III. Fogalmak:

Egy literál egy Boolean változó, amit pozitív literálnak, vagy a negáltját a Boolean változónak negatív literálnak nevezzük. Literálokra példa: $a, \neg a, b, \neg b, \ldots$

Egy klóz literálok halmaza. Egy klóz halmaz, pedig egy halmaz klóz. Egy SAT probléma is egy klóz halmaz. Egy hozzárendelés egy literál halmaz. Egy klózban vagy hozzárendelésben egy változó feltűnhet pozitív, vagy negatív literálként, de egyszerre mindkettőként nem-, vagy lehet, hogy egyáltalán nem fordulhat elő.

A klózok literáljaik diszunkciójaként vannak értelmezve. A hozzárendelések pedig literáljaik conjukciójaként vannak értelmezve.

Ha egy klóz vagy egy hozzárendelés pontosan *k* literált tartalmaz, akkor k-klóznak, vagy k-hozzárendelésnek nevezzük. Egy 1-klózt *egységnek*, egy 2-klózt *bináris klóz*nak nevezünk. Egy k-SAT probléma egy olyan klóz halmaz, ahol a klózoknak legfeljebb k literálja van. Egy klóz a klóz halmazból egy teljes-hosszú klóz akkor és csak akkor, ha tartalmaz minden változót a klóz halmazból.

Definiálunk néhány kiegészítő függvényt. Ha C egy klóz, akkor legyen $V(C)$ azon változók halmaza, ami feltűnik C-ben. Legyen $N(C)$ a negatív literálok halmaza C-ből, és legyen P(C) a pozitív literálok halmaza C-ből. Tudjuk hogy $C = N(C) \cup P(C), V\big(N(C)\big) \cap V\big(P(C)\big) = \emptyset$, és $P(C) = V(P(C))$.

Két intuitív fogalmat használunk: NNP klóz, és NPP klóz. Egy klóz akkor és csak akkor NNP klóz, ha pontosan egy pozitív literált tartalmaz. Egy klóz akkor és csak akkor NPP klóz, ha pontosan egy negatív literált tartalmaz.

Ha a egy literál az S klóz halmazban, és $\neg a$ literál nincs benne S-ben, akkor azt mondjuk, hogy a egy tiszta literál S-ben.

A negációja H halmaznak $\neg H$-val van jelölve, ami azt jelenti, hogy H minden eleme negálva van. Vegyük figyelembe, hogy $\neg\neg H = H$.

Legyen V a változók halmaza egy klóz halmazból véve. Azt mondjuk, hogy WW a *fehér klóz*, vagy a *fehér hozzárendelés* a V változóira, akkor és csak akkor, ha WW = V. Azt mondjuk, hogy BB a *fekete klóz* vagy a *fekete hozzárendelés*, V változóira, akkor és csak akkor, ha BB = $\neg V$. Például ha $V = \{a, b, c\}$, akkor $WW = \{a, b, c\}$, és $BB = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$.

Azt mondjuk, hogy C *magába foglalja* D klózt, akkor és csak akkor, ha C részhalmaza D-nek.

Azt mondjuk, hogy S klóz halmaz *magába foglalja* C-t, akkor és csak akkor, ha S-ben van olyan klóz, ami magába foglalja C-t. Alakian: $S\ magába\ foglalja\ C \Leftrightarrow \exists D(D \in S \wedge D \subseteq C)$.

Azt mondjuk, hogy C klózzal *jár* S klóz halmaz, akkor és csak akkor, ha minden teljes hosszú klóz, amit *magába foglal* C azt S is *magába foglalja*. A logikai értelmezése ennek a fogalomnak a következő: C-vel jár S, akkor és csak akkor, ha C egy logikai következménye S-nek. Magába foglalt klózokat beleértve vagy másképpen, a magába foglalt klózok is vele járnak.

Azt mondjuk, hogy C klóz független S klóz halmazban, akkor és csak akkor, ha C-vel nem jár S\{C}. Egy teljes hosszú klóz független egy klóz halmazban, akkor és csak akkor, ha semmi nem foglalja magába.

Azt mondjuk, hogy M hozzárendelés egy megoldás S klóz halmazra nézve, akkor és csak akkor, ha minden $C \in S$-re igaz $M \cap C \neq \{\}$.

Azt mondjuk, hogy S klóz halmaz egy Fekete-Fehér SAT probléma, akkor és csak akkor, ha csak két megoldása van a fehér (WW) és a fekete (BB) hozzárendelés.

