

Laboratorium 10

Równania różniczkowe zwyczajne - część II

Maciej Borowiec

04.06.2025

1 Wprowadzenie

Celem ćwiczenia było zrobienie zadania polegającego na rozwiązaniu układu dwóch równań różniczkowych opisanych modelem Lotki-Volterry różnymi metodami i porównanie tych metod.

2 Zadanie

Do opisanego układu drapieżca-ofiary możemy użyć modelu Lotki-Volterry:

$$\begin{cases} x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y) \\ y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x) \end{cases}$$

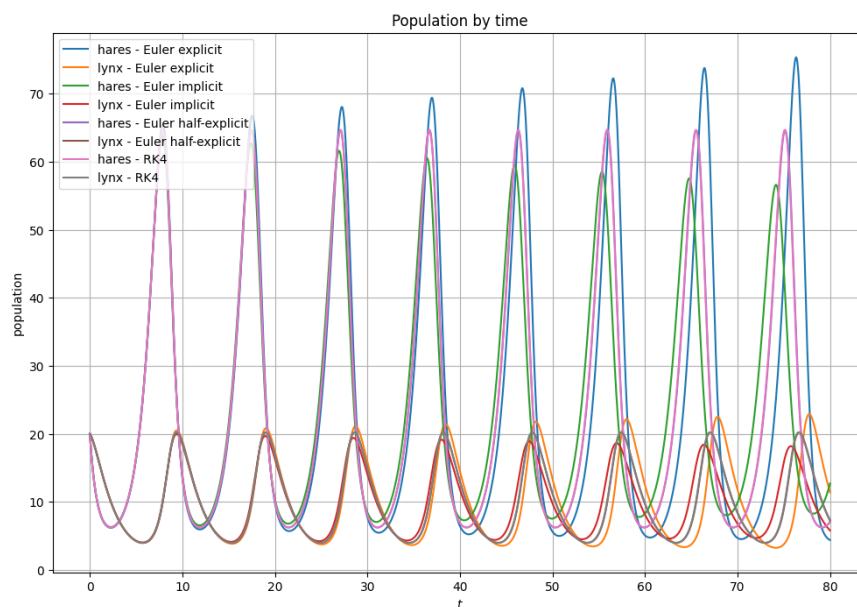
gdzie:

- $x(t)$ to gęstość ofiar (np. liczba zajęcy na jednostkę powierzchni) od czasu
- $y(t)$ to gęstość drapieżców (np. liczba rysi na jednostkę powierzchni) od czasu
- α_1 to współczynnik przyrostu ofiar w izolowanym środowisku
- α_2 to współczynnik ubywania drapieżców w izolowanym środowisku
- β_1 to współczynnik intensywności kontaktów między drapieżcami a ofiarami, kończących się upolowaniem ofiary
- β_2 to współczynnik opisujący wpływ obecności ofiar na współczynnik przyrostu drapieżców

Zadanie należało rozwiązać jawną metodą Eulera, niejawną metodą Eulera, pół-jawną metodą Eulera oraz metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu dla przedziału $[0; 80]$. Przyjęto wartości początkowe: $x(0) = 20$, $y(0) = 20$, parametry: $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.5$, $\beta_2 = 0.02$ oraz krok $h = 0.01$.

