基于 0-1 混合规划与遗传进化算法的风景区路线规划模型

摘要：为了方便游客观光，提高景区资源利用率，合理设计安略湖风景区游览路线是一个重要问题。

针对问题 1，由于问题规模较小，本文使用穷举搜索，搜索到最短路径为景石→③→⑤→①→②→④→⑥→⑦，路径长 1920m。

针对问题 2，本文使用了基于 Python cvxpy 与 pulp，建立并实现了 0-1 混合规划模型，针对得到的结果，人工选择出了合理的路线，结果为景石→②→④→③→⑤→①→⑥→⑦，总游览时间为 270 分钟，步行时间为 60 分钟。

针对问题 3，将问题 2 进行扩展，同时结合遗传进化算法，优化问题复杂度，使用 Python sciopt 库进行实现，得出最优方案如下：旅行团 1：景石→②→④→③→⑤→①→⑥→⑦；旅行团 2：景石→①→⑤→③→②→④→⑥→⑦；旅行团 3：景石→⑤→③→②→④→①→⑥→⑦。

针对问题 4，在问题 3 的基础上，添加了约束条件，同时通过建立新的目标函数，将模型建立为一个多目标规划问题。考虑到多目标规划问题求解上的特点，本题将通过为等待时间函数与游览时间的函数添加不同的权重，将目标函数转化为单目标模型，仍然使用问题 3 方法，得到最优游览路线方案：旅行团 1：景石→②→④→③→⑤→①→⑥→⑦，旅行团 2：景石→①→⑤→③→②→④→⑥→⑦，旅行团 3：景石→⑤→③→①→②→④→⑥→⑦。

对于问题五：题目中要求考虑出发时间以及等待时间两个不确定因素。据此在问题四模型的基础上，考虑等待时间和游览时间两常数变量（设为 x，y），并对等待时间添加新的约束条件，得到四个旅行团的最优旅行路径如下：A:景石→③→⑤→①→②→④→⑥→⑦；B:景石→②→④→③→⑤→①→⑥→⑦；C:景石→⑤→③→①→②→④→⑥→⑦。

最后，本文对模型的优缺点进行了总结，并讨论了模型在一般最优路线任务上的可推广性。

关键词：穷举搜索、0-1 混合规划、遗传进化算法、启发性算法

一、问题重述

随着人们生活水平的提高，旅游成为人们日常生活中不可或缺的部分，各地绿色生态建设也提到议事日程。对于某市在自然资源条件下开发建设的安略湖风景区，景区游览路线的设计是非常重要的一环。若设计的游览路线能让游客在规定的时间内，更大程度上参观各处景点，那么游客会对景区留下良好印象，有助于当地旅游业蓬勃发展。同时，客流量增加也会带来游客聚集、景点拥挤等问题，造成较差的旅游体验感。因此，为了方便游客观光，提高景区资源利用率，合理设计安略湖风景区游览路线是一个重要问题。

根据已知的安略湖景区地图和景点之间最短步行距离，需要解决下列问题：

（1） 建立数学模型，设计一条从景石出发到湿地商业街，且至少一次经过游客服务中心、阳光草坪、森林小剧场、儿童科普体验区、儿童戏水场、湿地博物馆的距离最短的路线。并计算路线长度，将相关结果填入表格 3；

（2） 如果某游客 12:00 从景石出发，要求他 17:00 前到达湿地商业街，17:30 离开湿地商业街(注：根据表 2 的要求在湿地商业街游览时间至少为 30 分钟)。建立数学模型，为该游客设计一条能游览完全部景点(景点①—⑦)且游览总时间最长的游览路线（假设在各个景点没有等待时间），并完成表 4 的填写；

（3） 如果有 3 个旅游团，12:00 同时从景石出发，要求三个旅游团 17:00 前到达湿地商业街，17:30 离开湿地商业街(注：根据表 2 的要求在湿地商业街游览时间至少为 30 分钟)，并且每个景点（湿地商业街除外）同时只能容纳 1 个旅游团游览，按照时间顺序后到达的旅游团，需要等待先到达的旅游团游览结束之后才能开始游览。建立数学模型，为三个旅游团分别设计一条能游览完全部 7 个景点且游览总时间最长的游览路线，并完成表 5 的填写。

