Maciej Borowiec
02.04.2025

Laboratorium 4
Efekt Rungego

1. Wprowadzenie

Celem ćwiczenia było zrobienie dwóch zadań służących do porównania jakości wybieranych węzłów oraz interpolacji.

W pierwszym zadaniu należało narysować wykresy porównujące punkty Czebyszewa, Legendre'a i punkty rozmieszczone równomiernie. Porównywania należało dokonać średnią geometryczną odległości od punktów pozostałych.

W drugim zadaniu należało porównać metody interpolacji dla dwóch różnych funkcji. Należało porównać interpolację przez wielomiany Lagrange'a dla punktów rozmieszczonych równomiernie, punktów Czebyszewa oraz interpolację przez kubiczne funkcje sklejane dla punktów rozmieszczonych równomiernie.

2. Zadania

2.1. Zadanie 1.

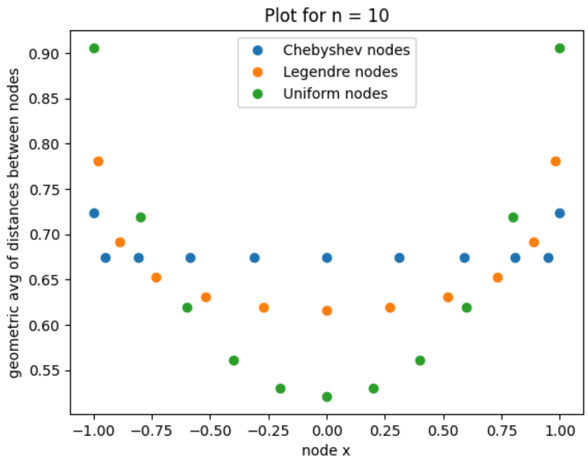
W tym zadaniu należało narysować wykresy porównujące wektory punktów. Te wektory były zdefiniowane jako punkty $x_0, x_1, ..., x_n$ na przedziale $[-1; 1]$.

Należało porównać:

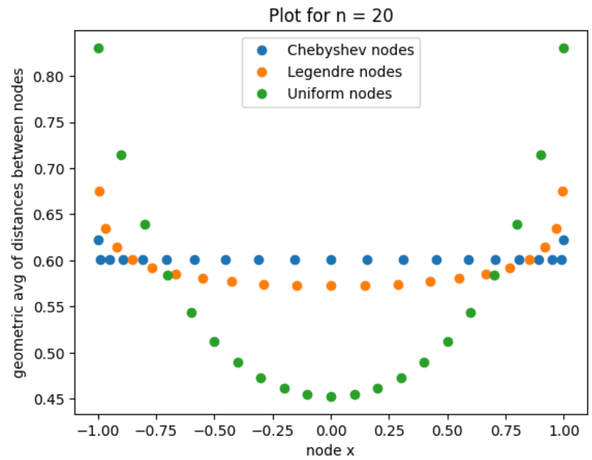
- punkty Czebyszewa
- punkty Legendre'a
- punkty równomiernie rozmieszczone

dla $n = 10, 20, 50$.

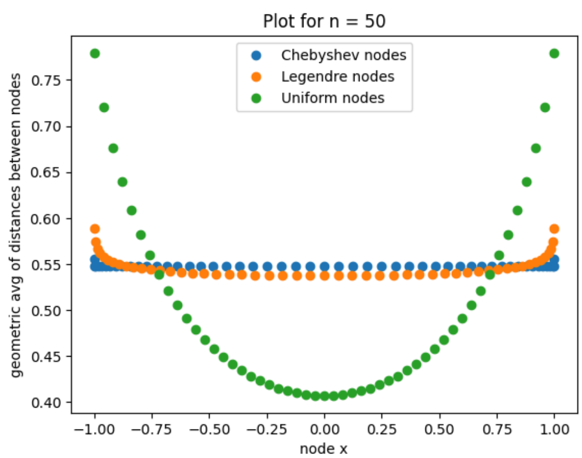
Jako sposób porównania należało przedstawić na osi x pozycję punktu, a na osi y średnią geometryczną odległości tego punktu od każdego innego punktu w danym wektorze punktów. Otrzymane wyniki zostały przedstawione na wykresach poniżej.



