



مدرس‌ان شریف

فصل اول

« مدارهای مغناطیسی »

مقدمه

از زمان‌های بسیار قدیم، بشر با آهن‌رباهای طبیعی آشنا بوده و نیروهای جاذبه و دافعه بین قطعات مختلف این آهن‌رباها و نیز بین آنها و سایر قطعات آهنی را می‌شناخته است. اما تا حدود ۲۰۰ سال پیش تحلیل صحیح و دقیقی از رفتار اجسام مغناطیسی ارائه نشده بود و به همین دلیل از این پدیده استفاده چندانی نمی‌شد. در سال ۱۸۱۹ میلادی یک دانشمند دانمارکی بنام اورستد متوجه شد هنگام عبور جریان الکتریکی از یک سیم که در مجاورت یک قطب‌نما قرار دارد عقربه قطب‌نما (که جنس آن آهن‌ربای طبیعی است) منحرف می‌شود. این تجربه نشان داد که جریان الکتریکی نیز مانند آهن‌ربای طبیعی در اطراف خود یک میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند که شدت آن بستگی به شدت جریان سیم دارد. پس از کشف اورستد در سال‌های بعد دانشمندانی نظیر فاراده، لنز، لورنس و ... به مرور، قوانین مغناطیسی را کامل نمودند. این قوانین امروزه در تحلیل و طراحی اکثر سیستم‌هایی که به نوعی با مغناطیس سروکار دارند مانند ماشین‌های الکتریکی، مخابرات، مهندسی پزشکی، مهندسی هوا و فضا و ... به کار می‌روند. لذا در این قسمت با مروری بر تعاریف مقدماتی کمیت‌های مغناطیسی، روش‌های تحلیل و بکارگیری میدان‌های مغناطیسی بیان می‌شود.

تعاریف مقدماتی

(۱) **شار یا فوران مغناطیسی (Φ):** مجموعه خطوط مغناطیسی که از سطحی محدود می‌گذرد شار یا فوران مغناطیسی نام دارد که واحد آن در سیستم SI ولت ثانیه (V.S) یا وبر (Wb) است. فوران مغناطیسی شبیه جریان در مدار الکتریکی است یعنی همانطور که جریان نمی‌تواند مسیر ناپیوسته (یا باز) داشته باشد فوران نیز نمی‌تواند مسیری ناپیوسته یا باز داشته باشد.

(۲) **چگالی فوران مغناطیسی یا اندکسیون مغناطیسی (B):** میزان شار در واحد سطح، چگالی فوران نام داشته و واحد آن در سیستم SI تسلا (T) یا وبر بر متر مربع ($\frac{Wb}{m^2}$) است. فوران کل خارج شده از یک سطح برابر $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ بوده و چنانچه B بر سطح A عمود باشد داریم:

$$\Phi = B.A \Rightarrow B = \frac{\Phi}{A}$$

(۳) **نیروی محرکه مغناطیسی (MMF : Magnetic Motive Force):** به نیروی مغناطیسی که سبب تولید شار در مدارهای مغناطیسی می‌شود نیروی محرکه مغناطیسی می‌گویند و واحد آن آمپر دور (A یا A.T) است. (به عبارتی منبع تولید شار نیروی محرکه مغناطیسی است) نیروی محرکه مغناطیسی را با θ نشان داده و در یک سیم پیچ حامل جریان از حاصلضرب جریان سیم‌پیچی در تعداد دور سیم‌پیچی بدست می‌آید. یعنی:

$$MMF = \theta = N.I$$

(۴) **شدت میدان مغناطیسی (H):** چنانچه در جسمی به طول متوسط L_c ، آمپر دور یا نیروی محرکه مغناطیسی برابر $\theta (= N.I)$ موجود باشد به نسبت این نیرو به طول متوسط جسم، شدت میدان مغناطیسی در آن جسم گویند. شدت میدان مغناطیسی در هر نقطه داخل میدان مغناطیسی از نظر عددی برابر با نیرویی است که از طرف قطب شمال (N) فورانی معادل ۱ Wb در آن نقطه ایجاد می‌کند. واحد شدت میدان مغناطیسی در سیستم SI

نیوتن بر وبر ($\frac{N}{Wb}$) یا آمپر دور بر متر ($\frac{A}{m}$) است.



با استفاده از قانون مداری آمپر می‌توان شدت میدان مغناطیسی در یک جسم مغناطیسی به طول متوسط L_c را از رابطه زیر بدست آورد:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}_c = NI \Rightarrow H \cdot L_c = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{L_c}$$

(۵) ضریب نفوذ مغناطیسی مطلق (μ) و ضریب نفوذ مغناطیسی نسبی (μ_r): اگر یک ماده مغناطیسی مثلاً یک میله آهنی را در داخل میدان

یکنواختی به شدت H قرار دهیم (مثلاً میله مزبور را داخل یک سیم‌پیچی قرار دهیم) چگالی شار B در میله ایجاد می‌شود که در آن ارتباط بین H و B

به وسیله ضریبی به نام μ انجام گرفته و به آن ضریب نفوذ مغناطیسی مطلق میله یا ماده گویند به طوری که:

$$\mu = \frac{B}{H}$$

اگر میدان در خلاء ایجاد شده باشد یعنی به جای هسته آهنی فوق‌الذکر اطراف و داخل سیم‌بندی خلاء ایجاد گردد ضریب نفوذ آن محیط مقدار ثابتی

برابر $4\pi \times 10^{-7}$ وبر بر آمپر دور در متر $\left(\frac{Wb}{A \cdot m}\right)$ می‌باشد و آن را با μ_0 نشان داده و به آن ضریب نفوذ مغناطیسی مطلق خلاء گویند. ضریب نفوذ مغناطیسی

کلیه مواد را نسبت به خلاء سنجیده و به آن ضریب نفوذ مغناطیسی نسبی جسم گویند و آن را با μ_r نشان می‌دهند یعنی:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad \text{یا} \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

لازم به ذکر است که ضریب نفوذ مغناطیسی مطلق بر حسب $\frac{Wb}{A \cdot m}$ یا $\frac{H}{m}$ (هانری بر متر) سنجیده شده و ضریب نفوذ مغناطیسی نسبی بدون واحد است.

