



# A kommunikációs gráfok modelljeinek vizsgálata Python programozási nyelvvel

**Készítette**

Mohai Ferenc

programtervező informatikus BSc

**Témavezető**

Dr. Kuser Gábor

egyetemi docens

EGER, 2022

# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>3</b>
<b>1. Az alapok</b>	<b>4</b>
1.1. Szakirodalom . . . . .	4
1.1.1. A tanáraink ajánlása . . . . .	7
1.2. WolframAlpha válasz motor . . . . .	7
1.3. A Python programozási nyelvről . . . . .	8
<b>2. Kutatás</b>	<b>9</b>
2.1. Amiből kiindultam . . . . .	9
2.2. Kiterjesztett erős modell . . . . .	10
2.3. célja . . . . .	10
<b>3. Szoftver</b>	<b>11</b>
3.1. Amiből kiindultam . . . . .	11
3.2. Ahova eljutottam . . . . .	11
<b>Összegzés</b>	<b>12</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>13</b>

# Bevezetés

A szakdolgozati szemináriumon, amikor hallottam Kusper Gábor tanár úr magyarázatát a kutatásról, annak eredményeiről, céljáról, felhasználásáról. és már akkor nagyon megtetszett a téma. A SAT megoldó széles körű felhasználásáról beszélgettünk. Korábbi előadásokon, gyakorlatokon is voltak tanárain, akik ezt a témát felvetették, és már akkoriban meghozták a kedvemet hozzá. Amikor választanom kellett, nem volt nagy kérdés, hogy ez egy számomra érdekes téma, amivel szívesen dolgozok, és lehetőséget ad a fejlődésre.

Szaktársammal, Rajna Franciskával csak mi ketten érdeklődtünk ebben a témában, úgyhogy mindenki örömmel beszélte meg a részleteket és közös megegyezéssel találtuk ki melyik ágát dolgozza ki a témának. Pozitív és energikus első benyomás után örömmel kezdtünk a munkának. Bíró Csaba és Balla Tamás tanár urakkal dolgoztunk a témával kapcsolatos házi TDK-hoz hasonló előadásokon és kutatásokon [ICAI2020, AM2020] vettünk részt. Az egyik alkalommal egy plakátot is készítettünk, ezekkel megalapozva egy lendületes kezdést.

Megbeszéltük hol szorul fejlesztésre a SAT megoldó, amin tudok programozással javítani. Valamint a korábbi általuk írt angol nyelvű szakirodalmakkal elsajátíthatom az elméleti hátteret, felzárkózhatok a jelenlegi helyzethez és ezeken dolgozva könnyedén belerázódjak a szakdolgozatom megfogalmazásába. Így kezdtem el a munkámat.

# 1. fejezet

## Az alapok

A munkámat azzal kezdtem, hogy szakirodalmakat olvastam, fordítottam és értelmeztem, amiket korábban témavezetőim írtak, ez a 7. oldalon olvasható. Anyagot gyűjtöttem és dolgoztam fel a SAT megoldókról. Ezekben megjelentek különböző definíciók, mint az 1.16. definíció a tautológia, az 1.13. definíció a CNF, és az 1.14. definíció a DNF, valamint programozási nyelvek, mint a Python az 1.3. szakaszban és a Wolfram Alpha az 1.2. szakaszban.

### 1.1. Szakirodalom

Alapfogalmak, definíciók:

**1.1. Definíció.** Atomi formula, röviden atom: Azt mondjuk, hogy egy szimbólum atomi formula, vagy atom, akkor és csak akkor, ha egy kifejezést jelöl. Ilyen atomok, az igaz és hamis ítéletváltozók. Szimbólumuk általában az  $I$  és  $H$  betűk magyarul, de szoktuk használni az angol megfelelőjét is a  $T$  és  $F$  betűket.

**1.2. Definíció.** Literál: Azt mondjuk, hogy egy szimbólum literál, akkor és csak akkor, ha egy atom, vagy annak negáltja.

**1.3. Definíció.** Jól formázott formula, röviden formula: Azt mondjuk, hogy egy szimbólum sorozat jól formázott formula, vagy formula, akkor és csak akkor, ha  $F$  formula a következő alakok egyikében van:

- (a)  $A$ , ahol  $A$  egy atom;
- (b)  $\neg A$ , ahol  $A$  egy formula;
- (c)  $(A \wedge B)$ , ahol  $A$  és  $B$  formulák;
- (d)  $(A \vee B)$ , ahol  $A$  és  $B$  formulák;
- (e)  $(A \implies B)$ , ahol  $A$  és  $B$  formulák;

(f)  $(A \Leftrightarrow B)$ , ahol A és B formulák.