（4） 假设 3 个旅游团的步行速度可以在$1km/h$到$3km/h$之间调节，但是总的平均步行速度不能超过$2km/h$，3 个旅游团 12:00 同时从景石出发，要求三个旅游团 17:00 前到达湿地商业街，17:30 离开湿地商业街(注：根据表 2 的要求在湿地商业街游览时间至少为 30 分钟)，并且每个景点（湿地商业街除外）同时只能容纳 1 个旅游团游览，按照时间顺序后到达的旅游团，需要等待先到达的旅游团游览结束之后才能开始游览。建立数学模型，为三个旅游团分别设计一条能游览完全部 7 个景点且游览总时间长，总的等待时间短的游览路线，并完成表 6 的填写。

（5） 在现实中，考虑如下两个不确定性因素：

（a）不同旅游团从景石出发的时间具有不确定性，例如，多个旅游团在不同的时间从景石出发开始游览，在此情况下到达湿地商业街的时间可以顺延。

（b）每个景点的等待时间也存在不确定性因素，例如，旅游设施短时间的维

护和清理，或者受到散客客流的影响。

考虑上述两个不确定性因素，其它条件与问题 4 相同，建立数学模型，为多个旅游团分别设计一条能游览完全部 7 个景点且游览总时间长，总的等待时间短的游览路线。

二、问题分析

针对问题 1，设计的路线必须经过景点 1 至景点 6 至少一次，且约束条件是必须从景点 0（景石）进，景点 7（湿地商业街）出。可以将问题图论化，将本题的 TSP 模型转换成混合整数规划，穷举出全局最优解，得到最短路线及长度。

针对问题 2，假设在各个景点没有等待时间的前提下，游览全部景点且游览总时间最长的问题。该问题可转化为在多个约束条件下，步行时间和游览时间总和最长的路线。必须考虑约束条件包括：各景点开放时间（森林小剧场和游客服务中心）、各景点游览时间、湿地商业街到达时间（17：00 前）。类似地，可以结合问题 1 的最短路线，建立整数规划模型求解。

针对问题 3，需要为三个旅游团分别设计一条能游览完全部 7 个景点且游览总时间最长的游览路线。本问题需要在第二问的基础上，考虑因旅游团时间重叠而增加的等待时间作为新的约束条件，建立相关模型求解。

针对问题 4，需要在问题三的基础上，考虑游客步行速度的限制问题。本问新增两个约束条件：（1）旅游团的步行速度介于在$1km/h$到$3km/h$之间，总平均步行速度不能超过$2km/h$；（2）游览路线不仅游览总时间长，且总的等待时间短。因此，需要考虑多目标优化问题。

针对问题 5，需要在问题四的基础上考虑两个不确定因素：（1）不同旅游团从景石出发的时间具有不确定性；（2）每个景点的等待时间也存在不确定性因素。对于第 i 个旅游团，可以给出两个量：a和b分别量化这两个不确定因素。A 表示该旅游团从景石出发的时间，b 表示该旅游团在每个景点的等待时间。建立相关模型，考虑 a 和 b 对线路设计的影响。

三、模型假设

（1） 假设步行速度$V=2km/h$；

（2） 游客在景区停留的时间由“景点之间的步行时间”、“景点游览时间（即在景点内游玩的时间）” 和“在景区外的等待时间”三部分组成，其他时间忽略不计；

（3） 任意两个景点之间的最短步行距离如题中表 1 给出；

（4） 问题一中，在每个景点不用停留；

（5） 问题二中，在各个景点没有等待时间

四、模型建立

4.1 问题一模型的建立与求解

4.1.1 问题一的分析

本问需要设计一条距离最短的游览路线。该路线必须从景石出发，最终到达湿地商业街，且途中必须经过游客服务中心、阳光草坪、森林小剧场、儿童科普体验区、儿童戏水场、湿地博物馆至少一次。