(واضح است که μ_r برای خود خلاء همواره برابر یک است).

(۶) مقاومت مغناطیسی یا رلوکتانس (R_m): میزان مقاومتی که یک جسم در مقابل عبور شار مغناطیسی از خود نشان می‌دهد مقاومت مغناطیسی نام

دارد و واحد آن آمپر دور بر وبر $\left(\frac{A}{Wb}\right)$ بوده و چنانچه توزیع میدان مغناطیسی در آن جسم یکنواخت باشد (یعنی از هر جزء از سطح مقطع این ماده تعداد

خطوط شار یکسانی عبور نماید) از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$R_m = \frac{L_c}{\mu A}$$

در این رابطه A سطح مقطع جسم مورد نظر بر حسب متر مربع (m^2) و μ ضریب نفوذ مغناطیسی مطلق ماده مورد نظر بر حسب هانری بر متر $\left(\frac{H}{m}\right)$

و L_c نیز طول متوسط ماده مورد نظر بر حسب متر (m) است.

❗ **تذکره:** در ارتباط با تعاریف فوق باید به موارد زیر دقت نمود:

$$1 Wb = 10^8 \text{ Maxwells} = 10^8 \text{ Lines}$$

• واحدهای دیگر شار، ماکسول و خط است به طوری که:

• از آنجائیکه واحد تسلا (T) بسیار بزرگ می‌باشد در بعضی از موارد چگالی شار بر حسب واحد کوچکتری به نام گوس (G) نیز سنجیده می‌شود

$$1 T = 1 \frac{Wb}{m^2} = 10^4 G$$

به طوری که:

• همانطوری که در مدارهای الکتریکی بدون وجود نیروی محرکه الکتریکی (EMF : Electro Motive Force) جریان برقرار نمی‌شود در

مدارهای مغناطیسی نیز بدون وجود MMF فوران جاری نمی‌شود (به جز موارد خاص مانند آهنربای دائمی).

• مقدار μ و μ_r در یک ماده مغناطیسی ثابت نبوده و بستگی به شدت میدان و چگالی میدان (نقطه کار) موجود در ماده دارد به طوری که با

افزایش مقدار H (یا B) مقدار μ_r ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. (البته اگر رفتار ماده مغناطیسی خطی باشد مقدار μ و μ_r نسبت به

تغییرات B و H ثابت بوده و تغییر نمی‌کنند)

• از میان کمیت‌های مغناطیسی فوق‌الذکر شدت میدان مغناطیسی و نیروی محرکه مغناطیسی مستقل از جنس هسته بوده و باقی کمیات

وابسته به جنس هسته می‌باشد.

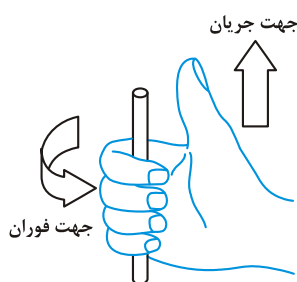
• ضریب نفوذ مغناطیسی مطلق (μ) و ضریب نفوذ مغناطیسی نسبی (μ_r) برای هوا نیز تقریباً برابر اعداد مربوط به خلاء می‌باشند.

تعیین جهت شار در مدارات مغناطیسی

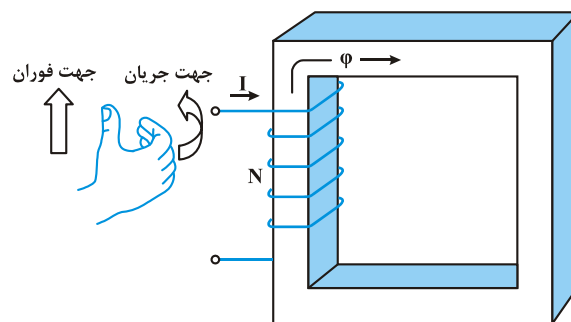
برای تعیین جهت شار در مدارات مغناطیسی از قانون دست راست استفاده می‌شود این قانون را می‌توان به دو صورت زیر در سیم‌پیچ‌ها و سیم‌های راست به کار برد:

(۱) در سیم‌پیچ‌ها: در سیم‌پیچ‌ها اگر چهار انگشت نیمه بسته دست راست جهت جریان درون سیم‌پیچ را نشان دهد، شست دست راست جهت شار تولیدی را نشان می‌دهد. این قانون در شکل «الف-۱» آمده است.

(۲) در سیم‌های راست: در سیم‌های راست اگر شست دست راست جهت جریان عبوری از سیم را نشان دهد، چهار انگشت نیمه بسته این دست، جهت فوران ایجاد شده در اطراف سیم را نشان می‌دهد. این قانون در شکل «الف-۲» آمده است.



(ب) قانون دست راست در سیم‌ها



(الف) قانون دست راست در سیم‌پیچ‌ها

«شکل ۱: قانون دست راست»

دسته‌بندی مواد بر اساس قابلیت نفوذ مغناطیسی نسبی

(۱) مواد مغناطیسی طبیعی (فرومغناطیسی): موادی هستند که در آنها μ_r بسیار بزرگتر از عدد یک است (حوالی چند هزار) مانند: کبالت، آهن، فولاد، نیکل و آلیاژهای آن، فریت نرم و ... مثلاً برای فریت نرم $\mu_r = 10000$ است.

(۲) مواد غیرمغناطیسی (پارامغناطیسی): موادی هستند که در آنها μ_r کمی بزرگتر از عدد یک (حداکثر تا ۴ یا ۵) است مانند هوا، اکسیژن، پلاتین، آلومینیوم و ... مثلاً برای هوا $\mu_r = 1/0000004$ است.