Minden formula a fenti esetek véges sokszori alkalmazásával áll elő.

**1.4. Definíció.** Formula: Adott ítéletváltozónak egy véges, nem üres  $V$  halmaza.

1. Ítéletváltozó: ha  $A \in V$ , akkor A formula.
2. Negáció: ha A formula, akkor  $\neg A$  is formula.

**1.5. Definíció.** Operátor: Azt mondjuk, hogy egy szimbólum operátor, akkor és csak akkor, ha egy Formulán, klózon, vagy literálon módosítást végez, oly módon, hogy kiinduló állapotát megváltoztatja, megfelelő elő feltételek mellett.

**1.6. Definíció.** Klóz, angolul clause: Azt mondjuk, hogy egy formula klóz, akkor és csak akkor, ha adott literáloknak és operátoroknak egy véges, nem üres, egynél több elemű  $W$  halmaza.

1. pozitív literál: ha  $B \in W$ , és B egy pozitív literál.
2. negatív literál: ha B pozitív literál, akkor  $\neg B$  negatív literál.
3. és operátor: ha  $B \wedge \neg B$ , akkor  $\wedge$  egy és operátor.
4. vagy operátor: ha  $B \vee \neg B$ , akkor  $\vee$  egy vagy operátor.
5. össze éselés: Két klózt össze éselünk, ha két klóz közé és operátor

Pozitív vagy negatív literál is feltűnhet benne, de sohasem egyszerre. Az is lehetséges, hogy valamelyik változó egyik formában sem tűnik fel benne.

**1.7. Megjegyzés.** Létezik konjunktív és diszjunktív klóz is. Ezeket később részletezem. Diszjunktív klóz: Azt mondjuk, hogy  $l_i$  szimbólumok egy klózt alkotnak, akkor és csak akkor, ha minden  $l_i$  literál:  $l_1 \vee \dots \vee l_n$  Konjunktív klóz: Azt mondjuk, hogy  $l_i$  szimbólumok egy klózt alkotnak, akkor és csak akkor, ha minden  $l_i$  literál:  $l_1 \wedge \dots \wedge l_n$

**1.8. Definíció.** Implikáció: Azt mondjuk hogy egy operátor implikáció, akkor és csak akkor, ha mindkét oldalán van egy literál, és egy harmadik literált állít elő a kettő értékéből, oly módon, hogy az összes bal oldali értékből pozitív literált állít elő, kivéve, ha a bal oldalán pozitív, a jobb oldalán negatív literál van. Mivel a negatív értékből nem következik a pozitív érték. Jelölése:  $A \implies B$

**1.9. Definíció.** Ekvivalencia: Azt mondjuk, hogy egy operátor ekvivalencia, akkor és csak akkor, ha mindkét oldalán van egy literál, és egy harmadik literált állít elő a kettő értékéből, oly módon, hogy ha mindkét oldalán ugyan az a pólusú literál van, akkor pozitív literált állít elő, kivéve, ha eltérnek a pólusok.

1.10. *Megjegyzés.* Pólus alatt a negatív vagy pozitív jelzöt értjük.

**1.11. Definíció.** Konjunkció: Azt mondjuk, hogy egy operátor konjunkció, akkor és csak akkor, ha mindkét oldalán van egy literál, és egy harmadik literált állít elő a kettő értékéből, oly módon, hogy ha mindkét oldalán pozitív literál van, akkor és csak akkor pozitív literált állít elő, különben negatív literált. Jele:  $\wedge$

**1.12. Definíció.** Diszjunkció: Azt mondjuk, hogy egy operátor diszjunkció, akkor és csak akkor, ha mindkét oldalán van egy literál, és egy harmadik literált állít elő a kettő értékéből, oly módon, hogy ha mindkét oldalán negatív literál van, akkor negatív literált állít elő, különben pozitív literált. Jele:  $\vee$

**1.13. Definíció.** Konjunktív normál forma, röviden KNF, angolul conjunctive normal form, röviden CNF: Azt mondjuk, hogy logikai formula konjunktív normál forma, akkor és csak akkor, ha egy vagy több klózt egymáshoz kötünk konjunkcióval.