由本题条件可以联想到旅行商问题（TSP 问题）。TSP 是对于给定的一系列点和无向边，每条边有一个权值代表两个点之间的距离，求解把每一个点都遍历一遍并回到原点的最短回路。类似地，本问题需要求解一条距离最短的路线，但该路线不能构成回路。考虑到路线的起点（景石）、终点（湿地商业街）已经确定，本问题可以转化为求解途经剩余 6 所景点的距离最短路线。对于这种规模较小的问题，可以使用穷举法找到最优解。

4.1.2 问题一模型的建立

将本问题图论化，8 个景点作为图的顶点V，景点之间道路作为边E，可以得到无向图$G = (V, E)$。

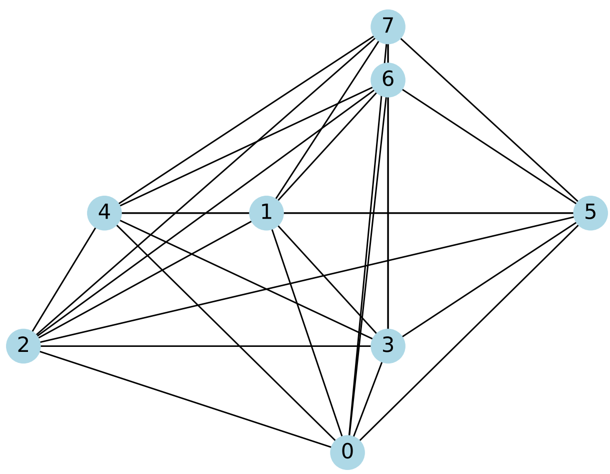

图 1. 问题图论化表示

其中，顶点编号分别为：0：景石 1：游客服务中心 2：阳光草坪 3：森林小剧场 4：儿童科普体验区 5：儿童戏水场 6：湿地博物馆 7：湿地商业街。根据题中所给的景点之间距离，图的邻接矩阵如下：

$$d_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 300 & 360 & 210 & 530 & 475 & 500 & 690 \\ 300 & 0 & 380 & 270 & 230 & 285 & 200 & 390 \\ 360 & 380 & 0 & 510 & 230 & 665 & 580 & 770 \\ 210 & 270 & 510 & 0 & 470 & 265 & 450 & 640 \\ 530 & 230 & 230 & 470 & 0 & 515 & 360 & 550 \\ 475 & 285 & 665 & 265 & 515 & 0 & 460 & 650 \\ 500 & 200 & 580 & 450 & 360 & 460 & 0 & 190 \\ 690 & 390 & 770 & 640 & 550 & 650 & 190 & 0 \end{pmatrix}$$

由于本题需要求解的是距离最短路线，则一定不能出现回路。因此，可以将 1 至 6 的景点编号进行全排列，则每一种排列方式对应一条路径。计算每种排列方式对应的路径长度，选出距离最短的路径作为结果。

4.1.3 问题一模型的求解

本题通过 Python 程序实现穷举过程，求解结果如下表：

表 1 问题一求解结果

出发景点	到达景点	步行距离(米)
景石	森林小剧场	210
森林小剧场	儿童戏水场	265
儿童戏水场	游客服务中心	285
游客服务中心	阳光草坪	380
阳光草坪	儿童科普体验区	230
儿童科普体验区	湿地博物馆	360
湿地博物馆	湿地商业街	190
总步行距离(最短路线距离)		1920
最短路线(请用①~⑥序号标出)		景石→③→⑤→①→②→④→⑥→⑦
备注：可以根据需求增减本表格的行数		

4.2. 问题二模型的建立与求解

4.2.1 问题二的分析

由问题 1 得出的最短路线：景石→③→⑤→①→②→④→⑥→⑦，是在不考虑等待时间和限制条件的情况下，在路上行走所花费的时间最短。经过对问题 2 的分析，可知本题所要实现的目标是：游客在 17:00 前到达湿地商业街，17:30 离开湿地商业街(注：根据表 2 的要求在湿地商业街游览时间至少为 30 分钟)下，游客游览完全部景点(景点①—⑦)且游览总时间最长的游览路线。可将问题转化为游客步行时间和等待时间之和最短的问题。