(۳) مواد ضدمغناطیسی (دایامغناطیسی): موادی هستند که در آنها μ_r کمی کوچکتر از عدد یک است مانند: جیوه، نقره، قلع، آب و ... مثلاً برای آب $\mu_r = 0/899991$ است.

🌟 **تذکره ۲:** در ارتباط با انواع مواد از نظر مغناطیسی باید توجه نمود که:

- مواد فرومغناطیسی خود به دو دسته مواد سخت مغناطیسی و مواد نرم مغناطیسی تقسیم می‌شوند. در مواد سخت مغناطیسی خاصیت مغناطیسی (یا همان چگالی میدان یا B) برای مدتی حفظ می‌شود ولی در مواد نرم مغناطیسی بعد از جدا شدن از حوزه مغناطیسی (صفر شدن H) خاصیت مغناطیسی نیز از بین می‌رود.
- با استفاده از روشی به نام نورد سرد جهت‌دار می‌توان با جهت‌دار نمودن کریستال‌های برخی از مواد فرومغناطیسی (مخصوصاً فولاد سیلیکون‌دار) ضریب نفوذ مغناطیسی این مواد را هنگامی که فوران در راستای طول ورق جاری می‌شود شدیداً افزایش داد (به اینگونه ورق‌ها CRGOs گویند)
- هنگامی که مواد فرومغناطیسی در معرض نیروی محرکه مغناطیسی قرار می‌گیرند تغییرات کوچکی (در حدود 10^{-5} متر) در طول آن‌ها ایجاد می‌شود. اگر نیروی محرکه مغناطیسی مورد بحث متناوب باشد تغییرات طول به صورت رفت و برگشتی (بزرگ و کوچک شدن) بوده لذا علاوه بر ایجاد تلفات انرژی موجب افزایش تنش مکانیکی و تولید نویز صوتی (صدای ویز ویز) نیز می‌گردد.
- مقدار ضریب نفوذ مغناطیسی نسبی مواد پارامغناطیسی و دایامغناطیسی مستقل از میزان شدت میدان (یا نیروی محرکه مغناطیسی) است در صورتی که ضریب نفوذ مغناطیسی مواد فرومغناطیسی وابسته به شدت میدان است.
- در بعضی از موارد جهت جلوگیری از تنوع زیاد، مواد را به دو دسته مغناطیسی (فرومغناطیسی) با μ_r بسیار بزرگتر از عدد یک و غیرمغناطیسی (پارا و دایامغناطیسی) با $\mu_r \approx 1$ تقسیم‌بندی می‌کنند.

رابطه بین شدت میدان و چگالی میدان مغناطیسی

همانطور که بیان شد چنانچه \vec{B} چگالی میدان مغناطیسی و \vec{H} شدت میدان مغناطیسی باشد داریم:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad , \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

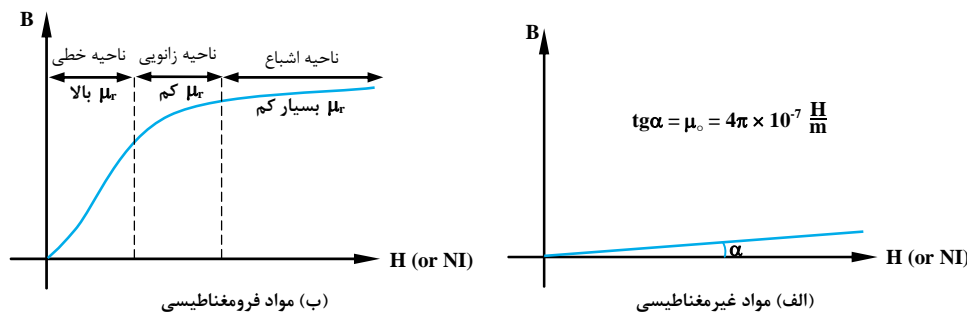
از رابطه فوق نتایج زیر حاصل می‌شود:

(۱) در مواد پارامغناطیسی و دایامغناطیسی: در این گونه مواد $\mu_r \approx 1$ بوده و مقدار آن همواره ثابت است، لذا:

$$\mu_r \approx 1 \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = 4\pi \times 10^{-7} \vec{H}$$

پس می‌توان منحنی $B-H$ را برای اینگونه مواد به صورت شکل «۲-الف» رسم نمود.

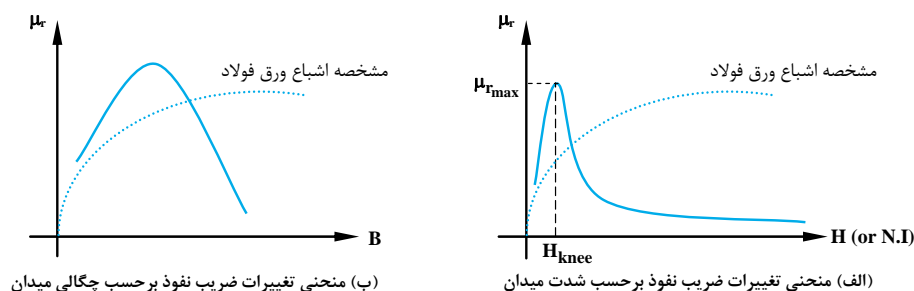
(۲) در مواد فرومغناطیسی: در این گونه مواد $\mu_r \gg 1$ بوده و مقدار آن بسته به اندازه B و H متغیر است یعنی $\mu_r = f(B, H)$ می‌باشد. لذا می‌توان منحنی $B-H$ را برای این گونه مواد به صورت شکل «۲-ب» رسم نمود.