**1.14. Definíció.** Diszjunktív normál forma, angolul disjunctive normal form, röviden DNF: Azt mondjuk, hogy logikai formula diszjunktív normál forma, akkor és csak akkor, ha egy vagy több klózt egymáshoz kötünk diszjunkcióval.

**1.15. Definíció.** Interpretáció: Adott ítéletváltozóknak egy véges sok, nem üres  $V$  halmaza. Azt mondjuk, hogy a  $J$  hozzárendelés az  $F$  formula egy interpretációja, akkor és csak akkor, ha  $F$  minden atomjához vagy az igaz, vagy a hamis értéket rendeljük, de csak az egyiket.

**1.16. Definíció.** Logikai törvény, más néven tautológia: Azt mondjuk, hogy az  $F$  formula logikai törvény, vagy tautológia, akkor és csak akkor, ha  $F$  minden interpretációjában igaz.

**1.17. Definíció.** Logikai ellentmondás, angolul contradiction, unsatisfiable, röviden UNSAT: Azt mondjuk, hogy az  $F$  formula logikai ellentmondás, akkor és csak akkor, ha  $F$  minden interpretációjában hamis.

**1.18. Definíció.** Kielégíthető, angolul satisfiable, röviden SAT: Azt mondjuk, hogy az  $F$  formula kielégíthető, akkor és csak akkor, ha  $F$  legalább egy interpretációjában igaz.

**1.19. Definíció.** Hamissá tehető, angolul falseable: Azt mondjuk, hogy az  $F$  formula hamissá tehető, akkor és csak akkor, ha  $F$  legalább egy interpretációjában hamis.

1.20. *Megjegyzés.* Kielégítő ellentéte a logikai ellentmondás, mivel ha valami nem kielégíthető, akkor abból következik, hogy logikai ellentmondás. Hamissá tehető ellentéte a logikai törvény, mivel ha valami nem hamissá tehető, akkor abból következik, hogy logikai törvény.

Igazság tábla: Oszloponként tartalmazza az összes atomot, ami a formulánkban van, és az utolsó oszlopban magát a formulát is. Soronként minden atomhoz értéket rendel, minden lehetséges sorrendben, és a formulába behelyettesítve kiszámítja a formula értékét. Az eredményét az utolsó oszlopból olvashatjuk ki.

Logikai törvény, tautológia: Ezek segítségével felírhatunk olyan formulákat, és igazság táblákat, amelyek minden lehetséges esetre igaz értéket adnak eredményül. Az eredményekből könnyebben átláthatjuk, ha tautológiát kapunk.

SAT probléma: A logikai kielégíthetőség egy olyan probléma, ami azt határozza meg, hogy létezik olyan interpretációja egy logikai formulának, ami kielégíti az adott logikai formulát.

SAT megoldó, angolul SAT solver: Hosszú, és bonyolult SAT problémák megoldására képes.

### 1.1.1. A tanáraink ajánlása

**1.21. Definíció.** Egy irányított gráf teljes, akkor és csak akkor, ha minden pár különálló csúcsokból össze van kötve egy pár egyedi éllel (eggyel minden irányba). Egy irányított gráf erősen összetett, vagy erősen irányított gráf, akkor és csak akkor, ha van út minden csúcsból minden más csúcsba. Vegyük figyelembe, hogy a teljes gráf egyben erős is. És azt is, hogy az erősen irányított gráf tartalmaz egy kört, ami tartalmaz minden csúcsot [SYNASC2020].

**1.22. Definíció.** Erősen összetett gráf, más néven erős gráf: Azt mondjuk, hogy egy gráf erős gráf, akkor és csak akkor, ha van út minden pár csúcs között.

**1.23. Definíció.** Erősen összetett komponens, angolul strongly connected component, röviden SCC: Azt mondjuk, hogy egy algráf erősen összetett komponens, akkor és csak akkor, ha egy irányított gráf maximális erősen összekötött algráfja.

**1.24. Definíció.** Fekete hozzárendelés, más néven fekete klóz: Azt mondjuk, hogy egy klóz fekete klóz, akkor és csak akkor, ha a gráf minden csúcsának negáltja megtalálható benne.

