基于MATLAB的载流圆环与磁镜的模拟研究

PB19051183 吴承泽

摘要：磁镜是一种中间弱、两端强的特殊的磁场位形。根据磁矩守恒，磁镜可将带电粒子的运动约束在一片磁场区域中。在此，我利用两个电流方向相同大小相等的电流环，利用MATLAB模拟产生磁场的大小，并初始化带电粒子的性质与运动方向，模拟带电粒子的运动轨迹，并分析该模拟产生的误差。

关键词： 毕奥-萨伐尔定律，磁镜，MATLAB

在这学期的电磁学的学习中，课堂上我们只是讲了载流圆环在轴线上的磁感应强度大小，并没有深入的探究载流圆环在空间中任意一点的磁感应强度。为了解决此问题，本篇通过理论推导，得到空间中任意一点的磁感应强度大小，通过MATLAB使用叠加法验证该点的磁感应强度大小与理论上相符，并依此模拟磁镜中的电磁场，初始化带电粒子的轨迹并分析该模拟的误差产生的原因。

1 对载流圆环在空间中任意一点磁感应强度的推导

下面推导如下图所示的载流圆环任意一点磁感应强度

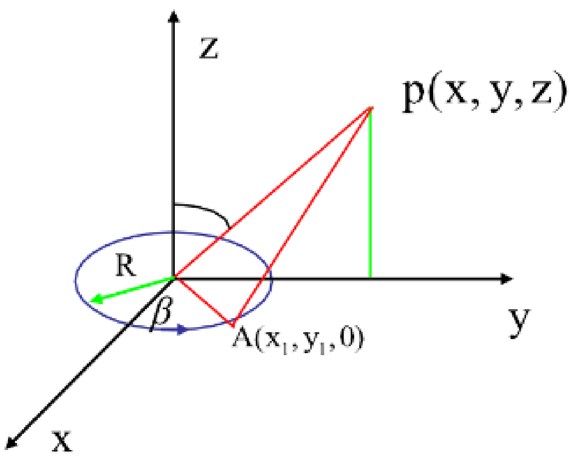


图1：载流圆环

在这里设R为载流圆环大小，θ为A点与x轴所夹的角，I为电流环的电流大小，电流方向默认为逆时针。

由毕奥-萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \tag{1.1}$$

在单个圆环中有，有如下关系式

$$d\vec{l} = R(-sin\theta\vec{e_x} + cos\theta\vec{e_y}) \tag{1.2}$$

对于任意一点(x, y, z)

$$|\vec{r}| = \sqrt{(x - Rsin\theta)^2 + (y - Rcos\theta)^2 + z^2} \tag{1.3}$$

由(1.1)(1.2)(1.3)计算得空间中任意一点P(x, y, z)的磁感应强度在x, y, z轴大小的分量为:

$$\begin{cases} B_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{zcos\theta}{(x^2+y^2+z^2+R^2-2xRcos\theta-2yRsin\theta)^{3/2}}d\theta \\ B_y = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{zsin\theta}{(x^2+y^2+z^2+R^2-2xRcos\theta-2yRsin\theta)^{3/2}}d\theta \\ B_z = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R-xcos\theta-ysin\theta}{(x^2+y^2+z^2+R^2-2xRcos\theta-2yRsin\theta)^{3/2}}d\theta \end{cases} \tag{1.4}$$

