

Calculus (1)

Siwon Yun

March 5, 2025

앞으로 사용할 수학 표현

1.1 구간

1.1.1 정의

DEFINITION 1.1 (구간). 구간^{interval}. 단어에서 유추되는 바와 같이 특정 원소 사이를 말한다. -1 과 1 사이에는 무수히 많은 실수가 존재하는데, -1 과 1 사이의 ‘구간’은 이를 모두 망라하기에 구간은 하나의 집합이다. 구간의 집합은 대개 연속되고 값의 크기가 비교되는 특징을 지닌다. i.e., 순서를 가진다.

NOTE 1.1 (구간의 원소가 순서를 가지지 않는다면?). 예컨대 순서가 정의되지 아니한 복소수에서는 구간을 어떻게 표현할 수 있을까? $(3i, 5i)$ 와 같이 표현할 수 있을까? 이는 $3i$ 보다 크고 $5i$ 보다 작은 원소들의 집합을 의미해야 하는데, 복소수값은 대수 관계가 정의되지 아니하니 모순된다. 그러면 복소수 평면의 구간은 어떻게 표현할까? stackExchange에 등록된 질문^a에 따르면 복소수에서 구간은 다음과 같이 표현 가능하다:

$$[a, b] + [c, d]i \quad (1.1)$$

^a<https://math.stackexchange.com/questions/899077/is-there-an-interval-notation-for-complex-numbers>

1.1.2 구간의 종류

다음은 구간의 종류이다. 구간은 끝점의 포함 여부에 따라 분류된다.

NOTE 1.2 (구간의 종류). 구간의 종류를 아래와 같이 표로 정리하였다:










표현	조건 제시법	이름	diagram
(a, b)	$\{x : a < x < b\}$	열린 구간open interval, 개구간	
$[a, b]$	$\{x : a \leq x \leq b\}$	닫힌 구간closed interval, 폐구간	
$(a, b]$	$\{x : a < x \leq b\}$	반열린 구간half-open interval, 반개구간	
$[a, b)$	$\{x : a \leq x < b\}$	반열린 구간half-open interval, 반개구간	
(a, ∞)	$\{x : x > a\}$	열린 구간open interval	
$(-\infty, b)$	$\{x : x < b\}$	열린 구간open interval	
$[a, \infty)$	$\{x : x \geq a\}$	닫힌 구간closed interval	
$(-\infty, b]$	$\{x : x \leq b\}$	닫힌 구간closed interval	
$(-\infty, \infty)$	\mathbb{R}	실수 집합	

Table 1.1: 구간의 종류

일반적으로 수학에서 구간이라고 말하면 열린 구간을 나타냅니다.

— 교수님

표현

구간이 끝점을 포함하지 아니할 경우 ‘열린 구간’이라고 표현하며 기호 (와)로 표현한다. 반면 끝점을 포함하고 있을 경우 ‘닫힌 구간’이라고 표현하며 기호 [와]로 표현한다.

다이어그램

구간이 끝점을 포함하지 아니하는 경우 다이어그램으로 표시할 때 포함하는 끝점을 안이 비어있는 점으로 표시하고, 끝점을 포함할 경우 안을 칠한 점으로 표시한다.

NOTE 1.3 (구간에서의 무한대). 왜 (a, ∞) 등 한 끝점을 기준으로 하나의 방향으로 끝없이 연속되는 구간에서 ∞ 에 대하여 닫힌 구간으로 표현하지 않을까? ∞ 는 분명 하나의 숫자는 아니며 — 그 어떤 실수 하나를 선택하여도 이는 ∞ 보다 작은 수이다 — 순서 또한 정의되지 아니한다. 교수님은 수업 중 ∞ 는 하나의 ‘상태’라고 표현하였다. 닫힌 구간으로 표현하기 위해서는 구간의 끝 점이 구간에 포함되어야 하는데, 하나의 상태가 구간에 포함된다? 모순되고 어색하다.

1.2 집합의 표현

고등학교 1학년 수업시간, 수학 선생님께서 해당 표현들을 알려주셨다. 개인적으로 큰 감명을 받았는데, 알다가도 모르겠는 ‘실수’ 때문이었다: 1) ‘복소수가 아닌 수’라고 이해하기에는 정의가 아니라는 점. 2) 나머지, 예컨대 자연수와 유리수 등은 모두 실수에 조건을 주어 생성할 수 있다는 점. 그런데 실수 집합을 하나의 표현 \mathbb{R} 으로 나타내니 세상 고민 사라졌다.

NOTE 1.4 (집합의 표현). 집합은 다음과 같이 표현된다:

표현	의미
\mathbb{N}	자연수 집합
\mathbb{Z}	정수 집합
\mathbb{Q}	유리수 집합
\mathbb{R}	실수 집합
\mathbb{C}	복소수 집합

Table 1.2: 집합의 표현

- \mathbb{N} : Natural number
- \mathbb{Z} : Integer - I는 수학에서 많이 사용되는 문자이기에 — 구간 또한 문자 I 로 표현하는 경우가 허다하다 — number를 뜻하는 독일어 ‘Zahlen’의 앞 글자를 따 \mathbb{Z} 로 표현한다고 한다.
- \mathbb{Q} : Quotient
- \mathbb{R} : Real number
- \mathbb{C} : Complex number

해당 집합들은 실수 집합을 통해 정의 가능하다.

DEFINITION 1.2. • $\mathbb{N} : \{x : x > 0, x \in \mathbb{Z}\}$

- $\mathbb{Z} : \{x : x \bmod 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{Q} : \{x : x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{C} : \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

정의에 따라 다음과 같은 포함 관계가 성립한다: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1.3 양화사

함수를 만족하기 위해서는 하나의 x 값에 대하여 하나의 함숫값을 가져야 한다. 여기서, $x = 314$, $x = 421$ 등 특별한 x 값에 대하여만 해당 조건이 만족하면 아니되고, 모든 x 값에 대하여 만족하여야 한다. 이를 함수 $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : (f(x_1) = f(x_2)) \implies (x_1 = x_2) \quad (1.2)$$

여기서 \forall 는 전체 양화사라고 불리운다.

DEFINITION 1.3 (양화사). 양화사^{quantifier}는 명제의 진위를 판단하는 데 사용되는 수식어이다. 양화사는 모든^{for all}과 어떤^{there exists}이 있다.

양화사	의미
\forall	모든
\exists	어떤

Table 1.3: 전체 양화사와 존재 양화사

\forall 은 All의 앞자인 A를 뒤집어 쓴 것이며, \exists 는 존재의 앞자인 E를 뒤집어 쓴 것이다. 뒤집은 이유가 무엇인지 궁금하지만 기호를 처음 만든 사람이 문자와 구분되지만 의미를 쉽게 파악하기 위해 뒤집었다고 생각하고 넘어가겠다. (검색해도 이유를 잘 모르겠음)

이를 포함해 수학 문헌에서 다음과 같은 표현이 많이 사용된다.

1.3.1 모든

- for all, for every
- for any, for arbitrary
- for each

1.3.2 존재

- there exists, at least one
- there is

INDEX

-mar 4, [2](#)

구간, [2](#)

복소수 집합, [4](#)

양화사, [4](#)

유리수 집합, [4](#)

자연수 집합, [4](#)

전체 양화사, [5](#)

정수 집합, [4](#)

존재 양화사, [5](#)