Azt mondjuk, hogy A és B klóz halmazok egyenlők, akkor és csak akkor, ha mindkettőnek az a megoldás halmaza. Azt mondjuk, hogy A klóz halmazzal jár B klóz halmaz, akkor és csak akkor, ha A-hoz tartozó megoldások halmaza tartalmazza a B-hez tartozó megoldás halmazt, azaz A-nak nem lehet más megoldása, csak B. Ez a fogalom így van jelölve $A \geq B$. Vegyük figyelembe, ha A magába foglalja B minden klózát, akkor $A \geq B$.

Azt mondjuk, hogy A erősebb B-nél, akkor és csak akkor, ha $A \geq B$ és A és B nem egyenlőek. Ez a fogalom így van jelölve $A > B$.

A $D = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ felépítés egy irányított gráfot eredményez, ahol $\mathcal{V}$ a csúcsok halmaza, és $\mathcal{E}$ az élek halmaza. Egy él rendezett csúcsok párosa. Az (a, b) élet az $a \rightarrow b$ –vel ábrázoljuk, és mondhatjuk, hogy *a*-nak van egy gyermeke *b*. Ha (a, b) egy elme az $\mathcal{E}$-nek, akkor azt mondjuk hogy (a, b) egy éle D-nek.

Azt mondjuk, hogy D egy kommunikációs gráf, akkor és csak akkor, ha minden a-ra $\mathcal{V}$-ben igaz hogy (a, a) nincs benne $\mathcal{E}$-ben, és ha x eleme $\mathcal{V}$-nek, akkor $\neg x$ nem lehet $\mathcal{V}$ eleme. Szükségünk van erre a megszorításra, mert D-ből egy logikai formulát generálunk. Ha kommunikációs gráfokról beszélünk, akkor gyakran használjuk a csomópont kifejezést a csúcs szinonimája ként.

Egy út a_1-től a_j-ig a D irányított gráfban olyan csúcsok sorrendje $a_1, a_2, \ldots, a_j$, ami minden egyes $i \in \{1, \ldots, j-1\}$-re igaz, hogy (a_i, a_{i+1}) egy éle D-nek. Egy út a_1-től a_j-ig D irányított gráfban egy *kör*, akkor és csak akkor, ha (a_j, a_1) egy éle D-nek. Az $a_1, a_2, \ldots, a_j, a_1$kört a $(a_1, a_2, \ldots, a_j)$ rekord ábrázolja. Ez a rekord használható elemek halmazaként. Vegyük figyelembe, hogy ebben az ábrázolásában a körnek az első és az utolsó eleme nem lehet ugyan az a csúcs.

Ha van egy $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ körünk, akkor b egy kilépési pontja, akkor és csak akkor, ha valamennyi $j \in \{1,2, \ldots, n\}$-re igaz, hogy (a_j, b) egy él, és $b \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Egy irányított gráf teljes, akkor és csak akkor, ha minden pár külön álló csúcsokból össze van kötve egy pár egyedi éllel (eggyel minden irányba). Egy irányított gráf erősen összetett, vagy erősen irányított gráf, akkor és csak akkor, ha van út minden csúcsból minden más csúcsba. Vegyük figyelembe, hogy a teljes gráf egyben erős is. És azt is, hogy az erősen irányított gráf tartalmaz egy kört, ami tartalmaz minden csúcsot.

IV. Gyenge modell:

Ebben a részben a kommunikációs gráfok gyenge modelljét definiáljuk.

Tegyük fel, hogy $D = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c)\})$, csak úgy, mint az előző részben. A D gyenge modelljének a képlete: $(a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c)$, ami azt jelenti, hogy ha egy csomópont tud üzenetet küldeni több mint egy csomópontnak, akkor csak az egyiknek küld, és ha visszakapja az üzenetet, akkor a következő csomópontnak küldi. Vegyük figyelembe, hogy $(a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c)$ egyenlő a $(\neg a \vee b \vee c)$ klózzal.

Az egyetlen baj ezzel a reprezentációval, hogy az üzenet beszorulhat, ha a gráf tartalmaz köröket. Feltételezzük, hogy van egy körünk n_1 és n_2 két csomópontból. Azután n_1 küldjön üzenetet n_2-nek, n_2 pedig n_1-nek, és így tovább, ami azt jelenti, hogy más csomópontok soha nem kapják meg az üzenetet. Ez nem jó, hiszen a célunk, hogy minden csomópont tudjon üzenetet küldeni bármelyik másiknak, ha lehetséges.