据此，撰写MATLAB代码，设置初始参数调用函数：

`B_the(10^7,5,1,1,5)`

脚本B_the.m代码如下

```
function [Bx,By,Bz] = B_the(I,R,x0,y0,z0)
%I为载流环电流大小，R为载流环半径，(x0,y0,z0)为空间中任意一点，其中原点为载流环的圆心
beita = 0:pi/1000:2*pi;
fx1 = z0*cos(beita)./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + z0.^2 - 2 * x0 * R * cos(beita)- 2 * y0 * R*
sin(beita)).^3);
Bx = I * R* 10.^-7 *trapz(beita, fx1);

beita = 0:pi/1000:2*pi;
fy1 = z0*sin(beita)./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + z0.^2 - 2 * x0 * R * cos(beita)- 2 * y0 * R*
sin(beita)).^3);
By = I * R* 10.^-7 *trapz(beita, fy1);

beita = 0:pi/1000:2*pi;
fz1 = (R - x0*cos(beita)-y0*sin(beita))./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + z0.^2 - 2 * x0 * R *
cos(beita)- 2 * y0 * R* sin(beita)).^3);
Bz = I * R* 10.^-7 *trapz(beita, fz1);

Bx
By
Bz
```

得到的载流圆环看空间中一点P(1,1,5)的磁感应强度大小为
(0.065709791009920,0.065709791009920,0.423950587303461)。

2 通过叠加法计算空间中任意一点的磁感应强度

根据计算机的特性，我们也可以通过直接利用毕奥萨伐尔定理，将整个圆环分解为若干个等长大小的微元，通过直接叠加计算空间中任意一点的磁感应强度。

将圆弧角2π分为N份，每一部分为一小段微元组成，有

$$d\vec{l_i} = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i, 0) = (Rcos\theta_{i+1} - Rcos\theta_i, Rsin\theta_{i+1} - Rsin\theta_i, 0) \tag{2.1}$$

而每一段dl的微元对应向量r以(x_i,y_i,0)与(x_{i+1},y_{i+1},0)的中点为起始点，指向(x,y,z)

$$\vec{r_i} = (x - \frac{(x_{i+1} + x_i)}{2}, y - \frac{(y_{i+1} + y_i)}{2}, z) \tag{2.2}$$

根据毕奥萨伐尔定律：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \tag{2.3}$$

在MATLAB中，我们取N次叠加即

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum_{i=0}^{N}\frac{d\vec{l_i} \times \vec{r_i}}{r_i^3} \tag{2.4}$$

利用MATLAB计算如上求和,撰写函数调用如下：

`B_the(10^7,5,1,1,5)`

脚本B_cal.m代码如下

```
function [Bx,By,Bz] = B_cal(I,R,x0,y0,z0)
%I为载流环电流大小，R为载流环半径，(x0,y0,z0)为空间中任意一点，其中原点为载流环的圆心
Nh = 2000;
theta0 = linspace(0,2*pi,Nh + 1);
theta1 = theta0(1:Nh);
x1 = R* cos(theta1);y1 = R * sin(theta1);
theta2 = theta0(2:Nh + 1);
x2 = R* cos(theta2);y2 = R * sin(theta2);
zdl = 0; xdl = x2 - x1; ydl = y2 - y1;
zc = 0; xc = (x1 + x2)/2; yc = (y1+y2) / 2;
xr = x0 - xc; yr = y0 - yc;zr = z0 - zc;
r = sqrt(xr.^2 + yr.^2 + zr.^2);
```

```
xlmulr = (ydl .* zr - zdl .* yr)./r.^3;
ylmulr = (zdl .* xr - xdl .* zr)./r.^3;
zlmulr = (xdl .* yr - ydl .* xr)./r.^3;
Bx = I*10^-7*sum(xlmulr);
By = I*10^-7*sum(ylmulr);
Bz = I*10^-7*sum(zlmulr);
Bx
By
Bz
```

得到的载流圆环看空间中一点P(1,1,5)的磁感应强度大小为**(0.065709877248836,0.065709877248836,0.423950610130687)**。

可以看出，在误差允许的范围内，两者得到的结果是相等的。

3 以对称载流圆环构造磁镜系统

对称放置一对电流同向的载流圆环，可以构造出磁感应强度两端强，中间弱的磁镜系统。在MATLAB中，设两个对称载流圆环的圆心分别在(0,0,-l)与(0,0,l)上，即可模拟生成一对载流圆环产生的磁场。