4.2.2 问题二模型的建立

(1)目标函数的建立

在不考虑其它因素的情况下，除游览景点外的时间由两部分组成，分别为游客步行时间和等待时间，只有游客步行时间和等待时间之和最短，才能保证游览总时间最长，下面定义：

T--除游览景点外的总时间

t_1--游客步行总时间

t_2--等待总时间

从而得到目标函数：$Min\,T = t_1 + t_2$

①游客步行时间

因为t_{ij}表示从第i个景点到第j个景点所需的时间， d_{ij}表示从第i个景点到第j个景点之间的距离，所以$t_{ij} = w_{ij}/v$是判断游客是否从第i个景点直接到第j个景点的$0-1$变量，因此可以得出游客步行时间为：

$$\mathrm{t_1} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{8}\sum_{\mathrm{j}=1}^{8} \mathrm{w_{ij}} * \mathrm{r_{ij}}/v \tag{1}$$

②等待时间

r_{ij}也可以判断游客是否从第i个景点直接到第j个景点,w_{ij}表示游客从第i个景点到第j个景点需要等待的时间,由问题一可知,游客不会重复游览某个景点，因此$\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} w_{ij}\, r_{ij}$实际上将游客需要等待的时间计算了两遍，因此可以得出游客等待时间为：

$$t_1 = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} \frac{w_{ij} r_{ij}}{v} \tag{2}$$

从而可以得到目标函数：

$$MinT = t_1 + t_2 \tag{3}$$

(2)约束条件的建立

①时间约束

如果游客 12:00 从景石出发，17:30 离开湿地商业街，旅游时间一共为 330 分钟，而这些时间包括游客步行时间、景点等待时间和在景点游览时间。因为t_{ij}表示从第i个景点到第j个景点步行的时间，w_{ij}表示游客从第i个景点到第j个景点需要等待的时间，p_i表示的游玩时间，要求游客 17:00 前到达湿地商业街。因此，

时间约束为：

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} r_{ij}\left(p_i \dot{+} p_j\right) + \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\frac{d_{ij}r_{ij}}{v} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7} w_{ij}\, r_{ij} \le 300 \tag{4}$$

② 0-1 变量约束

游客不可能在两个景点之间往返旅游，因为这样显然不满足游览时间尽量多的原则，因此可得约束$r_{ij} * r_{ij} = 0$。

除起点和终点外，进入景点的次数和从景点出来的次数相等；可得约束：

$$\sum_{i} r_{kij} = \sum_{j} r_{kji} \le 1(i,j = 1,2,3,4,5,6,7,8) \tag{5}$$

起点与终点固定，有：

$$\sum_{i=8} r_{kij} = 1 \tag{6}$$

$$\sum_{j=7} r_{kij} = 1 \tag{7}$$

综上所述，可以得到总的模型为：

$$Min\, T = t_1 + t_2$$

$$s.t.\begin{cases}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} r_{ij}\left(p_i \dot{+} p_j\right) + \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\frac{d_{ij}r_{ij}}{v} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7} w_{ij}\, r_{ij} \le 300 \\ r_{ij} \times r_{ji} = 0(i,j = 1,2,3,4,5,6) \\ \sum_{i} r_{ij} = \sum_{j} r_{ji} \le 1(i,j = 1,2,3,4,5,6,7,8) \\ \sum_{i=8} r_{ij} = 1 \\ \sum_{j=7} r_{ij} = 1 \end{cases} \tag{8}$$

根据问题 2 的模型，利用 python 编程(程序见附录)，经过人工选择可行解，得到一组可行方案：

景石→②→④→③→⑤→①→⑥→⑦，具体时间安排如下图所示

表 2 问题二求解结果

序号	景点名称	达到时间点	游览时间（停留时间，单位分钟）	离开时间点
1	景石	12：00	0	12:00
2	阳光草坪	12：10：48	30	12:40:48
3	儿童科普体验区	12：47：42	58：12	13:45:54
4	森林小剧场	14：00：00	30	14:30:00
5	儿童戏水场	14：37：57	44：30	15:21:27
6	游客服务中心	15：30	30	16：00
7	湿地博物馆	16：06	48：18	16:54:18
8	湿地商业街	17：00：00	30	17:30
总的游览时间：270 分钟				
总的步行时间：60 分钟				

