7 Zastosowanie wskaźników do funkcji w obliczaniu całek

Całka a kwadratura.
Obliczanie całki zastępujemy obliczaniem kwadratury – numerycznego przybliżenia wartości całki Riemanna. Do najbardziej elementarnych metod obliczenia przybliżenia Q całki $\int_a^b f(x)dx$ należą kwadratury (wzory):

1. prostokątów
$$Q_R = (b-a)f(c), \quad c \in [a,b],$$
   - prostokątów w przód (lewostronna), gdy $c = a$,
   - prostokątów wstecz (prawostronna), gdy $c = b$,
   - prostokątów punktu środkowego (centralna), gdy $c = (a+b)/2$.
2. trapezów
$$Q_T = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)],$$
3. Simpsona
$$Q_s = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(c)+f(b)\right], \quad c = (a+b)/2.$$

W praktyce stosuje się je w wersjach złożonych (zadania 7.1.1 i 7.1.2) lub w algorytmach adaptacyjnych (7.1.3)

7.1 Całki jednokrotne – Kwadratury złożone

Złożona kwadratura wybranego typu polega na podziale przedziału całkowania $[a,b]$ na n równych podprzedziałów o długości $h = (b-a)/n$ i zsumowanie kwadratur prostych tego typu obliczonych dla każdego podprzedziału. Np. złożona kwadratura prostokątów w przód (leftpoint) jest sumą

$$C_{R_{left}} = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih).$$

7.1.1 Funkcje z wskaźnikiem na funkcję podcałkową

Szablon programu należy uzupełnić o:

1. definicje funkcji (procedur) obliczających wartości przykładowych funkcji podcałkowych
   - `f_poly(double x)`, która zwraca wartość wielomianu
     $f(x) = 2x^5 - 4x^4 + 3.5x^2 + 1.35x - 6.25$,
   - `f_rat(double x)`, która zwraca wartość funkcji $f(x) = \frac{1}{(x-0.5)^2+0.01}$,
   - `f_exp(double x)`, która zwraca wartość funkcji $f(x) = 2xe^{-1.5x} - 1$,
   - `f_trig(double x)`, która zwraca wartość funkcji $f(x) = x\mathrm{tg}(x)$
2. definicję nazwy `typedef ...Func1vFp...;` – typu wskaźnikowego do funkcji z jednym parametrem typu `double` i zwracającą wartość typu `double`.
3. definicje funkcji obliczających złożoną kwadraturę dla funkcji `f` z podziałem przedziału całkowania $[a,b]$ na `n` podprzedziałów
   - prostokątów w przód (leftpoint) – `quad_rect_left(...)`,
   - prostokątów wstecz (rightpoint)– `quad_rect_right(...)`,
   - prostokątów punktu środkowego (midpoint) – `quad_rect_mid(...)`,
   - trapezów – `quad_trap(...)`,
   - Simpsona – `quad_simpson(...)`.

   W ostatnich dwóch kwadraturach należy unikać dwukrotnego obliczania wartości funkcji podcałkowej dla tego samego argumentu.
   Każda z tych funkcji ma 4 argumenty:

   (a) wskaźnik do funkcji obliczającej wartość funkcji podcałkowej `f`,
   (b) dolną granicę całkowania `a`,
   (c) górną granicę całkowania `b`,
   (d) liczbę podprzedziałów `n`.
4. definicję nazwy `typedef ...QuadratureFp...` – typu wskaźnikowego do funkcji obliczających wartości kwadratury.

Tablice wskaźników na funkcje

Szablon programu należy uzupełnić o definicję funkcji
`double quad_select(int quad_no,int fun_no,double a,double b,int n)`,
która w przedziale $[a, b]$ oblicza kwadraturę złożoną wskazaną indeksem `quad_no` (z podziałem na `n` podprzedziałów) dla funkcji podcałkowej wskazanej indeksem `fun_no`. Na zewnątrz funkcji `quad_select()` jest definiowana tablica wskaźników do funkcji typu `Func1vFp` oraz tablica typu `QuadratureFp`. Obie tablice są inicjowane wskaźnikami do funkcji zdefiniowanych w punkcie 7.1.1.

Test 1

Wczytuje granice przedziału całkowanie oraz liczbę podprzedziałów i 20 razy wywołuje funkcję `quad_select()`. Dwa pierwsze argumenty tej funkcji są parą iloczynu kartezjańskiego zbioru indeksów tablicy wskaźników do kwadratur `quad_tab` i zbioru indeksów tablicy wskaźników do funkcji podcałkowych `func_tab`.

