0.1 구간

0.1.1 정의

DEFINITION 0.1 (구간)**.** 구간[interval]. 단어에서 유추되는 바와 같이 특정 원소 사이를 말한다. -1과 1 사이에는 무수히 많은 실수가 존재하는데, -1과 1 사이의 '구간'은 이를 모두 망라하기에 구간은 하나의 집합이다. 구간의 집합은 대개 연속되고 값의 크기가 비교되는 특징을 지닌다. i.e., 순서를 가진다.

NOTE 0.1 (구간의 원소가 순서를 가지지 않는다면?)**.** 예컨대 순서가 정의되지 아니한 복소수에서는 구간을 어떻게 표현할 수 있을까? $(3i, 5i)$와 같이 표현할 수 있을까? 이는 $3i$ 보다 크고 $5i$ 보다 작은 원소들의 집합을 의미해야 하는데, 복소수값은 대수 관계가 정의되지 아니하니 모순된다. 그러면 복소수 평면의 구간은 어떻게 표현할까? stackExchange에 등록된 질문[a]에 따르면 복소수에서 구간은 다음과 같이 표현 가능하다:

$$[a, b] + [c, d]i \tag{1}$$

[a] https://math.stackexchange.com/questions/899077/is-there-an-interval-notation-for-complex-numbers

0.1.2 구간의 종류

다음은 구간의 종류이다. 구간은 끝점의 포함 여부에 따라 분류된다.

NOTE 0.2 (구간의 종류)**.** 구간의 종류를 아래와 같이 표로 정리하였다:

표현	조건 제시법	이름	diagram
(a, b)	$\{x : a < x < b\}$	열린 구간[open interval, 개구간]	
$[a, b]$	$\{x : a \leq x \leq b\}$	닫힌 구간[closed interval, 폐구간]	
$(a, b]$	$\{x : a < x \leq b\}$	반열린 구간[half-open interval, 반개구간]	
$[a, b)$	$\{x : a \leq x < b\}$	반열린 구간[half-open interval, 반개구간]	
(a, ∞)	$\{x : x > a\}$	열린 구간[open interval]	
(∞, b)	$\{x : x < b\}$	열린 구간[open interval]	
$[a, \infty)$	$\{x : x \leq a\}$	닫힌 구간[closed interval]	
$(-\infty, b]$	$\{x : x \geq b\}$	닫힌 구간[closed interval]	
$(-\infty, \infty]$	$\mathbb{R}$	실수 집합	

Table 1: 구간의 종류

일반적으로 수학에서 구간이라고 말하면 열린 구간을 나타냅니다.

— 교수님

표현

구간이 끝점을 포함하지 아니할 경우 '열린 구간'이라고 표현하며 기호 (와)로 표현한다. 반면 끝점을 포함하고 있을 경우 '닫힌 구간'이라고 표현하며 기호 [와]로 표현한다.

다이어그램

구간이 끝점을 포함하지 아니하는 경우 다이어그램으로 표시할 때 포함하는 끝점을 안이 비어있는 점으로 표시하고, 끝점을 포함할 경우 안을 칠한 점으로 표시한다.

> **NOTE 0.3** (구간에서의 무한대)**.** 왜 (a, ∞) 등 한 끝점을 기준으로 하나의 방향으로 끝없이 연속되는 구간에서 ∞에 대하여 닫힌 구간으로 표현하지 않을까? ∞는 분명 하나의 숫자는 아니며 — 그 어떤 실수 하나를 선택하여도 이는 ∞보다 작은 수이다 — 순서 또한 정의되지 아니한다. 교수님은 수업 중 ∞는 하나의 '상태'라고 표현하였다. 닫힌 구간으로 표현하기 위해서는 구간의 끝 점이 구간에 포함되어야 하는데, 하나의 상태가 구간에 포함된다? 모순되고 어색하다.

0.2 집합의 표현

고등학교 1학년 수업시간, 수학 선생님께서 해당 표현들을 알려주셨다. 개인적으로 큰 감명을 받았는데, 알다가도 모르겠는 '실수' 때문이었다: 1) '복소수가 아닌 수'라고 이해하기에는 정의가 아니라는 점. 2) 나머지, 예컨대 자연수와 유리수 등은 모두 실수에 조건을 주어 생성할 수 있다는 점. 그런데 실수 집합을 하나의 표현 $\mathbb{R}$으로 나타내니 세상 고민 사라졌다.

> **NOTE 0.4** (집합의 표현)**.** 집합은 다음과 같이 표현된다:
>
> | 표현 | 의미 |
> |---|---|
> | $\mathbb{N}$ | 자연수 집합 |
> | $\mathbb{Z}$ | 정수 집합 |
> | $\mathbb{Q}$ | 유리수 집합 |
> | $\mathbb{R}$ | 실수 집합 |
> | $\mathbb{C}$ | 복소수 집합 |
>
> Table 2: 집합의 표현

- $\mathbb{N}$: Natural number
- $\mathbb{Z}$: Integer - I는 수학에서 많이 사용되는 문자이기에 — 구간 또한 문자 I로 표현하는 경우가 허다하다 — number를 뜻하는 독일어 'Zahlen'의 앞 글자를 따 $\mathbb{Z}$로 표현한다고 한다.
- $\mathbb{Q}$: Quotient
- $\mathbb{R}$: Real number
- $\mathbb{C}$: Complex number

해당 집합들은 실수 집합을 통해 정의 가능하다.

DEFINITION 0.2.
- $\mathbb{N}$: $\{x : x > 0,\ x \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{Z}$: $\{x : x \mod 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{Q}$: $\{x : x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{C}$: $\{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

정의에 따라 다음과 같은 포함 관계가 성립한다: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

0.3 양화사

함수를 만족하기 위해서는 하나의 x값에 대하여 하나의 함숫값을 가져야 한다. 여기서, $x = 314$, $x = 421$ 등 특별한 x 값에 대하여만 해당 조건이 만족하면 아니되고, 모든 x 값에 대하여 만족하여야 한다. 이를 함수 $f(x) : \mathbb{R} - > RR$에 대하여 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : (f(x_1) = f(x_2)) \implies (x_1 = x_2) \tag{2}$$

여기서 $\forall$는 전체 양화사라고 불리운다.

DEFINITION 0.3 (양화사). 양화사$^{\text{quantifier}}$는 명제의 진위를 판단하는 데 사용되는 수식어이다. 양화사는 모든$^{\text{for all}}$과 어떤$^{\text{there exists}}$이 있다.

양화사	의미
$\forall$	모든
$\exists$	어떤

Table 3: 전체 양화사와 존재 양화사

$\forall$은 All의 앞자인 A를 뒤집어 쓴 것이며, $\exists$는 존재의 앞자인 E를 뒤집어 쓴 것이다. 뒤집은 이유가 무엇인지 궁금하지만 기호를 처음 만든 사람이 문자와 구분되지만 의미를 쉽게 파악하기 위해 뒤집었다고 생각하고 넘어가겠다. (검색해도 이유를 잘 모르겠음)

이를 포함해 수학 문헌에서 다음과 같은 표현이 많이 사용된다.

0.3.1 모든

- for all, for every
- for any, for arbitrary
- for each

0.3.2 존재

- there exists, at least one
- there is

Index