Adjunk hozzá egy új élet a $D = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c)\})$ gráfhoz. Az új élnek b-től a-ba kellene mennie, úgy hogy $D = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c), (b, a)\})$ legyen az új gráf. Most már van egy körünk a és b csomópontokkal. Most hozzá kell adnunk egy klózt a modellünkhöz, ami biztosítja, ha b küld egy üzenetet a-nak, akkor és a tud üzenetet küldeni b-nek és c-nek, akkor a ne küldje vissza b-nek, hanem muszáj c-nek küldenie, amit így $((a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow (b \vee c))) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ formalizálhatunk. Vegyük figyelembe, hogy ez ekvivalens $(\neg a \vee \neg b \vee c)$klózzal.

Egy általánosabb módon, az a csomópontnak, aminek kimenő élei vannak $b_1, b_2, \dots, b_k$ csomópontok irányába, azt a $(\neg a \vee b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_k)$ klóz mutatja be; és az $a_1, a_2, \dots, a_n, a_1$ kört a $b_1, b_2, \dots, b_m$ kilépési pontokkal a $(\neg a_1 \vee \neg a_2 \vee \dots \vee \neg a_n \vee b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_m)$ klóz mutatja be. Ezt a modellt hívjuk a kommunikációs gráfok gyenge modelljének.

Alakian is definiáljuk. Legyen D a kommunikációs gráf. Legyen D csúcsainak halmaza V és D éleinek halmaza E. Mivel D egy kommunikációs gráf, tudjuk, hogy V elemei pozitív literálokként használhatóak. Ezek után definiáljuk a következő fogalmakat:

$OutE(a) := \{b | (a, b) \in \mathcal{E}\}$.

$NodeRep(a) := \{\neg a\} \cup OutE(a)$.

$NodeRep := \{NodeRep(a) | a \in V \wedge OutE(a) \neq \emptyset$.

$Cycles := \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid k = 1 \vee \forall i(i = 1 \dots k \Rightarrow a_{(i \, moduló \, k)+1} \in OutE(a_i))\}$, és bármely két eleme egy körnek nem lehet egyenlő, mivel egy halmaz.

$ExitPoints((a_1, a_2, \dots, a_k)) := \{b | \exists \, i(i = 1 \dots k \wedge b \in OutE(a_i)) \wedge \neg\exists j(j = 1 \dots k \wedge b = a_j)\}$.

$CycleRep := \{\neg C \cup ExitPoints(C) | C \in Cycles \wedge ExitPonts(C) \neq \emptyset\}$.

$WM := NodeRep \cup CycleRep$.

D-nek a gyenge modellje WM.

Vegyük figyelembe, hogy NodeRep egy részhalmaza a CycleRep-nek, mert minden csomópontot önmagában is körnek tekintjük, lásd a k=1 megszorítást a Cycles definíciójában, amit a maradék megszorítások diszjunkciójával kötöttünk össze. Tehát egy alternatív módon, így $WM \coloneqq CycleRep$ definiálhatjuk a WM-et. Nem használjuk ezt a megfigyelést ebben a munkában, habár néhány bizonyítás rövidebb lenne.

Kérem vegyük figyelembe, hogy WM-ben minden klóz tartalmaz legalább egy pozitív literált, és egy negatív literált, mert egy csomópont csak akkor van képviselve, ha van egy kimenő éle; és egy kör csak akkor van képviselve, ha van egy kilépési pontja, azaz WM kielégíthető bármilyen D komunikációs gráfra.

Nézzünk pár példát. Nem egyszerű leellenőrizni, hogy ez a SAT probléma valóban egy Fekete Fehér SAT probléma. Ezért először a teljes hosszú klóz halmazokat megmutatjuk, az $\{a, b, c, d\}$ változókon, egy index számmal (minden belépésnek a formája: index száma, teljes hosszú klóz):

$$\{0: \{\neg a, \neg b, \neg c, \neg d\}, 1: \{\neg a, \neg b, \neg c, d\},$$

$$2: \{\neg a, \neg b, c, \neg d\}, 3: \{\neg a, \neg b, c, d\},$$

$$4: \{\neg a, b, \neg c, \neg d\}, 5: \{\neg a, b, \neg c, d\},$$

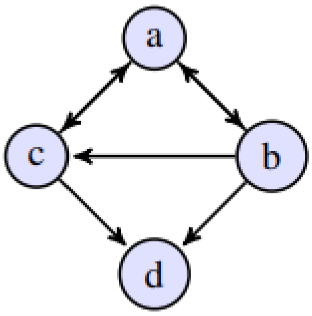
$$6: \{\neg a, b, c, \neg d\}, 7: \{\neg a, b, c, d\},$$