4.3 问题 3 模型建立与求解

4.3.1 目标函数建立

由问题 2 得出的最短路线：景石→②→④→③→⑤→①→⑥→⑦，是在考虑等待时间和限制条件的情况下，一个游客游览总时间最长的问题。经过对问题 3 的分析，可知本题所要实现的目标是：3 个旅游团，12:00 同时从景石出发，在条件 17:00 前到达湿地商业街，17:30 离开湿地商业街(注：根据表 2 的要求在湿地商业街游览时间至少为 30 分钟)下，游览完全部景点(景点①—⑦)且游览总时间最长的游览路线。可将问题转化为 3 个旅行团步行时间和等待时间之和最短的问题。

下面新定义：

r_{kij}：旅行团k从景点i到j的 0-1 决策变量

p_{ki}：旅行团k在景点i的游玩时间

T_{sum}：所有旅行团步行时间和等待时间的和

类似第二问，目标函数由步行时间与等待时间组成。其中等待时间为对w和r点积求和的一半。表达式为：

$$Min(T_{sum})=\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\frac{d_{ij}r_{kij}}{v}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}w_{kij}\,r_{kij}\right)(9)$$

4.3.2 约束条件建立

1）时间约束

类似 2 问中的时间约束：

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}r_{kij}\left(p_{k\imath}\dot{+}p_{k\jmath}\right)+\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\frac{d_{ij}r_{kij}}{v}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7}w_{kij}\,r_{kij}\leq 300(10)$$

(2)0-1 决策变量约束

由于旅行团每个景点仅经过一次，且进入次数等于离开次数：

$$r_{kij}\times r_{kji}=0(k=1,2,3,i,j=1,2,3,4,5,6) \tag{11}$$

$$\sum_{i}r_{kij}=\sum_{j}r_{kji}\leq 1(i,j=1,2,3,4,5,6,7,8) \tag{12}$$

起点与终点固定，有：

$$\sum_{i=8}r_{kij}=1 \tag{13}$$

$$\sum_{j=7}r_{kij}=1 \tag{14}$$

因此，总模型为：

$$Min(T_{sum})=\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\frac{d_{ij}r_{kij}}{v}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}w_{kij}\,r_{kij}\right)$$

$$
s.t.\begin{cases}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}r_{kij}\left(p_{ki}\dot{+}p_{kj}\right)+\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\frac{d_{ij}r_{kij}}{v}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7}w_{kij}\,r_{kij}\le 300\\ r_{kij}\times r_{kji}=0(k=1,2,3,i,j=1,2,3,4,5,6)\\ \sum_{i}r_{kij}=\sum_{j}r_{kji}\le 1(i,j=1,2,3,4,5,6,7,8)\\ \sum_{i=8}r_{kij}=1\\ \sum_{j=7}r_{kij}=1\end{cases}
$$

(15)

需要补充的是，同 2 问中森林小剧场开放时刻固定，也由于问题规模较大，在使用程序实现优化问题对最优路径（即r_{kij}）求解完毕后，需要通过人工方法筛选出合理解，可通过 Python 程序筛选或 Excel 条件格式工具筛选。

4.3.3 差分进化算法简介

由于许多实际问题的解空间十分复杂，使用传统优化方法寻找全局最优解较为困难。因此考虑使用启发性算法解决此类问题。差分进化算法是一种用于全局优化的多目标优化算法，其核心思想是模拟生物进化中的差异和变异过程，通过不断进化优秀个体，逼近最优解。该算法涉及的受控参数较少，具有较好的全局搜索能力。

差分进化算法的流程可以分为如下四个步骤：

（1） 初始化种群

若解空间内存在 NP 个个体，则该解空间可以看作大小为 NP 的种群，初始种群在给定的约束条件内随机生成。则该种群中的个体可以表示为：

$$
\{x_i(0)|x_{j,i}{}^{L}\le x_{j,i}(0)\le x_{j,i}{}^{U}\},i=1,2,\dots,NP;j=1,2,\dots,D\}
$$