«شکل ۲. مشخصه مغناطیسی مواد»

نکته ۱: در خصوص مشخصه B بر حسب H باید به نکات زیر دقت نمود:

- طبق شکل «۲-الف» به علت کم بودن شیب مشخصه $B-H$ در مواد پارا و دایامغناطیسی چگالی میدان تولیدی اینگونه از مواد بسیار کمتر از مواد فرومغناطیسی است که این امر در بسیاری از موارد ضعف این مواد محسوب می‌شود. در عین حال می‌توان ذکر کرد که عمده‌ترین مزیت مواد پارا و دایامغناطیسی عدم اشباع در آنها بوده و این مواد از نظر مغناطیسی دارای رفتار خطی می‌باشند یعنی مشخصه $B-H$ آنها همواره خط راستی است که از مبدأ می‌گذرد.
- برای معرفی رفتار مغناطیسی مواد فرومغناطیسی بعضاً به جای منحنی $B-H$ رابطه بین B و H به صورت یک تابع هموگرافیک نظیر $B = \frac{aH}{bH+c}$ یا به صورت یک تابع نمایی یا رادیکالی نظیر $B = a + b\sqrt{H}$ و یا به صورت سایر توابع مناسب داده شود. که در این صورت با جایگذاری مقادیر مختلف برای H مقادیر متناظر برای B بدست می‌آید.
- در حالت کلی مواد فرومغناطیسی دارای رفتاری غیرخطی می‌باشند اما در بعضی از مسائل به منظور ساده‌سازی، رفتار این مواد خطی در نظر گرفته می‌شود. در این حالت μ_r برای این مواد یک عدد ثابت و یا بی‌نهایت معرفی می‌گردد.
- در مواد فرومغناطیسی با منحنی اشباع شکل «۲-ب» با افزایش H یا B ضریب نفوذ مغناطیسی ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد مثلاً برای ورق فولاد می‌توان منحنی « $\mu_r - H$ » را به صورت شکل «۳-الف» و منحنی « $\mu_r - B$ » را به صورت شکل «۳-ب» رسم نمود. (طبق شکل «۳-الف» حداکثر مقدار μ_r در مواد فرومغناطیسی در آستانه ناحیه زانویی (Knee) ایجاد می‌شود.)



«شکل ۳. منحنی تغییرات ضریب نفوذ مغناطیسی نسبی نسبت به تغییرات H و B »



🔹 **توجه:** به طور کلی اگر در ماده‌ای ضریب نفوذ مغناطیسی (μ یا μ_r) عددی ثابت و مشخص باشد آن ماده دارای رفتار مغناطیسی خطی خواهد بود. اگر ضریب نفوذ مغناطیسی ماده‌ای بی‌نهایت باشد ضمن اینکه ماده دارای رفتار خطی است، ایده‌آل نیز می‌باشد. (گرچه خطی بودن در چنین شرایطی مهم نیست) بارزترین ویژگی چنین موادی صفر بودن مقاومت مغناطیسی آنها است که خود سبب صفر شدن افت پتانسیل مغناطیسی و صفر شدن انرژی ذخیره شده در آن ماده می‌گردد.

فریت‌ها (*)

فریت مخلوطی از اکسیدهای آهن و دیگر فلزات است. این ماده رابطه نزدیکی با مواد فرومغناطیسی دارد ولی به دلیل اختلاف در وضعیت مغناطیسی، آنها را مواد فری مغناطیسی می‌نامند. فریت مقاومت الکتریکی بسیار بالایی (حدوداً 10^6 برابر سایر فلزات) دارد لذا جریان فوکو در آن صفر است پس به دلیل بالا بودن مقاومت الکتریکی این هسته نیازی به ورقه ورقه شدن ندارد. (درخصوص تلفات فوکو در قسمت‌های بعدی صحبت می‌گردد)

مواد خام فریت ارزان و مواد ساخته شده آن از هر آلیاژی سبک‌تر است اما به علت وجود اکسیژن غیرمغناطیسی در آن این ماده نمی‌تواند به اندازه مواد فرومغناطیسی خاصیت مغناطیسی بالایی داشته باشد، مثلاً اگر حداکثر چگالی میدان مغناطیسی در آهن $2/18$ تسلا باشد در فریت حدود $0/3$ تا $0/5$ تسلا است. به عبارت دیگر اشباع در فریت زودتر رخ می‌دهد که این مسئله کاربرد آن را محدود می‌سازد. (زیرا در یک فرکانس مشخص، استفاده از هسته فریتی سبب بزرگ شدن ابعاد ماشین می‌گردد)

تأثیر دما و فرکانس روی مواد مغناطیسی (*)

با افزایش فرکانس و ازدیاد درجه حرارت ضریب نفوذ مغناطیسی کاهش می‌یابد. به طوری که با افزایش بیش از حد دما، اجسام فرومغناطیسی به نقطه‌ای موسوم به نقطه Curie می‌رسند که خواص مغناطیسی خود را از دست می‌دهند. درجه حرارت Curie برای آهن 770°C و برای نیکل 348°C است. در عمل چون ماشین‌های الکتریکی در وضعیت عادی زیر 150°C کار می‌کنند لذا هیچوقت به نقطه Curie نمی‌رسند. درجه حرارتی که خاصیت مغناطیسی فریت از بین می‌رود درجه حرارت نیل نام دارد که برای فریت‌های معمولی بین 250°C تا 500°C است.

مقایسه کمیات مغناطیسی و الکتریکی (*)

با توجه به یکسان بودن اکثر قوانین موجود در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی می‌توان بین کمیات‌های مغناطیسی و الکتریکی وجوه مشترکی به صورت جدول «۱» پیدا کرد.