$$8: \{a, \neg b, \neg c, \neg d\}, 9: \{a, \neg b, \neg c, d\},$$

$$10: \{a, \neg b, \neg c, \neg d\}, 11: \{a, \neg b, c, d\},$$

$12: \{a, b, \neg c, \neg d\}, 13: \{a, b, \neg c, d\},$

$14: \{a, b, c, \neg d\}, 15: \{a, b, c, d\}, \},$



1. Ábra. Egy kommunikációs gráf 4 csúccsal és 3 körrel.

Az egyes ábra egy kommunikációs gráfot mutat 3 körrel:

$$(a, b), (a, b, c), (a, c).$$

Így a gyenge modellje (miután minden egyes klóznak a magába foglalt teljes klózok indexeit kilistázzuk az (1)-ből):

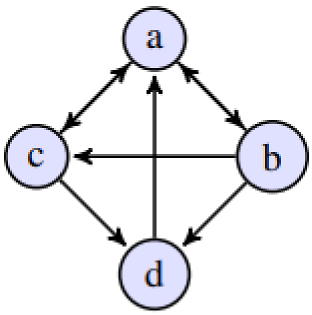
$$WM = \{\{\neg a, b, c\} : 6{,}7, \{\neg b, a, c, d\} : 11,$$

$$\{\neg c, a, d\} : 9{,}14, \{\neg a, \neg b, c, d\} : 3,$$

$$\{\neg a, \neg b, \neg c, d\} : 1, \{\neg a, \neg b, c, d\} : 5\}.$$

Vegyük figyelembe, hogy amióta d-nek nincs gyermeke, nem tűnik fel negatív literálként a modellben.

Vegyük figyelembe, hogy amióta a kommunikációs gráf az 1. Ábrán nem erősen összetett, a gyenge modellje („) nem Fekete Fehér SAT probléma. Például $\{\neg a, \neg b, \neg c, d\}$ egy megoldása (2)-ben a SAT problémára,



2. Ábra Egy erősen összetett kommunikációs gráf 4 csúccsal és 6 körrel.

Második példaként megmutatjuk a gyenge modelljét a kommunikációs gráfnak a 2. Ábrán. Ebben a gráfban 6 körünk van:

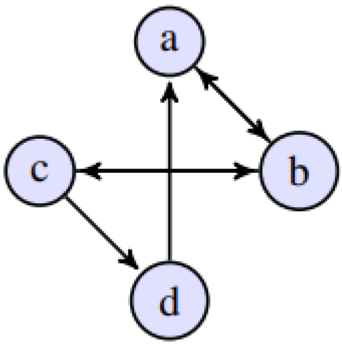
$$(a, b), (a, b, c), (a, c), (a, b, d), (a, c, d), (a, b, c, d).$$

Az utolsó kör tartalmazza az összes csúcsot, tehát nincs kilépési pontja, ezért nincs klóz generálva hozzá. Vegyük figyelembe, hogy a gráfban van egy élünk d-ből a-ba. A hozzá tartozó klózok az utolsó 3 klóz ebben a példában, az utolsó két klózhoz tartozik az új kör. A maradék klózok ugyan azok, mint az előző modellben. Tehát a gyenge modell (miután minden egyes klóznak a magába foglalt teljes klózok indexeit kilistázzuk az (1)-ből):

$$WM = \{\{\neg a, b, c\} : 6, 7, \{\neg b, a, c, d\} : 11,$$
$$\{\neg c, a, d\} : 9, 14, \{\neg a, \neg b, c, d\} : 3,$$
$$\{\neg a, \neg b, \neg c, d\} : 1, \{\neg a, \neg b, c, d\} : 5\},$$
$$\{\neg d, a\} : 8, 10, 12, 14, \{\neg a, \neg c, \neg d, c\} : 2,$$
$$\{\neg a, \neg c, \neg d, b\} : 4.$$

Vegyük észre, hogy mivel a kommunikációs gráf a 2. Ábrán erősen összetett, a gyenge modellje egy Fekete Fehér SAT probléma, azaz a SAT probléma a (3)-ban csak ez a két megoldása van: $\{a, b, c, d\}$, és $\{\neg a, \neg b, \neg c, \neg d\}$.