**1.25. Definíció.** Fehér hozzárendelés, más néven fehér klóz: Azt mondjuk, hogy egy klóz fehér klóz, akkor és csak akkor, ha a gráf minden csúcsa megtalálható benne.

## 1.2. WolframAlpha válasz motor

A Wolfram általános, több paradigmás programozási nyelv az alapja. Ami a hangsúlyt a szimbolikus számításra, a funkcionális programozásra, a szabályalapú programozásra helyezi, valamint képes tetszőleges struktúrákat és adatokat alkalmazni. Ezekre az

alapokra épül a WolframAlpha tudás számító és válasz motor. Képes közvetlenül válaszolni a tényszerű kérdésekre azáltal, hogy külső forrásból származó adatokból számítja ki a választ.

Mi arra tudjuk használni, hogy beviteli mezőbe logikai formulát adunk át neki. Válasznak vissza adja megformázva, amit beírtunk, annak igazság tábláját, normál formáit, logikai áramkörét, Venn diagrammját és az igazság sűrűségét.

Így könnyen leellenőrizhető, hogy a logikai formula amit beírtunk az tautológia-e. Ezt az igazságtábla utolsó oszlopából láthatjuk.

### 1.3. A Python programozási nyelvről

A Python egy magas-szintű programozási nyelv, ami a funkcionális, az objektumorientált, az imperatív és a procedurális programozási paradigmákat támogatja. Azaz egy olyan több paradigmás nyelv, ami függvényeket, eljárásokat, metódusokat, változókat, használ, ezekkel változtatja meg az állapotát. Bár dinamikusan típusos nyelv, mégis hibát dob a nem jól definiált műveletek használatára. Például nem lehet hozzá adni számot szöveghez viszont dinamikus, mert a változóknak csak nevük van, és ha véletlenül ugyan azzal a névvel egy másik típust akarunk használni, azt felül írja, és az utoljára értékül kapott típust használja. Fontos a szintaxisra nézve, hogy minden behúzás jelentős, mivel ezeket használja a kód részek csoportosítására. Hivatkozás, angolul reference számolást és kör észlelő szemétgyűjtés, angolul garbage collection (GC) amit alkalmaz a memória visszaigényléséhez. Széleskörű az alap könyvtár készlete, azaz sok importálható osztály van, amit más már megírt előttünk. Ez annak köszönhető, hogy nyújthatóvá tették modulokon keresztül az egész nyelvet. Ezen kívül dinamikus név meghatározást használ, ami a késői kötésnek, vagy lusta kiértékelésnek köszönhetően a program futása közben köti össze a neveket és a metódusokat. Funkcionális függvényei is vannak, mint a filter, map és reduce, implementálva vannak fejlett listák, angolul list comprehension, szótárak, halmazok, és generátor, valamint iterátor kifejezések. Két alap könyvtára van a functools és az itertools. Utóbbit én is használom a programomban, de ezen kívül még a gráfokhoz kidolgozott NetworkX és Pylab könyvtárakat is használom.



## 2. fejezet

# Kutatás

### 2.1. Amiből kiindultam

Egy élet úgy írunk le, hogy a csomópont, amiből kiindul az él, azt megjelöljük egy negatív literállal, amelyik csomópontba mutat az él, azt pedig egy pozitív literállal. Ezt egy klózban lehet tárolni.

Egy kört úgy írunk le, hogy minden csomópont, ami szerepel benne, azt egy negatív literállal jelöljük és egy klózbba írjuk, úgy hogy mindegyik csak egyszer szerepeljen. Amennyiben a körből kifelé mutat él, az összeset a klóz végére fűzzük.

Erős modell: A legegyszerűbb modell. Csak az éleket tartalmazza csomópont páronként. A végére illesztve a fekete és a fehér klózokat.

Balaton boglár modell: Az alap ötlete, hogy nem köröket ír le, hanem 3as csoportosításban a csomópontokat, amik közt van út. Ezzel csak annyi a baj, hogy ezzel még nem tudunk 3-SAT problémából irányított gráfot generálni.

Egyszerűsített Balatonboglár: Ha kevesebb klózból álló erősen összetett irányított gráfot készítünk, akkor egy fekete-fehér 3-SAT modellt kapunk.