- **Wejście**
  Nr testu
  granice przedziału całkowania, liczba podprzedziałów
- **Wyjście**
  20 wartości każdej kwadratury dla każdej funkcji
- **Przykład:**
  Wejście:
  1
  0 0.75 25
  Wyjście:
  -3.97887 25.47947 0.14924 -0.48180
  -3.91316 25.77788 0.17020 -0.46719
  -3.94620 25.64102 0.15945 -0.47427
  -3.94602 25.62868 0.15972 -0.47450
  -3.94614 25.63690 0.15954 -0.47434

7.1.2 Algorytm adaptacyjny w wersji rekurencyjnej

W algorytmie jest stosowana jedna, elementarna kwadratura w wersji podstawowej (tzn. nie złożonej). Na każdym etapie obliczeń wyznaczamy przybliżoną wartość S całki z funkcji f w pewnym podprzedziale przedziału $[a, b]$ wg podstawowego wzoru wybranej kwadratury.

Błąd przybliżenia wartości całki kwadraturą jest mały jeżeli długość h podprzedziału, w którym jest obliczana całka, jest mała. Algorytm adaptacyjny ma na celu osiągnięcie wyniku (przybliżonej wartości całki) z błędem bezwzględnym nie większym niż zadany $= \Delta$ skracając długości podprzedziałów tylko tam, gdzie to jest konieczne.

Pierwsze przybliżenie całki jest obliczane dla całego przedziału $[a, b]$. Następnie ten przedział jest dzielony na 2 połowy. Wzór podstawowy wybranej kwadratury jest teraz stosowany osobno dla lewej połówki (od a do $c = (a + b)/2$ i dla prawej (od c do b). Otrzymujemy przybliżone wartości dwóch części obliczanej całki - S_1 i S_2. Jeżeli suma $S_1 + S_2$ różni się od S nie więcej niż o Δ, to uznajemy, że otrzymany wynik jest dostatecznie dokładny i kończymy algorytm. W przeciwnym przypadku stajemy przed dwoma zadaniami - obliczyć całkę na dwóch połówkach (lewej i prawej), każdej z błędem nie większym niż $\Delta/2$. Zauważmy, że są to jakościowo dokładnie dwa takie same zadania, jak zadanie pierwotne (obliczyć całkę z błędem nie większym niż zadany).

Należy tak napisać program, aby liczba obliczeń wartości zadanej funkcji była jak najmniejsza - aby nie obliczać dwukrotnie funkcji dla tego samego argumentu. W tym celu, obliczona na danym poziomie rekurencji wartość kwadratury jest przekazywana przez parametry na kolejny poziom.

W funkcji rekurencyjnej powinna być kontrola poziomu rekursji. Załóżmy, że jeżeli maksymalny zadany poziom rekursji został osiągnięty, a błąd nadal przekracza dopuszczalną granicę `RECURS_LEVEL_MAX` (jest to stała zdefiniowana w programie), to wynikiem obliczeń będzie symbol nieoznaczony NaN.

UWAGA: Ten algorytm nie gwarantuje wyniku w granicach zadanego błędu - możliwe jest przekroczenie zadanego dopuszczalnego błędu (nie trudno podać przykład takiej "złośliwej" funkcji). Dlatego w praktyce obliczeniowej stosuje się dodatkowe zabezpieczenia, które tu - dla uproszczenia zadania - nie są proponowane.

Wartości startowe rekurencji (wartość `S` kwadratury obliczona na całym przedziale $[a, b]$ i początkowy poziom rekurencji) są ustalane we wstępnej procedurze `init_recurs()`.

Szablon programu należy uzupełnić o definicję funkcji inicjującej
`double init_recurs(Func1vFp f,double a,double b,double delta, QuadratureFp quad)`
oraz funkcji wywoływanej rekurencyjnie
`double recurs(Func1vFp f,double a,double b,double S,double delta, QuadratureFp quad,int level)`.

Test 2
Wczytanie danych i wywołanie funkcji `double init_recurs`. Całkowana funkcja: wybrana z tablicy wskaźników do funkcji `func_tab`.
Kwadratura: wybrana z tablicy kwadratur `quad_tab`.

- **Wejście**
  Nr testu
  indeks funkcji podcałkowej, indeks kwadratury
  granice całkowania, dopuszczalny błąd bezwzględny
- **Wyjście**
  Wartość kwadratury
- **Przykład:**
  Wejście:
  2
  1 4
  0 3 0.01
  Wyjście:
  29.04248

7.2 Całka podwójna po powierzchni (*surface integral*)

W tym podrozdziale będą obliczane wartości funkcji dwóch zmiennych. Należy zdefiniować nazwę
`typedef ...Func2vFp...;`
typu wskaźnikowego do funkcji z dwoma parametrami typu `double` zwracającej wartość typu `double`.