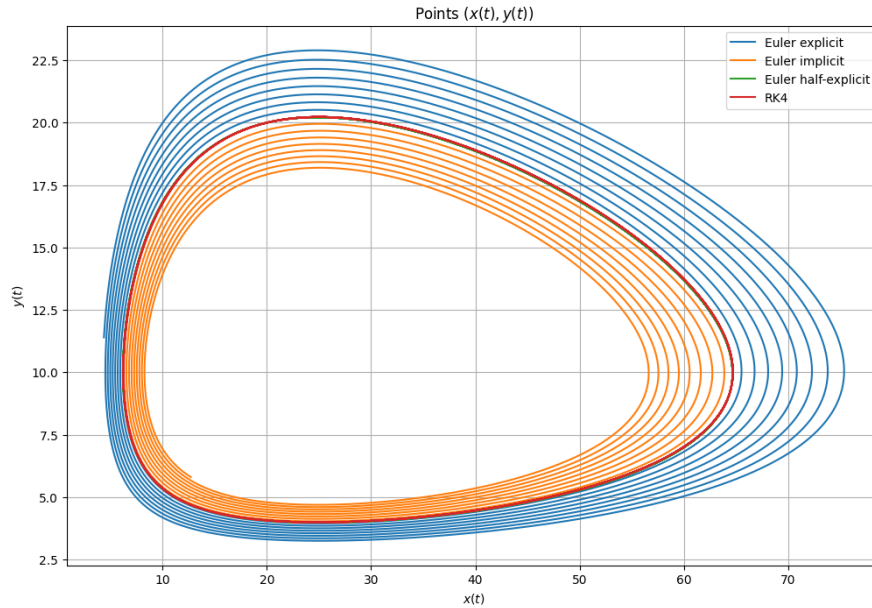
2.1 Liczebność populacji w zależności od czasu

Po rozwiązaniu układu tymi metodami, możemy przedstawić na wykresie otrzymane wyniki. Przedstawimy na początku liczebności populacji w zależności od czasu, a następnie portret fazowy układu.



Rysunek 1: Populacja zającego oraz rysi w zależności od czasu dla danych metod

Na podanym wykresie (Rysunek 1) widzimy, że dla każdej z metod wynikowe funkcje zachowują się podobnie. Liczba ofiar osiąga wyższe wartości od liczby drapieżców, jednakże przy wzroście rysi liczba zającego szybko zaczyna spadać. Wraz z wzrostem czasu różnice w wynikach pomiędzy metodami się powiększają. Natomiast wartości dla metody półjawnej Eulera oraz metody RK4 są tak mało różne, że wykresy na rysunku się pokrywają.



Rysunek 2: Portret fazowy układu dla danych metod

Na danym wykresie (Rysunek 2) łatwo zauważyć formujący się cykl. Można go łatwo wyjaśnić: wraz z wzrostem czasu rośnie populacja zajęcy, wraz z wzrostem populacji zajęcy przybywa więcej rysi, przybycie rysie powoduje zmniejszenie (poprzez śmierć) populacji zajęcy i wraz z tym maleniem rysie dokonują relokacji.

2.2 Punkty stacjonarne układu

Chcemy znaleźć punkty stacjonarne układu, czyli punkty, dla których populacja nie będzie się zmieniać w czasie. Możemy się spodziewać wystąpienia ich (nie wliczając zdegenerowanego przypadku $x = 0, y = 0$) gdzieś w środku danego portretu fazowego widocznego na wykresie wyżej (Rysunek 2). Do znalezienia ich położenia wystarczy rozwiązać układ:

$$x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y) = 0 \quad (1)$$

$$y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x) = 0 \quad (2)$$

Równanie (1) posiada dwa rozwiązania: $x = 0, \alpha_1 - \beta_1 y = 0$. Rozpatrzmy zatem dwa przypadki.

1° $x = 0$ - wtedy równanie (2) wygląda następująco:

$$-\alpha_2 y = 0$$

Zatem y musi być równy 0.

2° $\alpha_1 - \beta_1 y = 0 \implies y = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ - wtedy równanie (2):

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}(-\alpha_2 + \beta_2 x) = 0$$

To równanie jest spełnione wtw., gdy:

$$-\alpha_2 + \beta_2 x = 0$$

Zatem $x = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$.

