Book: Mathematics of Quantum Computing

Siwon Yun

February 26, 2025

Contents

Theme 1
들어가며

1.1 소개

본 노트는 Wolfgang Scherer의 양자 컴퓨팅 개념서 Mathemathics of Quantum Computing[1]를 자습하며 작성한 노트입니다. 가능한 수학적인 — 사소하거나, 책에서 독자가 알고 있으리라 믿는 것을 포함한 — '모든' 부분을 정리하는 것을 목표하며, 수학적 명확함을 중시하는 본 책의 내용 이외에도 추가적인 내용을 포함할 수 있습니다.

1.2 구성

본 노트에서 Chapter, Section 등의 순서는 본 책의 구성과 일치합니다. 다만, 본 Chapter: 들어가며는 '양자 컴퓨팅의 역사'와 '책에 대한 활용법 및 중의사항'을 다루고 있으며, 본 노트에서는 생략합니다.

THEME 2

양자역학의 기본 개념

2.1 일반론

DEFINITION 2.1 (양자역학)**.** 양자역학은 (전자, 양성자, 원자 등) 미세한 물체의 통계를 예측해 때때로 거시적 현상에 미치는 영향을 파악하는 이론이다.

이러한 미세한 물체에 대하여 특정 물리량을 관측$^{\text{measurment}}$할 수 있으며, 그 관측값은 실수여야 한다고 한다.

NOTE 2.1. 왜 실수여야 할까? 디렉 표기법$^{\text{Dirac notation}}$을 통해 양자 상태를 표현하면, 복소수를 사용하게 된다. 얼핏 생각하면 복소수를 다루는 분야에서 관측값은 실수여야 한다는 제약이 모순되어 보일 수 있지만, '대소 관계가 정의되지 아니한 복소수'의 값이 물리'량'이 된다면 이 또한 모순일 것이다. 또 한편으로는 관측이 양자역학에서는 중첩 상태를 붕괴시킨다는 점을 고려하면 복소수의 상태가 실수의 값으로 투영되는 것은 마치 중첩 붕괴와 같이 느껴진다.

추후, 관측과 관련된 에르미트 연산자$^{\text{Hermitian operator}}$에 대해 다루는데 에르미트 연산자 A는 다음을 만족한다.

$$\langle A^*\psi|\phi\rangle = \langle\psi|A\phi\rangle \quad \forall|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H} \tag{2.1}$$

$|\psi\rangle$와 $|\phi\rangle$가 힐베르트 공간에 속하므로 에르미트 연산자 A의 고윳값 λ에 대하여 다음을 만족한다.

$$\langle\lambda\psi|\phi\rangle = \langle\psi|\lambda\phi\rangle \tag{2.2}$$

$$\lambda\langle\psi|\phi\rangle = \overline{\lambda}\langle\psi|\phi\rangle \tag{2.3}$$

$$\lambda = \overline{\lambda} \tag{2.4}$$

(2.4)에서 λ가 실수임을 알 수 있다. 이러한 에르미트 연산자는 양자역학에서 관측값을 나타내는데 사용된다.

동일하게 준비된 대상의 관측은 결괏값이 상대빈도$^{\text{relative frequency}}$를 가진다. 상대빈도를 토해 평균값$^{\text{mean value}}$을 계산할 수 있다.

DEFINITION 2.2 (상대빈도).

$$\text{상대빈도} := \frac{(\text{특정 결과의 관측 횟수})}{(\text{전체 관측 횟수})} \tag{2.5}$$

DEFINITION 2.3 (평균값).

$$\text{평균값} := \sum_{a \in (\text{모든 관측값})} a \times (\text{a의 상대빈도}) \tag{2.6}$$

양자역학에서는 '준비 → 관측 → 상대빈도 및 평균값 계산'의 과정을 거친다. 이 과정에 대한 개념을 정리하면 다음과 같다.

NOTE 2.2. 양자역학에서의 주요 개념

- 관측 가능량observable : 관측 가능한 물리량
- 확률probability : 상대빈도에 대한 예측
- 기대값expectation value : 관측값의 평균값에 대한 예측
- 상태state : 관측 결과의 분포와 관측 가능략의 평균값을 결정하는 통계적 앙상블을 생성하는 객체의 준비

2.2 수학 개념: 힐베르트 공간과 연산자

DEFINITION 2.4 (힐베르트 공간). 다음을 만족하는 벡터 공간 $\mathcal{H}$을 힐베르트 공간이라 한다.

Theme 3

Hello, World!

나는 젤리가 없어도 달콤한 냄새가 나

—ㅇㅊㅈ

Theme 4
HUHA

나는 이 세상의 왕이야!
내가 운동하면 우아해 보일거야?

Appendices

Theme A

Appendix

Bibliography

[1] Wolfgang Scherer. *Mathematics of quantum computing: An introduction.* Springer International Publishing AG, 2020.

* All charts, graphs and figures created by Siwon Yun unless otherwise noted.

INDEX