7.2.1 Całka po obszarze prostokątnym

Obszar całkowania funkcji $f(x, y)$ można zapisać w postaci

$$R = \{(x, y) : x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2\},$$

Szablon programu należy uzupełnić o definicję funkcji
`double dbl_integr(Func2vFp f, double x1, double x2, int nx, double y1, double y2, int ny)`,
która złożoną metodą prostokątów w przód (leftpoint) oblicza przybliżoną wartość całki. Parametry `nx` i `ny` są liczbami podprzedziałów kwadratur złożonych.

$$V = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx \right) dy \tag{1}$$

Test 3
Wczytanie danych `x1, x2, nx, y1, y2, ny` i wywołanie funkcji.
`dbl_integr(f,x1,x2,nx,y1,y2,ny)`
Całkowana funkcja `f`: `func2v_2`.

- **Wejście**
  Nr testu
  `x1, x2, nx, y1, y2, ny`
- **Wyjście**
  Wartość kwadratury
- **Przykład:**
  Wejście:
  3
  0 1 100
  0 1 100
  Wyjście:
  1.42662

7.2.2 Całka po obszarze normalnym

Obszar postaci

$$D = \{(x, y) : x_1 \leqslant x \leqslant x_2, g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\},$$

gdzie funkcje $g(x)$ i $h(x)$ są ciągłe na odcinku $[x_1, x_2]$, oraz $g(x) < h(x)$ we wnętrzu tego odcinka, nazywamy obszarem normalnym względem osi $0x$.
Użyteczny link:
`https://pl.wikipedia.org/wiki/CaĆka_podwjna`, część: Zamiana na całkę iterowaną.

Wtedy wzór (1) można zapisać w postaci

$$V_n = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Szablon programu należy uzupełnić o definicję funkcji
`double dbl_integr_normal_1(Func2vFp f,double x1,double x2,int nx,double hy,Func1vFp fg,Func1vFp fh)`.
Parametr `hy` jest przybliżoną długością podprzedziału kwadratury złożonej zastosowanej do całkowania wzdłuż zmiennej y. Służy do wyznaczenia liczby podprzdziałów n_y – najmniejszej liczby całkowitej, nie mniejszej od $\frac{h(x_i)-g(x_i)}{h_y}$.

Test 4
Wczytanie danych `x1, x2, nx, hy` i wywołanie funkcji
`dbl_integr_normal_1(f,x1,x2,nx,hy,fg,fh)`
Całkowana funkcja `f`: `func2v_2`.
Funkcje ograniczające obszar całkowania `fg` i `fh`: `lower_bound_2`,`upper_bound_2`.

- **Wejście**
  Nr testu
  `x1, x2, nx, y1, y2, ny`
- **Wyjście**
  Wartość kwadratury
- **Przykład:**
  Wejście:
  4
  0.7 0.9 200
  1e-3
  Wyjście:
  0.14480

7.2.3 Całka po (wielu) obszarach normalnych wewnątrz prostokąta

Rozważmy przypadek obszaru całkowania bardziej ogólnego niż obszar normalny, gdy warunek $g(x) \leqslant h(x)$ nie jest spełniony dla każdego $x \in [a, b]$. Rysunek 1 jest wykresem funkcji $f(x, y)$ całkowanej we wszystkich (dwóch) podobszarach prostokąta

$$R = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d\},$$

w których $g(x) < h(x)$ – obszary te są na rysunku oznaczone kreskowaniem kolorem czarnym. Każdy z nich jest obszarem normalnym względem osi $0x$. Użycie algorytmu z punktu 7.2.2 wymagałoby wyznaczania wszystkich pierwiastków równania $g(x) = h(x)$.