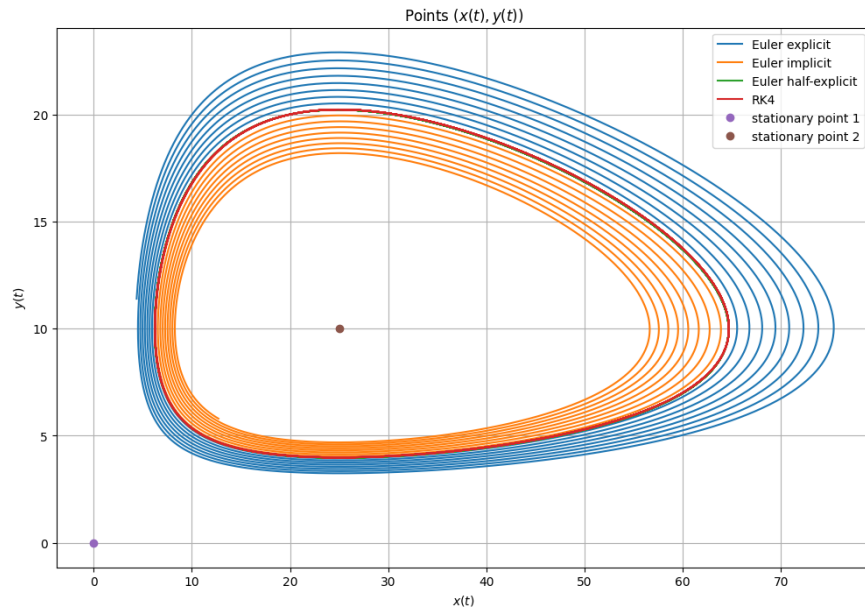
Otrzymujemy zatem dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \\ y = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \end{cases}$$

Podstawiając przyjęte wartości parametrów:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{0.5}{0.02} = 25 \\ y = \frac{1}{0.1} = 10 \end{cases}$$

Możemy te punkty przedstawić na wykresie razem z portretem fazowym.



Rysunek 3: Portret fazowy układu dla danych metod wraz z punktami stacjonarnymi

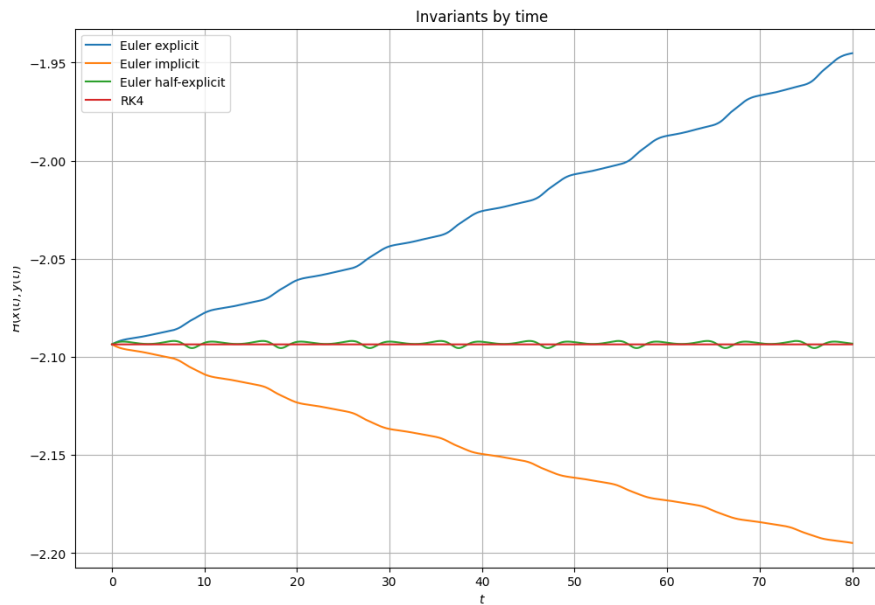
Jak widać na wykresie (Rysunek 3), zgodnie z przewidywaniami, niezdegenerowany punkt stacjonarny znajduje się w "środku" cyklu portretu fazowego.

2.3 Niezmiennik

Chcemy zobaczyć, czy dla otrzymanych wyników zachowany jest niezmiennik:

$$H(x, y) = \beta_2 x + \beta_1 y - \alpha_2 \ln x - \alpha_1 \ln y$$

W tym celu przedstawimy wykres wartości tego niezmiennika w zależności od czasu dla każdej z metod.