根据磁场的可叠加性，对称载流圆环中的磁感应强度各方向分量如下所示：

$$\begin{cases} B_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(z+l)cos\theta}{(x^2+y^2+(z+l)^2+R^2-2xRcos\theta-2yRsin\theta)^{3/2}}d\theta + \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(z-l)cos\theta}{(x^2+y^2+(z-l)^2+R^2-2xRcos\theta-2yRsin\theta)^{3/2}}d\theta \\ B_y = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(z+l)sin\theta}{(x^2+y^2+(z+l)^2+R^2-2xRcos\theta-2yRsin\theta)^{3/2}}d\theta + \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(z-l)sin\theta}{(x^2+y^2+(z-l)^2+R^2-2xRcos\theta-2yRsin\theta)^{3/2}}d\theta \\ B_z = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R-xcos\theta-ysin\theta}{(x^2+y^2+(z+l)^2+R^2-2xRcos\theta-2yRsin\theta)^{3/2}}d\theta + \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R-xcos\theta-ysin\theta}{(x^2+y^2+(z-l)^2+R^2-2xRcos\theta-2yRsin\theta)^{3/2}}d\theta \end{cases} \tag{3.1}$$

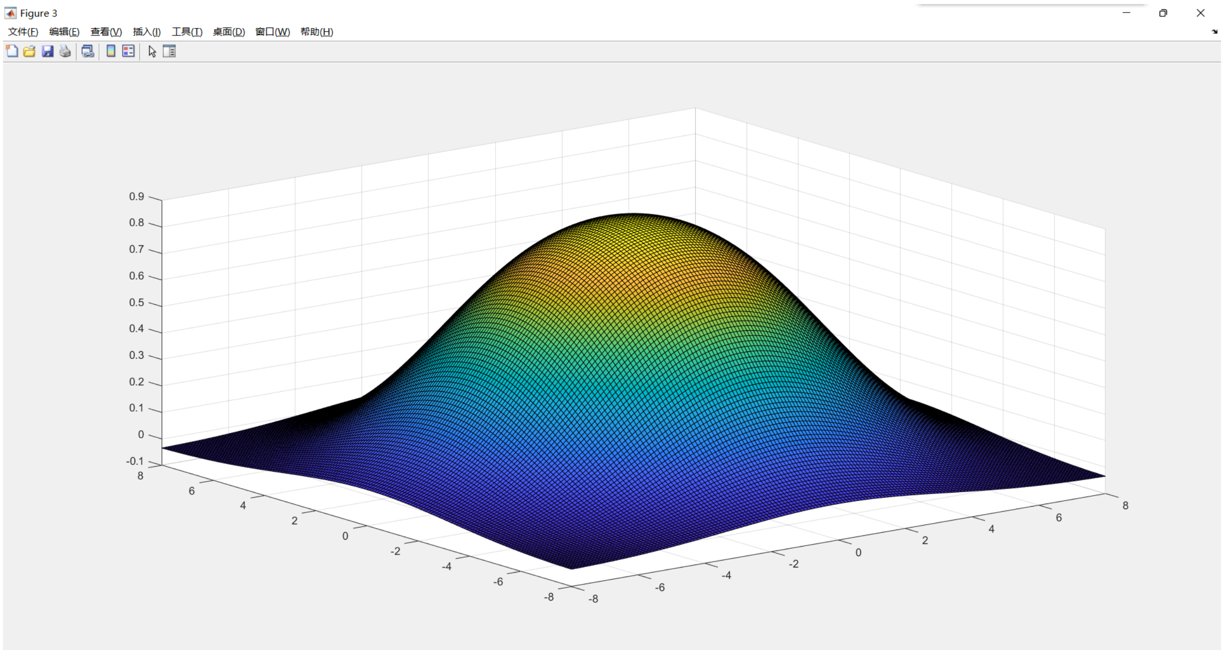
megnetic_field.m代码如下：

```
function [Bx,By,Bz] = megnetic_field(I,R,l,x0,y0,z0)
%I为载流环电流大小，R为载流环半径，2l为载流环之间的距离，(x0,y0,z0)为空间中任意一点，其中原点为载流环的圆心
beita = 0:pi/1000:2*pi;
fx1 = (z0 + l)*cos(beita)./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + (z0 + l).^2 - 2 * x0 * R * cos(beita)-
2 * y0 * R* sin(beita)).^3);
fx2 = (z0 - l)*cos(beita)./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + (z0 - l).^2 - 2 * x0 * R * cos(beita)-
2 * y0 * R* sin(beita)).^3);
Bx = I * R* 10.^-7 *trapz(beita, fx1+fx2);

beita = 0:pi/1000:2*pi;
fy1 = (z0 + l)*sin(beita)./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + (z0 + l).^2 - 2 * x0 * R * cos(beita)-
2 * y0 * R* sin(beita)).^3);
fy2 = (z0 - l)*sin(beita)./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + (z0 - l).^2 - 2 * x0 * R * cos(beita)-
2 * y0 * R* sin(beita)).^3);
By = I * R* 10.^-7 *trapz(beita, fy1+fy2);

beita = 0:pi/1000:2*pi;
fz1 = (R - x0*cos(beita)-y0*sin(beita))./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + (z0 + l).^2 - 2 * x0 * R
* cos(beita)- 2 * y0 * R* sin(beita)).^3);
fz2 = (R - x0*cos(beita)-y0*sin(beita))./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + (z0 - l).^2 - 2 * x0 * R
* cos(beita)- 2 * y0 * R* sin(beita)).^3);
Bz = I * R* 10.^-7 *trapz(beita, fz1+fz2);
```