(16)

其中，$x_i(0)$表示种群中第 0 代第 i 个个体，$x_{j,i}(0)$表示第 0 代第 i 个个体的第 j 个基因。

（2） 变异

在差分进化算法中，每个个体对应 D 个基因，因此每个个体可以视为一个向量：

$$
X_{r0},g=\left(x_{(r0,1)},x_{(r0,2)}\dots x_{(r0,g)}\right) \tag{17}
$$

差分进化算法使用差分策略，将两个个体的向量差进行缩放操作，再与待变异个体进行向量的合成，实现个体的变异。常用的差分策略如下：

$$v_i(g+1) = x_{(i1)}(g) + F\left(x_i(g) - x_{(ij)}(g)\right) \tag{18}$$

其中，F 为缩放函数，$x_i(g)$为第 g 代种群中第 i 个个体。需要注意的是，为了保证“变异”得到新解的有效性，必须验证新解是否满足约束条件。若不满足，则重复上述操作。若第 g 代种群如下式所示：

$$\{x_i(g) | {x_{j,i}}^L \le x_{j,i}(g) \le {x_{j,i}}^U\}, i = 1,2, \dots, NP; j = 1,2, \dots, D\} \tag{19}$$

则变异后得到的中间体，即第 g+1 代种群为：

$$\{x_i(g+1) | {x_{j,i}}^L \le x_{j,i}(g+1) \le {x_{j,i}}^U\}, i = 1,2, \dots, NP; j = 1,2, \dots, D\} \tag{20}$$

（3） 交叉

差分进化算法中的交叉过程类似染色体等位基因的交换。第 g 代种群和其变异中间体可以看作染色体，根据交叉概率 CR 选择是将$x_i(g)$还是$v_i(g+1)$的等位基因作为$u_i(g+1)$的等位基因。

交叉操作遵循的公式如下：

$$u_{j,i}(g+1) = \begin{cases} v_{j,i}(g+1), if\ rand(0,1) \le CR\ or\ j = j_{rand} \\ x_{ji}(g), otherwise \end{cases} \tag{21}$$

其中，CR 为交叉概率，j_{rand}为 1 至 D 之间的随机整数。

（4） 选择

差分进化算法使用贪婪算法，在原向量和交叉产生的新向量之间选出更优的个体作为下一代：

$$x_i(g+1) = \begin{cases} u_i(g+1), if\ f(u_i(g)) \le\ f(x_i(g)) \\ x_i(g), otherwise \end{cases} \tag{22}$$

通过不断迭代上述初始化、变异、交叉、选择四个步骤，直至迭代次数达到预定次数或者最优解达到误差精度时结束。

4.3.4 问题求解

使用程序与相关工具实现如上模型，得到如下方案：

k_1：景石→②→④→③→⑤→①→⑥→⑦

k_2：景石→①→⑤→③→②→④→⑥→⑦

k_3：景石→⑤→③→②→④→①→⑥→⑦

列表如下：

表 3 问题三求解结果

	第一旅游团			第二旅游团			第三旅游团		
	达到时间点	游览时间(停留时间,单位分钟)	离开时间点	达到时间点	游览时间(停留时间,单位分钟)	离开时间点	达到时间点	游览时间(停留时间,单位分钟)	离开时间点
景石	12:00	0	12:00	12:00	0	12:00	12:00	0	12:00
游客服务中心	15：06：30	23.5	15：30：00	12：09：00	30	12：39：00	14：49：06	10	14：59：06
阳光草坪	12：10：48	30	12：40：48	14：15：18	35.2	14：50：30	13：45：18	20	14：05：18
森林小剧场	14：00	30	14：30：00	13：30	30	14：00	13：00：00	30	13：30：00
儿童科普体验区	12：47：42	58.2	13：45：54	14：57：24	60	15：57：24	14：12：12	30	14：42：12
儿童戏水场	14：37：56	20	14：57：56	12：47：33	34.5	13：22：03	12：14：15	37.8	12：52：03
湿地博物馆	15：36：00	30	16：05：00	16：17：00	30	16：47：00	15：05：06	30	15：35：06
湿地商业街	16：11：43	78.3	17:30	16：40：54	49.1	17:30	15：40：48	109.2	17:30
总步行时间	63 分钟			60.15 分钟			65.55 分钟		
总游览时间	267 分钟			269.85 分钟			264.45 分钟		
总等待时间	0 分钟			0 分钟			0 分钟		