Rysunek 4: Niezmiennik w zależności od czasu dla danych metod

Jak widać na przedstawionym rysunku (Rysunek 4), niezmiennik nie jest zachowany dla metody Eulera jawnej - wzrasta w czasie i metody Eulera niejawnej - maleje w czasie. Może to być zależne od błędów i/lub stabilności tych metod. Dla metody Eulera półjawnej niezmiennik również posiada zmiany w czasie, jednakże są one niewielkie i są ciągle mniejsze od danej stałej, tj. nie wzrasta, ani nie maleje, a oscyluje w okół jednej wartości. Natomiast dla metody Rungego-Kutty czwartego rzędu niezmiennik zachowuje jedną stałą wartość lub zmiany są tak niewielkie, że nie widać ich na wykresie.

2.4 Znajdowanie parametrów układu dla prawdziwych danych

Mamy przedstawione prawdziwe dane dla populacji rysy i zajęcy przedstawione w pliku **LynxHare.txt**. Należało wybrać jedną z danych metod i oszacować prawdziwe wartości współczynników $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. W tym celu trzeba było dokonać minimalizacji obu z danych niżej funkcji kosztu:

$$L_1(\theta) = \sum_{i=0} ((l_i - \hat{l}_i)^2 + (h_i - \hat{h}_i)^2)$$

$$L_2(\theta) = \sum_{i=0} (-l_i \ln \hat{l}_i - h_i \ln \hat{h}_i + \hat{l}_i + \hat{h}_i)$$

gdzie:

- l_i to prawdziwa liczba rysy w danym roku
- \hat{l}_i to liczba rysy w danym roku wyliczona metodą numeryczną
- h_i to prawdziwa liczba zajęcy w danym roku
- \hat{h}_i to liczba zajęcy w danym roku wyliczona metodą numeryczną

Do rozwiązania należało wykorzystać metodę Neldera-Meada, która nie wymaga informacji o gradiencie $\nabla_{\theta} L(\theta)$, którego nie posiadamy.

Wykorzystałem metodę półjawną Eulera, gdyż okazała się ona niewiele gorsza w tym przypadku od metody RK4, a jest znacząco mniej intensywna obliczeniowo, gdyż da się ją przedstawić za pomocą jawnego wzoru przedstawionego poniżej:

$$\begin{cases} y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - h(-\alpha_2 + \beta_2 x_n)} \\ x_{n+1} = x_n + h x_n (\alpha_1 - \beta_1 y_{n+1}) \end{cases}$$

Poniżej przedstawiona została tabela z wynikami minimalizacji.

	α_1	α_2	β_1	β_2	Koszt
Parametry początkowe	1	0.5	0.1	0.02	-
1. funkcja kosztu	1.6721	0.1831	0.0612	0.0043	115128.9315
2. funkcja kosztu	1.0266	0.3850	0.0443	0.0108	-17575.2789

Tabela 1: Wyniki minimalizacji obu funkcji kosztu

Rozwiązania widoczne w tabeli wyżej (Tabela 1) są różne dla obu funkcji kosztu. Może to oznaczać niedokładność metody półjawnej Eulera lub niedokładność metody optymalizacji Neldera-Meada. Może to również oznaczać, że istnieje wiele kombinacji parametrów, które wystarczająco dokładnie opisują nasze dane, przez co znalezione zostały dwa różne lokalne minima.

3 Podsumowanie

Dane zadanie pokazało zastosowanie zagadnienia rozwiązywania układów równań różniczkowych w praktyce. Dzięki prawdziwym danym populacji rysów i zajęcy mogliśmy otrzymać układ opisujący dane środowisko i przewidzieć zmiany w populacji w przyszłości. To zadanie pokazało również dwie nowe (w stosunku do poprzedniego laboratorium) metody rozwiązywania układów równań różniczkowych. Metoda Eulera półjawna i metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu okazały się w tym zadaniu dużo lepsze. Metoda RK4 była najdokładniejsza, lecz metoda półjawna Eulera również była bardzo dokładna. Do tego, posiadała ona prosty wzór, dzięki czemu optymalizacja używając tej metody była znacznie mniej wymagająca obliczeniowo i, co za tym idzie, dużo szybsza od optymalizacji przy użyciu metody RK4.

4 Bibliografia

- Materiały zamieszczone wraz z zadaniem