Minden egyes kör egy egyszerű kör volt a fenti két példában. Egy kör egyszerű, akkor és csak akkor, ha az első és az utolsó csúcsok ismétlődnek, tehát azt gondolhatjuk, hogy elég csak az egyszerű köröket számításba vennünk. A következő példa mutatja, azt az esetet, amikor a nem egyszerű köröket is számításba kell vennünk.



3. Ábra Egy erősen összetett kommunikációs gráf 4 csúccsal, 3 egyszerű körrel, és 1 nem egyszerű körrel.

A 3. Ábrán egy erősen összefüggő kommunikációs gráfot láthatunk, ami 3 egyszerű kört: (a, b), (a, b, c, d), (b, c), és egy nem egyszerű kört: (a, b, c, b) tartalmaz. Harmadik példának a gyenge modellnek ezt a kommunikációs gráfot adjuk (miután minden egyes klóznak a magába foglalt teljes klózok indexeit kilistázzuk az (1)-ből):

$$WM = \{\{\neg a, b\} : 4, 5, 6, 7, \{\neg b, a, c\} : 10, 11,$$
$$\{\neg c, b, d, \} : 5, 13, \{\neg d, a\} : 8, 10, 12, 14,$$
$$\{\neg a, \neg b, c\} : 2, 3, \{\neg b, \neg c, a, d\} : 9,$$
$$\{\neg a, \neg b, \neg c, d\} : 1\}.$$

Vegyük figyelembe, hogy az utolsó klóz egy nem egyszerű körből lett generálva, és a hozzá tartozó teljes hosszú klózt nem tartalmazza semelyik másik klóz sem.

V. Elméleti eredmények:

Már bebizonyítottuk, hogy ha a gyenge modellt használjuk, akkor a kommunikációs gráfnak a modellje egy fekete-fehér SAT probléma lesz, akkor és csak akkor, ha az erősen összefüggő. Hogy ezt be tudjuk bizonyítani, szükségünk van segédlemmákra. Pár elméleti eredményre hivatkozunk a [15]-ös eredményekből. Ezeket a lemmákat nem bizonyítjuk, csak a körvonalát adjuk meg a bizonyításnak.

1. Lemma: F legyen egy fekete-fehér SAT probléma. Ekkor $F \cup \{BB, WW\}$ nem kielégíthető.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy F-nek csak két megoldása van: BB és WW. Mivel $\neg BB = WW$ és $\neg WW = BB$, így tudjuk, hogy $F \cup \{BB, WW\}$ nem kielégíthető.

A következő lemma azt állítja, hogy a gyenge modellnek legalább két megoldása van, a fekete és a fehér hozzárendelés.

2. Lemma: D legyen egy kommunikációs gráf. WM legyen D gyenge modellje. Ekkor WM-nek legalább két megoldása van, nevezetesen a *fehér hozzárendelés (WW)* és *fekete hozzárendelés (BB)*.

Bizonyítás: D legyen egy kommunikációs gráf. WM legyen D gyenge modellje. Mivel egy pozitív és egy negatív literál WM minden klózában van, a fehér hozzárendelés (WW) és a fekete hozzárendelés (BB) is megoldása WM-nek.

A következő lemma azt állítja, hogy ha a gyenge modellnek csak két megoldása van, akkor minden körnek a kommunikációs gráfban van legalább egy kilépési pontja, kivéve annak a körnek, amelyik tartalmazza a gráf minden csúcsát.

3. Lemma: D legyen egy kommunikációs gráf. WM legyen D gyenge modellje. Tételezzük fel, hogy a WM-nek csak két megoldása van. Akkor minden körre igaz, hogy $C \in Cycles$ hogy $ExitPoints(C)$ nem üres, vagy C tartalmazza D összes csúcsát.

A bizonyítása ennek a lemmának a ToC-nak [15] néven van benyújtva. A körvonala a bizonyításnak a következő. Tegyük fel hogy a célunk nem igaz, azaz van egy C kör, aminek nincs kilépési pontja, és nem tartalmazza D minden csúcsát. Állítsuk elő a következő hozzárendelést: $A = C \cup \neg(V \setminus C)$, ahol V a csúcsok halmaza D-ből. Mivel C-nek nincs kilépési pontja, ezért nincs hozzá tartozó klóz generálva a $CycleRep$ által, ami hamissá tenné A-t. Mivel $A \neq WW$ és $A \neq BB$ ez egy ellentmondás, mert a feltételezéseink és a 2. Lemma biztosítja, hogy a WM-nek csak két megoldása legyen: WW és BB.