根据磁场公式，作出磁镜在z = 0时Bz大小的图像：



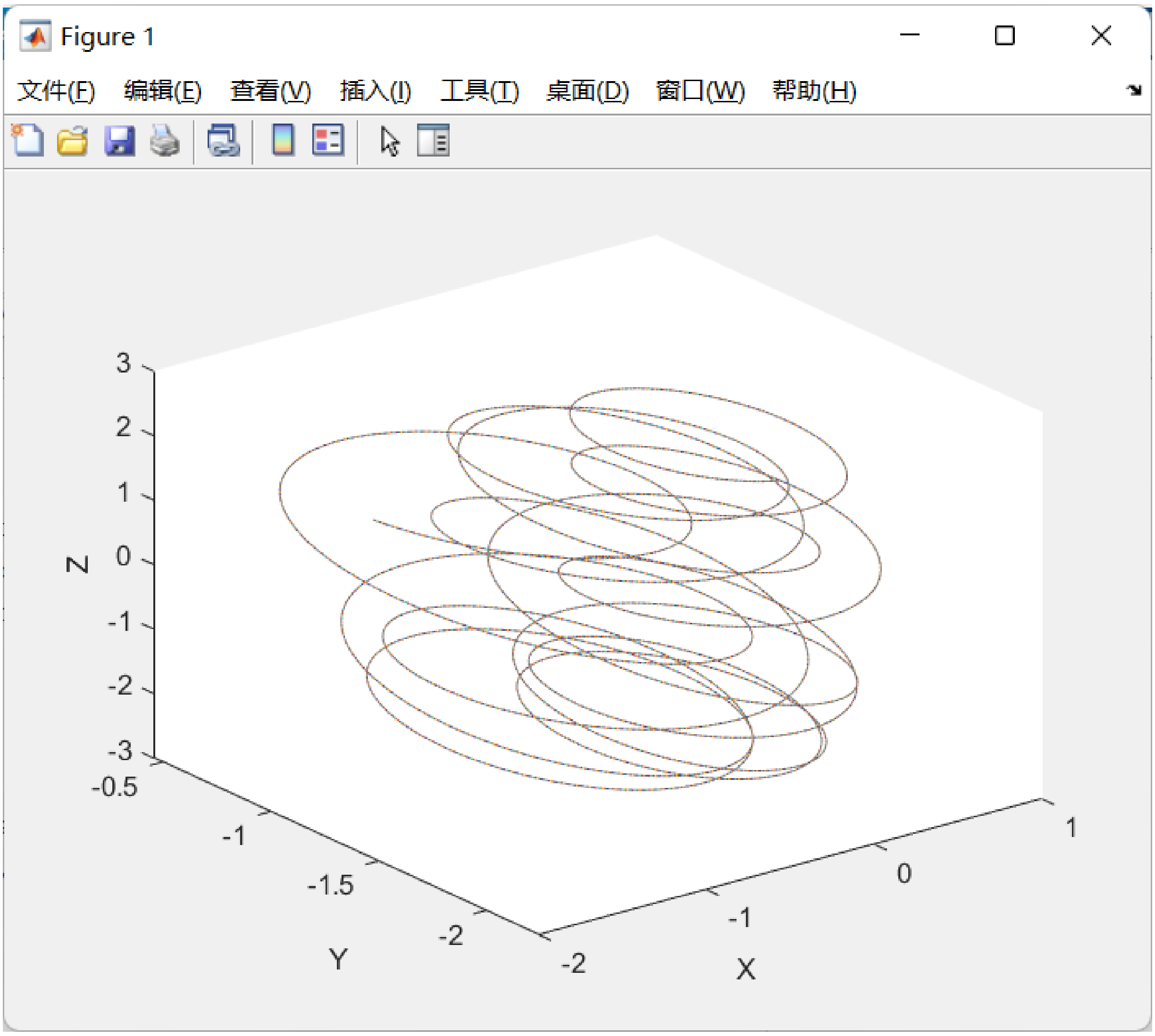
plot_megnetic_mirror.m代码如下:

```
x=[-8:0.1:8];
y=[-8:0.1:8];
[X,Y] = meshgrid(x,y);
for i = 1:161
    for j =1:161
        [Bx,By,Bz(i,j)] = megnetic_field(10^7,5,5,X(1,i),Y(j,1),0);
    end
end
mesh(X,Y,Bz)
figure
surf(X,Y,Bz)
```

4 构造带电粒子在磁镜中的运动轨迹

根据电磁学知识，由于带电粒子的磁矩守恒，在磁镜中点时粒子平行于磁场的速度分量最大，垂直的分量最小，越过中点后，空间磁感应强度增大，而垂直与磁场的速度分量增大，平行于磁场的速度分量减少，在到达某一点后，粒子的平行速度分量会降为零，受磁压力作用，粒子作反向螺旋运动。

通过MATLAB生成的粒子运动轨迹如下:



总体来说符合磁镜中粒子的运动轨迹。我将在第五部分说明偏差的产生。

粒子运动轨迹构造的matlab代码：

```
%参数的设置
v = 0.5;I = 10^7; R = 5; l = 5;
q = 1;m = 1;
x0 = 0; y0 = -1; z0 = 2;
xita = pi/2 - pi /20;fai = 0;
%计算速度
vx0 = v * sin(xita) * cos(fai);
vy0 = v * sin(xita) * sin(fai);
vz0 = v * cos(xita);
%时间间隔
dt = 0.01;

for i = 1:10000
[vx,vy,vz,x,y,z]=plotchangingmegneticfield(I,R,l,q,m,vx0,vy0,vz0,x0,y0,z0,dt);
plot3([x0,x],[y0,y],[z0,z]);
hold on
pause(0.01);

vx0 = vx;vy0 = vy;vz0 = vz;
x0 = x;y0 = y;z0 = z;
end

xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
```