«جدول ۱. تشابه کمیات‌های مغناطیسی و الکتریکی»

«کمیات‌های مغناطیسی»				«کمیات‌های الکتریکی»			
نام کمیت	حروف مشخصه	واحد	رابطه	نام کمیت	حروف مشخصه	واحد	رابطه
شار مغناطیسی	Φ	Wb	$\int \vec{B} \cdot d\vec{A}$	جریان الکتریکی	I	A	$\int \vec{J} \cdot d\vec{A}$
نیروی محرکه مغناطیسی	θ یا MMF	A یا A.T	N.I	نیروی محرکه الکتریکی	EMF	V	-
مقاومت مغناطیسی	R_m	$\frac{A}{Wb}$	$\frac{L_c}{\mu A}$	مقاومت الکتریکی	R_e	$\frac{V}{A} = \Omega$	$\frac{L}{\sigma A}$
ضریب نفوذ مغناطیسی	μ	$\frac{H}{m}$	-	هدایت ویژه الکتریکی	σ	$\frac{\Omega}{m}$	-
چگالی میدان مغناطیسی	B	$\frac{Wb}{m^2}$	$\frac{\Phi}{A}$	چگالی جریان الکتریکی	J	$\frac{A}{m^2}$	$\frac{I}{A}$
شدت میدان مغناطیسی	H	$\frac{A}{m}$	$\frac{MMF}{L}$	شدت میدان الکتریکی	E	$\frac{V}{m}$	$\frac{EMF}{L}$
افت پتانسیل مغناطیسی	V_m	A یا A.T	$R_m \cdot \Phi$	افت پتانسیل الکتریکی	V_e	V	$R_e \cdot I$
KVL مغناطیسی یا KML	$\sum V_{m_i} = 0$	-	-	KVL الکتریکی	$\sum V_{e_i} = 0$	-	-
KCL مغناطیسی یا KFL	$\sum \Phi_i = 0$	-	-	KCL الکتریکی	$\sum I_i = 0$	-	-

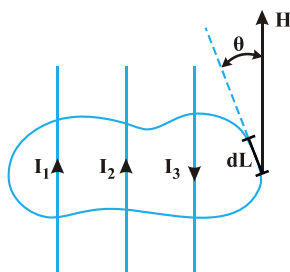
تذکره ۳: به جز تشابهات بیان شده در فوق بین کمیت‌های مغناطیسی و الکتریکی تفاوت‌هایی نیز به قرار زیر موجود است:

- ۱- جهت تداوم جریان در مدارات الکتریکی باید دائماً از منبع ورودی انرژی اخذ نمود زیرا این انرژی به گرما تبدیل می‌شود. اما جهت نگهداری فوران موجود در هسته نیازی به اخذ انرژی بیشتری از منبع نداریم.
- ۲- عایق‌های الکتریکی متنوعی جهت مسدود نمودن مسیر جریان در مدارات الکتریکی وجود داشته در صورتی که عایق مغناطیسی وجود ندارد. حتی در بهترین عایق مغناطیسی شناخته شده یعنی هوا باز هم فوران مغناطیسی عبور می‌کند.

قانون آمپر یا بیوساوار و کاربردهای آن (*)

طبق این قانون انتگرال خطی شدت میدان مغناطیسی بر روی هر مسیر مسدود (Contour) برابر جمع جبری جریان‌هایی است که توسط آن مسیر مسدود احاطه می‌شود. فرم کلی این قانون به صورت زیر است:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = \sum_{k=1}^n I_k \Rightarrow \oint |\vec{H}| \cdot |d\vec{L}| \cdot \cos \theta = \sum_{k=1}^n I_k$$



«شکل ۳. قانون مداری آمپر»

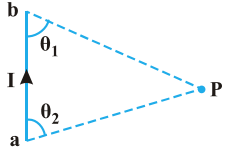
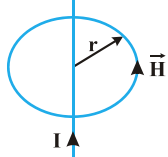
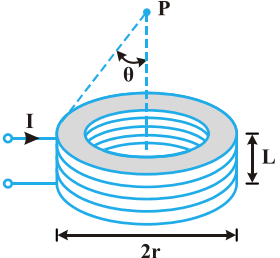
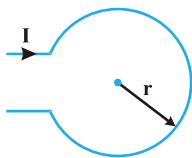
که در این روابط θ زاویه بین بردارهای \vec{H} و $d\vec{L}$ می‌باشد. به عنوان مثال در شکل «۳» می‌توان قانون مداری آمپر را به صورت زیر نوشت:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I_1 + I_2 - I_3$$

اگر تمامی جریان‌ها یکسان و در یک جهت بوده و یا این قانون را برای بازوهای یک کلاف N دوری بنویسیم، داریم:

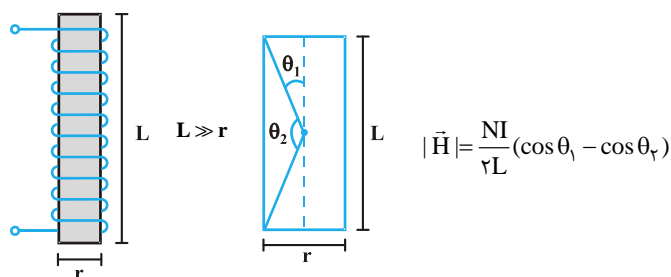
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = N \cdot I$$

در زیر چند حالت خاص را که در ماشین‌های الکتریکی کاربردی‌ترند بررسی می‌کنیم.

<p>۲- سیم راست با طول محدود:</p>  $ \vec{H} = \frac{I}{4\pi r} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$ <p>در این رابطه اگر طول ab به سمت بی‌نهایت برود آنگاه $\theta_1 = \theta_2 = 0$ می‌گردد که در این صورت به نتیجه حالت اول می‌رسیم.</p>	<p>۱- سیم راست با طول نامحدود:</p>  $ \vec{H} = \frac{I}{2\pi r}$
<p>۴- چند حلقه یا بوبین تخت:</p>  $ \vec{H} = \frac{NI}{2r} \sin^3 \theta$ <p>در روی مرکز بوبین $\theta = \frac{\pi}{2}$ بوده لذا $\vec{H} = \frac{NI}{2r}$ است.</p>	<p>۳- تک حلقه (با صرف‌نظر کردن از میدان خارج آن):</p>  $ \vec{H} = \frac{I}{2\pi r}$



۶- سلونوئید:



از روی این رابطه دو حالت حدی زیر قابل استخراج است:

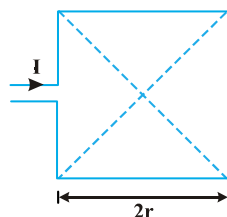
• در نقاط نزدیک به سر و ته سلونوئید:

$$|\vec{H}| = \frac{NI}{2L}$$

• در نقاط روی محور در خارج سلونوئید:

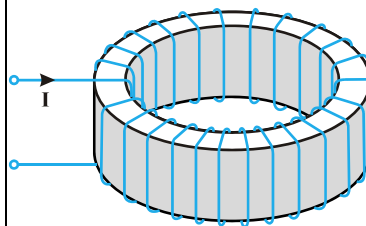
$$|\vec{H}| = \frac{NI}{L}$$

۵- روی مرکز یک حلقه مربع شکل:



$$|\vec{H}| = \frac{\sqrt{2}I}{\pi r}$$

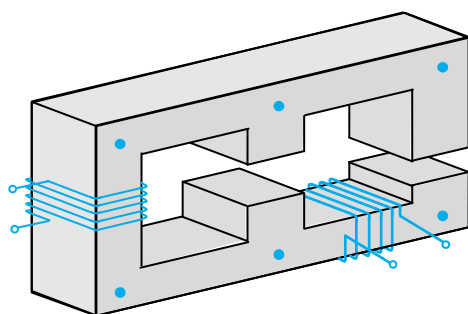
۷- داخل چنبره (یا توروئید):



$$|\vec{H}| = \frac{NI}{L_{av}}, \quad L_{av} = 2\pi r_{av} = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2}$$

r_1 و r_2 شعاع دو دایره چنبره هستند.

مدارهای مغناطیسی



«شکل ۵. یک نمونه مدار مغناطیسی»

مسیر عبور شار را مدار مغناطیسی می‌نامند. از نظر فیزیکی یک یا چند سیم‌پیچ که مشتمل بر جریان الکتریکی بوده و بر زمینه یک ماده مغناطیسی، میدان مغناطیسی ایجاد کند را مدار مغناطیسی می‌نامند به طوری که جهت و دامنه این میدان می‌تواند قابل کنترل باشد. شکل «۵» یک مدار مغناطیسی را نشان می‌دهد، در این شکل اگر جریان سیم‌پیچی DC باشد مدار مغناطیسی DC و چنانچه جریان سیم‌پیچی AC باشد مدار مغناطیسی AC نام دارد. در بسیاری از ماشین‌های واقعی تعدادی از سیم‌بندی‌ها دارای جریان‌های AC و تعدادی دیگر دارای جریان‌های DC هستند.

تعاریف مربوط به مدارهای مغناطیسی

(۱) شاخه مغناطیسی:

بخشی از یک مدار مغناطیسی است که در هر سطح مقطعی از آن شار برابری از آن سطح عبور کند. به عبارتی در هر شاخه مغناطیسی داریم:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

با توجه به این تعریف دیده می‌شود که در شکل «۵» سه شاخه مغناطیسی وجود دارد.

(۲) قطعه شاخه مغناطیسی:

بخشی از یک شاخه مغناطیسی است که در آن جنس ماده و سطح مقطع یکسان است. شکل «۵» دارای پنج قطعه شاخه است.

(۳) گره مغناطیسی:

محل تلاقی بیش از دو شاخه مغناطیسی را گره مغناطیسی گویند. در گره‌های مغناطیسی جمع جبری شارهای سازنده گره در هر لحظه از زمان صفر است (KCL مغناطیسی). در شکل «۵» دو گره مغناطیسی وجود دارد.



۴) مدار مغناطیسی ساده:

مداری است که در آن جنس و سطح مقطع هسته در تمامی مسیرهایی که شار عبور می‌کند یکسان باشد.

۵) مدار مغناطیسی مرکب:

مداری است که در آن جنس هسته و یا سطح مقطع آن در طول مسیر تغییر نماید. (شکل «۵» یک مدار مغناطیسی مرکب است زیرا جنس مسیر تغییر می‌نماید)

۶) مدار مغناطیسی خطی:

مداری است که در آن ضریب نفوذ مغناطیسی قسمت‌های فرومغناطیسی مقدار ثابتی (یا بی‌نهایت) باشد، در نتیجه تغییرات $B-H$ در اینگونه مدارها بصورت یک خط راست است که از مبدأ مختصات می‌گذرد. رابطه $B-H$ در اینگونه مدارات عمده‌تاً بصورت $B = aH$ بوده که در آن a عدد ثابتی است.

۷) مدار مغناطیسی غیر خطی:

مداری است که در آن ضریب نفوذ مغناطیسی قسمت‌های فرومغناطیسی، مقدار متغیری باشد ($\mu_r = f(B-H)$). به عبارتی دیگر تغییرات $B-H$ در آنها به صورت یک خط راست نباشد (یعنی شامل یک منحنی یا چند پاره‌خط باشد).

پیش‌فرض‌های مدارات مغناطیسی

- ۱) میدان‌های مغناطیسی تولیدی سیم پیچ‌ها در قسمت‌های (هسته) مغناطیسی و شکاف‌های هوایی غیر صفر است.
- ۲) سطح مقطع شاخه را فصل مشترک یک صفحه و یک شاخه می‌دانیم به طوری که صفحه بر مسیر میانگین عمود باشد در واقع کلیه نقاطی که واقع بر یک شاخه هستند دارای میدانهای برابر و عمود بر سطح مقطع می‌باشند. با این فرض داریم:

$$\Phi_b = \int_{A_b} \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_{av} A_b$$

افت پتانسیل مغناطیسی در قطعه شاخه (V_m یا θ)

همچنانکه در مدارهای الکتریکی در اثر عبور جریان، مقداری افت ولتاژ در هر شاخه ایجاد می‌شود در مدارهای مغناطیسی نیز در اثر عبور فوران مقداری از نیروی محرکه مغناطیسی تولیدی سیم‌پیچی‌ها در هر قطعه شاخه افت می‌کند که به این افت نیروی محرکه مغناطیسی (یا افت آمپر دور) افت پتانسیل مغناطیسی نیز گفته و با V_m یا θ_m نشان می‌دهند. در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$V_m = \int_{L_{av}} \vec{H} \cdot d\vec{L} = H_{av} L_{av}$$

$$V_m = \frac{L_{av}}{\mu} B_{av} = \frac{L_{av}}{\mu A_b} \Phi_b \Rightarrow V_m = \frac{L_{av}}{\mu A_b} \Phi_b \quad \text{با قرار دادن } H_{av} = \frac{B_{av}}{\mu} \text{ داریم:}$$

$$V_m = R_m \cdot \Phi_b \quad \text{ضریب } \Phi_b \text{ در رابطه اخیر همان رلوکتانس قطعه شاخه است لذا:}$$

دیده می‌شود که این رابطه همان قانون اهم است که در مدارهای الکتریکی نیز صادق است.