A következő lemma azt állítja, hogy egy fekete-fehér SAT provléma nem tartalmazhat tiszta literálokat.

4. Lemma: Ha S egy fekete-fehér SAT probléma, akkor nem tartalmazhat tiszta literálokat.

A bizonyítása ennek a lemmának a ToC-nak [15] néven van benyújtva. A körvonala a bizonyításnak a következő. Bármely tiszta literál megtalálható az összes megoldásban. De S-nek csak két megoldása van, WW és BB, de nincs közös literáljuk, tehát S nem tartalmazhat egyetlen tiszta literált sem.

A következő lemma azt állítja, hogy ha van egy teljes gráfunk, annak a gyenge modellje egy fekete-fehér SAT probléma lesz. Ez az eredmény valahogyan természetes, hiszen a gyenge modellje egy teljes gráfnak a lehető legnagyobb, amit generálni tudunk és a gyenge modellnek mindig legalább két megoldása van.

5. Lemma: Ha D egy teljes kommunikációs gráf, és WM a gyenge modellje D-nek, akkor WM fekete-fehér SAT probléma.

A bizonyítása ennek a lemmának a ToC-nak [15] néven van benyújtva. A körvonala a bizonyításnak a következő. Mivel D tartalmazza az összes lehetséges kört, és minden egyes körről tudjuk, hogy a kilépési pontjai a gráf maradéka, és mivel a $CycleRep$ felépítése miatt tudjuk, hogy WM tartalmazza az összes teljes-hosszú klózt legalább egy pozitív és egy negatív literállal. Tehát WM-nek csak két megoldása van: WW és BB.

A következő tétel azt állítja, hogy az erősen összetett gráf gyenge modellje egy fekete-fehér SAT probléma.

1. tétel: D legyen egy kommunikációs gráf. WM legyen D gyenge modellje. Ekkor WM egy fekete-fehér SAT probléma, akkor és csak akkor, ha D erősen összetett.

Ez a bizonyítás a ToC-nak [15] néven van benyújtva, itt csak a körvonalát adjuk meg a bizonyításnak.

A tételt balról jobbra konstruktív módon bizonyítjuk: Legyen a csúcsok sora a 4. Lemmából és a CycleRep konstrukciója alapján felépítve. Idővel egy kört találunk a sor végén. A 3. Lemma biztosítja, hogy van kilépési pont ebből a körből, ami vagy egy nagyobb kört vagy hosszabb sort eredményez. Ezt a két lépést felhasználva idővel egy erősen összetett komponenst építünk. A 3. Lemmából következik, hogy maximális is (különben onnan is lenne egy kilépési pont belőle, ami lehetővé tenné, hogy megismételjük a fenti lépéseket), azaz a gráf erősen összetett.

Balról jobbra következtetést használva: Egy teljes gráfból indítjuk ki a bizonyítást. Azt is tudjuk, hogy a teljes gráfok erősen összetettek. A következtetés lépése, hogy ennek a gráfnak töröljük egy élét, oly módon, hogy erősen összetett maradjon. Azt feltételezzük, hogy az él törlése előtt a gyenge modell egy fekete-fehér SAT probléma volt, és az törlése után is az marad. Hogy ezt bemutassuk, meg be kell mutatni, hogy minden klóz a modellből törlés után egy részhalmaza a klózoknak a törlés előtti gráfból. Tehát az új modellnek se legyen több megoldása a réginél. De a 2. Lemma alapján az új modellnek is kell lennie legalább két megoldásnak. Így az új modell egy fekete-fehér SAT probléma. Mivel a gráfunk élek eldobásával felépíthető egy teljes gráfból, aminek ugyan az a csúcsok halmaza, a gyenge modellje is egy fekete-fehér SAT probléma lesz.

Miután néhány eredményt idéztünk a [15]-ből, most már mutassunk be néhány újat.

A következő lemma érdekes, de az ötlet a bizonyításában még érdekesebb.

6. Lemma: D legyen egy kommunikációs gráf. WM legyen D gyenge modellje. Aztán WM-ben minden C-re igaz, hogy C nem tartozik $WM \setminus \{C\}$ alá.