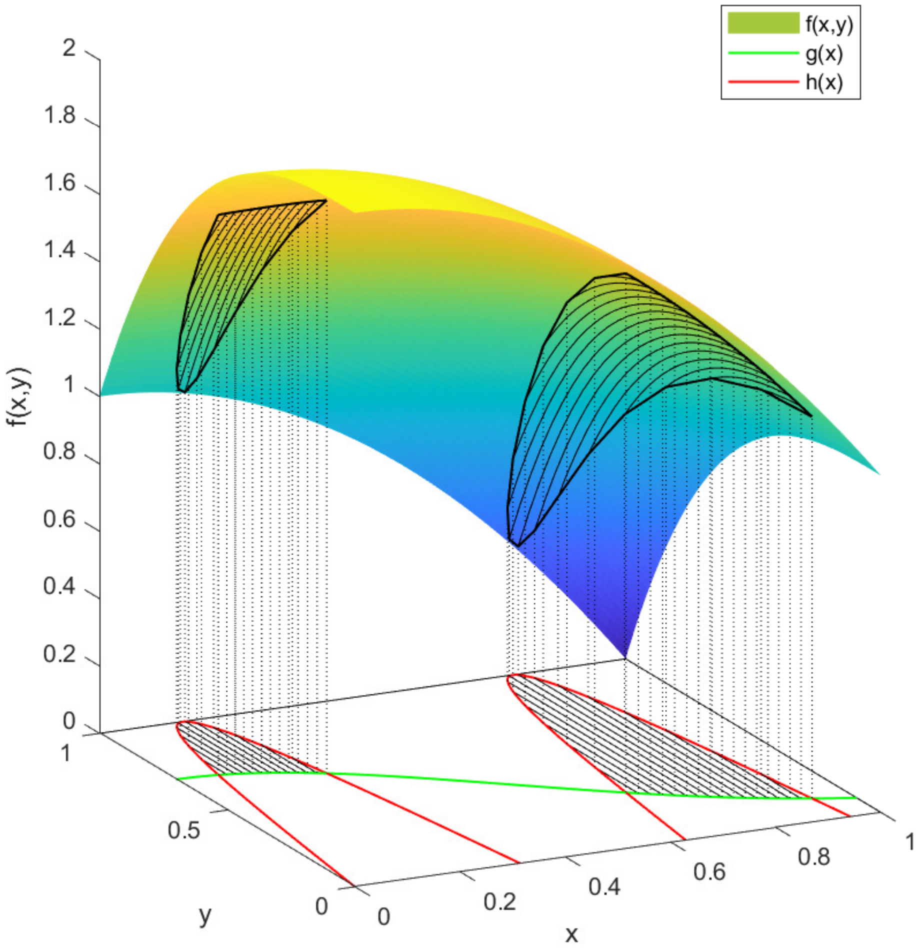
W tym zadaniu należy zastosować prostszy algorytm całkowania – całkowania po obszarze prostokątnym R z predykatem orzekającym, czy dla danej wartości x_i zachodzi nierówność $g(x_i) < y < h(x_i)$. Jeżeli tak, to należy obliczyć całkę (a dokładniej – kwadraturę)

$$Q_i(x_i) \approx \int_{\max(y_1, g(x_i))}^{\min(y_2, h(x_i))} f(x_i, y) dy$$

stosując jedną z kwadratur złożonych.

Szablon programu należy uzupełnić o definicję funkcji
`dbl_integr_normal_n(Func2vFp f, double x1, double x2, int nx, double y1, double y2, int ny, Func1vFp fg, Func1vFp fh))`,
która złożoną metodą prostokątów leftpoint oblicza przybliżoną objętość pod wykresem funkcji `f` nad obszarem normalnym ograniczonym wartościami `x1`, `x2`, i funkcjami $h(x)$ i $g(x)$ oraz prostokątem x_1, y_1, x_2, y_2.

Liczbę podprzedziałów kwadratur $Q_i(x_i)$ należy wyznaczyć podobnie jak w punkcie 7.2.2 przyjmując $h_y = (y_2 - y_1)/n_y$.



Rysunek 1: Przykład zadania całkowania po dwóch obszarach normalnych względem osi $0x$. $f(x, y) = 2 - x^2 - y^3$, $g(x) = 0.7 \exp(-2x^2)$, $\quad h(x) = \sin(10x)$.

Test 5
Wczytanie danych `x1, x2, nx, y1, y2, ny` i wywołanie funkcji
`dbl_integr_normal_n(f,x1,x2,nx,y1,y2,ny,fg,fh)`
Całkowana funkcja `f`: `func2v_2`.
Funkcje ograniczające obszar całkowania `fg` i `fh`: `lower_bound_2`,`upper_bound_2`.

- **Wejście**
  Nr testu
  `x1, x2, nx, y1, y2, ny`
- **Wyjście**
  Wartość kwadratury
- **Przykład:**
  Wejście:
  5
  0 1 1000
  0 1 1000
  Wyjście:
  0.21668

7.3 Całki potrójne – z predykatem wyłączającym część obszaru całkowania

Uniwersalny typ funkcji (procedury) obliczającej wartość funkcji n zmiennych.