نکته ۲: در تست‌ها معمولاً رابطه بین افت پتانسیل مغناطیسی (V_m) و دیگر پارامترها (نظیر فوران) در هر شاخه به صورت یک تابع ریاضی داده

$$\Phi_m = aV_m + bV_m^2 \quad \text{یا} \quad \Phi_m = \frac{aV_m}{bV_m + c} \quad \text{یا} \quad \Phi_m = a + b\sqrt{V_m} \quad \text{می‌شود. به عنوان مثال:}$$

قانون مداری آمپر در مدارهای مغناطیسی

این قانون برای یک حلقه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left. \begin{aligned} \oint_{\text{Loop}} \vec{H} \cdot d\vec{L} &= \oint \vec{J} \cdot d\vec{A} \\ \oint \vec{H} \cdot d\vec{L} &= \sum_{j=1}^n V_{m_j} = \sum_{j=1}^n H_j L_j \\ \oint \vec{J} \cdot d\vec{A} &= \sum_{k=1}^p N_k I_k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\sum_{j=1}^n V_{m_j} = \sum_{j=1}^n H_j L_j = \sum_{k=1}^p N_k I_k}$$

به رابطه فوق اصطلاحاً KVL مغناطیسی یا KML نیز می‌گویند که بسیار شبیه به همان قانون KVL الکتریکی است. در استفاده از این رابطه باید دقت نمود که در هر حلقه اگر جهت فوران سیم‌پیچی‌ها مخالف هم باشند به جای جمع نمودن آمپر دور آن‌ها باید از تفاضل آن‌ها استفاده نمود به عبارت دیگر رابطه بالا جمع جبری است. همین‌طور با توجه به تعریف گره مغناطیسی داریم:

$$\sum_{i=1}^q \Phi_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^q B_i A_i = 0$$

به این رابطه اصطلاحاً KCL مغناطیسی یا KFL نیز می‌گویند که بسیار شبیه به همان قانون KCL الکتریکی است. در این روابط:

n : تعداد کل قطعه شاخه‌های موجود در حلقه	$N_k I_k$: نیروی محرکه مغناطیسی k امین سیم‌بندی موجود در حلقه
p : تعداد کل سیم‌پیچ‌های حامل جریان در حلقه	q : تعداد گره‌های مغناطیسی
L_j : طول متوسط قطعه شاخه j ام	Φ_i : فوران شاخه i ام
V_{mj} : افت پتانسیل مغناطیسی در قطعه شاخه j ام	A_i : سطح مقطع مؤثر شاخه i ام
H_j : شدت میدان مغناطیسی قطعه شاخه j ام	B_i : چگالی شار مغناطیسی شاخه i ام

روش‌های تحلیل مدارهای مغناطیسی

به منظور تحلیل مدارات مغناطیسی دو روش موجود است: (۱) روش مغناطیسی (کاربرد قانون آمپر) (۲) روش الکتریکی (استفاده از مدار مشابه الکتریکی).

۱. روش مغناطیسی در تحلیل مدارات مغناطیسی

از این روش می‌توان در تحلیل کلیه مدارات مغناطیسی خطی و غیرخطی استفاده نمود. مراحل تحلیل در این روش عبارتند از:

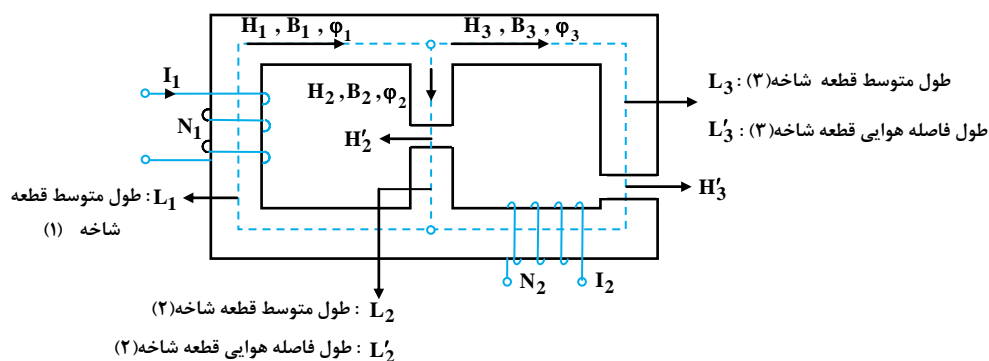
الف) تعیین شاخه‌ها و جهت شار در آنها (جهت شار اختیاری است اما بهتر است از روی قانون دست راست بدست آید).

ب) مشخص کردن قطعه شاخه‌های هر یک از شاخه‌ها و تعیین B و H در آنها.

ج) در بعضی از حلقه‌ها قانون KML را به کار برده و در تمامی گره‌ها به جز یک گره قانون KFL را به کار می‌بریم.

به عنوان مثال مدار مغناطیسی شکل «۴» را در نظر بگیرید. این مدار دارای سه شاخه مغناطیسی، پنج قطعه شاخه مغناطیسی و دو گره مغناطیسی و دو حلقه مجزای مغناطیسی است که در هر حلقه نیز یک منبع تولید نیروی محرکه مغناطیسی وجود دارد.