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy D egy kommunikációs gráf. Tételezzük fel, hogy WM D-nek a gyenge modellje. Bemutatjuk, hogy minden C-re WM-ben igaz, hogy C nem tartozik $WM \setminus \{C\}$. Ezt hogy bemutassuk, legyen C' egy tetszőleges, de egy rögzített klóz WM-ből, bemutatjuk, hogy C' nem tartozik $WM \setminus \{C\}$-be, ami azt jelenti, hogy minden B-re WM-ben igaz, hogy $B \neq C'$, azt jelenti, hogy $B \not\subseteq C'$. Legyen B' egy tetszőleges, de egy rögzített klóz $WM \setminus \{C'\}$-ből, bemutatjuk, hogy $B' \not\subseteq C'$ igaz. Tudjuk, hogy $C' = N(C') \cup P(C')$, és $B' = N(B') \cup P(B')$. WM konstrukciójából tudjuk, hogy semelyik halmaz nem lehet üres. Két eset van: (a) $N(B') \not\subseteq N(C')$ vagy $P(B') \not\subseteq P(C')$, (b) $N(B') \subseteq N(C')$ és $P(B') \subseteq P(C')$. (a) esetében magától érthetően van nekünk, hogy $B' \not\subseteq C'$. (b) esetében van $V(N(B'))$, ami egy kört képvisel, és van $V(N(C'))$, ami úgyszintén egy kört képvisel. A WM felépítéséből tudjuk, hogy $N(B') \neq N(C')$, mert minden kör csak egy klózzal van képviselve és $B' \neq C'$. Ezért tudjuk, hogy $N(B') \subset N(C')$. Ebből és $P(B') \subseteq P(C')$ tudjuk, hogy van olyan v változó, amelyre igaz, hogy v nincs benne B'-ben sem pozitív sem negatív literálként, de v negatív literálként benne van C'-ben. Ez a v változó benne van D-ben egy csúcsként is. Most a helyzet: van egy kis körünk, $V(N(B'))$, és egy nagyobb körünk $V(N(C'))$, úgy hogy $N(B') \subset N(C')$. A gráfban nincs kilépési pont v-be $V(N(B'))$-ből (a kis körből), úgy hogy egy útnak lennie kell $V(N(B'))$-ből v-be, úgy hogy ez a nagyobb kör jön létre. Az általánosság elvesztése nélkül, tételezzük fel, hogy ez az út a következő: $b, d, v_1, \ldots, v_q$, úgy hogy $q \geq 1, v_q = v, b$ a $V(N(B'))$-ben benne van, d nincs benne $V(N(B'))$-ben. Vegyük figyelembe, hogy d-nek benne kell lennie $P(B')$-ben és $V(N(C'))$-ben. Ezért nem igaz, hogy $B' \subseteq C'$, mert van egy d változó, ami pozitívliterálként tűnik fel C'-ben, azaz $B' \nsubseteq C'$. Tehát C-t nem tartalmazza $WM \setminus \{C\}$.

Most pedig bizonyítsuk be ennek a lemmának az általánosítását. Nem használjuk az előző lemmát, hogy bebizonyítsuk a következő tételt, de használjuk a fő ötletben: C' klózt nem tartalmazza B' klóz, mert lennie kell egy $b, d, \ldots, v$ útnak $V(N(B'))$-ből, $V(N(C'))$-be, úgy hogy d pozitív literálként tűnik fel B'-ben, de negatív literálként C'-ben, azaz C' nem tartalmazza B'-t.

