

Laboratorium 3

Interpolacja

1. Wprowadzenie

Celem ćwiczenia było wykorzystanie interpolacji do znalezienia wielomianu interpolującego podane punkty. Należało dokonać ekstrapolacji znalezionego wielomianu i porównać wartość otrzymaną z wartością prawdziwą. Należało również znaleźć wielomiany interpolacyjne Lagrange'a i Newtona oraz porównać otrzymane wyniki z wynikami otrzymanymi po zaokrągleniu danych.

2. Zadanie

W zadaniu należało dokonać znaleźć wielomian interpolacyjny dla punktów przedstawiających populację Stanów Zjednoczonych w zależności od roku. Użyte dane wyglądały następująco:

Rok	Populacja
1900	76 212 168
1910	92 228 496
1920	106 021 537
1930	123 202 624
1940	132 164 569
1950	151 325 798
1960	179 323 175
1970	203 302 031
1980	226 542 199

Tab. 1. Populacja stanów zjednoczonych
w zależności od roku

2.1. Macierz Vandermonde'a

W tym podejściu rozważamy cztery zbiory funkcji bazowych, z których tworzymy macierze Vandermonde'a. Następnie wybieramy najlepiej uwarunkowaną macierz i dla niej znajdujemy współczynniki wielomianu interpolującego.

Rozważane zbiory funkcji bazowych:

$$1. \phi_j(t) = t^{j-1}$$

$$2. \phi_j(t) = (t - 1900)^{j-1}$$

$$3. \phi_j(t) = (t - 1940)^{j-1}$$

$$4. \phi_j(t) = ((t - 1940)/40)^{j-1}$$

Porównanie współczynników uwarunkowania:

Zbiór funkcji bazowych	1.	2.	3.	4.
Współczynnik uwarunkowania	$3.983 \cdot 10^{36}$	$6.307 \cdot 10^{15}$	$9.316 \cdot 10^{12}$	$1.605 \cdot 10^3$

Tab. 2. Porównanie współczynników uwarunkowania dla poszczególnych macierzy Vandermonde'a

Z danej tabeli (tab. 2) łatwo zauważyć, że macierz Vandermonde'a utworzona z czwartego zbioru funkcji bazowych jest najlepiej uwarunkowana, zatem będziemy dokonywać interpolacji dla tego zbioru funkcji bazowych.

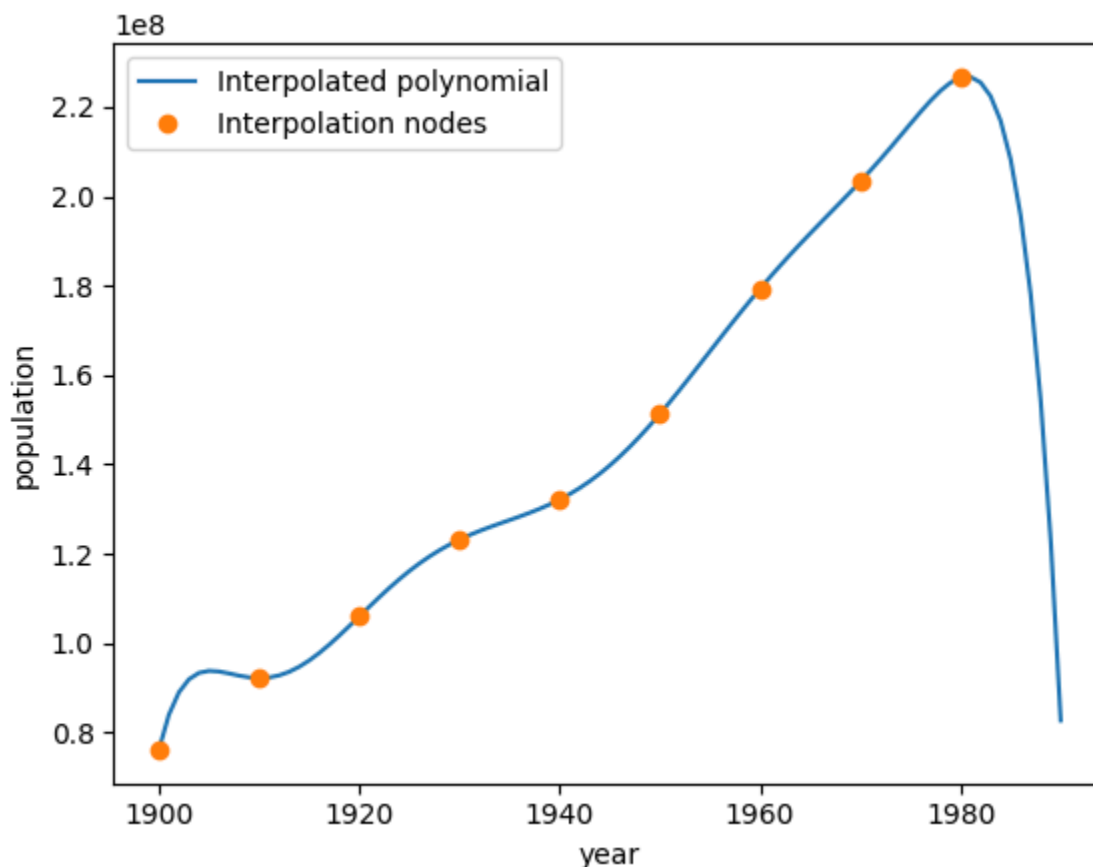
Znajdujemy współczynniki rozwiązując równanie liniowe:

$$Ma = b$$

gdzie:

- M to utworzona macierz Vandermonde'a
- a to wektor szukanych współczynników
- b to wektor populacji Stanów Zjednoczonych

Następnie obliczamy wartości znalezione wielomianu dla argumentów całkowitych z przedziału [1900; 1990] używając schematu Hornera i rysujemy wykres dla otrzymanych wartości wielomianu.



Rys. 1. Wykres wielomianu interpolacyjnego otrzymanego używając macierzy Vandermonde'a

Z wykresu (rys. 1) widać, że ekstrapolacja do roku 1990 zakończyła się znikomym sukcesem. Otrzymana wartość dla roku 1990 jest równa 82.75mln, gdzie wartość prawdziwa jest równa 248.7mln. Błąd względny tej ekstrapolacji jest w przybliżeniu równy 0.6673. Oznacza to, że zagadnienie interpolacji nie nadaje się do ekstrapolacji danych.

2.2. Wielomian interpolacyjny Lagrange'a

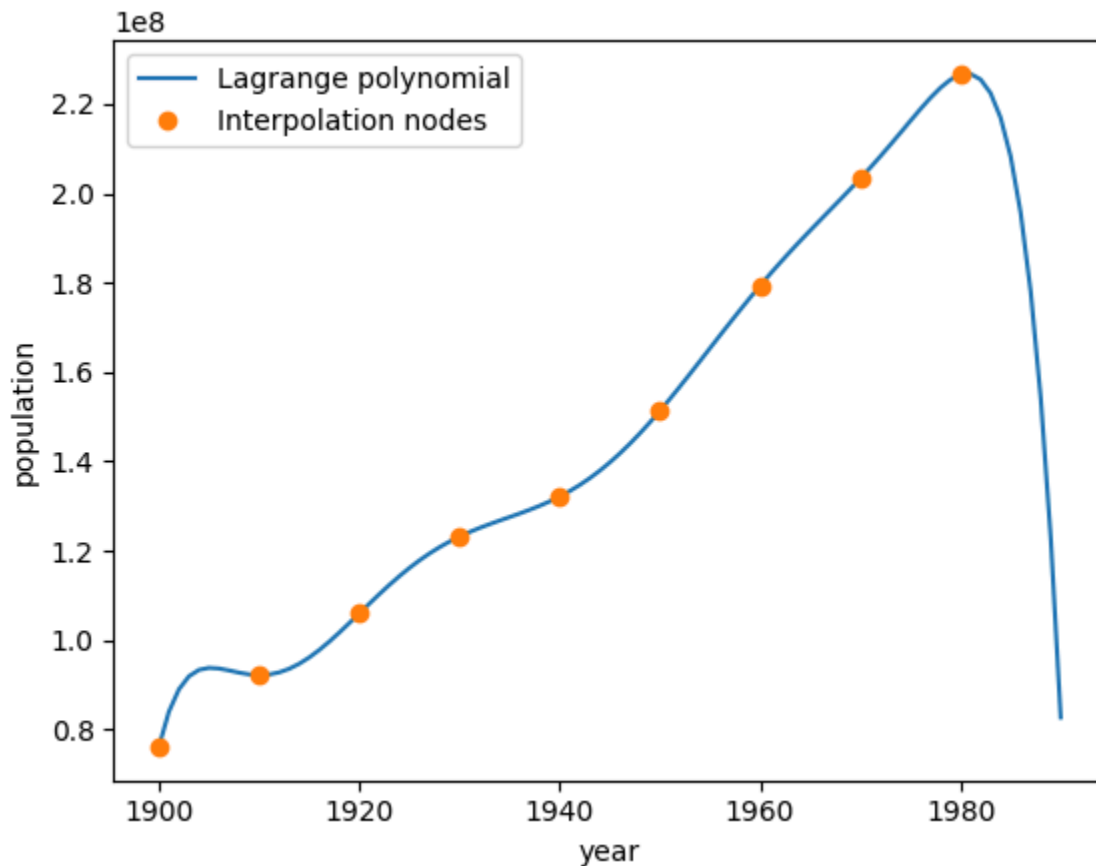
Następnie dokonamy interpolacji wielomianem Lagrange'a. Użyjemy do tego wzoru:

$$p_{n-1}(t) = y_1 \ell_1(t) + y_2 \ell_2(t) + \dots + y_n \ell_n(t)$$

gdzie:

- $\ell_j(t) = \frac{\prod_{k=1, k \neq j}^n (t - t_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^n (t_j - t_k)} \quad j = 1, \dots, n$
- y_j to wartości punktów $j = 1, \dots, n$

Następnie, tak jak poprzednio, obliczamy wartości znalezione wielomianu dla argumentów całkowitych z przedziału [1900; 1990] i rysujemy wykres dla otrzymanych wartości wielomianu.



Rys. 2. Wykres wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a

Wartości otrzymanego wielomianu Lagrange'a (rys. 2) są identyczne w granicy błędu do wartości wielomianu otrzymanego używając macierzy Vandermonde'a. Widać tu jednoznaczność interpolacji. Przez to ekstrapolacja w tym przypadku również jest mało zgodna z rzeczywistością.

2.3. Wielomian interpolacyjny Newtona

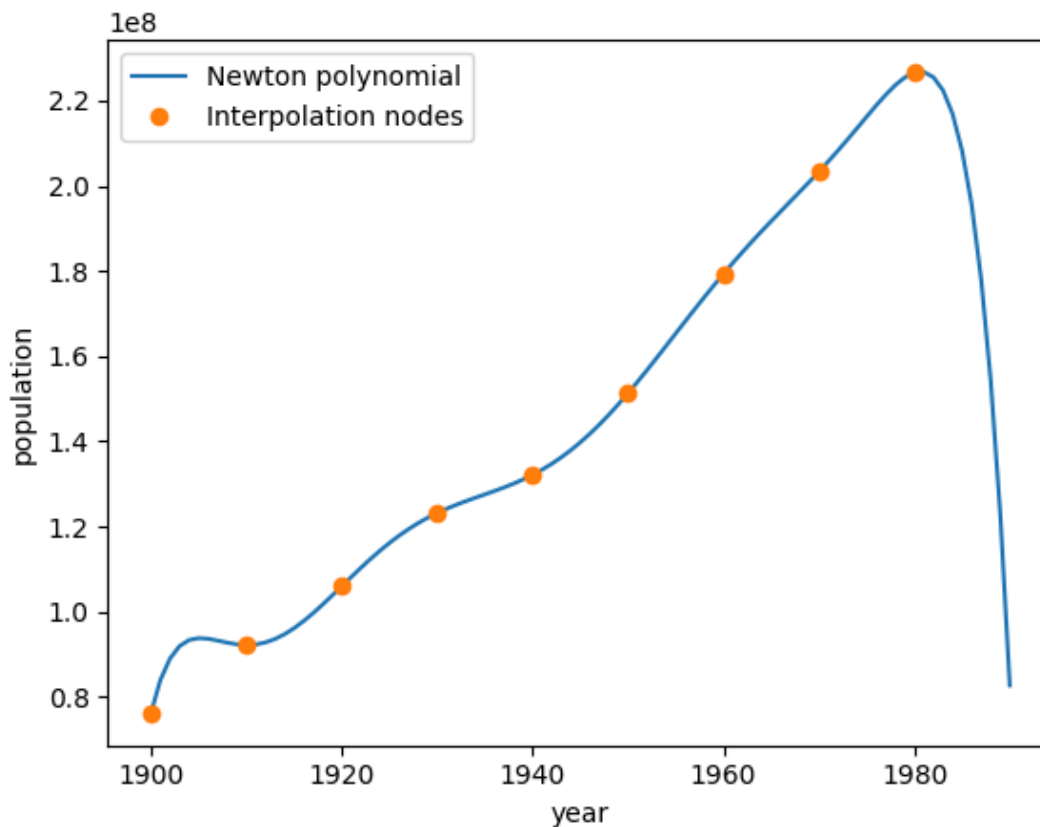
Kolejnym wielomianem interpolacyjnym, który wyznaczymy będzie wielomian Newtona. Jest on określony wzorem:

$$p_{n-1}(t) = f[t_1]\pi_1(t) + f[t_1, t_2]\pi_2(t) + \dots + f[t_1, t_2, \dots, t_n]\pi_n(t)$$

gdzie:

- $\pi_j(t) = \prod_{k=1}^{j-1} (t - t_k)$ $j = 1, \dots, n$
- $f[t_1, \dots, t_j]$ to różnice dzielone $j = 1, \dots, n$

Ponownie obliczamy wartości znalezione wielomianu dla argumentów całkowitych z przedziału [1900; 1990] (używamy metody Hornera) i rysujemy wykres dla otrzymanych wartości wielomianu.



Rys. 3. Wykres wielomianu interpolacyjnego Newtona

Wartości otrzymanego wielomianu Newtona (rys. 3), podobnie jak wartości wielomianu Lagrange'a, są identyczne w granicy błędu do wartości wielomianu otrzymanego używając macierzy Vandermonde'a. Ponownie widoczna jest tu jednoznaczność interpolacji i niedokładność ekstrapolacji.

2.4. Interpolacja po zaokrągleniu danych

Na koniec dokonamy interpolacji po zaokrągleniu populacji Stanów Zjednoczonych do miliona. Użyjemy do tego najlepiej uwarunkowanej macierzy Vandermonde'a, czyli tej samej macierzy co użyliśmy w podpunkcie **2.1**. Dane po zaokrągleniu prezentują się następująco:

Rok	Populacja
1900	76 000 000
1910	92 000 000
1920	106 000 000
1930	123 000 000
1940	132 000 000
1950	151 000 000
1960	179 000 000
1970	203 000 000
1980	227 000 000

Tab. 3. Populacja stanów zjednoczonych
w zależności od roku po zaokrągleniu

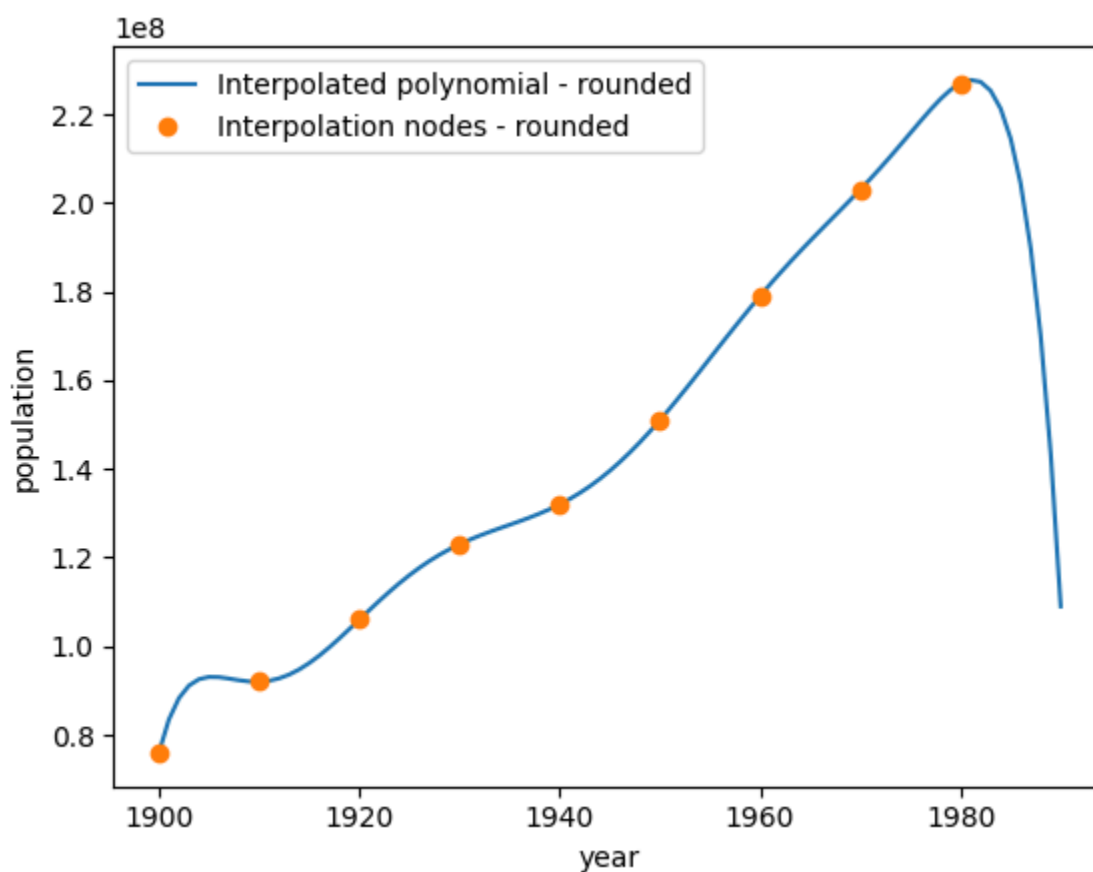
Następnie wyznaczamy współczynniki wielomianu rozwiązując równanie liniowe tak jak poprzednio. Możemy porównać otrzymane współczynniki z współczynnikami otrzymanymi w punkcie **2.1**.