شاخه (۱) تماماً شامل ماده مغناطیسی بوده اما شاخه‌های (۲) و (۳) دارای فواصل هوایی نیز هستند. لذا شاخه (۱) خود یک قطعه شاخه بوده اما شاخه‌های (۲) و (۳) هر کدام شامل دو قطعه شاخه هستند یکی از قطعه شاخه‌ها شامل ماده مغناطیسی و دیگری شامل فاصله هوایی است. به منظور تحلیل این مدار موارد سه گانه فوق‌الذکر را یک به یک اجرا می‌کنیم لذا در مرحله اول شاخه‌ها و قطعه شاخه‌ها را به صورت شکل «۶» مشخص می‌نماییم.



«شکل ۶. یک نمونه مدار مغناطیسی»

(۱) نوشتن قانون KML در حلقه‌ها:

$$\text{الف) } V_{m_1} + V_{m_2} + V'_{m_2} = N_1 I_1$$

$$\text{ب) } V_{m_3} + V'_{m_3} - V'_{m_2} - V_{m_2} = N_2 I_2$$

 V_{m_1} : افت پتانسیل مغناطیسی در قسمت‌های مغناطیسی شاخه (۱) یعنی افت پتانسیل مغناطیسی در قطعه شاخه (۱)

 V_{m_2} : افت پتانسیل مغناطیسی در قسمت‌های مغناطیسی شاخه (۲) یعنی افت پتانسیل مغناطیسی در قطعه شاخه (۲)

 V'_{m_2} : افت پتانسیل مغناطیسی در فاصله هوایی شاخه (۲) یعنی افت پتانسیل مغناطیسی در قطعه شاخه (۲')

 V_{m_3} : افت پتانسیل مغناطیسی در قسمت‌های مغناطیسی شاخه (۳) یعنی افت پتانسیل مغناطیسی در قطعه شاخه (۳)

 V'_{m_3} : افت پتانسیل مغناطیسی در فاصله هوایی شاخه (۳) یعنی افت پتانسیل مغناطیسی در قطعه شاخه (۳')

 $N_1 I_1$: کل آمپر دور تولیدی در حلقه سمت چپ
 $N_2 I_2$: کل آمپر دور تولیدی در حلقه سمت راست

در نوشتن KML های مغناطیسی فوق باید دقت نمود که به عنوان یک قرارداد، افت پتانسیل‌های در جهت شار با علامت مثبت و در خلاف جهت شار با علامت منفی ظاهر می‌شوند.

(۲) نوشتن قانون KFL مغناطیسی در گره‌ها:

$$-\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0 \quad \text{در گره فوقانی}$$

در نوشتن KFL مغناطیسی مانند KCL مدارهای الکتریکی به عنوان یک قرارداد، فوران‌های وارد شونده به گره با علامت مثبت و فوران‌های خارج شونده از گره با علامت منفی ظاهر می‌شوند.

(۳) حال باید در هر شاخه با توجه به جنس آن شاخه رابطه بین B و H را تشکیل داد ($B = f(H)$) لذا داریم:

$$B_1 = \mu_0 \mu_{r_1} H_1$$

$$B_2 = \mu_0 \mu_{r_2} H_2$$

$$B'_2 = \mu_0 \mu_{r'_2} H'_2 = \mu_0 H'_2$$

$$B_3 = \mu_0 \mu_{r_3} H_3$$

$$B'_3 = \mu_0 \mu_{r'_3} H'_3 = \mu_0 H'_3$$

چنانچه جنس قطعه شاخه از هوا باشد μ_r در آن برابر یک بوده پس $B'_1 = \mu_0 H'_1$ لحاظ می‌شود اما اگر قطعه شاخه از مواد فرومغناطیس باشد به علت غیرخطی بودن مشخصه $B-H$ (شکل ۱-ب) باید یا از تقریب خطی تکه‌ای استفاده نمود و یا ماده فرومغناطیسی را توسط یک تابع هموگرافیک

$$\text{(مانند)} \quad (B_i = \frac{aH_i}{bH_i + c}) \quad \text{مدل‌سازی نمود.}$$

با توجه به تعریف یک شاخه مغناطیسی که در آن شار در تمامی مقاطع هسته ثابت است می‌توان بین H_i و H'_i یک رابطه به صورت زیر برقرار نمود:

$$H_i = \frac{H'_i}{\mu_{r_i}} \Rightarrow H'_i = \mu_{r_i} H_i \quad \text{(این رابطه در صورتی صادق است که پراکندگی شار نداشته باشیم)}$$

با اعمال این توضیحات به معادلات بالا در نهایت یک دستگاه سه معادله و سه مجهول به صورت زیر ایجاد می‌شود:

$$\begin{cases} V_{m_1} + V_{m_2} + V'_{m_2} = N_1 I_1 \\ V_{m_3} + V'_{m_3} - V'_{m_2} - V_{m_2} = N_2 I_2 \\ -\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0, \quad \phi_i = B_{av_i} A_i = \mu_i H_{av_i} A_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 L_1 + H_2 L_2 + H'_2 L'_2 = N_1 I_1 \\ H_3 L_3 + H'_3 L'_3 - H'_2 L'_2 - H_2 L_2 = N_2 I_2 \\ -\mu_0 \mu_{r_1} H_1 A_1 + \mu_0 \mu_{r_2} H_2 A_2 + \mu_0 \mu_{r_3} H_3 A_3 = 0 \end{cases}$$

با اعمال رابطه $H'_i = \mu_{r_i} H_i$ به معادلات فوق داریم:

$$\begin{cases} H_1 L_1 + H_2 L_2 + H_2 \mu_{r_2} L'_2 = N_1 I_1 \\ H_3 L_3 + H_3 \mu_{r_3} L'_3 - H_2 \mu_{r_2} L'_2 - H_2 L_2 = N_2 I_2 \\ -\mu_0 \mu_{r_1} H_1 A_1 + \mu_0 \mu_{r_2} H_2 A_2 + \mu_0 \mu_{r_3} H_3 A_3 = 0 \end{cases}$$

با حل دستگاه سه معادله و سه مجهول فوق می‌توان مقادیر H_1 و H_2 و H_3 را یافته و از روی آنها سایر مجهولات مورد نیاز را محاسبه نمود.