Rys. 1. Porównanie średniej geometrycznej odległości punktów dla n = 10 (w sumie 11 punktów)



Rys. 2. Porównanie średniej geometrycznej odległości punktów dla n = 20 (w sumie 21 punktów)



Rys. 3. Porównanie średniej geometrycznej odległości punktów dla n = 50 (w sumie 51 punktów)

Jak widać na wykresach powyżej (rys. 1, rys. 2, rys. 3) średnia geometryczna odległości dla punktów Czebyszewa jest identyczna dla każdego punktu (i dla dowolnego n) za wyjątkiem punktów brzegowych. Dla punktów Legendre'a średnia geometryczna odległości jest bardzo zbliżona do siebie i wraz z wzrostem n różnica w średniej znacząco się zmniejsza. Natomiast dla punktów rozmieszczonych równomiernie różnice średniej geometrycznej odległości dla różnych punktów są bardzo duże i zmiana dla rosnącej wartości n jest niewielka.

2.2. Zadanie 2.

W tym zadaniu należało porównać trzy metody interpolacji dla dwóch różnych funkcji. Podane funkcje były następujące:

- $f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ na przedziale $[-1; 1]$
- $f_2(x) = exp(cosx)$ na przedziale $[0; 2\pi]$

Natomiast metody interpolacji do porównania były następujące:

- wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami
- kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami
- wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa, które były dane następującym wzorem:

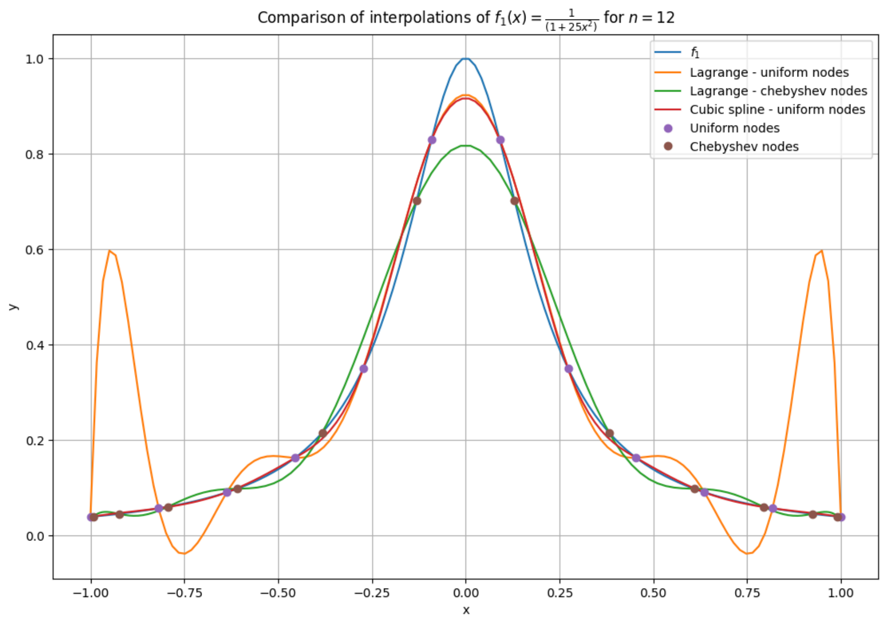
$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot (-cos(\theta_j)) \text{ na przedziale } [a; b]$$

$$\text{gdzie: } \theta_j = \frac{2j-1}{2n}\pi \text{ dla } j = 1, 2, ..., n$$

2.2.1 Interpolacja f_1 dla $n = 12$

W tym podpunkcie należało dokonać interpolacji wszystkimi trzema metodami dla funkcji f_1 dla $n = 12$ i narysować otrzymane wyniki na wykresie. W celu narysowania wykresu funkcji należało dokonać 10 razy gęstsze próbkowanie na zbiorze punktów użytych w danej metodzie interpolacji.

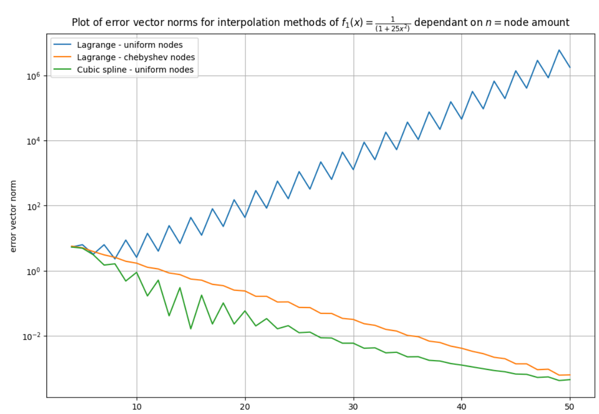
Jak widać na przedstawionym wykresie poniżej (rys. 4) najbardziej zgodnym z rzeczywistością wielomianem interpolującym funkcję f_1 jest metoda używająca kubicznych funkcji sklejanych dla węzłów równoodległych od siebie. Jedyna znacząca różnica od funkcji prawdziwej jest w otoczeniu $x = 0$, a w innych miejscach następują jedynie niewielkie odstępstwa od funkcji interpolowanej. Metoda Lagrange'a dla punktów Czebyszewa, mimo użycia znacznie lepszego zbioru punktów do interpolacji niż zbioru punktów równoodległych, jest gorszej jakości niż metoda używająca kubicznych funkcji sklejanych. Błąd dla (prawie) każdej wartości x jest większy niż dla metody poprzedniej. Najgorszy wielomian interpolujący otrzymany został dla metody Legrange'a dla zbioru punktów równoodległych. Błędy są dużo większe dla tej metody, szczególnie dla x-ów bliskich wartości 1 oraz -1.