脚本plotchangingmegneticfield.m代码：

```
function [vx,vy,vz,x,y,z] = plotchangingmegneticfield(I,R,l,q,m,vx0,vy0,vz0,x0,y0,z0,dt)

beita = 0:pi/1000:2*pi;
fx1 = (z0 + l)*cos(beita)./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + (z0 + l).^2 - 2 * x0 * R * cos(beita)-
2 * y0 * R* sin(beita)).^3);
fx2 = (z0 - l)*cos(beita)./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + (z0 - l).^2 - 2 * x0 * R * cos(beita)-
2 * y0 * R* sin(beita)).^3);
Bx = I * R* 10.^-7 *trapz(beita, fx1+fx2);

beita = 0:pi/1000:2*pi;
fy1 = (z0 + l)*sin(beita)./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + (z0 + l).^2 - 2 * x0 * R * cos(beita)-
2 * y0 * R* sin(beita)).^3);
fy2 = (z0 - l)*sin(beita)./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + (z0 - l).^2 - 2 * x0 * R * cos(beita)-
2 * y0 * R* sin(beita)).^3);
By = I * R* 10.^-7 *trapz(beita, fy1+fy2);

beita = 0:pi/1000:2*pi;
fz1 = (R - x0*cos(beita)-y0*sin(beita))./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + (z0 + l).^2 - 2 * x0 * R
* cos(beita)- 2 * y0 * R* sin(beita)).^3);
fz2 = (R - x0*cos(beita)-y0*sin(beita))./sqrt((R.^2 + x0.^2 + y0.^2 + (z0 - l).^2 - 2 * x0 * R
* cos(beita)- 2 * y0 * R* sin(beita)).^3);
Bz = I * R* 10.^-7 *trapz(beita, fz1+fz2);

ax = q / m * (vy0 * Bz - vz0 * By);
ay = q / m * (vz0 * Bx - vx0 * Bz);
az = q / m * (vx0 * By - vy0 * Bx);
vx = vx0 + ax * dt;
vy = vy0 + ay * dt;
vz = vz0 + az * dt;
x = 1/2 * ax * dt.^2 + vx * dt + x0;
y = 1/2 * ay * dt.^2 + vy * dt + y0;
z = 1/2 * az * dt.^2 + vz * dt + z0;
```

5 带电粒子在磁镜中运动的误差分析

MATLAB模拟带电粒子在磁场中的运动在xy平面所产生的偏差主要与我在迭代中使用的方法有关。

在脚本plotchangingmegneticfield.m中，我使用的方式是向前迭代，即通过该点的坐标（x,y,z）计算得到该点的磁感应强度，并通过该点该粒子的速度(vx,vy,vz)计算出各个方向的加速度，将接下来dt时间的粒子各个方向运动方程看做匀加速直线运动，得到dt后的粒子位置(x',y'z')与速度(vx',vy',vz')进行下一步的迭代。由于在磁场的运动并不是匀加速直线运动，而是根据当前的(x,y,z)与(vx,vy,vz)随时更新出当前的加速度并进行修正，因此在我的迭代每一次的运动都会产生偏差。提升精度的方法是降低dt增加迭代次数，减少每一步迭代所产生的误差，但是所付出的时间成本也是线性增加的。

6 总结

通过利用MATLAB软件，我验证了对载流圆环中空间中任意一点磁感应强度的推导，并在MATLAB中构造了一对载流圆环产生的磁镜系统，绘制了该空间中z=0时的在z方向上磁感应强度的分布，直观反映了磁镜系统的对称性，而且通过设置电流，载流圆环半径大小等参数，可以定量计算空间任意一点的磁感应强度的具体大小，这在实际工程应用具有十分重要的意义。

根据所模拟构造的磁镜系统，研究粒子在内部运动的轨迹，验证了磁镜系统粒子会在内部来回螺旋运动而不能逃出磁场的性质，并分析了磁镜中模拟运动中的误差。

参考文献：

【1】叶邦角.电磁学第二版[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社.2014.8

【2】徐胜男,任学智,位浩杰,展凯云,陈文娟.基于MATLAB的载流圆环磁场分布的动态仿真[A].大学物理实验:2016(3).2-3