

שאלה 1הוכיחו כי: $n^2 \neq O(n)$

בעזרת הגדרה 1 ובנוסף בעזרת הגדרה 2

פתרון

נוכיח בעזרת הגדרה 1:

נניח בשלילה שקיימים $c \geq 0$, $n_0 \geq 0$ כל שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$n^2 \leq c \cdot n$$

מכיוון שהטענה נכונה לכל $n \geq n_0 \geq 0$ נוכל לבחור $n \neq 0$ ולצמצם ונקבל:

$$n \leq c$$

בסתירה לכך שהנוסחא מתקיימת לכל $n \geq n_0$.

נוכיח בעזרת הגדרה 2:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |n| \rightarrow \infty$$

שאלה 2

נתון מערך A בגודל n וידוע כי $n - \lceil \sqrt{n} \rceil$ האיברים הראשונים שלו ממוינים.
תאר אלגוריתם שממיינת את המערך בסיבוכיות לינארית.

פתרון

קודם כל נמיינ את האיברים $\lceil \sqrt{n} \rceil$ האחרונים במערך בעזרת אחד המיונים שלמדנו בתרגול, לדוגמא מיון בועות - נקבל כי הסיבוכיות היא $O(n) = O((\lceil \sqrt{n} \rceil)^2)$.
לאחר מכן נמזג את 2 תתי המערכים

$$\begin{aligned} &A[1 \dots \lceil n - \sqrt{n} \rceil] \\ &A[\lceil n - \sqrt{n} \rceil + 1 \dots n] \end{aligned}$$

נשים לב כי הסיבוכיות למיון היא $O(n)$ והסיבוכיות למיזוג הינה $\Theta(n - \lceil \sqrt{n} \rceil + \lceil \sqrt{n} \rceil) = \Theta(n)$ סה"כ $\Theta(n)$

הערה: סיבוכיות מיזוג של 2 מערכים **ממויינים** בגודל n ומערך בגודל m היא $\Theta(n + m)$ כאשר הפלט הוא מערך ממויין – האלגוריתם הינו Merge אשר נלמד כחלק מ-MergeSort. נסו לממש זאת בעצמכם!

שאלה 3

לכל זוג פונקציות יש להחליט מה נכון:

א. $f(n) \in O(g(n))$

ב. $f(n) \in \Omega(g(n))$

ג. $f(n) \in \Theta(g(n))$

	$f(n)$	$g(n)$
a)	$100n + \log n$	$n + (\log n)^2$
b)	$\log n$	$\log n^2$
c)	$\frac{n^2}{\log n}$	$n(\log n)^2$
d)	$(\log n)^{\log n}$	$\frac{n}{\log n}$
e)	\sqrt{n}	$(\log n)^5$
f)	$n2^n$	3^n
g)	$2^{\sqrt{\log n}}$	\sqrt{n}

פתרון

נפתור ביחד את סעיף b.

נתון כי:

$$f(n) = \log n, \quad g(n) = \log n^2$$

נתבונן ב $g(n)$

לפי חוקי לוגריתמים נוכל לרשום-

$$g(n) = \log n^2 = 2 \log n$$

וכעת קל לראות כי עבור $c = 2$ והחל מ $n_0 = 1$ מתקיים -

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

↓

$$f(n) = O(g(n))$$

וכן עבור $c = \frac{1}{2}$ והחל מ $n_0 = 1$ מתקיים -

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

↓

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

ולכן מתקיים :

$$f(n) \in \Theta(g(n))$$

כללי לוגים וטורים:

$$\log_b (x * y) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b (x / y) = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b (a^n) = n \log_b a$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$n^{\log_c a} = a^{\log_c n}$$

$$\sum_{i=1}^n i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^n x^i = 1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad (x \neq 1)$$