza do zera, więc błąd obliczeniowy szybciej zaczyna przeważać nad nim.

## Porównanie teoretycznego i empirycznego rzędu zbieżności

Możemy obliczyć empiryczny rząd zbieżności i porównać go z teoretycznym używając danego wzoru:

$$p \approx \log(\frac{E(h_{k+1})}{E(h_k)}) \ / \ \log(\frac{h_{k+1}}{h_k})$$

gdzie:

- $h_k$ to kroki dla kolejnych $m$
- $E(h_k)$ to błędy dla kolejnych kroków

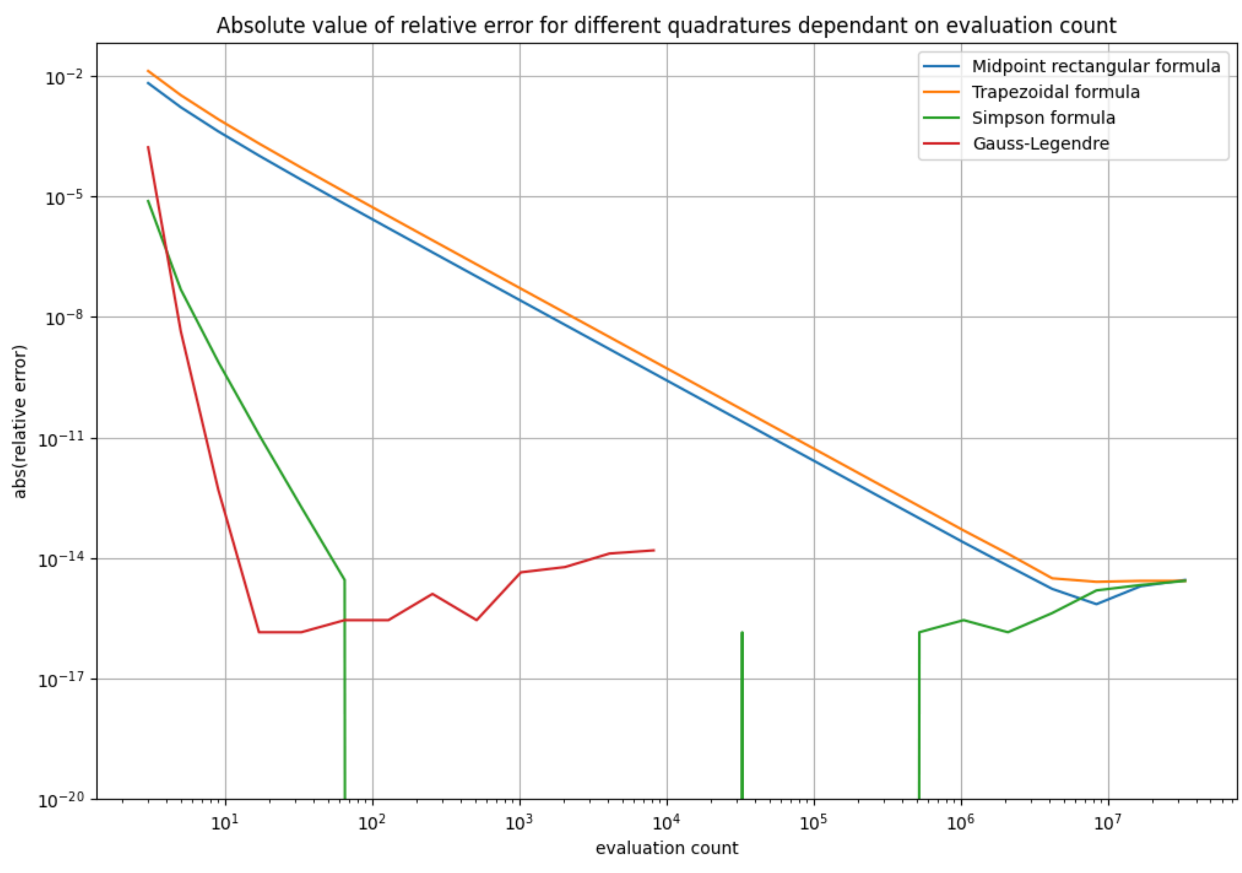
| | **Metoda prostokątów** | **Metoda trapezów** | **Metoda Simpsona** |
|---|---|---|---|
| | *Teoretyczny rząd zbieżności* | | |
| | 2 | 2 | 4 |
| *Indeks $k$* | *Empiryczny rząd zbieżności* | | |
| 1 | 2.707131 | 2.710441 | 9.922662 |
| 2 | 2.358356 | 2.358425 | 7.072943 |
| 3 | 2.179738 | 2.179742 | 6.539051 |
| 4 | 2.090014 | 2.090014 | 6.270405 |
| 5 | 2.045045 | 2.045045 | - |
| 6 | 2.022532 | 2.022532 | - |
| 7 | 2.011269 | 2.011269 | - |
| 8 | 2.005635 | 2.005635 | - |
| 9 | 2.002818 | 2.002818 | - |
| 10 | 2.001409 | 2.001409 | - |
| 11 | 2.000704 | 2.000705 | - |
| 12 | 2.000352 | 2.000352 | - |
| 13 | 2.000178 | 2.000177 | - |
| 14 | 2.000076 | 2.000085 | - |