Różnice pomiędzy współczynnikami (tab. 4) nie są zaskoczeniem, gdyż zmiana danych wpływa na wielomian interpolujący. Zmiana we współczynnikach nie jest jednak drastyczna, gdyż zmiana w danych również jest względnie niewielka. Możemy się spodziewać, że gdybyśmy użyli gorzej uwarunkowanej macierzy Vandermonde'a to zmiana we współczynnikach byłaby większa.

Współczynnik - dane początkowe	Współczynnik - dane zaokrąglone	Względna różnica
$1.321646 \cdot 10^8$	$1.320000 \cdot 10^8$	0.001245
$4.613077 \cdot 10^7$	$4.595714 \cdot 10^7$	0.003764
$1.027163 \cdot 10^8$	$1.001413 \cdot 10^8$	0.025069
$1.825271 \cdot 10^8$	$1.811111 \cdot 10^8$	0.007758
$-3.746147 \cdot 10^8$	$-3.567556 \cdot 10^8$	0.047673
$-3.426685 \cdot 10^8$	$-3.384889 \cdot 10^8$	0.012197
$6.062912 \cdot 10^8$	$5.703111 \cdot 10^8$	0.059345
$1.891756 \cdot 10^8$	$1.869206 \cdot 10^8$	0.011920
$-3.151802 \cdot 10^8$	$-2.941968 \cdot 10^8$	0.066576

Tab. 4. Porównanie współczynników wielomianów przed i po zaokrągleniu danych

Narysujmy również wykres dla tego wielomianu interpolującego.



Rys. 4. Wykres wielomianu interpolującego po zaokrągleniu danych

Jak widać na wykresie (rys. 4), mimo niewielkich różnic w danych, wynik ekstrapolacji jest znacząco inny. Dla roku 1990 wartość wielomianu jest równa 109mln. Nadal jest ona bardzo daleko od wartości prawdziwej (248.7mln), lecz jest mniejsza niż przed zaokrągleniem. Błąd względny tutaj wynosi 0.5617 w przeciwieństwie do 0.6673 w poprzednim przypadku. Może to być spowodowane tym, że zaokrąglenie danych mogło zminimalizować błędy otrzymane podczas zbierania danych. Nie należy jednak wykluczać możliwości czystego przypadku, gdyż posiadamy wyniki tylko dla dwóch ekstrapolacji.

5. Podsumowanie

Metody użyte do interpolacji w podanym zadaniu nie miały różnicy w otrzymanych wynikach, co świadczy o jednoznaczności interpolacji. Każda z tych metod może zostać użyta z dużym sukcesem do interpolacji, przy czym do metody używającej macierz Vandermonde'a należy dobrać odpowiedni zbiór funkcji bazowych. Każda metoda ma swoje wady i zalety. Na przykład obliczanie współczynników wielomianów Lagrange'a jest trywialne, ale ewaluacja wartości wielomianu jest mniej wydajna i bardziej podatna na błędy. Natomiast ewaluacja wielomianów Newtona jest bardzo szybka, lecz obliczenie współczynników ma większą złożoność. Należy zatem dobierać metodę w zależności od celu, który chcemy osiągnąć. Zagadnienie interpolacji nie nadaje się jednak do ekstrapolacji, ponieważ dane mogą wyjść bardzo oddalone od danych rzeczywistych.

6. Bibliografia

- Materiały zamieszczone wraz zadaniem
- [Materiał z wikipedii nt. metody Hornera](#)
- [Materiał z wikipedii nt. różnic dzielonych](#)
- [Materiał z wikipedii nt. wielomianu Lagrange'a](#)
- [Materiał z wikipedii nt. wielomianu Newtona](#)