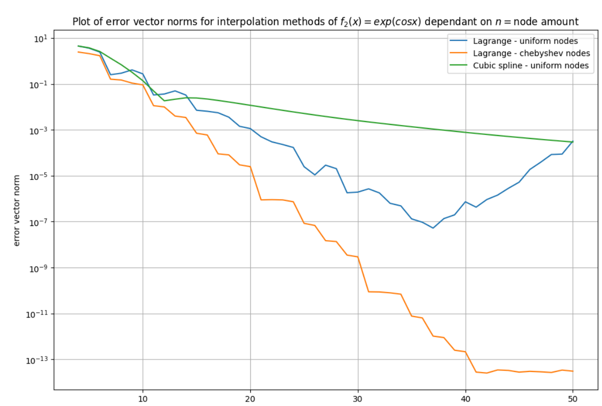
Rys. 4. Porównanie otrzymanych wielomianów interpolacyjnych funkcję f_1 dla $n = 12$

2.2.2 Porównanie metod interpolacji obu funkcji dla $n = 4, 5, ..., 50$

W tym podpunkcie należało dokonać interpolacji wszystkimi trzema metodami dla obu funkcji dla $n = 4,\ 5,\ ...,\ 50$. Porównania należało dokonać rysując wykres zależności normy błędu metody (tj. długość wektora różnicy wartości oczekiwanej i wartości uzyskanej) w zależności od liczby n. Ewaluację otrzymanych funkcji należało przeprowadzić dla 500 losowo wybranych punktów z przedziału, na którym dana funkcja była zdefiniowana. Poniżej przedstawione zostały otrzymane wykresy.



Rys. 5. Wykres normy błędów metod interpolacji w zależności od n dla funkcji f_1



Rys. 6. Wykres normy błędów metod interpolacji w zależności od n dla funkcji f_2

Jak widać na wykresie dla funkcji pierwszej (rys. 5) metoda Lagrange'a dla punktów równoodległych jest bardzo podatna na Efekt Rungego (tj. pogorszenie jakości interpolacji mimo wzrostu liczby węzłów) - błąd tej metody znacząco rośnie. Dla obu pozostałych metod następuje polepszenie interpolacji dla większej liczby węzłów. W obu metodach dla równoodległych punktów można zaobserwować wzrosty i spadki błędów w zależności od parzystości liczby węzłów, ponieważ ta parzystość znacząco wpływa na rozmieszczenie punktów równoodległych.

Na wykresie dla funkcji drugiej (rys. 6) również można zauważyć efekt Rungego dla metody Lagrange'a z równoodległymi punktami - mimo (praktycznie) stabilnego malenia błędu wraz wzrostem n, od $n = 37$ zaczyna się wzrost błędu. Ponownie, obie pozostałe metody nie są podatne na ten efekt. Co ciekawe, metoda używająca kubicznych funkcji sklejanych ma tutaj dla prawie każdej wartości n większy błąd niż obie pozostałe metody. Możemy się jednak spodziewać, że użycie punktów Czebyszewa by znacząco polepszyło jakość tej interpolacji.

5. Podsumowanie

Zadania wykonane w tym laboratorium pokazały jak duże znaczenie może mieć wpływ wyboru węzłów i metody w interpolacji funkcji. Punkty równomiernie rozmieszczone produkują zdecydowanie mniej zgodne z rzeczywistością wielomiany interpolujące. Łatwo też dojść do wniosku, że metoda korzystająca z kubicznych funkcji sklejanych, w większości przypadków, może być bardziej dokładna niż metoda utylizująca wielomiany Lagrange'a. Mimo, że dla funkcji drugiej błąd jest był największy dla tej metody, to jej stabilność względem wyboru węzłów może być użyteczna.

6. BIbliografia

- Materiały zamieszczone wraz zadaniem