4.4 问题 4 模型建立与求解

对问题 4 而言，增加了约束条件：

$$1 \le v_i \le 3 \tag{23}$$

$$\bar{v} \le 2 \tag{24}$$

本题目属于多目标规划问题，只需在问题 3 的模型中多加目标函数和速度约束条件，为等待时间函数与游览时间的函数添加不同的权重 1 和-1，将问题转化为单目标优化问题。

模型为：

$$Min(T_{sum}) = \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\frac{d_{ij}r_{kij}}{v} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} w_{kij}\, r_{kij}\right)$$

$$s.t.\begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} r_{kij}\,(p_{ki} + p_{kj}) + \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\frac{d_{ij}r_{kij}}{v} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7} w_{kij}\, r_{kij} \le 300 \\ r_{kij} \times r_{kji} = 0(k = 1,2,3, i, j = 1,2,3,4,5,6) \\ \sum_{i} r_{kij} = \sum_{j} r_{kji} \le 1(i, j = 1,2,3,4,5,6,7,8) \\ \sum_{i=8} r_{kij} = 1 \\ \sum_{j=7} r_{kij} = 1 \\ 1 \le v \le 3 \\ \bar{v} \le 2 \end{cases} \tag{25}$$

修改程序，得到如下路径与表格：

k_1：景石→②→④→③→⑤→①→⑥→⑦

k_2：景石→①→⑤→③→②→④→⑥→⑦

k_3：景石→⑤→③→①→②→④→⑥→⑦

表 4 问题四求解结果

	第一旅游团				第二旅游团				第三旅游团			
	达到时间点	游览时间(停留时间,单位分钟)	离开时间点	达到下一个景点的步行速度 km/h	达到时间点	游览时间(停留时间,单位分钟)	离开时间点	达到下一个景点的步行速度 km/h	达到时间点	游览时间(停留时间,单位分钟)	离开时间点	达到下一个景点的步行速度 km/h

景石	12:00	0	12:00	2	12:00	0	12:00	2	12:00	0	12:00	2
游客服务中心	15:06:30	23.5	15:30:00	2	12:09	30	12:39	2	13:52:36	20	14:18:36	1.45
阳光草坪	12:10:48	30	12:40:48	2	14:18:36	31.9	14:50:30	2	14:18:36	31.9	14:50:30	2
森林小剧场	14:00	30	14:30	2	13:30	30	14:00	1.645	13:00	30	13:30	3
儿童科普体验区	12:47:42	58.2	13:45:54	2	14:57:24	60	15:57:24	3.25	14:57:24	60	15:57:24	3.25
儿童戏水场	14:37:57	20	14:57:57	2	12:47:33	34.5	13:22:03	2	12:14:15	37.8	12;52:03	2
湿地博物馆	15:36:00	30	16:05:00	2	16:13:42	33.3	16:47	2	16:13:42	33.3	16:46:01	2
湿地商业街	16:12:00	78.3	17:30	0	16:50:54	49.1	17:30	0	16:40:54	49.1	17:30	0
总步行时间	61.2 分钟				60 分钟				63 分钟			
总游览时间	265.8 分钟				270 分钟				267 分钟			
总等待时间	0 分钟				0 分钟				0 分钟			
平均速度	$2\,km/h$				$2\,km/h$				$2\,km/h$			

4.5 问题 5 模型建立与求解

4.5.1 模型概述

(1)假设 3 个旅行团两两出发的时间间隔少于 30 分钟。

(2)假设旅游设施的维护和清理时间为x分钟，散客客流影响的时间为y分钟。

(3)假设旅行团的步行速度为$v\ km/h$，其中$1 \leq v \leq 3$，且平均速度不超过$2km/h$。

(4)旅行团从景石出发的时间在 9：00 以后。

(5)除以上条件外，其它影响因素忽略不计。

4.5.2 目标函数

目标函数与问题 3 大致类似，增加常量x、y：

$$Min(T_{sum}) = \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\frac{d_{ij}r_{kij}}{v} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}w_{kij}\,r_{kij}\right) + x + y \tag{26}$$