Gyenge modell: Egy kört úgy írunk le benne, hogy az összes körben szereplő csomópontot megjelöljük egy negatív literállal, annak kilépési pontjait pedig pozitív literálként. Egy gyenge modellben az összes klózban legalább egy negatív és legalább egy pozitív literálnak kell lennie. Egy csomópont csak akkor van leírva a modellben, ha van kimenő él belőle. Egy kör csak akkor van leírva a modellben, ha van kilépési pontja [1].

TODO ezt még ki kell egészíteni, és a chapter tetejétől végig olvasni (rework needed) Ahogyan azt a szakdolgozati jelentkezésembe is beleírtam, a tanárom arra kért hogy a gráfok gyenge modelljét vizsgáljam, és azokkal dolgozzak. Munkám során azonban félre értettem pár dolgot, így a gyenge modelltől elkanyarodtam az erős felé, és ott értelmeztem egy összefoglalt lépés sorozatot. Ennek eredménye, hogy egy általánosított erős modell generáló szoftvert írtam. Lásd a 2.2. fejezetben.

Amit félre értettem, hogy én az SCC-eket írtam össze és azok kilépési pontjait tettem

bele egy klózba. A weak modell pedig úgy ír le egy kört, hogy a gráf teljes hosszú klóz halmazából éseli össze a klózoikat, oly módon, hogy leírja az éleket és a köröket. Tehát én egy SCC elemeit és kilépési pontjait néztem, a gyenge modellnél pedig a teljes hosszú klózoikat kell össze éselni

TODO példa: *teljes hosszú klóz halmaz* kiemelni a 6os 7es sort *kép* kiemelni az a-ból kimenő éleket *gyenge modellje* előtte leírni milyen körök vannak benne, utána leírni hogy a 6os és 7es klózo az eredeti halmazból adják a-nak a kimenő éleit [1, a 24. oldalon].

## 2.2. Kiterjesztett erős modell

Ezt úgy értem el, hogy ha egy irányított gráf több SCC-ből áll, akkor a neki megfelelő modell mindig kielégíthető, akkor is, ha hozzáadjuk a fekete és a fehér klózoikat. Ez a megállapítás független attól, hogy a gráf, melyik modelljét generáljuk le. Akkor is igaz, ha az erős, vagy ha a gyenge, vagy mondjuk a Balatonboglár modell segítségével generáljuk le a neki megfelelő SAT példányt.

Ennek az az oka, hogy az elmélet szerint akkor és csak akkor keletkezik irányított gráfból UNSAT példány, ha az irányított gráf egy SCC-ből áll, azaz összefüggő, és hozzáadjuk a modelljéhez a fekete és a fehér klózoikat.

Több esetet is vizsgáltam, amikor azt irányított gráf két SCC-ből áll. Ezeknek az erős modelljét elkészítettem kézzel, illetve programmal is és a WolframAlpha weboldalát használtam fel ezek vizsgálatára.

## 2.3. célja

## 3. fejezet

### Szoftver

#### 3.1. Amiből kiindultam

A munka, amihez én is hozz teszem a részemet, egy saját készítésű SAT megoldó a CSFLOCK-ról szól. Ez ugyan egy Java-ban írt program, amihez én is hozzá tudok tenni, hiszen a bemeneti formátum, amivel dolgozik, az egy .cnf fájl. Ilyen fájlokat generálnak a graph\_cnf\_GEN nevű programok. Ezek különböző verziókban készültek el, ahogyan előre haladtunk.

#### 3.2. Ahova eljutottam

# Összegzés

honnan hova jutottam, mi lett az eredmény. További fejlesztési lehetőségek

# Irodalomjegyzék

[ICAI2020, AM2020] ICAI2020, AM2020 - AGRIA MÉDIA: ...

[SYNASC2020] SYNASC2020 SUBMISSION 77 v20: ...

[1] SAT SOLVING 50:

# Nyilatkozat

Alulírott ....., büntetőjogi felelősségem tudatában kijelentem, hogy az általam benyújtott, ..... című szakdolgozat önálló szellemi termékem. Amennyiben mások munkáját felhasználtam, azokra megfelelően hivatkozom, beleértve a nyomtatott és az internetes forrásokat is.

Aláírással igazolom, hogy az elektronikusan feltöltött és a papíralapú szakdolgozatom formai és tartalmi szempontból mindenben megegyezik.

Eger, 2022. április 6.

aláírás