**Tab. 2.** Porównanie rzędów zbieżności w zależności od metody

W danej tabeli (tab. 2) przedstawiono porównanie teoretycznego i empirycznego błędu zbieżności dla wszystkich metod. Aby rząd zbieżności empiryczny miał sens, wybrano jedynie indeksy $k$, dla których błąd metody przeważa nad błędem numerycznym. Dla metod prostokątów i trapezów rząd zbieżności zbiega do wartości teoretycznej. Natomiast dla metody Simpsona rząd wydaje się zbiegać do wartości bliskiej 6, w przeciwieństwie do wartości teoretycznej równej 4. Może to być jednak spowodowane tym, że błąd numeryczny szybko zaczyna przeważać nad błędem metody, więc nie można obliczyć empirycznie rzędu zbieżności dla większych $m$.

## 2.2. Zadanie 2.

W tym zadaniu należało dokonać całkowania numerycznego na tej samej funkcji co w zadaniu 1., ale tym razem za pomocą kwadratury Gaussa-Legendre'a. Następnie porównano otrzymane błędy z błędami z zadania pierwszego. Poniżej przedstawiono nowy wykres porównujący wartości bezwzględne błędów względnych tych metod.




**Rys. 2.** Wartości bezwzględne błędów względnych kwadratur
w zależności od liczby ewaluacji podcałkowych

Na wykresie (rys. 2) widać, że kwadratura Gaussa-Legendre’a szybciej osiąga minimum błędu od pozostałych metod. Jednakże, po tym punkcie, błąd zaczyna dość szybko wzrastać przez narastający błąd numeryczny. Warto również zauważyć, że przez gorszą złożoność tej kwadratury, w celu zakończenia obliczeń przed cieplną śmiercią wszechświata (i co za tym idzie, przed następnym laboratorium), obliczono wartości jedynie dla $m$ w przedziale od 1 do 13, w przeciwieństwie do poprzednich kwadratur, gdzie $m$ było w przedziale od 1 do 25.

# 5. Podsumowanie

Zadania wykonane w tym laboratorium pokazały wpływ na precyzję całkowania numerycznego w zależności od wybranej metody. Metoda prostokątów okazała się być lepsza niż metoda trapezów, co może być nieintuicyjne, ale jest zgodne z teorią. Natomiast obie metody są dużo mniej dokładne niż metoda Simpsona, która miała mniejsze błędy od tych dwóch błędów oraz już dla małej liczby węzłów osiągała minimum błędu. Na ogół chwalona kwadratura Gaussa-Legendre’a pokazała jednak swoje wady. Prawdą jest, że dla pewnego przedziału, odpowiednio małych liczb ewaluacji, miała ona najmniejszy błąd oraz najszybciej osiągała minimum swojego błędu. Natomiast po tym punkcie następował widoczny wzrost błędu przez błąd numeryczny. Wadą okazała się również złożoność tej kwadratury - obliczenie wartości całki numerycznej dla tych samych wartości $m$ co dla innych metod mogłoby zająć nawet kilka godzin, jeśli nie dni, nieustannych obliczeń. Należy zatem uważać podczas wybierania węzłów kiedy chcemy użyć tej kwadratury.

# 6. BIbliografia


- Materiały zamieszczone wraz z zadaniem
- Materiał na wikipedii nt. kwadratury Gaussa-Legendre’a