Procedura obliczająca wartości funkcji n zmiennych wymaga przekazania do niej n wartości zmiennych niezależnych. Aby uniknąć konieczności definiowania kolejnych nazw typów dla kolejnych liczb zmiennych, wartości zmiennych niezależnych będziemy przekazywać poprzez n-elementową tablicę.

Przykładowa funkcja podcałkowa trzech zmiennych jest zdefiniowana w szablonie programu `double func3v(const double v[], int n)`. Nazwa typu wskaźnika do takiej procedury (funkcji) jest w szablonie programu zdefiniowana:
`typedef double (*FuncNvFp)(const double*, int);`

Predykat wykluczający dany punkt z obszaru całkowania. Zdefiniowana w szablonie funkcja `int bound3v(const double v[], int n)` jest predykatem zwracającym 1 gdy punkt o współrzędnych zapisanych w tablicy `v` leży wewnątrz obszaru całkowania.

Nazwa typu wskaźnika do procedury – predykatu – zwracającej wartość logiczną warunku określającego, czy zadany punkt w przestrzeni n-wymiarowej należy do zadanego obszaru całkowania, jest zdefiniowana w linii:
`typedef int (*BoundNvFp)(const double*, int)`

Całka potrójna po prostopadłościanie z predykatem boundary akceptującym albo wykluczającym elementarną domenę kwadratury

Szablon programu należy uzupełnić o definicję funkcji
`double trpl_quad_rect(FuncNvFp f, int variable_no, const double variable_lim[][2], const int tn[], BoundNvFp boundary)`,
która oblicza kwadraturę prostokątów wstecz (rightpoint) jako przybliżenie całki potrójnej po prostopadłościanie. Dolne i górne granice przedziałów całkowania wzdłuż kolejnych zmiennych są przekazywane w tablicy `variable_lim`, a liczby podprzedziałów – w tablicy `tn`. Parametr `boundary` jest adresem predykatu. Wartość `NULL` tego parametru oznacza brak predykatu, czyli brak ograniczeń w obszarze całkowania.

Test 6
Wczytanie danych `x1, x2, nx, y1, y2, ny` i wywołanie funkcji
`trpl_quad_rect()`.
Całkowana funkcja: `func3v`.
Predykat: Funkcje ograniczające obszar całkowania `bound3v`.

- **Wejście**
  Nr testu
  `x1, x2, nx`
  `y1, y2, ny`
  `z1, z2, nz`
  0 – gdy nie ma ograniczeń obszaru całkowania,
  1 – gdy istnieje predykat.
- **Wyjście**
  Wartość kwadratury
- **Przykład:**
  Wejście:
  6
  0 1 20
  0 1 20
  0 1 20
  1
  Wyjście:
  0.34824

7.4 Całka n-krotna z predykatem

W szablonie programu są zdefiniowane przykładowe funkcje n zmiennych:
procedura obliczająca wartość funkcji podcałkowej n-wymiarowej
`funcNv(const double v[], int n)`
oraz predykat `int boundNv(const double v[], int n)`.
Liczba zmiennych jest ograniczona zdefiniowaną stałą `N_MAX`.

Całka po hiperprostopadłościanie z predykatem boundary

Szablon programu należy uzupełnić o definicję rekurencyjnej funkcji
`recur_quad_rect_mid(double *psum, FuncNvFp f, int variable_no, double tvariable[], const double variable_lim[][2], const int tn[], int level, BoundNvFp boundary)`,
która oblicza przybliżenie całki z `variable_no` wymiarowej funkcji `f` po hiper-prostopadłościanie określonym ograniczeniami zapisanymi w `variable_lim`. Wzdłuż i-tej zmiennej jest obliczana złożona kwadratura prostokątów punktu środkowego (midpoint) z podziałem na `tn[i]` podprzedziałów.
Parametr `level` można zastąpić zmienną statyczną zdefiniowaną wewnątrz funkcji.
Wartość kwadratury jest zapisywana pod adresem przekazywanym do funkcji przez jej pierwszy parametr.

Test 7
Wczytanie danych `x1, x2, nx, y1, y2, ny` i wywołanie funkcji `recur_quad_rect()`.
Całkowana funkcja: `funcNv`.
Predykat: `boundNv`.

- **Wejście**
  Nr testu
  Krotność całki n
  n linii z przedziałem całkowania i liczbą podprzedziałów
  0 – gdy bez ograniczeń obszaru całkowania,
  1 – gdy istnieje predykat.

- **Wyjście**
  Wartość kwadratury

- **Przykład:**
  Wejście:
  7
  4
  0 1 10
  0 1 10
  0 1 10
  0 1 10
  1
  Wyjście:
  0.98941