2. tétel: D legyen egy kommunikációs gráf. WM legyen a gyenge modellje D-nek. Ekkor minden C-re WM-ben igaz, hogy független $WM \setminus \{C\}$-től.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy D egy kommunikációs gráf. Tegyük fel, hogy WM a gyenge modellje D-nek. Bemutatjuk, hogy minden C-re igaz WM-ben, hogy C független $WM \setminus \{C\}$-ben. Ezt hogy bebizonyítsuk, legyen C' egy tetszőleges, de rögzített klóz WM-ből, bemutatjuk, hogy C' is független $WM \setminus \{C'\}$-től. Ezt hogy bemutassuk elég megmutatni, hogy létezik egy teljes-hosszú klóz C'' úgy, hogy C' része C''-nek, azaz $C' \subseteq C''$, és nincs másik klóz WM-ben, aminek része lenne C'', azaz C'' önálló a $WM \setminus \{C'\}$-ben, azaz minden B-re WM-ben igaz, hogy amennyiben $B \neq C'$ igaz, akkor az is, hogy $B \nsubseteq C''$-nek. Ezt hogy bemutassuk B' legyen egy tetszőleges, de rögzített klózt WM-ből, úgy, hogy $B' \neq C'$-vel, erre bemutatjuk, hogy $B' \neq C''$-vel. Ezt hogy bemutassuk, építsük fel C''-t a következő képpen: C'' tartalmazza C' összes literálját, és a maradék változókat pedig pozitív literálok ként, azaz $C'' := C' \cup V \setminus V(C')$, ahol V a D-ből megmaradt változók halmaza. Ennek a szerkezetnek köszönhetően tudjuk, hogy $N(C'') = N(C')$-vel. A következőkben a 6. Lemma ötletét használjuk. Tudjuk, hogy $C'' = N(C'') \cup P(C'')$-vel, és $B' = N(B') \cup P(B')$-vel. WM felépítése miatt egyik halmaz sem lehet üres. Két eshetőség van: vagy (a) $N(B') \nsubseteq N(C'')$ vagy $P(B') \nsubseteq P(C'')$; vagy (b) $N(B') \subseteq N(C'')$ és $P(B') \subseteq P(C'')$. (a) esetében magától értetődő, hogy $B' \nsubseteq C''$. (b) esetében tudjuk, hogy $V(N(B'))$, és $V(N(C''))$ is egy kört képvisel. A WM felépítéséből tudjuk, hogy $N(B') \neq N(C'')$, mert minden kör csak egy klózzal van képviselve és $B' \neq C'$-vel. Ebből, és hogy $N(C'') = N(C')$ tudjuk, hogy $N(B') \subset N(C'')$-nek. Ebből, és abból, hogy $P(B') \subseteq P(C'')$ tudjuk, hogy van egy olyan v változó, ami nincs jelen B'-ben sem pozitív sem negatív literálként, de v jelen van C''-ben negatív literálként. Ez a v változó egyben csúcs is D-ben. Most a következő a helyzet: van egy kis körünk $V(N(B'))$, és egy nagyobb körünk $V(N(C''))$, úgy hogy $N(B') \subset N(C'')$-nek. A gráfban nincs kilépési pont v-be $V(N(B'))$-ből, tehát egy útnak kell lennie $V(N(B'))$-ből v-be, úgy hogy a nagyobb kör jön létre. Az általánosság elvesztése nélkül, tételezzük fel, hogy ez az út a következő: $b, d, v_1, \ldots, v_q$, úgy hogy $q \geq 1, v_q = v, b$ pedig $V(N(B'))$-ben van, d nincs $V(N(B'))$-ben. Figyeljük meg, hogy d-nek muszáj $P(B')$-ben és $V(N(C''))$-ben is benne lennie. Ezért nem igaz, hogy $B' \subseteq C''$, mert van egy d változó, ami pozitív literálként tűnik fel B'-ben, de egy negatív literálként C''-ben, azaz $B' \nsubseteq C''$-nek. Tehát C független $WM \setminus \{C\}$-tól.

Ez egy nagyon erős tétel. Azt állítja hogy a gyenge modell a lehető leggyengébb. Ennek a tételnek több következtetése is van.

1. Következtetés: D legyen egy erősen összetett kommunikációs gráf. WM legyen egy gyenge modellje D-nek. Ekkor $WM \cup \{BB, WW\}$ egy minimális nem kielégíthető SAT példány.

Bizonyíték: A gyenge modell felépítéséből tudjuk, hogy sem BB sem WW nem jár WM-el. Ebből, az 1. Lemmából és a 2. Tételből következik ez a következtetés.

Ez az a következtetés, amit megemlítettünk a cikk címében. Ez ad nekünk egy algoritmust, arról, hogyan generáljunk minimális nem kielégíthető SAT példányt egy irányított gráfból: Először legeneráljuk a gyenge modelljét a bemeneti erős irányított gráfnak. Ez egy fekete-fehér SAT probléma lesz, amiben minden klóz önálló. Második lépésként hozzá adjuk a fekete és a fehér klózokat. Ezek után készen vagyunk, van egy minimális nem kielégíthető SAT példányunk, azaz a kielégíthetetlen magja az önmaga, azaz intuitíven mondva, nincs redundancia benne.

2. Következtetés: D legyen egy erősen összetett kommunikációs gráf. WM legyen a gyenge modellje D-nek. Ekkor nincs zárolt klóz $WM \cup \{BB, WW\}$-ben.

Bizonyítás: Ez egy azonnali következménye az 1. Következtetésnek és a zárolt klózok tulajdonságának, hogy törölhetők a klóz halmazból, anélkül, hogy megváltozna a kielégíthetőség.

Ez egy kevésbé érdekes következtetés. Talán később tudjuk használni, ha megpróbáljuk általánosítani az eredményeinket a Balatonboglár kommunikációs gráf modellünkre.