4.5.3 约束条件

1）时间约束

要求所有旅行团 17：00 前到达湿地商业街，引入x，y，时间约束为：

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}r_{kij}\left(p_{k\imath} \dot{+} p_{k\jmath}\right) + \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\frac{d_{ij}r_{kij}}{v} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7}w_{kij}\,r_{kij} + x + y \le 300 \tag{27}$$

2）0-1 决策变量约束

类似问题 3，表示为：

$$r_{kij} \times r_{kji} = 0(k = 1,2,3, i, j = 1,2,3,4,5,6) \tag{28}$$

$$\sum_{i} r_{kij} = \sum_{j} r_{kji} \le 1(i, j = 1,2,3,4,5,6,7,8) \tag{29}$$

$$\sum_{i=8} r_{kij} = 1 \tag{30}$$

$$\sum_{j=7} r_{kij} = 1 \tag{31}$$

综上，总模型为：

$$Min(T_{sum}) = \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\frac{d_{ij}r_{kij}}{v} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}w_{kij}\,r_{kij}\right) + x + y$$

$$s.t.\begin{cases}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}r_{kij}\left(p_{k\imath}\dot{+}p_{k\jmath}\right)+\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\frac{d_{ij}r_{kij}}{v}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7}w_{kij}\,r_{kij}+x+y\leq 300\\ r_{kij}\times r_{kji}=0(k=1,2,3,i,j=1,2,3,4,5,6)\\ \sum_{i}r_{kij}=\sum_{j}r_{kji}\leq 1(i,j=1,2,3,4,5,6,7,8)\\ \sum_{i=8}r_{kij}=1\\ \sum_{j=7}r_{kij}=1\\ 1\leq v\leq 3\\ \bar{v}\leq 2\end{cases}\tag{32}$$

3）模型实现

使用程序求解结果为：

k_1：景石→③→⑤→①→②→④→⑥→⑦

k_2：景石→②→④→③→⑤→①→⑥→⑦

k_3：景石→⑤→③→①→②→④→⑥→⑦

五、模型评价与分析

本文思路清晰，模型恰当，得出的方案合理；成功的使用了 0—1 混合规划模型，结合 Python scikit-opt 融合遗传进化算法，使模型的建立和编程得以顺利进行。

缺点：针对第一问，因问题只涉及 7 处景点，规模较小，可以通过建立游览距离最短的遍历模型穷举出全局最优解。而对于更一般性的问题，如问题三、四、五，该算法复杂度高，因此考虑使用启发性算法寻找最优路线，如模拟退火算法、蚁群算法等等。最终确定的多旅游团最佳路线对该景点路线安排有一定参考价值。同时，本模型的精确度有待进一步提高，复杂度有待进一步降低。

六、模型推广

对于一般性问题（如问题 4 与问题 5），在实际情况中不确定因素太多，尽可能增加这些考虑，结果会更加合理。在大规模、复杂度较高的问题中，启发性算法的应用将会更加必要。

因数据资料搜集的不完整，准确性也有待商榷，而且没有对最终方案进行更为细致的讨论研究，这些方面有待改进。

参考文献

[1]谢金星，薛毅，《优化建模与LINDO/LINGO 软件》，北京：清华大学出版社，2005。
[2]周仁郁，《SPSS13.0 统计软件》，成都，西南交通大学出版社，2005。
[3]司守奎，孙玺箐.数学建模算法与应用.北京：国防工业出版社，2012：P57
[4]袁新生等.Lingo/Excel 在数学建模中的应用.北京：科学出版社，2007：P75
[5]席裕庚,柴天佑,恽为民.遗传算法综述[J].控制理论与应用,1996,13(6):697-708

附录

支撑材料清单

程序列表：

tourist_map.ipynb